XB-003

مکانیکِ کلاسیک

محمد خرمی

XB-003 (2022/07/07)

مکانیکِ کلاسیک

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

کاربرد، چاپ، و انتشارِ این متن برا یِ منظورها یِ غیر-ِ-تجاری آزاد است، به شرط ی که هیچ تغییر ی در آن (از جمله در متن، سبک، و رسم‌الخط) داده نشود. برا یِ هر نُع استفاده یِ دیگر ی، اجازه یِ نویسنده لازم است.

فهرست

فهرست ۳

0 مقدمه ۱۱

دفاع ۱۱

0 نماد-گذاری ۱۴

1 نام-گذاری ۲۰

1 مکانیک ۲۰

2 سیستم ِ دینامیکی ۲۱

3 مکانیک ِ ناکوانتمی، مکانیک ِ کوانتمی ۲۲

4 زمان، فضا، فضا-زمان ۲۳

5 مکانیک ِ نانسبیتی، مکانیک ِ نسبیتی ۲۵

6 چارچوب ۲۹

2 سینماتیک ِ ذرات ۳۱

7 مکان، سرعت، شتاب ۳۱
8 سرعت و چارچوب ۳۲
9 مشتق-گیری از بردارها ۳۵
10 شتاب و چارچوب ۳۸
11 ژُندزیک، شتاب ِ صفر ۴۱
12 پایه یِ همراه ِ ذره ۴۴
13 قید ۴۶
14 ضرب ِ درونی ۴۹
15 طول و ژُندزیک ۵۷
16 کنج ِ فْرُنه ۶۴
3 دینامیک ِ ذرات ۷۲
17 حالت ِ یک ذره و تحول ِ آن ۷۲
18 ذره یِ آزاد (بی-برهمکنش) ۷۳
19 شتاب ِ صفر ۷۴
20 دینامیک ِ ذره یِ آزاد ۸۲
21 محیط ۸۲
22 جرم ۸۴
23 نیرو ۸۶
24 فزونوری یِ نیرو ۸۷
25 خُد-نیرو، عکس‌العمل ِ نیرو، فزونوری ِ جرم ۸۸
26 وقت ی ذرات نزدیک ِ هم نیستند ۹۱
27 قانونها یِ نیوتُن ۹۴

28 زمان، نیرو، و دستگاهها یِ چند-ذرئی ۹۶
29 چارچوب ِ لخت یا چارچوبها یِ لخت ۱۰۱
30 تقارنها یِ حرکت ِ ذره یِ آزاد ۱۱۴

4 فرمول-بندی یِ لَگرانژ ۱۲۳

31 انرژی یِ جنبشی ۱۲۳
32 کار ۱۲۸
33 نیرو یِ پایستار ۱۳۰
34 لَگرانژی ۱۳۲
35 تکانه ۱۳۷
36 لَگرانژیها یِ همئرز ۱۴۰
37 قید ِ برابری ۱۴۶
38 قید- ِ-برابریها یِ همئرز ۱۵۰
39 قید- ِ-برابری یِ سرعت-آفین ۱۵۳
40 قید ِ هُلُنُم ۱۵۵
41 قید- ِ-برابری یِ انتگرال-پذیر ۱۵۸
42 کار ِ مجازی ۱۶۲

5 کنش ۱۶۶

43 شاخص ِ پیوسته ۱۶۶
44 مشتق-گیری از تابع- ِ-برداری ۱۷۲
45 تابع- ِ-برداری یِ مُضعی ۱۷۴
46 لَگرانژی و کنش ۱۸۹

47 کنشها یِ همئرز ۱۹۱
48 قید- ِ-برابری و کنش ۱۹۵
49 زمان به عنوان ِ یک متغیر ۱۹۷
6 تقارن ۲۰۶
50 تقارن و گروه ۲۰۶
51 تبدیل- ِ-مسیر ۲۰۷
52 تقارن ِ معادله-یِ-حرکت ۲۱۰
53 تقارن ِ کنش ۲۱۳
54 خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار ۲۲۸
55 تقارن ِ نُتِری ۲۳۳
56 تبدیل ِ سراسری، قضیه یِ اول ِ نُتِر ۲۴۱
57 تبدیل ِ مُضعی (پیمانِئی)، قضیه یِ دوم ِ نُتِر ۲۴۷
58 عکس ِ قضیه یِ اول ِ نُتِر ۲۵۹
59 عکس ِ قضیه یِ دوم ِ نُتِر ۲۶۹
7 فرمول-بندی یِ هَمیلتِن ۲۷۱
60 تبدیل ِ لُژاندر ۲۷۱
61 هندسه یِ تبدیل ِ لُژاندر ۲۸۶
62 هَمیلتِنی ۲۸۹
63 فضا یِ فاز و معادلات ِ حرکت ۲۹۱
64 کنش در فضا یِ فاز ۲۹۳
65 فضا یِ فاز و فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته ۲۹۷

66 کروشه یِ پُؤَسُن ۳۰۳
67 ویژگیها یِ کروشه یِ پُؤَسُن ۳۰۶
68 فضا-زمان ِ فاز ۳۰۹
69 مختصات ِ کانُنیک ۳۲۵
70 دُ-فرم ِ همتافته ۳۴۴
71 دُ-فرم ِ همتافته و مختصات ِ کانُنیک ۳۵۴
72 دُ-فرم ِ همتافته و مختصات ِ دلبخاه ۳۶۷
73 قضیه یِ دَربو، حالت ِ خاص ۳۸۱
74 قضیه یِ دَربو، حالت ِ کلی ۴۰۱

8 تقارن در فرمول-بندی یِ هَمیلتِن ۴۱۱

75 ناوردایی در فرمول-بندی یِ هَمیلتِن ۴۱۱
76 تقارن ِ ساختار ِ پُؤَسُن ۴۱۲
77 تقارن ِ معادله-یِ-حرکت ۴۲۳
78 تقارن ِ کنش ۴۳۲
79 تابعی یِ مولد ۴۳۴
80 مختصات ِ کانُنیک از نیم-مختصات ۴۵۲
81 خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک ِ هموار ۴۵۷
82 قضیه یِ لیوویل ۴۷۱
83 تقارن و ثابت- ِ-حرکت ۵۰۰

9 انتگرال-پذیری ۵۰۶

84 هَمیلتِنی یِ مستقل-از-مکان ۵۰۶

85 سیستم ِ انتگرال-پذیر ۵۱۲
86 کاهش از فضا-زمان- ِ-فاز به فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته ۵۲۷
87 هَمیلتِنی یِ مستقل از زمان، و فضا-یِ-فاز ِ دُ-بُعدی ۵۴۷
88 اَبَرانتگرال-پذیری ۵۵۵

10 فرمول-بندی یِ هَمیلتِن-یاکُبی ۵۵۸

89 هَمیلتِنی یِ صفر ۵۵۸
90 معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی ۵۵۹
91 هَمیلتِنی یِ مستقل از بعض ی مختصات ۵۶۶
92 هَمیلتِن-یاکُبی بر فضا-زمان- ِ-فاز ۵۷۴
93 جدا-کردن ِ متغیر بر اساس ِ ثابت- ِ-حرکت ۵۷۹
94 هَمیلتِن-یاکُبی و انتگرال-پذیری ۵۹۴

11 متغیرها یِ کنش و زاویه ۶۰۹

95 مدار ۶۰۹
96 شبکه ۶۱۶
97 استوانه ۶۴۴
98 استوانه یِ فاز ۶۴۹
99 چنبره یِ فاز ۶۷۰
100 کنش- ُ-زاویه و انتگرال-پذیری ۶۸۵
101 کنش- ُ-زاویه و اَبَرانتگرال-پذیری ۶۹۳

12 اختلال ِ کائُنیک، وابسته-به-زمان ۷۱۱

102 جواب ِ معادله-یِ-حرکت، و مختصات ِ کائُنیک ۷۱۱

103 هَمیلتِنی یِ مختل-شده ۷۱۶
104 اختلال ِ مستقیم ۷۱۷
105 اختلال با تغییر- ِ-متغیر ۷۲۴
106 اختلال برا یِ سیستمها یِ انتگرال-پذیر ۷۲۸
13 اختلال ِ کانُنیک، مستقل-از-زمان ۷۳۴
107 اختلال ِ مختصات ِ کانُنیک ۷۳۴
108 اختلال ِ متغیرها یِ کنش- ُ-زاویه ۷۴۲
109 متغیرها یِ کنش- ُ-زاویه برا یِ سیستم ِ مختل-شده ۷۴۵
110 بسامدها یِ مختل-شده، و اختلال ِ وابسته-به-زمان ۷۵۶
14 ناورداها یِ ایستاواری ۷۶۵
111 معادله-یِ-تحول، و انتقال- ِ-زمان ۷۶۵
112 بستگی به زمان، با پارامتر ۷۶۹
113 پارامتر ِ کند-تغییر ۷۷۳
114 هَمیلتِنی یِ وابسته-به-پارامتر، و ثابت- ِ-حرکت ۷۷۵
115 هَمیلتِنی یِ وابسته-به-پارامتر، و انتگرال-پذیری ۷۷۷
116 هَمیلتِنی با پارامتر ِ کند-تغییر، و انتگرال-پذیری ۷۸۲
117 هَمیلتِنی با پارامتر ِ کند-تغییر، و متغیرها یِ کنش- ُ-زاویه ۷۸۹
118 هَمیلتِنی با پارامتر ِ کند-تغییر، و ناوردایی یِ متغیر- ِ-کنش ۷۹۶
119 هَمیلتِنی با پارامتر ِ کند-تغییر، و تحول ِ متغیر- ِ-زاویه ۸۰۰
15 پیوست ۸۱۱
120 چند مرجع ۸۱۱

121 اسمها یِ خاص ۸۱۳

122 واژه-نامه یِ فارسی به انگیسی ۸۱۵

0

مقدمه

دفاع

این کتاب برا یِ فیزیک-پیشِها یا آنها یی که قرار است فیزیک-پیشه شوند (یعنی دانشجوها یِ فیزیک) نوشته شده، هر چند از نظر ِ من اشکال ی ندارد که آدمها یِ دیگر ی (از جمله ریاضی-پیشِها) هم آن را بخانند. مبنا یِ نوشتن ِ این کتاب اینها ست.

a برا یِ آموختن ِ فیزیک، و برا یِ به-کار-بردن ِ فیزیک، ریاضیات لازم است. به نظر میرسد این فکر، دست- ِ-کم از زمان ِ نیوتُن به بعد برا یِ بعض یها جا افتاده است.

b بعض یها، از جمله من، دوست دارند بگویند فیزیک به دُ بخش تقسیم میشود: مکانیک، و بقیه یِ فیزیک. البته این تقسیم-بندی دلبخاهی مینماید (هست): برا یِ هر مجموعه یِ $\mathbb{S}$، متناظر با هر زیرمجموعه یِ دلبخاه ِ $\mathbb{S}_0$ از $\mathbb{S}$، مجموعه یِ $\mathbb{S}$ اجتماع ِ دُ مجموعه یِ جدا-ازهم ِ $\mathbb{S}_0$ و $(\mathbb{S}\backslash\mathbb{S}_0)$ است:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_0 \cup (\mathbb{S}\backslash\mathbb{S}_0).$$

مثلَن مجموعه یِ جانوران اجتماع ِ دُ مجموعه است (که با هم اشتراک ندارند): مجموعه یِ

کلاغها و مجموعه یِ جانوران ی که کلاغ نیستند.

منظور ِ بعض یها از آن بعضیها (از این تقسیم-بندی) این است که مکانیک یک فرمول-بندی یِ کلی برا یِ (رفتار با) همه یِ سیستمها یِ فیزیک است، و بقیه-یِ-فیزیک یعنی کاربرد ِ آن فرمول-بندی برا یِ سیستمها یی خاص.

c بعض یها، از جمله من، فیزیک را یک جور ِ دیگر هم به دُ بخش تقسیم میکنند: کلاسیک (ناکوانتمی)، و کوانتمی. که البته بعض یها از آن بعضیها، بعد هم میگویند اولی تقریب ی (جاها-یی-مفید) از دومی ست.

d بعض یها (از جمله من) تصور میکنند برا یِ آموختن ِ هر چیز ِ درسی یی خوب است (یا لازم است) پیشنیازها یِ آن چیز را دانست.

e پیش-نیاز ِ (بقیه یِ) فیزیک مکانیک است؟ پیش-نیاز ِ فیزیک ِ کوانتمی فیزیک ِ کلاسیک است؟

اگر بله (به هر-دُ)، پس پیش-نیاز ِ فیزیک مکانیک ِ کلاسیک است.

f بعض یها (از جمله من) تصور میکنند زبان ِ جبر- ِ-خطی و هندسه کار با فیزیک (به طُر ِ خاص مکانیک، خاصتر مکانیک ِ کلاسیک) را سادِتر میکند. و البته کسان ی هم هستند که فکر میکنند این زبان مزاحم است و متن را نفهمیدنی میکند. بعض یها (از جمله من) اصولَن از این زبان خُش ِشان میئاید (ساده-کردن ِ کار بهانه است؟). و البته بعض یها هم از آن متنفر َند. از این مُقعیت که اینجا من َم که دارم مینویسم استفاده میکنم و یاداوری میکنم که حالا آنها یی که بردارها را در فیزیک به کار نمیبرند زیاد نیستند.

البته این فروکاست-گرایی برا یِ خیل یها مطلوب نیست. (اینجا منظور از فروکاست-گرایی این است که آموختن ِ هر چیز بر اساس ِ پیشنیاز ِ آن باشد، و مثلَن نسبیت- ِ-عام به هندسه-یِ-خمینه تبدیل نشود.)

g این کتاب همه یِ مکانیک ِ کلاسیک را نمیپوشانَد. صرف- ِ-نظر از این که لابد هیچ کتاب ی همه یِ مکانیک ِ کلاسیک را نمیپوشانَد، این کتاب به مکانیک ِ میدانها نمیپردازد.

h از این هم بیشتر (کمتر؟): این کتاب به هیچ سیستم ِ خاص ی، یا هیچ گروه ِ خاص ی از سیستمها نمیپردازد. حتا نوسان- ِ-کوچک هم در این کتاب بررسی نشده.

i پیشنیاز ِ این کتاب، حسابان (و کم ی هندسه) و البته جبر- ِ-خطی ست. جز این، خوب است خاننده معادلات ِ دیفرانسیل بداند، و البته آنالیز ِ ریاضی هم کمک میکند.

j این کتاب هم تمرین ندارد. تقریبَن مثال هم ندارد. شکل هم ندارد. (دارد. دُ تا شکل هست. که معلوم نیست چه کمک ی میکنند.) استدلال (بهانه) نمیئاورم. اگر به علاقه-به-لَگرانژ یا چیزها یی دیگر فکر میکنید، از نظر ِ من اشکال ی ندارد.

k شکل ِ این کتاب، بر خلاف ِ کتاب ِ جبر- ِ-خطی شکل ِ «قضیه-اثبات» نیست. نَ این که چیز ی اثبات نشده. سعی شده ادعاها اثبات شود. اما دقت ِ اثباتها، اینجا کمتر از کتاب ِ جبر- ِ-خطی یا حتا هندسه است.

l این کتاب در ادامه یِ کتابها یِ جبر- ِ-خطی و هندسه نوشته شده. و جبر- ِ-خطی و هندسه هم در وِبگاه ِ من در هم ین پوشه ای یَند که این (مکانیک ِ کلاسیک) است.

از هر پیشنهاد ی استقبال میشود (نَ این که هر پیشنهاد ی پذیرفته میشود).

محمد خرمی 2022/07/07

0 نماد-گذاری

همه یِ نمادها یی که در این کتاب به کار رفته استاندارد نیستند. خاندن ِ این بخش راه ِ مناسب ی برا یِ آموختن ِ مفهومها یِ متناظر با نمادها یِ معرفی-شده نیست. همه جا قرارداد- ِ-جمع ِ اَینشْتَین به کار رفته، یعنی

$$A^i{}_i = \sum_i A^i{}_i$$

برا یِ هر	$\forall$
وجود دارد	$\exists$
$x \in \mathbb{S}$ ← x عضو ِ $\mathbb{S}$ است.	$\in$
$\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$ ← اجتماع ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_1$ با مجموعه یِ $\mathbb{S}_2$	$\cup$
$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ ← اشتراک ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_1$ با مجموعه یِ $\mathbb{S}_2$	$\cap$
$\mathbb{S}_1 \backslash \mathbb{S}_2$ ← اشتراک ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_1$ با متمم ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_2$: مجموعه یِ همه یِ اعضا یِ $\mathbb{S}_1$ که عضو ِ $\mathbb{S}_2$ نیستند	$\backslash$
$\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$ ← حاصلِضرب ِ دِکَرتی یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_1$ در مجموعه یِ $\mathbb{S}_2$	$\times$
$\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_2$ ← $\mathbb{S}_1$ زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}_2$ است.	$\subseteq$
$\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_2$ ← $\mathbb{S}_1$ زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}_2$ است و با $\mathbb{S}_2$ برابر نیست.	$\subset$
$\mathbb{S}_1 \supseteq \mathbb{S}_2$ ← $\mathbb{S}_1$ شامل ِ $\mathbb{S}_2$ است.	$\subseteq$
$\mathbb{S}_1 \supset \mathbb{S}_2$ ← $\mathbb{S}_1$ شامل ِ $\mathbb{S}_2$ است و با $\mathbb{S}_2$ برابر نیست.	$\subset$
چنین است که	$\ni$
چنان که	$:$
چنان که	$\mid$
$\{A_{i,j,k} \mid i \in \mathbb{S}, j\}$ ← مجموعه یِ همه یِ $A_{i,j,k}$ ها با k یِ ثابت و (i,j) ها یی که $i \in \mathbb{S}$ و j در یک مجموعه یِ معلوم َند	$\{ \mid \}$
$\mathrm{res}(A;\mathbb{S})$ ← تحدید ِ A به $\mathbb{S}$	res

دامنه یِ	dom
تصویر ِ	img
بُعد ِ	dim
پهنه یِ	span
هسته یِ	ker
$\mathbf{1}_{\mathbb{S}}$ ← همانی یِ $\mathbb{S}$	$\mathbf{1}$
A^{-1} ← وارون ِ A	$\cdot^{-1}$
A^{*} ← دُگان ِ A	$*$
A^{*} ← پسار ِ A	
A_{*} ← پیشران ِ A	
A^{t} ← ترانهاده یِ A	t
$A(x)$ ← مقدار ِ تابع ِ A به ازا یِ x	$(\cdot)$
$A(\mathbb{S})$ ← تصویر ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ تحت ِ تابع ِ A، یعنی تصویر ِ $\mathsf{res}(A;\mathbb{S})$	
$(A \circ B)(x) = A[B(x)]$	
$(A, B)(x) = [A(x), B(x)]$	
$\delta_{i\,j}$ ← دلتا یِ کْرُنِکِر ِ i و j، برابر با یک (صفر) اگر $j = i$ $(j \neq i)$	δ
δ_i^j ← دلتا یِ کْرُنِکِر ِ i و j، برابر با یک (صفر) اگر $j = i$ $(j \neq i)$	
$\delta_e\, e^i = e_i$	
مجموعه یِ تهی	$\varnothing$
مجموعه یِ عددها یِ حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه یِ عددها یِ صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموعه یِ عددها یِ گویا	$\mathbb{Q}$
دایره	$\mathbb{K}$
$\mathsf{nei}_r(x)$ ← همسایگی یِ x به شعاع ِ r، یعنی $\{y \mid \lvert y-x\rvert < r\}$	nei
$\mathsf{oei}_r(x)$ ← همسایگی یِ بی-مرکز ِ x به شعاع ِ r، یعنی $\{y \mid 0 < \lvert y-x\rvert < r\}$	nei

$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

$[\![a,b]\!] = [\min(a,b), \max(a,b)]$

car — $\mathsf{car}(\mathbb{S})$ ← تعداد ِ اعضا یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$

cub — $\mathsf{cub}_\ell(u)$ ← مکعب ِ به مبدئ ِ u و به ضلع ِ ℓ

det — دترمینان ِ

diag — $\mathsf{diag}(\lambda)$ ← ماتریس ِ قطری یی که اعضا یِ رو-یِ-قطر َ ش مئلفِها یِ λ اند

o — $\dfrac{o(s)}{s}$ به صفر میگراید

$\mathbf{D}$ — مشتق-گیری

$\mathbf{D}_{(i)}$ ← مشتق-گیری نسبت به مئلفه یِ i

$\overset{j}{\mathbf{D}}_{(i)}$ ← مشتق-گیری نسبت به مئلفه یِ i، وقت ی شماره-گذاری یِ مئلفِها از j شروع میشود

$(\mathbf{D}_u\, A)$ ← مشتق ِ A در سو یِ u (مشتق ِ سویی یِ A با u)

$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_{e_i}$

$\mathbf{D}^i = g^{j\,i}\,\mathbf{D}_j$

$\mathbf{D}^{-1}$ — پادمشتق (انتگرال ِ نامعین)

$(\mathbf{D}^{-1}\, A)(t) = \int (\mathrm{d}\, t)\, A(t)$

F — $\mathsf{F}(\mathbb{S};\mathbb{D})$ ← مجموعه یِ تابعها یِ از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{S}$

$\mathbf{b}$ — مرز ِ

sgn — علامت ِ

$\boldsymbol{\pi}$ — $\boldsymbol{\pi}(z)$ ← مبنا یِ z

$\oplus$ — حاصل-ِ-جمع ِ مستقیم

$\otimes$ — حاصل-ِ-ضرب ِ تانسری

T — $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ ← فضا یِ مماس بر $\mathbb{M}$ در x

$\mathrm{T}\mathbb{M}$ ← فضا یِ مماس بر $\mathbb{M}$

$\mathrm{T}^*_x\mathbb{M}$ ← فضا یِ هممماس بر $\mathbb{M}$ در x

$\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ ← فضا یِ هممماس بر $\mathbb{M}$

$\mathsf{fl}(t\,u)$ ← شارش ِ میدان ِ برداری یِ u به اندازه یِ t — fl

$\mathbf{L}_u\,A$ ← مشتق ِ لی یِ A با u — $\mathbf{L}$

$[A,B] = A\,B - B\,A$

جا-به-جاگر — $\diamond$

$\mathbf{i}_A\,\sigma$ ← کاهش ِ درونی یِ σ با A — $\mathbf{i}$

$\underset{\cdot}{g}\,u = g(\boldsymbol{\cdot}, u)$

ضرب ِ برونی — $\wedge$

مشتق ِ برونی — $\mathbf{d}$

$\mathbf{d}_{(i)}$ ← مشتق ِ برونی نسبت به مئلفه یِ i

$\overset{j}{\mathbf{d}}_{(i)}$ ← مشتق ِ برونی نسبت به مئلفه یِ i، وقت ی شماره-گذاری یِ مئلفِها از j شروع میشود

$\overline{\varrho_\varepsilon\,\Omega}$ ← ε-چگالی یِ میانگین ِ Ω — ϱ

$\overline{\varrho\,\Omega}$ ← چگالی یِ میانگین ِ Ω

$\varrho_\varepsilon\,\Omega$ ← ε-چگالی یِ Ω

$\varrho\,\Omega$ ← چگالی یِ Ω

هموستار ِ خمینه — Γ

تانسر ِ پیچش — T

دیورژانس ِ — $\mathbf{div}$

$u \cdot v = g(u,v)$

$\|u\|^2 = u \cdot u$

$|u| = \sqrt{|u \cdot u|}$

طول- ِ-جبری — al

(n)-طول- ِ-جبری — $\mathsf{al}^{(n)}$

دی-طول- ِ-جبری — Al

بر-لاک برابر است — $\overset{\text{ns}}{=}$

$B \overset{\text{ns}}{=} A$ ← وقت ی معادله-یِ-حرکت برقرار است (بر-لاک)، B با A برابر است.

مشتق ِ کامل نسبت به τ	$'$
	$\acute{A} = \frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,\tau}$
مشتق ِ گسترش-یافته	$\text{є}\partial$
	$\text{є}\partial_i\,A = \frac{\partial\,A}{\partial\,q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,A}{\partial\,\dot{q}^i}\right)$
لَگرانژی یِ فضا-زمانی	L_τ
کنش ِ فضا-زمانی	S_τ
هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی	H_τ
کنش ِ فضا-یِ-فاز	S_ϕ
لَگرانژی یِ فضا-یِ-فاز	L_ϕ
کنش ِ فضا-زمان- ِ-فاز	$S_{\phi\,\tau}$
لَگرانژی یِ فضا-زمان- ِ-فاز	$L_{\phi\,\tau}$
$\underset{\sim}{A} \leftarrow A$ که مئلفه (مئلفِها) یِ زمانی هم به آن افزوده شده	$\underset{\sim}{\cdot}$
$\underset{\smile}{A} \leftarrow A$ که مئلفه (مئلفِها) یِ زمانی و تکانه-یِ-متناظر-با-زمانی هم به آن افزوده شده	$\underset{\smile}{\cdot}$
$\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,A \leftarrow$ مبدَل- ِ-لُژاندر ِ A، که دامنه یِ A فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است.	Le
$\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}} \leftarrow$ وارونی-یِ-فضا با دامنه یِ $\mathbb{V}$	Pa
	$\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}}\,u = -u$
$\{A, B\} \leftarrow$ کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ A با B	$\{\cdot,\cdot\}$
$\{A, B\}_\tau \leftarrow$ کروشه-یِ-پُؤَسُن- ِ-گسترش-یافته یِ A با B	$\{\cdot,\cdot\}_\tau$
$A_{\mid\mathbb{S}} \leftarrow$ تحدید ِ A به زیرخمینه یِ $\mathbb{S}$	$\cdot\mid\cdot$
$A_{\mid B} \leftarrow$ تحدید ِ A به زیرخمینه یِ B-ثابت	
$[\mathsf{pe}(u)](\mathbb{S}) \leftarrow$ دُره یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ با u	pe
کف	floor
مانده-از-کف	remf
کوچکترین مضرب ِ مشترک	lcm
بزرگترین شمارنده یِ مشترک	gcd

حاصل-ِ-ضرب-ِ-درونی (برا یِ دُ تابعی)	ip
میانگین	mn
$\Theta_n(\vartheta) = \exp(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\vartheta)$	
T_a ← انتقال-ِ-زمان به اندازه یِ a	T

شاخصها یِ لاتین با حرفها یِ میانی فقط مقدارها یِ فضای-یِ-پیکربندی را میگیرند: از 1 تا بُعد ِ فضا-یِ-پیکربندی

شاخصها یِ لاتین با حرفها یِ ابتدایی فقط مقدارها یِ فضای-یِ-فاز را میگیرند: از 1 تا بُعد ِ فضا-یِ-فاز

شاخصها یِ یونانی مقدارها یِ زمانی (صفر) یا فضایی میگیرند: از 0 تا بُعد ِ فضا-یِ-پیکربندی، بُعد ِ فضا-یِ-فاز

شاخصها یِ ماشین-تحریری یِ لاتین با حرفها یِ ابتدایی همه یِ مقدارها یِ فضا-زمان-ِ-فاز را میگیرند: از 0 تا بُعد ِ فضا-یِ-فاز-ِ-گسترش-یافته.

1

نام-گذاری

1 مکانیک

من تعریف ِ جهان-شمول ی برا یِ مکانیک سراغ ندارم. به یک معنی یِ بسیار گسترده، مکانیک دستگاه ی عام است برا یِ فرمول-بندی یِ هر مسئله ای در فیزیک، یا حتا کلیتر، در علوم ِ فیزیکی یا طبیعی (اگر منظور از فیزیک نَ همه یِ علوم ِ طبیعی بل که بخش ی خاص از آن باشد). به این ترتیب، مکانیک آن چیز ِ عام ی میشود که هم برا یِ تُصیف ِ سیستم ی به سادگی یِ یک ذره (جسم ِ نقطِئی) یِ بی-بر-هم-کنش به کار میرود، و هم برا یِ تُصیف ِ سیستم ی به پیچیدگی یِ یک مُجود ِ زنده. آن چه بین ِ این دُ-سیستم ِ بسیار-متفاوت-با-هم مشترک است، این است که هر-دُ سیستمها یی دینامیکی یَند. به این ترتیب، شاید بشود گفت مکانیک با این ادعا شروع میشود:

همه یِ سیستمها دینامیکی یَند: هر سیستم ی با یک حالت و یک تحول مشخص میشود.

کاربرد ِ عبارت ِ مکانیک ِ کلاسیک هم جهان-شمول نیست. منظور از مکانیک ِ کلاسیک، به یک معنی یِ گسترده مکانیک ِ ناکوانتمی ست. به یک معنی یِ خاصتر، مکانیک ِ کلاسیک یعنی مکانیک ِ ناکوانتمی یِ نانسبیتی. یک تعریف ِ از این هم خاصتر، مکانیک ِ ناکوانتمی یِ نانسبیتی یِ ذرات است.

چیز ی که اینجا بررسی میشود، عمدتَن مکانیک ِ ناکوانتمی یِ ذرات است.

2 سیستم ِ دینامیکی

به دستگاه ی با این ویژگیها یک سیستم ِ دینامیکی میگویند.

a1 دستگاه شامل ِ یک مجموعه یِ حالتها ست. این مجموعه را با $\mathbb{S}$ نشان میدهم.

a2 دستگاه شامل ِ یک مجموعه یِ مرتب از پارامتر- ِ-تحولها ست. این مجموعه را با $\mathbb{T}$ نشان میدهم. $(\mathbb{T}\times\mathbb{T})^+$ را چنین تعریف میکنم.

$$(\mathbb{T}\times\mathbb{T})^+ = \{(t_2,t_1)\in(\mathbb{T}\times\mathbb{T})\,|\,t_1\leq t_2\}. \qquad \textbf{a2-0}$$

a3 یک تابع در $\mathsf{F}[\mathbb{S};(\mathbb{T}\times\mathbb{T})^+\times\mathbb{S}]$ هست، که با آن تابع ِ تحول میگویم و آن را با $\mathfrak{ev}$ نشان میدهم.

این تابع این ویژگیها را دارد.

$$\mathfrak{ev}(t,t,\psi)=\psi. \qquad \textbf{a3-1}$$

$$\mathfrak{ev}[t_3,t_2,\mathfrak{ev}(t_2,t_1,\psi)]=\mathfrak{ev}(t_3,t_1,\psi). \qquad \textbf{a3-2}$$

قید ِ مرتب-بودن ِ مجموعه یِ پارامتر- ِ-تحولها را میشود ضعیفتر کرد، به این شکل که همچنان یک جهت- ِ-افزایش در این مجموعه هست، اما این مجموعه ممکن است دُرِئی باشد: در این حالت پارامتر- ِ-تحول، با افزایش ِ به مقدار ِ معین ی تکرار شود.

بر اساس ِ مکانیک، هر سیستم ِ فیزیکی یی یک سیستم ِ دینامیکی ست، که با یک تابع ِ ψ در $\mathsf{F}(\mathbb{S};\mathbb{T})$ به طُر ِ کامل مشخص میشود. به این معنی که

b1 هر مشاهده-پذیر ِ q از سیستم تابع ی با دامنه یِ $\mathbb{T}$ است، چنان که $\mathsf{q}(t)$ به فقط t و $\psi(t)$ بستگی دارد.

b2 تابع- ِ-حالت ِ ψ با تابع- ِ-تحول ِ $\mathfrak{ev}$ تحول میابد:

$$\psi(t_2) = \mathfrak{ev}[t_2, t_1, \psi(t_1)], \quad t_2 \geq t_1. \qquad \textbf{b2-1}$$

این که تحول ِ سیستم دینامیکی ست، اساسَن یعنی دانستن ِ حالت ِ سیستم در یک پارامتر- ِ-تحول برا یِ دانستن ِ حالت ِ سیستم در پارامتر- ِ-تحولها یِ بزرگتر کافی ست. همچنین، تحول از t_1 تا t_2 و بعد از آن از t_2 تا t_3، با تحول ِ مستقیم از t_1 تا t_3 همئرز است.

ممکن است مجموعه یِ حالتها و مجموعه یِ پارامتر- ِ-تحولها پیوسته (و هموار) باشند، چنان که مشتق ِ حالت نسبت به پارامتر ِ تحول معنی داشته باشد. در این صورت دینامیکی-بودن ِ تحول به معنی یِ این است که حالت نسبت به پارامتر ِ تحول یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-یک را برمیئاورَد.

بررسی سیستم به سینماتیک و دینامیک کاهش میابد. سینماتیک یعنی تعیین ِ مجموعه یِ حالتها و رابطه یِ مشاهده-پذیرها با حالت. دینامیک یعنی تعیین ِ تابع ِ تحول.

3 مکانیک ِ ناکوانتمی، مکانیک ِ کوانتمی

تا جا یی که به دینامیک مربوط میشود، مکانیک ِ کوانتمی تفاوت ِ بنیادی یی با مکانیک ِ ناکوانتمی ندارد. البته مجموعه-یِ-حالتها یِ یک سیستم در مکانیک ِ کوانتمی یک فضا یِ هیلبِرت (یا فضا یِ افکنشی یِ متناظر با آن) است، و نُعَن بسیار بزرگتر است از مجموعه-یِ-حالتها یِ متناظر با هم ان سیستم در مکانیک ِ ناکوانتمی. مثلَن مجموعه یِ حالتها برا یِ یک ذره یِ بدون- ِ-سْپین، در مکانیک ِ کوانتمی فضا یِ تابعها یِ مختلط-مقدار ِ مجذور-انتگرال-پذیر با دامنه یِ $\mathbb{M}$ است (که $\mathbb{M}$ یک خمینه است)، در حال ی که مجموعه-یِ-حالتها یِ هم ین سیستم در مکانیک ِ ناکوانتمی خُد ِ $\mathbb{M}$ است. مجموعه-یِ-حالتها یِ اولی بینهایت-بُعدی ست، در حال ی که بُعد ِ مجموعه-یِ-حالت ِ دومی هم ان بُعد ِ $\mathbb{M}$ است.

تفاوت ِ بنیادی یِ مکانیک ِ کوانتمی با مکانیک ِ ناکوانتمی در سینماتیک است. در مکانیک ِ ناکوانتمی، حالت ِ سیستم علی‌الاصول سنجش-پذیر است، بی آن که طی ِ سنجش (ِ آرمانی) تغییر کند. اگر $\mathfrak{q}$ یک مشاهده-پذیر باشد، آنگاه یک تابع ِ $\mathfrak{Q}$ هست که

$$\mathfrak{q}(t) = \mathfrak{Q}[t, \psi(t)]. \qquad (1)$$

به این ترتیب، با سنجش ِ (آرمانی یِ) حالت ِ سیستم میشود حالت ِ سیستم پیش از سنجش را تعیین

کرد، و با دانستن ِ حالت ِ سیستم (علی‌الاصول) نتیجه ی ِ سنجش ِ همه ی ِ مشاهده-پذیرها معلوم است.

اما در مکانیک ِ کوانتمی نمیشود حالت ِ سیستم را سنجید (تا حالت ِ پیش-از-سنجش به دست آید)، مگر چیزها ی ِ معین ی در باره ی ِ حالت ِ پیش-از-سنجش معلوم باشد. همچنین، دانستن ِ حالت ِ سیستم برا ی ِ تعیین ِ نتیجه ی ِ قطعی ی ِ سنجش ِ مشاهده-پذیرها کافی نیست. با دانستن ِ حالت ِ سیستم فقط میشود احتمال ِ به-دست-آمدن ِ مقدارها ی ِ ممکن در هر سنجش را حساب کرد: متناظر با هر مشاهده-پذیر ِ q میشود $\mathsf{prob}[\mathsf{q}(t)=q]$ (احتمال ِ این که در سنجش ِ $\mathsf{q}(t)$ مقدار ِ q به دست آید) را حساب کرد. این احتمال با یک تابع ِ $\mathcal{Q}$ داده میشود:

$$\mathsf{prob}[\mathsf{q}(t)=q]=\mathcal{Q}[t,\psi(t),q]. \tag{2}$$

به علاوه، یک سنجش ِ آرمانی حالت ِ سیستم را عوض میکند، چنان که اگر بلافاصله پس از سنجش ِ q باز هم q سنجیده شود، مقدار ِ حاصل هم ان باشد که در سنجش ِ قبلی به دست آمده. این یعنی اگر نتیجه ی ِ سنجش ِ $\mathsf{q}(t)$ مقدار ِ q بود، بلافاصله پس از این سنجش حالت ِ سیستم ψ' میشود، چنان که

$$\mathcal{Q}(t,\psi',q')=\delta_{q,q'}. \tag{3}$$

به این ترتیب، با سنجش ِ یک مشاهده-پذیر فقط میشود اطلاعات ی در باره ی ِ حالت ِ سیستم پس از سنجش به دست آورد. در حالت ِ کلی هم ین هم (حتا اگر حالت ِ سیستم پس از سنجش کاملَن معلوم باشد) برا ی ِ تعیین ِ نتیجه ی ِ سنجش ِ یک مشاهده-پذیر ِ دیگر کافی نیست: برا ی ِ تعیین ِ مقدار ِ یک مشاهده-پذیر ِ دیگر یک سنجش ِ جدید لازم است، که این هم ممکن است حالت ِ سیستم و احتمال ِ به-دست-آمدن ِ مقدارها ی ِ ممکن برا ی ِ مشاهده-پذیرها ی ِ دیگر (از جمله مشاهده-پذیر ِ اول) را عوض کند.

4 زمان، فضا، فضا-زمان

سنتَن به پارامتر ِ تحول زمان میگویند. در مکانیک ِ ناکوانتمی، دسته ای از سیستمها هستند که فضا-ی ِ-حالت ِشان با یک مجموعه ی ِ جهانی ی ِ $\mathbb{M}$ ساخته میشود، که به آن مجموعه ی ِ نقاط، یا فضا میگویند.

زمان و فضا هر کدام ممکن است گسسته یا پیوسته باشند. در مکانیکِ معمول، فرض این است که هر-دُ یِ اینها پیوسته اند. به حاصل- ی-ضربِ دِکَرتی یِ زمان و فضا فضا-زمان میگویند:

$$\mathbb{M}_{\mathsf{ext}} = \mathbb{T} \times \mathbb{M}. \tag{4}$$

که $\mathbb{T}$ مجموعه یِ زمانها، $\mathbb{M}$ فضا، و $\mathbb{M}_{\mathsf{ext}}$ فضا-زمان است. به اعضا یِ فضا-زمان رویداد میگویند. هر چند فضا-زمان حاصل-ِ-ضربِ دِکَرتی یِ زمان و فضا ست، لازم نیست نسبت-دادنِ زمان به یک رویداد یکتا باشد: ممکن است بشود زمانِ رویدادِ (t,r) را چیز ی جز t تعریف کرد: ممکن است تابع-ِ-زمانها یِ مختلف ی باشند که هر یک روش ی برا یِ افرازِ فضا-زمان به فُق-ِ-سطحها یِ زمان-ثابت میدهند، و هیچ کدام از این روشها برتری یِ آشکار ی بر دیگری نداشته باشد.

مثالها یی از سیستمها یی که بر اساسِ فضا و زمان ساخته میشوند، ذرات و میدانها یَند. حالتِ یک سیستمِ $\mathfrak{n}$-ذرِئی با یک تابعِ χ در $\mathsf{F}(\mathbb{M}^{\mathfrak{n}};\mathbb{T})$ داده میشود. البته منظور این نیست که حالتِ سیستم در زمانِ t هم ان $\chi(t)$ است. مثلَن ممکن است حالتِ سیستم در زمانِ t دُتایی یِ $[\chi(t),\dot{\chi}(t)]$ باشد. حالتِ یک میدان هم با تابع داده میشود که دامنه اَش $\mathbb{M}_{\mathsf{ext}}$ است.

فضا-زمان را پیوسته (در واقع یک خمینه یِ هموار) میگیرم. هر رویداد در فضا-زمان را میشود با مختصاتِ آن رویداد مشخص کرد. رویدادِ (t,r) را با $\underset{\sim}{r}$ نشان میدهم:

$$\underset{\sim}{r} = (t,r), \tag{5}$$

این قرارداد را برا یِ مختصات به کار میبرم.

$$\underset{\sim}{r}^0 = t. \tag{6}$$

$$\underset{\sim}{r}^i = r^i. \tag{7}$$

i میتواند از یک تا بُعدِ فضا باشد. از این پس $\underset{\sim}{r}^0$ را هم با r^0 نشان میدهم:

$$\underset{\sim}{r}^0 = r^0. \tag{8}$$

قرارداد میکنم شاخصِ یونانی میتواند صفر هم باشد، اما شاخصِ لاتین صفر نمیشود: r^α ها شاملِ زمان (r^0) و مختصاتِ فضایی یَند، ولی r^i ها شاملِ فقط مختصاتِ فضایی یَند. وقت ی ساختارها

به این بستگی ندارند که بر فضا تعریف شده اند یا بر فضا-زمان هم، شاخصها یِ لاتین به کار میبرم (که صفر نمیشوند).

مانسته یِ قرارداد ِ (5) را برا یِ کمیتها یِ دیگر هم به کار میبرم:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{X}^0, \mathfrak{X}). \tag{9}$$

که $\mathfrak{X}$ فقط مئلفه یِ فضایی دارد و قرارداد شده

$$\underset{\sim}{\mathfrak{X}}^\alpha = \mathfrak{X}^\alpha. \tag{10}$$

مانسته یِ این قرارداد را برا یِ کمیتها یِ با شاخص ِ پایین هم به کار میبرم:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{Y}} = (\mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Y}), \tag{11}$$

که $\mathfrak{Y}$ فقط مئلفه یِ فضایی دارد و قرارداد شده

$$\underset{\sim}{\mathfrak{Y}}_\alpha = \mathfrak{Y}_\alpha. \tag{12}$$

5 مکانیک ِ نانسبیتی، مکانیک ِ نسبیتی

با این فرض شروع میکنم که فضا-زمان یک خمینه یِ هموار است (پس مشتق-گیری تعریف میشود). یک ویژگی یِ مکانیک ِ نانسبیتی، در مقایسه با مکانیک ِ نسبیتی، این است که در مکانیک ِ نانسبیتی یک همزمانی ِ جهانی (مطلق) هست که مستقل از سیستمها یا چارچوبها ست. این ویژگی (یا فرض) را میشود بر اساس ِ فرض ی دیگر بنا کرد: یک علامت هست که آنَن منتشر میشود. اگر چنن علامت ی وجود میداشت، زمان را میشد چنین سنجید. یک ساعت (زمان-سنج) یک جا میگذارم. برا یِ سنجش ِ زمان در هر جا و هر زمان (در هر رویداد)، کافی ست یک علامت ِ آنی به آن ساعت فرستاده شود که زمان ی که ساعت نشان میدهد کدام است، و نتیجه هم آنی خانده شود.

یک پیامد ِ دیگر ِ وجود ِ علامت ی که آنَن منتشر میشود (همراه با این که زمان دُرِئی نیست)، این است که متناظر با هر رویداد یک گذشته یِ مطلق، یک حال ِ مطلق، و یک آینده یِ مطلق هست، چنان که فضا-زمان اجتماع ِ این مجموعِها یِ جدا-از-هم است. گذشته و حال و آینده یِ متناظر با رویداد ِ $\underset{\sim}{r}$ را با، به ترتیب، $\mathbb{M}^{-}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})$ و $\mathbb{M}^{0}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})$ و $\mathbb{M}^{+}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})$، و زمان ِ متناظر با همزمانی یِ مطلق را با t نشان میدهم. گذشته مجموعه یِ رویدادها یی ست که زمان ِشان کوچکتر از زمان ِ $\underset{\sim}{r}$ است. حال مجموعه یِ رویدادها یی ست که زمان ِشان برابر با زمان ِ $\underset{\sim}{r}$ است. آینده مجموعه یِ رویدادها یی ست که زمان ِشان بزرگتر از زمان ِ $\underset{\sim}{r}$ است:

$$\mathbb{M}^{-}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r}) = \{\underset{\sim}{r}' \,|\, t(\underset{\sim}{r}') < t(\underset{\sim}{r})\}. \tag{13}$$

$$\mathbb{M}^{0}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r}) = \{\underset{\sim}{r}' \,|\, t(\underset{\sim}{r}') = t(\underset{\sim}{r})\}. \tag{14}$$

$$\mathbb{M}^{+}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r}) = \{\underset{\sim}{r}' \,|\, t(\underset{\sim}{r}') > t(\underset{\sim}{r})\}. \tag{15}$$

و البته رُشن است که

$$[\mathbb{M}^{-}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] \cup [\mathbb{M}^{0}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] \cup [\mathbb{M}^{+}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] = \mathbb{M}_{\text{ext}}. \tag{16}$$

$$[\mathbb{M}^{-}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] \cap [\mathbb{M}^{0}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] = \varnothing. \tag{17}$$

$$[\mathbb{M}^{+}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] \cap [\mathbb{M}^{0}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] = \varnothing. \tag{18}$$

$$[\mathbb{M}^{-}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] \cap [\mathbb{M}^{+}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})] = \varnothing. \tag{19}$$

گذشته مجموعه یِ رویدادها یی ست که میشود از آنها یک علامت با سرعت ِ محدود را به $\underset{\sim}{r}$ فرستاد. آینده مجموعه یِ رویدادها یی ست که میشود یک علامت با سرعت ِ محدود را از $\underset{\sim}{r}$ به آنها فرستاد. حال مجموعه یِ رویدادها یی ست که میشود از آنها یک علامت ِ آنی را به $\underset{\sim}{r}$ فرستاد، یا از $\underset{\sim}{r}$ یک علامت ِ آنی را به آنها فرستاد. بُعد ِ حال یک ی کمتر از بُعد ِ فضا-زمان است. بُعد ِ گذشته و بُعد ِ آینده با بُعد ِ فضا-زمان برابر است.

اما در مکانیک ِ نسبیتی یک محدودیت- ِ-سرعت هست: علامت ِ آنی وجود ندارد. به هم ین خاطر نمیشود به آن شکل که در مکانیک ِ نانسبیتی ممکن بود زمان ِ مطلق سنجید. یک پیامد ِ این آن است که دیگر نمیشود فضا-زمان را (نسبت به یک رویداد) به گذشته، حال، آینده افراز کرد. متناظر با هر رویداد ِ $\underset{\sim}{r}$، همچنان یک مجموعه یِ $\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underset{\sim}{r})$ هست: رویدادها یی که میشود از آنها به $\underset{\sim}{r}$ علامت

فرستاد، جز خُدِ $\underline{r}$؛ و یک مجموعه یِ $\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})$ هست: رویدادها یی که میشود از $\underline{r}$ به آنها علامت فرستاد، جز خُدِ $\underline{r}$. $\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underline{r})$ و $\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})$ اشتراک ندارند. آن چه از فضا-زمان باقی میمانَد، جز خُدِ $\underline{r}$، را با $\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})$ نشان میدهم:

$$\{\underline{r}\} \cup [\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cup [\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cup [\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})] = \mathbb{M}_{\text{ext}}. \tag{20}$$

$$[\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cap [\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})] = \varnothing. \tag{21}$$

$$[\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cap [\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})] = \varnothing. \tag{22}$$

$$[\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cap [\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})] = \varnothing. \tag{23}$$

اختلاف با مکانیکِ نانسبیتی این است که اینجا دیگر بُعدِ $\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})$ یک ی کمتر از بُعدِ فضا-زمان نیست، بل که با بُعدِ فضا-زمان برابر است. اگر بُعدِ $\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})$ یک ی کمتر از بُعدِ فضا-زمان میبود، میشد یک زمانِ مطلق تعریف کرد: تابع ی از فضا-زمان که مقدارَش بر $\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})$ ثابت باشد. حالا نمیشود. در مکانیکِ نسبیتی همچنان یک گذشته یِ مطلق نسبت به $\underline{r}$ و یک آینده یِ مطلق نسبت به $\underline{r}$ هست، که به ترتیب $\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underline{r})$ و $\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})$ اند، اما جز اینها یک مجموعه یِ $\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})$ هم هست که راهِ رُشن ی برا یِ افرازِ آن به گذشته و آینده (و حال) وجود ندارد. بعض یها $\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})$ را هیچ-جا (نسبت به $\underline{r}$) مینامند. مرزِ این مجموعه را مخروطِ نور (با رئسِ $\underline{r}$) مینامند. مخروطِ نور با رئسِ $\underline{r}$ را با $\tilde{\mathbb{M}}^{\times}_{\text{ext}}(\underline{r})$ نشان میدهم. همچنین؛ درونِ $\tilde{\mathbb{M}}^{0}_{\text{ext}}(\underline{r})$ را بیرونِ مخروطِ نور، و درونِ $[\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cup [\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})]$ را درونِ مخروطِ نور مینامند. مخروطِ نور اجتماعِ سه مجموعه است: مخروط-ِ-نورِ گذشته، که مرزِ $\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underline{r})$ است؛ مخروط-ِ-نورِ آینده، که مرزِ $\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})$ است؛ و البته خدِ $\{\underline{r}\}$. مخروط-ِ-نورِ گذشته و مخروط-ِ-نورِ آینده را با، به ترتیب، $\tilde{\mathbb{M}}^{\times\,-}_{\text{ext}}(\underline{r})$ و $\tilde{\mathbb{M}}^{\times\,+}_{\text{ext}}(\underline{r})$ نشان میدهم:

$$\tilde{\mathbb{M}}^{\times}_{\text{ext}}(\underline{r}) = [\tilde{\mathbb{M}}^{\times\,-}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cup [\tilde{\mathbb{M}}^{\times\,+}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cup \{\underline{r}\}. \tag{24}$$

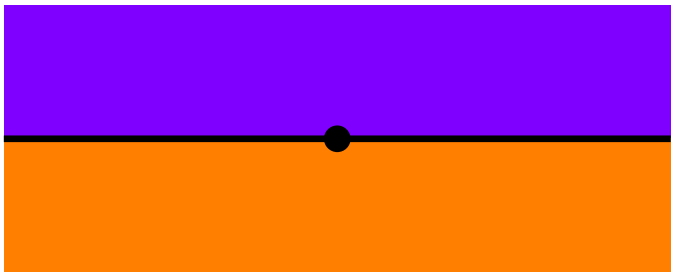
و البته،

$$\tilde{\mathbb{M}}^{\times\,-}_{\text{ext}}(\underline{r}) = [\tilde{\mathbb{M}}^{\times}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cap [\tilde{\mathbb{M}}^{-}_{\text{ext}}(\underline{r})]. \tag{25}$$

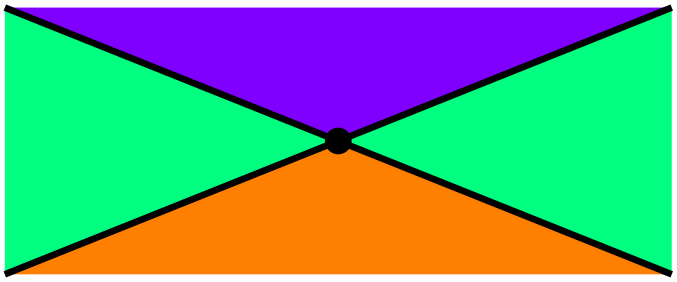
$$\tilde{\mathbb{M}}^{\times\,+}_{\text{ext}}(\underline{r}) = [\tilde{\mathbb{M}}^{\times}_{\text{ext}}(\underline{r})] \cap [\tilde{\mathbb{M}}^{+}_{\text{ext}}(\underline{r})]. \tag{26}$$

البته در مکانیک ِ نسبیتی هم میشود یک تابع- ِ-زمان از فضا-زمان تعریف کرد و با استفاده از آن فضا-زمان را به فُق- ِ-سطحها ی ِ زمان-ثابت افراز کرد. اما این افراز به انتخاب ِ تابع- ِ-زمان، یا به انتخاب ِ چارچوب ِ مرجع، بستگی دارد. بر خلاف ِ مکانیک ِ نانسبیتی که در آن وجود ِ یک علامت ِ آنی فُق- ِ-سطحها ی ِ زمان-ثابت را به طُر ِ یکتا مشخص میکند.

هم در مکانیک ِ نانسبیتی و هم در مکانیک ِ نسبیتی، اگر زمان دُرِئی میبود گذشته و آینده (نسبت به یک رویداد) مُضعی میشدند، به این معنی که یک خم ِ بسته وجود میداشت که بر آن زمان نسبت به پارامتر ِ خم صعودی میبود. این یعنی زمان نمیتوانست یک تابع ِ سراسری باشد: میشد با رفتن به آینده به گذشته رسید.



شکل ِ 1: فضا-زمان ِ نانسبیتی. قرص ِ سیاه رویداد ی ست که فضا-زمان نسبت به آن افراز شده.



شکل ِ 2: فضا-زمان ِ نسبیتی. قرص ِ سیاه رویداد ی ست که فضا-زمان نسبت به آن افراز شده. خطها ی ِ سیاه ی که از این قرص میگذرند مخروط- ِ-نور اند.

6 چارچوب

برا یِ تعیین ِ یک رویداد در فضا-زمان، باید زمان و فضا یِ آن رویداد مشخص شود. این کار با استفاده از یک دسته ساعت انجام میشود. ساعت ابزار ی ست که زمان را میسنجد. مجموعه یِ رویدادها یِ هر ذره را جهان-خط ِ آن ذره مینامم. فرض میکنم زمان ِ هیچ دُ-رویداد ِ متفاوت ی از جهان-خط ِ یک ساعت یکسان نیست. یک دسته ساعت میگیرم که

c1 نقطِئی یَند.

c2 اشتراک ِ جهان-خط ِ هر دُ-تا-یِ شان تهی ست.

c3 اجتماع ِ جهان-خطها یِ شان کل ِ فضازمان ِ $\mathbb{M}_{\text{ext}}$ است.

به هر دسته ساعت از این گونه یک چارچوب میگویم. به هر ساعت یک برچسب میدهم، چنان که برچسب ِ هیچ دُ-ساعت ِ متفاوت ی یکسان نباشد. هر رویداد ِ $\underset{\sim}{r}$ در جهان-خط ِ یک و فقط یک ی از این ساعتها ست. آن ساعت یک برچسب ِ r دارد و در آن رویداد زمان ِ t را نشان میدهد. (t, r) را زمان و مکان ِ رویداد ِ $\underset{\sim}{r}$ تعریف میکنم.

با هر چارچوب، میشود یک رابطه بین ِ زمان و مکان ِ یک ذره سنجید. این رابطه معادله یِ جهان-خط ِ آن ذره است. اما از تعریف ِ چارچوب رُشن است که چارچوب یکتا نیست و به هم ین خاطر زمان و مکان ِ یک رویداد یکتا نیست. حتا رُشن نیست که رابطه یِ زمان و مکان ِ جهان-خط ِ یک ذره چنان است که مکان ِ آن ذره یک تابع از زمان َش است. میگویند افراز ِ فضا-زمان به فُق- ِ-سطحها یِ زمان-ثابت (فضا در زمانها یِ مختلف) یا به جهان-خطها یِ فضا-ثابت (زمان در نقاط ِ مختلف ِ فضا) یکتا نیست.

اگر همزمانی یِ مطلق وجود داشته باشد، میشود زمان ِ t را چنان گرفت که t برا یِ دُ رویداد یکسان باشد اگر و تنها اگر آن دُ-رویداد به معنی یِ مطلق همزمان باشند. به این ترتیب هر مجموعه از رویدادها یِ مطلق-همزمان با یک مقدار ِ t متناظر است و این تناظر یک-به-یک است. بر این اساس همزمانی یِ مطلق روش ِ معین ی برا یِ افراز ِ فضا-زمان به فضا در زمانها یِ مختلف میدهد، اما همچنان در تعیین ِ مقدار ِ t برا یِ یک دسته رویداد ِ مطلق-همزمان آزادی میمانَد. این آزادی از آنجا میئاید که در آهنگ ِ ساعت ی که برا یِ تعریف ِ همزمانی یِ مطلق به کار میرود آزادی هست. میشود به جا یِ زمان ِ t زمان ِ

t' به کار برد که t' تابعِ فقط t است:

$$t' = \mathfrak{R}^0(t). \tag{27}$$

و البته رُشن است که همزمانی یِ مطلق بر آزادی یِ تعیینِ برچسبِ ساعتها، و نیز حرکتِ ساعتها اثر ی ندارد: همچنان افرازِ فضا-زمان به جهان-خطها یِ فضا-ثابت (زمان در نقاطِ مختلفِ فضا) یکتا نیست. میشود به جا یِ برچسبِ r برچسبِ r' را به کار برد، که در حالتِ کلی تابعِ t و r است:

$$r'^i = \mathfrak{R}^i(t, r). \tag{28}$$

یا

$$r'^i = \mathfrak{R}^i(\underset{\sim}{r}). \tag{29}$$

یک تبدیل-ِ-چارچوبِ کلی به این شکل است.

$$\underset{\sim}{r}' = \mathfrak{R}(\underset{\sim}{r}), \tag{30}$$

که یعنی

$$t' = \mathfrak{R}^0(t, r), \tag{31}$$

همراه با (28) یا همئرز با آن (29). چیز ی که تبدیل-ِ-چارچوبِ قبلی را خاص میکند، که همزمانی یِ مطلق را نگه میدارد، (27) است، که میگوید زمانِ جدید مستقل از برچسب است.

2

سینماتیکِ ذرات

7 مکان، سرعت، شتاب

حالتِ یک ذره بر حسبِ زمان، با یک تابع در $\mathsf{F}(\mathbb{T};\mathbb{M})$ ساخته میشود، که $\mathbb{M}$ فضا ست. این تابع را با γ نشان میدهم. r (مکانِ ذره) میشود

$$r = \gamma(t). \tag{32}$$

سادتِر، $\gamma(t)$ را با خُدِ $r(t)$ نشان میدهم. به $r(t)$ مکانِ ذره در زمانِ t میگویم. از این پس فرض میکنم $\mathbb{M}$ خمینه و $\mathbb{T}$ پیوسته است. در واقع $\mathbb{T}$ بخش ی از $\mathbb{R}$ (مجموعه یِ عددها یِ حقیقی) است. سرعت و شتابِ ذره را با، به ترتیب، v و a نشان میدهم. اینها، به ترتیب، مشتقها یِ اول و دومِ مکان نسبت به زمان َند:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}. \tag{33}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2\,r}{\mathrm{d}\,t^2}. \tag{34}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}. \tag{35}$$

اینها ساده-نوشته-شده یِ عبارتها یِ زیر َند.

$$v = \left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\right)_\gamma . \tag{36}$$

$$a = \left(\frac{\mathrm{d}^2\,r}{\mathrm{d}\,t^2}\right)_\gamma . \tag{37}$$

$$a = \left(\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\right)_\gamma . \tag{38}$$

یعنی در اینها مشتق-گیری رو یِ خمِ مکانِ ذره انجام شده است.

رُشن است که میشود ادامه داد و مشتقها یِ بالاترِ مکان را تعریف کرد. این که $\psi(t)$ (حالتِ ذره در زمانِ t) چه ربط ی به مکان و مشتقها یِ آن در زمانِ t دارد، با دینامیک تعیین میشود: اگر معادله یِ تحول یک معادله یِ دیفرانسیلِ مرتبه یِ k برا یِ مکان باشد، حالت یک k تایی ست شاملِ مکان و مشتقها یِ تا مرتبه یِ $(k-1)$ از آن:

$$\psi = \left(r, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}\,r}{\mathrm{d}\,t^{k-1}}\right). \tag{39}$$

این یعنی دینامیک مشتقِ k ُمِ مکان را بر حسبِ زمان و مشتقها یِ پایینترِ مکان تعیین میکند. البته رابطه یِ مشتقِ k ُمِ (یا مشتقها یِ بالاتر) مکان با زمان و حالتِ سیستم بیرونِ سینماتیک است.

8 سرعت و چارچوب

تفکیکِ فضا-زمانِ $\mathbb{M}_{\mathsf{ext}}$ به زمانِ $\mathbb{T}$ و فضا یِ $\mathbb{M}$ یکتا نیست. با خمِ γ در $\mathsf{F}(\mathbb{M};\mathbb{T})$ میشود یک خمِ $\underset{\sim}{\gamma}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{M}_{\mathsf{ext}};\mathbb{T})$ ساخت، که

$$\underset{\sim}{\gamma}(t) = [t, \gamma(t)]. \tag{40}$$

پارامترِ خم هم لازم نیست t باشد. در واقع به جا یِ چارچوب ی که مکانِ ذره بر حسبِ زمان با آن تعریف شده بود، میشود یک چارچوبِ دیگر گرفت، شاملِ یک دسته ساعتِ دیگر. برچسبها یِ اینها را با r'، و زمانِ اینها را با t' نشان میدهم. رویدادِ متناظر با (t,r) از دیدِ چارچوبِ قدیم، هم ان رویدادِ متناظر با (t',r') از دیدِ چارچوبِ جدید است. و البته بینِ (t',r') و (t,r) یک رابطه هست:

$$(t',r') = \mathfrak{R}(t,r). \tag{41}$$

سرعت از دید ِ چارچوب ِ پریم-دار، مشتق ِ r' نسبت به t' است:

$$v' = \frac{\mathrm{d}\,r'}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{42}$$

دیده میشود

$$\mathrm{d}\,r' = \frac{\partial\,r'}{\partial\,t}\,\mathrm{d}\,t + \frac{\partial\,r'}{\partial\,r}\,\mathrm{d}\,r. \tag{43}$$

$$\mathrm{d}\,t' = \frac{\partial\,t'}{\partial\,t}\,\mathrm{d}\,t + \frac{\partial\,t'}{\partial\,r}\,\mathrm{d}\,r. \tag{44}$$

به این ترتیب،

$$v' = \left(\frac{\partial\,t'}{\partial\,t} + \frac{\partial\,t'}{\partial\,r}\,v\right)^{-1}\,\left(\frac{\partial\,r'}{\partial\,t} + \frac{\partial\,r'}{\partial\,r}\,v\right). \tag{45}$$

اینها در واقع هم ان قاعده ی ِ زنجیرِئی ی ِ مشتق-گیری یَند. مفصلتر،

$$v'^i = \left(\frac{\partial\,t'}{\partial\,t} + \frac{\partial\,t'}{\partial\,r^j}\,v^j\right)^{-1}\,\left(\frac{\partial\,r'^i}{\partial\,t} + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^k}\,v^k\right). \tag{46}$$

رُشن است که (45) یا (46) به این شکل َند.

$$v'^i = \frac{\mathfrak{B}^i}{\mathfrak{A}}, \tag{47}$$

که $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ تابع ِ زمان و مکان و سرعت َند و نسبت به سرعت از درجه ی ِ دست- ِ-بالا یک َند.

اگر برچسبها ی ِ جدید با برچسبها ی ِ قدیم یکسان باشند،

$$r' = r, \tag{48}$$

رابطه ی ِ تبدیل- ِ-سرعت میشود

$$v' = \left(\frac{\partial\,t'}{\partial\,t} + \frac{\partial\,t'}{\partial\,r}\,v\right)^{-1}\,v. \tag{49}$$

مفصلتر، با شاخصها،

$$v'^i = \left(\frac{\partial\,t'}{\partial\,t} + \frac{\partial\,t'}{\partial\,r^j}\,v^j\right)^{-1}\,v^i \tag{50}$$

اگر علاوه بر این t' هم تابع ِ فقط t باشد (آهنگ ِ همه یِ ساعتها یکسان عوض شود)،

$$v' = \left(\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\right)^{-1} v. \tag{51}$$

یا،

$$v' = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\, v. \tag{52}$$

مفصلتر،

$$v'^i = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\, v^i. \tag{53}$$

اگر زمان ِ چارچوب ِ جدید با زمان ِ چارچوب ِ قدیم یکسان باشد،

$$t' = t, \tag{54}$$

رابطه یِ تبدیل- ِ-سرعت میشود

$$v' = \frac{\partial\, r'}{\partial\, t} + \frac{\partial\, r'}{\partial\, r}\, v. \tag{55}$$

مفصلتر،

$$v'^i = \frac{\partial\, r'^i}{\partial\, t} + \frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^k}\, v^k. \tag{56}$$

در واقع برا یِ رسیدن به رابطه یِ بالا لازم نیست زمانها یکسان باشند. کافی ست اختلاف ِ زمانها ثابت باشد (گذر ِ زمانها یکسان باشد). اگر علاوه بر این r' هم تابع ِ فقط r باشد (ساعتها یِ جدید نسبت به ساعتها یِ قدیم ساکن باشند)،

$$v' = \frac{\partial\, r'}{\partial\, r}\, v. \tag{57}$$

مفصلتر،

$$v'^i = \frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^k}\, v^k. \tag{58}$$

سرانجام، اگر r' تابع ِ فقط r و t' تابع ِ فقط t باشد،

$$v' = \left(\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\right)^{-1} \frac{\partial\, r'}{\partial\, r}\, v. \tag{59}$$

یا،

$$v' = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\, \frac{\partial\, r'}{\partial\, r}\, v. \tag{60}$$

مفصلتر،

$$v'^i = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\, \frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^k}\, v^k. \tag{61}$$

9 مشتق-گیری از بردارها

برا یِ مشتق-گیری از بردارها یک ساختار علاوه بر چارچوب لازم است، که هم ان هموستار است. این ساختار مشتق ِ بردارها را میدهد، یا همئرز با آن مشخص میکند کدام بردارها (مُضعَن) ثابت َند. هموستار را با Γ نشان میدهم:

$$\frac{\partial\, e_j}{\partial\, r^i} = \Gamma^k{}_{i\,j}\, e_k. \tag{62}$$

که e یک پایه-یِ-فضا یِ مماس است. این پایه لازم نیست مختصاتی باشد. اما از این پس با پایه یِ مختصاتی کار میکنم. در حالت ِ کلی لازم نیست هموستار (در پایه یِ مختصاتی) نسبت به شاخصها یِ پایین َش متقارن باشد. اما از این پس هموستار را متقارن میگیرم:

$$\partial_j\, e_i = \partial_i\, e_j, \tag{63}$$

یا،

$$\Gamma^k{}_{j\,i} = \Gamma^k{}_{i\,j}. \tag{64}$$

این شرط (تقارن ِ هموستار) یعنی پیچش (T) صفر است:

$$T = 0. \tag{65}$$

پیچش، در یک پایه یِ مختصاتی، چنین تعریف میشود

$$T^k{}_{i\,j} = \Gamma^k{}_{i\,j} - \Gamma^k{}_{j\,i}. \tag{66}$$

البته روابط ِ (64) و (66) در یک پایه یِ مختصاتی یَند. اما (65) مستقل از پایه است.

هم فضا و هم فضا-زمان هموستار دارند (ممکن است داشته باشند). یک حالت ِ خاص این است که مئلفِها یِ با-شاخصها-یِ-مخلوط ِ هموستار (یعنی آنها یی که هم شاخص ِ فضایی و هم شاخص ِ زمانی دارند) صفر باشند:

$$\Gamma^0{}_{0\,j} = 0. \tag{67}$$

$$\Gamma^0{}_{j\,k} = 0. \tag{68}$$

$$\Gamma^i{}_{0\,0} = 0. \tag{69}$$

$$\Gamma^i{}_{0\,j} = 0. \tag{70}$$

این یعنی مشتق ِ e_0 نسبت به مکان و مشتق ِ e_i ها نسبت به زمان صفر است، مشتق ِ e_0 نسبت به زمان با e_0 موازی ست، و مشتق ِ هر یک از e_i ها نسبت به مکان یک ترکیب ِ خطی از فقط e_i ها ست، یعنی بر فضا (زیرخمینِها یِ زمان-ثابت) مماس است. در این حالت رابطه یِ

$$\partial_\beta\, e_\gamma = \Gamma^\alpha{}_{\beta\,\gamma}\, e_\alpha \tag{71}$$

تفکیک میشود به

$$\partial_j\, e_0 = 0. \tag{72}$$

$$\partial_0\, e_j = 0. \tag{73}$$

$$\partial_0\, e_0 = \Gamma^0{}_{0\,0}\, e_0. \tag{74}$$

$$\partial_j\, e_k = \Gamma^i{}_{j\,k}\, e_i. \tag{75}$$

وقت ی (67) تا (70) برقرار َند، میگویم فضا-زمان هموستار-جداشدنی ست. جا یی که ابهام پیش نیاید، سادِتر میگویم فضا-زمان جداشدنی ست.

اگر e_0 عدد بود، معنی یِ (72) این میبود که e_0 تابع ِ فقط زمان است. در این صورت از (74) معلوم میشد $\Gamma^0{}_{0\,0}$ هم تابع ِ فقط زمان است. همچنین، اگر e_i ها عدد میبودند، از (73) نتیجه میشد e_i ها مستقل از زمان َند. در این صورت از (75) معلوم میشد $\Gamma^i{}_{j\,k}$ ها هم مستقل از زمان َند. اما e_α ها بردار َند و $(\partial_\beta\,\partial_\alpha\, e_\gamma)$ لزومَن با $(\partial_\alpha\,\partial_\beta\, e_\gamma)$ برابر نیست. پس، از صفر-بودن ِ $(\partial_0\,\partial_i\, e_0)$ لزومَن نتیجه نمیشود $(\partial_i\,\partial_0\, e_0)$ صفر است. و از (72) لزومَن نتیجه نمیشود $\Gamma^0{}_{0\,0}$ تابع ِ فقط زمان است. به هم ین ترتیب، از صفر-بودن ِ $(\partial_i\,\partial_0\, e_j)$ لزومَن نتیجه نمیشود $(\partial_0\,\partial_i\, e_j)$ صفر است. و از (73) لزومَن نتیجه نمیشود $\Gamma^i{}_{j\,k}$ مستقل از زمان است.

اگر فضا-زمان جداشدنی و $\Gamma^0{}_{0\,0}$ تابع ِ فقط زمان باشد، با تبدیل ِ t به t' با

$$\frac{\mathrm{d}^2\, t'}{\mathrm{d}\, t^2} = \Gamma^0{}_{0\,0}\, \frac{\mathrm{d}\, t'}{\mathrm{d}\, t}, \tag{76}$$

$\Gamma^0{}_{0,0}$ صفر میشود. در این حالت فقط مئلفِها یِ هموستار با شاخصها یِ فضایی ناصفر َند. اگر فضا-زمان جداشدنی و $\Gamma^0{}_{0\,0}$ تابع ِ فقط زمان باشد، میگویم فضا-زمان جداشدنی ست و زمان مستقل از فضا ست. به زمان ی که $\Gamma^0{}_{0\,0}$ را صفر میکند زمان ِ آفین میگویم.

اگر فضا-زمان جداشدنی باشد و مئلفِها یِ هموستار مستقل از زمان باشند، میگویم فضا-زمان ایستا ست. در این حالت لزومَن نمیشود زمان ی یافت که $\Gamma^0{}_{0\,0}$ را صفر کند و بقیه یِ مئلفِها یِ هموستار را تغییر ندهد: معادله یِ (76) وقت ی برا یِ t' جواب دارد که $\Gamma^0{}_{0\,0}$ مستقل از مکان باشد.

سرانجام، اگر فضا-زمان جداشدنی باشد، $\Gamma^0{}_{0,0}$ تابع ِ فقط زمان باشد، و $\Gamma^i{}_{j\,k}$ ها هم تابع ِ فقط مکان باشند، میگویم فضا-زمان هموستار-ضربی ست. اینجا هم اگر ابهام پیش نیاید، سادِتر میگویم فضا-زمان ضربی ست. این یعنی (تا جا یی که به هموستار مربوط میشود) فضا-زمان حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یک خمینه یِ فضا در یک خمینه یِ (یک-بُعدی یِ) زمان است. رُشن است که یک فضا-زمان ِ جداشدنی ضربی ست، اگر ایستا باشد و زمان مستقل از فضا باشد.

اگر فضا-زمان جداشدنی باشد، همچنان میشود مختصات را چنان گرفت که (67) تا (70) برقرار نباشند. اما حتمَن مختصات ی هست که (67) تا (70) را براورَند. به این مختصات مختصات ِ

استاندارد میگویم. به آن فضاها (زیرخمینِها یِ زمان-ثابت) و آن خمینه-یِ-زمانها (زیر-خمینِها یِ مکان-ثابت) که با این مختصات به دست میایند، فضاها و خمینه-یِ-زمانها یِ استاندارد میگویم. به چارچوب و زمان ِ متناظر هم چارچوب و زمان ِ استاندارد میگویم.

10 شتاب و چارچوب

برا یِ محاسبه یِ سرعت، ساختار ی جز زمان و مختصات ِ فضا لازم نیست. مئلفِها یِ سرعت در یک پایه یِ مختصاتی مشتق ِ مختصات نسبت به زمان َند:

$$v = e_i \, \frac{\mathrm{d}\, r^i}{\mathrm{d}\, t}. \tag{77}$$

و البته،

$$v = e_i \, v^i. \tag{78}$$

یعنی

$$v^i = \frac{\mathrm{d}\, r^i}{\mathrm{d}\, t}. \tag{79}$$

e پایه یِ مختصاتی ست. در واقع e_i را میشود مشتق ِ r نسبت به r^i تعریف کرد:

$$e_i = \frac{\partial\, r}{\partial\, r^i}. \tag{80}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{d}\, r}{\mathrm{d}\, t}, \\ &= \frac{\partial\, r}{\partial\, r^i} \, \frac{\mathrm{d}\, r^i}{\mathrm{d}\, t}. \end{aligned} \tag{81}$$

اما برا یِ تعیین ِ شتاب مشتق ِ بردارها یِ پایه هم لازم است:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\, e_i}{\mathrm{d}\, t} &= \frac{\partial\, e_i}{\partial\, r^j} \, \frac{\mathrm{d}\, r^j}{\mathrm{d}\, t}, \\ &= \Gamma^k{}_{j\,i} \, e_k \, v^j, \end{aligned} \tag{82}$$

که نتیجه میدهد

$$a = e_k \left(\Gamma^k{}_{j\,i}\, v^j\, v^i + \frac{\mathrm{d}\, v^k}{\mathrm{d}\, t} \right), \tag{83}$$

یا

$$a^k = \Gamma^k{}_{j\,i}\, v^j\, v^i + \frac{\mathrm{d}\, v^k}{\mathrm{d}\, t}. \tag{84}$$

که یعنی،

$$a^k = \Gamma^k{}_{j\,i}\, \frac{\mathrm{d}\, r^j}{\mathrm{d}\, t}\, \frac{\mathrm{d}\, r^i}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\mathrm{d}^2\, r^k}{\mathrm{d}\, t^2}. \tag{85}$$

از رابطه یِ بالا دیده میشود که در مئلفِها یِ شتاب فقط بخش ِ متقارن ِ هموستار (نسبت به شاخصها یِ پایین) وارد میشود، که چون هموستار متقارن (بدون- ِ-پیچش) گرفته شد، بخش ِ متقارن ِ هموستار کل ِ هموستار است.

اثر ِ تغییر- ِ-چارچوب بر شتاب هم شبیه ِ اثر ِ تغییر- ِچارچوب بر سرعت است، البته مفصلتر. مشتق ِ مئلفِها یِ سرعت نسبت به زمان را با b نشان میدهم:

$$b^i = \frac{\mathrm{d}\, v^i}{\mathrm{d}\, t}. \tag{86}$$

دیده میشود

$$a^k = \Gamma^k{}_{j\,i}\, v^j\, v^i + b^k. \tag{87}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\, v'^i}{\mathrm{d}\, t} = & \left(\frac{\partial\, t'}{\partial\, t} + \frac{\partial\, t'}{\partial\, r^j}\, v^j \right)^{-2} \Bigg[\left(\frac{\partial\, t'}{\partial\, t} + \frac{\partial\, t'}{\partial\, r^k}\, v^k \right) \\ & \left(\frac{\partial^2\, r'^i}{\partial\, t^2} + 2\, \frac{\partial^2\, r'^i}{\partial\, t\, \partial\, r^l}\, v^l + \frac{\partial^2\, r'^i}{\partial\, r^l\, \partial\, r^m}\, v^l\, v^m + \frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^l}\, b^l \right) \\ & - \left(\frac{\partial^2\, t'}{\partial\, t^2} + 2\, \frac{\partial^2\, t'}{\partial\, t\, \partial\, r^l}\, v^l + \frac{\partial^2\, t'}{\partial\, r^l\, \partial\, r^m}\, v^l\, v^m + \frac{\partial\, t'}{\partial\, r^l}\, b^l \right) \\ & \left(\frac{\partial\, r'^i}{\partial\, t} + \frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^k}\, v^k \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{88}$$

و البته،

$$\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\partial\,t'}{\partial\,t}+\frac{\partial\,t'}{\partial\,r^j}\,v^j. \tag{89}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}b'^i=&\left(\frac{\partial\,t'}{\partial\,t}+\frac{\partial\,t'}{\partial\,r^j}\,v^j\right)^{-3}\left[\left(\frac{\partial\,t'}{\partial\,t}+\frac{\partial\,t'}{\partial\,r^k}\,v^k\right)\right.\\&\left(\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,t^2}+2\,\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,t\,\partial\,r^l}\,v^l+\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^l\,\partial\,r^m}\,v^l\,v^m+\frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,b^l\right)\\&-\left(\frac{\partial^2\,t'}{\partial\,t^2}+2\,\frac{\partial^2\,t'}{\partial\,t\,\partial\,r^l}\,v^l+\frac{\partial^2\,t'}{\partial\,r^l\,\partial\,r^m}\,v^l\,v^m+\frac{\partial\,t'}{\partial\,r^l}\,b^l\right)\\&\left.\left(\frac{\partial\,r'^i}{\partial\,t}+\frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^k}\,v^k\right)\right].\end{aligned} \tag{90}$$

این را هم میشود چنین نوشت.

$$b'^i=\frac{\mathfrak{C}^i+\mathfrak{D}^i{}_j\,b^j}{\mathfrak{A}^3}. \tag{91}$$

که $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{D}$ تابعها یی از زمان و مکان و سرعت َند. $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{D}$ نسبت به سرعت از درجه یِ دست- ِ-بالا یک َند، و $\mathfrak{C}$ نسبت به سرعت از درجه یِ دست- ِ-بالا سه است. $\mathfrak{A}$ هم ان است که در تبدیل ِ سرعت ظاهر شده بود:

$$\mathfrak{A}=\frac{\partial\,t'}{\partial\,t}+\frac{\partial\,t'}{\partial\,r^j}\,v^j. \tag{92}$$

اگر برچسبها یِ جدید با برچسبها یِ قدیم یکسان باشند،

$$\begin{aligned}b'^i=&\left(\frac{\partial\,t'}{\partial\,t}+\frac{\partial\,t'}{\partial\,r^j}\,v^j\right)^{-3}\left[\left(\frac{\partial\,t'}{\partial\,t}+\frac{\partial\,t'}{\partial\,r^k}\,v^k\right)b^i\right.\\&\left.-\left(\frac{\partial^2\,t'}{\partial\,t^2}+2\,\frac{\partial^2\,t'}{\partial\,t\,\partial\,r^l}\,v^l+\frac{\partial^2\,t'}{\partial\,r^l\,\partial\,r^m}\,v^l\,v^m+\frac{\partial\,t'}{\partial\,r^l}\,b^l\right)v^i\right].\end{aligned} \tag{93}$$

اگر علاوه بر این t' هم تابع ِ فقط t باشد (آهنگ ِ همه یِ ساعتها یکسان عوض شود)،

$$b'^i=\left(\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\right)^{-3}\left(\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,b^i-\frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}\,v^i\right). \tag{94}$$

یعنی،

$$b'^i = \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^2 b^i - \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^3 \frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}\,v^i. \tag{95}$$

اگر گذر- ِ-زمان ِ چارچوب ِ جدید با گذر- ِ-زمان ِ چارچوب ِ قدیم یکسان باشد،

$$b'^i = \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,t^2} + 2\,\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,t\,\partial\,r^l}\,v^l + \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^l\,\partial\,r^m}\,v^l\,v^m + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,b^l. \tag{96}$$

اگر علاوه بر این r' هم تابع ِ فقط r باشد (ساعتها یِ جدید نسبت به ساعتها یِ قدیم ساکن باشند)،

$$b'^i = \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^l\,\partial\,r^m}\,v^l\,v^m + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,b^l. \tag{97}$$

سرانجام، اگر r' تابع ِ فقط r و t' تابع ِ فقط t باشد،

$$b'^i = \left(\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\right)^{-3} \left[\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,\left(\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^l\,\partial\,r^m}\,v^l\,v^m + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,b^l\right) - \frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}\,\frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,v^l\right]. \tag{98}$$

یعنی،

$$b'^i = \left(\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\right)^{-2} \left(\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^l\,\partial\,r^m}\,v^l\,v^m + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,b^l\right) - \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^3 \frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}\,\frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,v^l. \tag{99}$$

11 ژئُدزیک، شتاب ِ صفر

میگویند یک خم ژئُدزیک است، اگر مشتق ِ دوم َش با مشتق ِ اول َش موازی باشد. پس مسیر ِ یک ذره ژئُدزیک است اگر شتاب ِ ذره با سرعت ِ ذره موازی باشد:

$$a = \mathfrak{f}\,v. \tag{100}$$

$\mathfrak{f}$ یک اسکالر (در حالت ِ کلی تابع ِ پارامتر) است.

این که خم ژئُدزیک باشد یا نباشد به پارامترش بستگی ندارد. اگر به جا یِ زمان ِ t زمان ِ t' به کار رود (بی آن که برچسبها عوض شوند)، v و b چنین تبدیل میشوند.

$$v'^i = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,v^i. \tag{52}$$

$$b'^i = \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^2 b^i - \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^3 \frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}\,v^i. \tag{99}$$

همچنین،

$$a^k = \Gamma^k{}_{j\,i}\, v^j\, v^i + b^k. \tag{87}$$

پس، در این حالت تبدیل ِ a به a' چنین است.

$$a' = \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^2 a - \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^3 \frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}\, v. \tag{101}$$

در نتیجه اگر خم با پارامتر ِ t ژئُدزیک باشد،

$$a' = \left[\left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^2 \mathfrak{f} - \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^3 \frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}\right] v. \tag{102}$$

یا،

$$a' = \left[\left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right) \mathfrak{f} - \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}\right] v', \tag{103}$$

که نشان میدهد

$$a' = \mathfrak{f}'\, v'. \tag{104}$$

$$\mathfrak{f}' = \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right) \mathfrak{f} - \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2}. \tag{105}$$

به این ترتیب، خم با پارامتر ِ t' هم ژئُدزیک است. از جمله میشود t' را چنان انتخاب کرد که $\mathfrak{f}'$ صفر شود، یعنی a' صفر شود. این که چنین شود همئرز است با این که

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\right) = \mathfrak{f}\left(\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\right), \tag{106}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t} = \exp(\mathbf{D}^{-1}\,\mathfrak{f}), \tag{107}$$

که $\mathbf{D}^{-1}$ پادمشتق (انتگرال ِ نامعین) است:

$$(\mathbf{D}^{-1}\,\mathfrak{X})(t) = \int (\mathrm{d}\,t)\,\mathfrak{X}(t). \tag{108}$$

$$\mathbf{D}\,(\mathbf{D}^{-1}\,\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}. \tag{109}$$

از (107) انتگرال میگیرم:

$$t' = \mathbf{D}^{-1}\,[\exp(\mathbf{D}^{-1}\,\mathfrak{f})]. \tag{110}$$

پادمشتق یکتا نیست، یک ثابت- ِ-جمعی یِ آزاد دارد. به هم ین خاطر در طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا دُ ثابت ِ آزاد هست.

اگر یک خم ژنُدزیک باشد، یک پارامتر هست که با آن شتاب ِ خم صفر میشود. به این پارامتر پارامتر ِ آفین میگویند. این پارامتر یکتا نیست. اما رابطه یِ دُ پارامتر ِ آفین با هم ساده است: دیده میشود t یک پارامتر ِ آفین است، اگر و تنها اگر $\mathfrak{f}$ در (100) صفر باشد. به این ترتیب، از (106) دیده میشود t' یک پارامتر ِ آفین است، اگر و تنها اگر

$$\frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2} = 0. \tag{111}$$

این معادله هم همئرز است با

$$t' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,t, \tag{112}$$

که $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ثابت َند. پس t' یک پارامتر ِ آفین است، اگر نسبت به t دست- ِ-بالا خطی باشد: هر پارامتر ِ آفین یک تابع ِ دست- ِ-بالا-خطی از یک پارامتر ِ آفین است، و بر عکس، هر تابع ِ دست- ِ-بالا-خطی از یک پارامتر ِ آفین یک پارامتر ِ آفین است.

پارامتر ِ آفین با خم (ِ ژنُدزیک) تعریف میشود. در حالت ِ کلی مقایسه یِ پارامتر- ِ-آفینها یِ دُ ژنُدزیک معنی ندارد، مگر این ژنُدزیکها یک دیگر را قطع کنند. در این صورت برابر-بودن ِ پارامتر- ِ-آفینها در نقاط ِ تقاطع بامعنی میشود. اگر فقط یک نقطه یِ تقاطع وجود داشته باشد، میشود با یک انتقال ِ یک یِ از پارامتر- ِ-آفینها، دُ-پارامتر- ِ-آفین را در نقطه یِ تقاطع یکسان کرد. اگر دُ نقطه یِ تقاطع وجود داشته باشد، میشود با اعمال ِ یک تبدیل ِ دست- ِ-بالا-خطی بر یک یِ از پارامتر- ِ-آفینها، دُ-پارامتر- ِ-آفین را در نقاط ِ تقاطع یکسان کرد. اگر تعداد ِ نقاط ِ تقاطع بیش از دُ باشد، به طُر ِ کلی نمیشود دُ-پارامتر- ِ-آفین را در همه یِ نقاط ِ تقاطع یکسان کرد. در یک فضا یِ خطی یِ تخت (که با مختصات ِ دِکَرتی هموستار صفر است)، دُ ژنُدزیک در دست- ِ-بالا یک نقطه یکدیگر را قطع میکنند.

12 پایه یِ همراهِ ذره

r (مکانِ یک ذره) که در خمینه یِ $\mathbb{M}$ حرکت میکند تابعِ t (زمان) است. مشتقها یِ این تابع (خم) بردارها یی در فضا-یِ-مماسِ خمینه اند. مشتقِ i اُمِ r نسبت به t را با v_i نشان میدهم. از جمله مشتقِ اولِ r نسبت به t

سرعت، و مشتقِ دومِ r نسبت به t شتاب است:

$$\frac{\mathrm{d}^i r}{\mathrm{d}\, t^i} = v_i. \tag{113}$$

$$v_1 = v. \tag{114}$$

$$v_2 = a. \tag{115}$$

اگر بُعدِ خمینه $\mathfrak{m}$ باشد، دست-ِ-بالا $\mathfrak{m}$ تا از این مشتقها خطی-مستقل َند. اگر مشتقها یِ اول تا $\mathfrak{m}$ اُمِ r در زمانِ t خطی-مستقل باشند، این مشتقها یک پایه برا یِ فضا یِ مماس در $r(t)$ اند: $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ یک پایه برا یِ $\mathrm{T}_{r(t)}\mathbb{M}$ است. به این پایه، پایه یِ همراهِ ذره میگویم. رُشن است که در این حالت هر بردار ی یک ترکیبِ خطی از $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ است. این به دینامیک ربط ی ندارد. مثلَن ممکن است فضا سه-بُعدی باشد و دینامیک شتاب را بر حسبِ زمان و مکان وسرعت بدهد. اما برا یِ بسط-دادنِ یک بردار سرعت و شتاب و مشتقِ شتاب لازم است.

$\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ لزومَن خطی-مستقل نیست. ممکن است چنین باشد که در یک ناحیه یِ باز از زمان، $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل باشد و $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}+1\}$ خطی-وابسته باشد. رُشن است که $\mathfrak{k}$ نابزرگتر از $\mathfrak{m}$ است. اگر $\mathfrak{k}$ کوچکتر از $\mathfrak{m}$ باشد، $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ یک پایه یِ $\mathrm{T}_{r(t)}\mathbb{M}$ نیست، اما یک پایه یِ پهنه یِ مشتقها یِ r در t هست. در واقع از این که $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل است و $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}+1\}$ خطی-وابسته است نتیجه میشود $v_{\mathfrak{k}+1}(t)$ یک ترکیبِ خطی از $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ است:

$$v_{\mathfrak{k}+1}(t) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{a}^i{}_0(t)\, v_i(t). \tag{116}$$

این رابطه در یک ناحیه یِ باز برقرار است. پس میشود از آن مشتق گرفت:

$$v_{\mathfrak{k}+j+1}(t) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}+j} \mathfrak{b}^i(t)\, v_i(t). \tag{117}$$

با یک استقرار یِ ساده نتیجه میشود

$$v_{\mathfrak{k}+j+1}(t) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{a}^i{}_j(t)\, v_i(t). \tag{118}$$

اگر در یک ناحیه یِ باز از t مجموعه یِ $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل و مجموعه یِ $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}+1\}$ خطی-وابسته باشد، از (116) همراه با این که مشتق ِ هر یک از v_i ها برابر با v_{i+1} است نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\, v_i}{\mathrm{d}\, t} = \sum_{j=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{A}^j{}_i\, v_j, \qquad\qquad i \leq \mathfrak{k}, \tag{119}$$

که

$$\mathfrak{A}^j{}_i = \delta^j_{i+1}, \qquad\qquad i < \mathfrak{k}. \tag{120}$$

$$\mathfrak{A}^j{}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{a}^j{}_0. \tag{121}$$

اگر $\mathbb{M}$ (فضا) خطی باشد، $\mathrm{T}_r\mathbb{M}$ با خُد ِ $\mathbb{M}$ یکریخت است. در این حالت (119) یک دستگاه ِ معادلات ِ دیفرانسیل ِ خطی برا یِ v_i ها (با i نابزرگتر از $\mathfrak{k}$) است. نتیجه میشود $v_i(t)$ ها یک ترکیب ِ خطی از $\{[i, v_i(t_0)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ اند. از جمله $v(t)$ در پهنه یِ $\{[i, v_i(t_0)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ است:

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{B}^i(t, t_0)\, v_i(t_0). \tag{122}$$

این هم یعنی $r(t)$ در یک فضا یِ $\mathfrak{k}$ بُعدی میمانَد. این فضا از $r(t_0)$ میگذرد و با پهنه یِ مجموعه یِ $\{[i, v_i(t_0)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ موازی ست.

13 قید

حرکت ی را بررسی میکنم که در خمینه یِ $\mathbb{M}$ انجام میشود، اما چنان که مکان ِ متحرک همیشه در زیرخمینه یِ $\mathbb{L}$ باشد. این زیرخمینه را میشود با یک تابع ِ Z مشخص کرد:

$$\mathbb{L} = \{r \mid Z(r) = 0\}, \tag{123}$$

که Z تابع ی هموار با مقدار در $\mathbb{R}^{\mathfrak{k}}$ و با رتبه یِ کامل است، و

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{m} - \mathfrak{l}. \tag{124}$$

که،

$$\mathfrak{m} = \mathsf{dim}(\mathbb{M}). \tag{125}$$

$$\mathfrak{l} = \mathsf{dim}(\mathbb{L}). \tag{126}$$

میشود هم $\mathbb{L}$ را با یک تابع ِ یک-به-یک ِ هموار ِ $\mathfrak{r}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{M};\mathbb{R}^{\mathfrak{l}})$ نمایش داد. در این حالت $\mathfrak{r}(q)$ را با خُد ِ $r(q)$ نشان میدهم. q مختصات ِ متناظر با $\mathbb{L}$ است.

وقت ی مکان در زیرخمینه یِ $\mathbb{L}$ است، سرعت هم بر $\mathbb{L}$ مماس است. اما شتاب لزومَن چنین نیست. علت این است که مشتق ِ یک بردار ِ مماس بر $\mathbb{L}$ در راستا یی مماس بر $\mathbb{L}$، لزومَن بر $\mathbb{L}$ مماس نیست. به زبان ِ مئلفِها یِ هموستار، گیرم e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست، چنان که e_i ها به ازا یِ i ها یِ نابزرگتر از $\mathfrak{l}$ بر $\mathbb{L}$ مماس َند. در این صورت اگر i و j نابزرگتر از $\mathfrak{l}$ باشند و k بزرگتر از $\mathfrak{l}$ باشد، $\Gamma^k{}_{i\,j}$ لزومَن صفر نیست.

میشود شتاب را بر فضا یِ مماس بر $\mathbb{L}$ افکند (تصویر کرد). این کار با یک افکنش ِ $\mathfrak{P}$ شدنی ست. اما این افکنش یکتا نیست. تنها-ویژگی یِ $\mathfrak{P}$ این است که تصویر َش فضا یِ مماس بر $\mathbb{L}$ است:

$$\mathsf{img}(\mathfrak{P}) = \mathrm{T}\mathbb{L}. \tag{127}$$

در واقع این که متناظر با هر r در $\mathbb{L}$ یک $\mathfrak{P}_r$ هست که

$$\mathsf{img}(\mathfrak{P}_r) = \mathrm{T}_r\mathbb{L}. \tag{128}$$

اما برا یِ هسته یِ چنین-افکنش ی آزادی هست: لازم و کافی ست که

$$\mathsf{ker}(\mathfrak{P}) \oplus \mathsf{img}(\mathfrak{P}) = \mathrm{T}\mathbb{M}. \tag{129}$$

با یک افکنش ِ $\mathfrak{P}$ با آن ویژگیها، $(\mathfrak{P}\,a)$ بر $\mathbb{L}$ مماس است. یک راه ِ ساختن ِ چنین-افکنش ی این است که مختصات چنان انتخاب شوند که r^i به ازا یِ i بزرگتر از $\mathsf{dim}(\mathbb{L})$ صفر باشد. $\mathfrak{P}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{P}\,e_i = \begin{cases} e_i, & i \leq \mathfrak{l} \\ 0, & i > \mathfrak{l} \end{cases}. \tag{130}$$

دیده میشود $\mathfrak{P}$ یک افکنش بر فضا یِ مماس بر $\mathbb{L}$ است. با این مختصات و این افکنش،

$$v^i = 0, \quad i > \mathfrak{l}. \tag{131}$$

$$v = \sum_{i=1}^{\mathsf{dim}(\mathbb{L})} e_i\, v^i. \tag{132}$$

$$\mathfrak{P}\,a = \sum_{k=1}^{\mathfrak{l}} e_k \left(\Gamma^k{}_{i\,j}\, v^i\, v^j + \frac{\mathrm{d}\,v^k}{\mathrm{d}\,t} \right). \tag{133}$$

پس،

$$\mathfrak{P}\,a = \sum_{k=1}^{\mathfrak{l}} e_k \left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{l}} \sum_{j=1}^{\mathfrak{l}} \Gamma^k{}_{i\,j}\, v^i\, v^j + \frac{\mathrm{d}\,v^k}{\mathrm{d}\,t} \right). \tag{134}$$

اگر r'^i ها هم چنان باشند که r'^i با i بزرگتر از $\mathfrak{l}$ صفر باشد، در حالت ِ کلی پهنه یِ بردارها یِ مختصاتی یی که مماس بر $\mathbb{L}$ نیستند تغییر میکند. به هم ین خاطر افکنش ی که مختصات ِ جدید ساخته میشود هم در حالت ِ کلی با افکنش ِ قبلی فرق خاهد داشت. این تغییر v و a را عوض نمیکند، اما در حالت ِ کلی افکنده یِ a بر $\mathbb{L}$ را عوض میکند.

یک شکل ِ گسترش-یافته از این که حرکت به بر یک زیرخمینه انجام شود، این است که آن زیرخمینه وابسته به زمان باشد. گسترش ِ (123) میشود

$$\mathbb{L}(t) = \{r \mid Z(t, r) = 0\}. \tag{135}$$

البته این را میشود بر حسب ِ فضا-زمان به هم ان شکل ِ قبل دراورْد:

$$\mathbb{L}_{\mathsf{ext}} = \{(t,r) \mid Z(t,r) = 0\}. \tag{136}$$

همچنین، بستگی ی ِ r ها ی ِ درون ِ $\mathbb{L}(t)$ به مختصات ِ $\mathbb{L}(t)$، به خُد ِ t هم وابسته است:

$$r = \mathfrak{r}(t,q), \tag{137}$$

یا،

$$(t,r) = \underset{\sim}{\mathfrak{r}}(t,q). \tag{138}$$

چیز ِ جدید در این حالت آن است که $v(t)$ دیگر بر $\mathbb{L}(t)$ مماس نیست:

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial q}\,\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,t}. \tag{139}$$

جمله ی ِ دوم در طرف ِ راست بر $\mathbb{L}(t)$ مماس است، اما جمله ی ِ اول در حالت ِ کلی بر $\mathbb{L}(t)$ مماس نیست.

ممکن است حرکت مقید به بخش ی از خمینه ی ِ $\mathbb{M}$ باشد، اما بُعد ِ این بخش کمتر از بُعد ِ $\mathbb{M}$ نباشد. در این صورت باز هم بین ِ مختصات (و احتمالَن زمان) روابط ی (قیدها یی) برقرار است. اما این روابط دیگر به شکل ِ تساوی نیستند. مثلَن برا ی ِ جسم ی که بر یک خط حرکت میکند و حرکت َ ش مقید به یک سو ی ِ یک نقطه ی ِ معین است، با انتخاب ِ مختصه ی ِ r، که برا ی ِ کل ِ خط $r \in (-\infty, \infty)$، رابطه ی ِ قید میشود

$$r < r_0, \tag{140}$$

یا

$$r > r_0, \tag{141}$$

بسته به این که ذره مقید به کدام سو ی ِ آن نقطه (که مختصه اَ ش r_0 است) باشد.

ممکن است محدودیت ِ حرکت به شکل ِ روابط ِ جبری بین ِ مکان و زمان نباشد، بل که به شکل ِ معادلات ِ دیفرانسیل باشد. مثلَن

$$Z(t,r,v) = 0. \tag{142}$$

و البته ممکن است قید به شکل ِ روابط ی بین ِ زمان و مکان و مشتقها یِ مکان باشد، اما این روابط به شکل ِ تساوی نباشند.

اگر معادله یِ تحول معادله یِ دیفرانسیل باشد، تمایز ِ بین ِ روابط ِ قیدی به شکل ِ معادله یِ دیفرانسیل، و معادله یِ تحول واضح نیست. یک قرارداد این است که اگر معادله یِ دیفرانسیل ِ تحول از مرتبه یِ k باشد، هر معادله-یِ-دیفرانسیل ِ از مرتبه یِ کمتر از k یک قید به حساب آید. این یعنی اگر حالت ِ سیستم یک k تایی شامل ِ مکان و مشتقها یِ تا مرتبه یِ $(k-1)$ ِ آن است، هر رابطه بین ِ مکان و مشتقها یِ تا مرتبه یِ $(k-1)$ ِ آن (و احتمالَن زمان) قید به حساب میئاید. یعنی هر رابطه بین ِ خُد ِ متغیرها یِ حالت (و احتمالَن زمان) قید حساب میشود، و هر معادله که مشتق ِ k ُم ِ مکان (که جزئ ِ حالت نیست) را به حالت (و احتمالَن زمان) مربوط میکند معادله یِ تحول حساب میشود.

به قید ی که به شکل ِ یک یا چند رابطه یِ تساوی بین ِ زمان و مکان و مشتقات ِ مکان (آنها که در حالت وارد میشوند) باشد، قید ِ برابری میگویم.

به قید ی که به شکل ِ یک یا چند رابطه یِ تساوی بین ِ مکان و زمان باشد، قید ِ هُلُنُم میگویند. چنین-قید ی یعنی حرکت بر یک زیرخمینه از فضا-زمان انجام میشود. قید- ِ-برابری هم حرکت را بر یک زیرخمینه محدود میکند، اما یک زیرخمینه از فضا یِ حالت، یا، اگر قید شامل ِ زمان هم باشد، فضا-یِ-حالت ِ گسترش-یافته، که هر یک از اعضا یَ ش با یک زمان و یک حالت مشخص میشود.

14 ضرب ِ درونی

شبه- ِ-ضرب ِ درونی بر فضاها یِ حقیقی، یک دُ-فرم ِ ناتکین ِ متقارن ِ است. یعنی

d1 شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی یِ g (شبه- ِ-متریک ِ g) بر دُ بردار ِ u و v اثر میکند، چنان که $g(u,v)$ عدد است، نسبت به u خطی ست، و نسبت به v هم خطی ست.

d2 از صفر-بودن ِ $g(\cdot,v)$ نتیجه میشود v صفر است؛ و البته همئرز با آن، از صفر-بودن ِ $g(u,\cdot)$ نتیجه میشود u صفر است.

d3 $g(v,u)$ با $g(u,v)$ برابر است.

g ضرب ِ درونی ست (متریک است)، اگر شبه- ِ-ضرب ِ درونی باشد و معین-مثبت هم باشد. پس این که g ضرب ِ درونی ست یعنی g شبه- ِ-ضرب ِ درونی ست و

d4 اگر u صفر نباشد $g(u,u)$ مثبت است.

اگر g معلوم باشد، $g(u,v)$ را با $(u \cdot v)$ هم نشان میدهم.

میگویم u و v متعامد َند (بر هم عمود َند)، اگر $(u \cdot v)$ صفر باشد.

مجذور ِ بردار ِ u را با $\|u\|^2$ نشان میدهم، و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\|u\|^2 = u \cdot u. \tag{143}$$

مجذور ِ u یک عدد ِ حقیقی ست، اما لزومَن مجذور ِ یک عدد ِ حقیقی نیست، چون $(u \cdot u)$ لزومَن نامنفی نیست. اگر شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی معین-مثبت باشد (ضرب- ِ-درونی باشد)، $(u \cdot u)$ حتمَن نامنفی ست. دیده میشود اگر α اسکالر باشد،

$$\|(\alpha\, u)\|^2 = \alpha^2\, \|u\|^2. \tag{144}$$

طول ِ بردار ِ u را با $|u|$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم

$$|u| = \sqrt{|u \cdot u|}. \tag{145}$$

رُشن است که

$$|u| = \sqrt{|(\|u\|^2)|}, \tag{146}$$

و البته،

$$|u|^2 = |(\|u\|^2)|. \tag{147}$$

همچنین، اگر α اسکالر باشد،

$$|(\alpha\, u)| = |\alpha|\, |u|. \tag{148}$$

میگویم u پوچ است، اگر

$$u \cdot u = 0. \tag{149}$$

رُشن است که بردار ِ صفر پوچ است، و اگر شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی معین-مثبت باشد (ضرب- ِ-درونی باشد)، u پوچ است اگر و تنها اگر صفر باشد.

علامت ِ u را با $\mathsf{sgn}(u)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{sgn}(u) = \begin{cases} \mathsf{sgn}(u \cdot u), & u \cdot u \neq 0 \\ 0, & u \cdot u = 0 \end{cases}. \tag{150}$$

طرف ِ راست مقدار ِ تابع- ِ-علامت برا یِ یک متغیر ِ حقیقی ست. رُشن است که

$$u \cdot u = |u|^2 \, \mathsf{sgn}(u), \tag{151}$$

و اگر شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی معین-مثبت باشد (ضرب- ِ-درونی باشد)، علامت برا یِ همه یِ بردارها یِ ناصفر یک است. در این صورت،

$$\mathsf{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}. \tag{152}$$

میگویم u یکه است، اگر

$$|u \cdot u| = 1. \tag{153}$$

دیده میشود اگر u پوچ نباشد،

$$\left\| \frac{u}{|u|} \right\|^2 = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{u}{|u|}. \tag{154}$$

پس،

$$\left\| \frac{u}{|u|} \right\|^2 = \mathsf{sgn}(uu). \tag{155}$$

و،

$$\left|\frac{u}{|u|}\right| = 1. \tag{156}$$

یعنی اگر u پوچ نباشد $(|u|^{-1}\,u)$ یکه است. همچنین، دیده میشود اگر u پوچ نباشد،

$$\mathsf{sgn}\left(\frac{u}{|u|}\right) = \mathsf{sgn}(u). \tag{157}$$

با استفاده از دُ-فرم g میشود یک تابع ِ خطی یِ $\underset{\sim}{g}$ ساخت که یک بردار را به یک همبردار تبدیل میکند، چنان که

$$\underset{\sim}{g}\,v = g(\bullet, v). \tag{158}$$

دیده میشود این یعنی

$$\underset{\sim}{g}_{i\,j} = g_{i\,j}. \tag{159}$$

رُشن است که ناتکین-بودن ِ g همئرز است با این که $\underset{\sim}{g}$ وارون-پذیر باشد. از این پس برا یِ سادگی $\underset{\sim}{g}$ را با خُد ِ g نشان میدهم. مئلفِها یِ $(g\,v)$، یا در واقع $(\underset{\sim}{g}\,v)$، را هم با فقط v نمایش میدهم:

$$v_i = (g\,v)_i. \tag{160}$$

یعنی،

$$v_i = g_{i\,j}\,v^j. \tag{161}$$

از جمله

$$g_{i\,k}\,g_{j\,l}\,g^{k\,l} = g_{i\,j}, \tag{162}$$

که نتیجه میدهد

$$g_{j\,l}\,g^{k\,l} = \delta^k_j. \tag{163}$$

میگویم هموستار با شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی سازگار است، اگر مشتق-گیری از بردارها نسبت به شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی لَیبنیتسی باشد، یعنی اگر متناظر با بردارها یِ u و v و w،

$$\partial_w\,(u\cdot v) = (\partial_w\,u)\cdot v + u\cdot(\partial_w\,v). \tag{164}$$

∂_w مشتق ِ سویی با w است:

$$\partial_w = w^i\,\partial_i \tag{165}$$

∂_w ضمنَن هم ان ∇_w است، که ∇ مشتق-گیری یِ هموردا ست. مفصلتر، اگر g یک شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی باشد و u و v و w بردار باشند، سازگاری یِ هموستار با g یعنی

$$\partial_w\,[g(u,v)] = g(\partial_w\,u,v) + g(u,\partial_w\,v). \tag{166}$$

در حالت ِ کلی (که هموستار لزومَن با g رابطه ای ندارد)

$$\partial_w[g(u,v)] = (\partial_w\,g)(u,v) + g(\partial_w\,u,v) + g(u,\partial_w\,v). \tag{167}$$

پس سازگاری یِ هموستار با g یعنی

$$\partial_w\,g = 0. \tag{168}$$

در حالت ِ کلی لازم نیست فضا (یا فضا-زمان) شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی داشته باشد. اگر چنین بود هم لازم نیست هموستار با شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی سازگار باشد. اما از این پس در این متن، جز جا یی که صریحَن خلاف ِ آن گفته شود، فرض بر این است که اگر فضا (یا فضا-زمان) شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی داشت، هموستار با آن سازگار است. به علاوه فرض شده بود هموستار متقارن است، یعنی متناظر با یک پایه یِ مختصاتی یِ e،

$$\partial_j\,e_i = \partial_i\,e_j, \tag{63}$$

یا،

$$\Gamma^k{}_{j\,i} = \Gamma^k{}_{i\,j}. \tag{64}$$

به این ترتیب فرض بر این است که اگر فضا (یا فضا-زمان) شبه-ِ-ضرب-ِ-درونی داشته باشد، هموستار لِوی-چیویتا ست، یعنی متناظر با یک پایه یِ مختصاتی،

$$\Gamma^k{}_{i\,j} = \frac{1}{2}\, g^{l\,k}(\partial_i\, g_{l\,j} + \partial_j\, g_{l\,i} - \partial_l\, g_{i\,j}). \tag{169}$$

گیرم g یک شبه-ِ-ضربِ درونی بر فضا-زمان است. مشتقِ مئلفِها یِ متریک، بر حسبِ مئلفِها یِ هموستارِ لِوی-چیویتا چنین میشود:

$$\partial_\alpha\, g_{\beta\,\gamma} = \Gamma_{\beta\,\alpha\,\gamma} + \Gamma_{\gamma\,\alpha\,\beta}, \tag{170}$$

که شاخصِ اولِ هموستار با متریک پایین آورده شده. میشود مختصات را چنان گرفت که e_0 بر فضا عمود شود، یعنی

$$g_{0\,j} = 0. \tag{171}$$

اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی باشد و این مختصات استاندارد باشند، مئلفِها یِ با شاخص-ِ-پایینِ Γ هم اگر شاخصها مخلوط باشند صفر میشوند. این نتیجه میدهد $g_{0\,0}$ مستقل از مکان است و $g_{i\,j}$ ها هم مستقل از زمان َند، که نتیجه میدهد $\Gamma^0{}_{0\,0}$ مستقل از مکان است و $\Gamma^i{}_{j\,k}$ ها مستقل از زمان َند. یعنی فضا-زمان هموستار-ضربی ست. در این حالت با تبدیلِ زمان از t به t' که

$$\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t} = \sqrt{|g_{0\,0}|}, \tag{172}$$

e_0 به e'_0 تبدیل میشود که ثابت است، در واقع یکه است، و بردار-ِ-پایهِا یِ فضایی هم عوض نمیشوند. رابطه یِ (172) ضمنَن نتیجه میدهد

$$\frac{\mathrm{d}^2\,t'}{\mathrm{d}\,t^2} = \Gamma^0{}_{0\,0}\,\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}, \tag{76}$$

که هم ان تبدیل-ِ-زمان ی ست که $\Gamma^0{}_{0\,0}$ را صفر میکند.

به این ترتیب، اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی باشد و با مختصاتِ استاندارد e_0 بر فضا عمود باشد، فضا-زمان هموستار ضربی ست.

اگر مئلفِها یِ متریک مستقل از زمان و $g_{0\,j}$ ها صفر باشند، میگویم فضا-زمان متریک-ایستا ست. چنین فضا-زمان ی لزومَن هموستار-ایستا نیست:

$$\Gamma^i{}_{0\,0} = -\frac{1}{2}\, g^{i\,j}\, \partial_j\, g_{0\,0}, \tag{173}$$

$$\Gamma^0{}_{0\,k} = \frac{1}{2}\, g^{0\,0}\, \partial_k\, g_{0\,0}, \tag{174}$$

که نشان میدهد $\Gamma^i{}_{0\,0}$ ها و $\Gamma^0{}_{0\,k}$ ها لزومَن صفر نیستند.

مشابه با این، اگر $g_{0\,j}$ ها صفر باشند و $g_{0\,0}$ مستقل از مکان باشد، فضا-زمان لزومَن جداشدنی نیست:

$$\Gamma^i{}_{0\,k} = \frac{1}{2}\, g^{i\,j}\, \partial_0\, g_{j\,k}, \tag{175}$$

$$\Gamma^0{}_{j\,k} = -\frac{1}{2}\, g^{0\,0}\, \partial_0\, g_{j\,k}, \tag{176}$$

که نشان میدهد $\Gamma^i{}_{0\,k}$ ها و $\Gamma^0{}_{j\,k}$ ها لزومَن صفر نیستند.

اگر $g_{0\,j}$ ها صفر باشند، $g_{0\,0}$ مستقل از مکان باشد، و $g_{i\,j}$ ها مستقل از زمان باشند، میگویم فضا-زمان متریک ضربی ست. از رابطه یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا با مشتق ِ متریک، رُشن است که فضا-زمان ی که متریک-ضربی باشد هموستار-ضربی هم هست و فضا-زمان ی که هموستار-ضربی باشد متریک-ضربی هم هست. پس به جا یِ فضا-زمان ِ هموستار-ضربی یا فضا-زمان ِ متریک-ضربی، سادِتر میگویم فضا-زمان ِ ضربی.

بر فضا (یا فضا-زمان)، به شرط ی که سمت-پذیر باشد، میشود عنصر- ِ-حجم تعریف کرد. بُعد ِ $\mathbb{M}$ را با $\mathfrak{m}$ نشان میدهم. یک عنصر- ِ-حجم بر $\mathbb{M}$ یک تانسر ِ پادمتقارن ِ نُع ِ $(0,\mathfrak{m})$ است، که هیچ جا صفر نمیشود. اگر بر فضا (یا فضا-زمان)، هم عنصر- ِ-حجم و هم شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی تعریف شده باشد، در حالت ِ کلی لازم نیست عنصر- ِ-حجم به شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی مربوط باشد. میگویم عنصر- ِ-حجم ِ ε با شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی یِ g سازگار است، اگر

$$\varepsilon(e_1, \cdots, e_{\mathfrak{m}}) = \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, g)|}. \tag{177}$$

که e یک پایه یِ راست-دست است، و

$$\delta_e\, e^i = e_i. \tag{178}$$

از این پس در این متن، جز جا یی که صریحَن خلاف ِ آن گفته شود، فرض بر این است که اگر فضا (یا فضا-زمان) شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی و عنصر- ِ-حجم داشت، عنصر- ِ-حجم با شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی سازگار است.

دیده میشود اگر فضا-زمان شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی و عنصر- ِ-حجم داشته باشد و $\underset{\sim}{g}_{0\,j}$ ها صفر باشند، که $\underset{\sim}{g}$ متریک ِ فضا-زمان است،

$$\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|} = \sqrt{|\underset{\sim}{g}_{0\,0}|}\,\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}, \tag{179}$$

که g تحدید ِ $\underset{\sim}{g}$ به فضا ست:

$$g_{i\,j} = \underset{\sim}{g}_{i\,j}. \tag{180}$$

این یعنی عنصر- ِ-حجم ِ فضا-زمان هم به عنصر- ِ-حجم ِ زمان و عنصر- ِ-حجم ِ فضا تفکیک میشود.

با استفاده از شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی میشود بین ِ افکنشها یی که تصویر ِشان یک زیرفضا یِ معین است هم یک ی را خاص کرد. این اقکنش ِ خاص افکنش ِ قائم است. میگویم افکنش ِ $\mathfrak{P}$ یک افکنش ِ قائم است، اگر $\ker(\mathfrak{P})$ بر $\mathrm{img}(\mathfrak{P})$ عمود باشد، که تعامد با شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی یِ g تعریف شده، و فرض شده هیچ بردار ِ ناصفر ی در $\mathrm{img}(\mathfrak{P})$ بر خُد َ ش عمود نیست. اگر g ضرب- ِ-درونی باشد این فرض همیشه برقرار است.

از جمله، گیرم $\mathbb{L}$ یک زیرخمینه یِ $\mathbb{M}$ (فضا) است و مکان ِ متحرک همواره در زیرخمینه یِ $\mathbb{L}$ است. افکنش ِ قائم ِ $\mathfrak{P}$ را چنان میگیرم که تصویر َ ش $\mathrm{T}\mathbb{L}$ باشد. با این افکنش میشود بردارها را به بخشها یِ مماس بر $\mathrm{T}\mathbb{L}$ و عمود بر $\mathrm{T}\mathbb{L}$ تجزیه کرد. سرعت مماس بر $\mathrm{T}\mathbb{L}$ است، یعنی بخش ِ عمود بر $\mathrm{T}\mathbb{L}$ ندارد. اما شتاب در حالت ِ کلی هم بخش ی دارد که مماس بر $\mathrm{T}\mathbb{L}$ است، و هم بخش ی دارد که عمود بر $\mathrm{T}\mathbb{L}$ است.

15 طول و ژئُدزیک

با استفاده از شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی میشود طول تعریف کرد. طول- ِ-جبری یِ خم ِ γ از t_1 تا t_2 را با $\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,|(\mathbf{D}\,\gamma)(t)|. \tag{181}$$

با نماد-گذاری یِ سادِتر،

$$\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,|v|. \tag{182}$$

با استفاده از قضیه یِ تغییر- ِ-متغیر دیده میشود اگر t' یک پارامتر ِ دیگر برا یِ γ باشد چنان که $(\mathrm{d}\,t'/\mathrm{d}\,t)$ مثبت باشد (تابع ِ بازپارامترش مثبت باشد)، طول- ِ-جبری یِ خم با تبدیل ِ پارامتر ِ t به t' عوض نمیشود. اگر $(\mathrm{d}\,t'/\mathrm{d}\,t)$ منفی باشد (تابع ِ بازپارامترش منفی باشد)، با تبدیل- ِ-پارامتر طول- ِ-جبری قرینه میشود. متناظر با خم ِ γ، پارامتر- ِ-طول ِ ℓ را چنین تعریف میکنم.

$$\ell(t)=\mathsf{al}_\gamma(t,t_0), \tag{183}$$

که t_0 یک ثابت است. دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\ell}{\mathrm{d}\,t}=\left|\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\right|, \tag{184}$$

که r مکان ِ متناظر با γ است. به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\,\ell}{\mathrm{d}\,t}=|v|. \tag{185}$$

از جمله،

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,\ell}\cdot\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,\ell}\right|=1, \tag{186}$$

یا

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,\ell}\right|=1. \tag{187}$$

البته رُشن است که رابطه یِ اخیر وقت ی درست است که سرعت پوچ نباشد.

دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t}=2\,v\cdot a. \tag{188}$$

اگر خم ژئُدزیک باشد، شتاب با سرعت موازی ست. به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t}=2\,\mathfrak{f}\,(v\cdot v), \tag{189}$$

که f یک اسکالر است. این رابطه نشان میدهد v اگر پوچ باشد پوچ میمانَد و اگر پوچ نباشد پوچ نمیشود و علامت َش هم تغییر نمیکند. از جمله اگر خم ژئُدزیک باشد و مشتق َش پوچ نباشد،

$$\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,\ell}\cdot\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,\ell}=\mathfrak{s}, \tag{190}$$

که $\mathfrak{s}$ ثابت است و $|\mathfrak{s}|$ یک است. از این و رابطه یِ (189) برا یِ یک ژئُدزیک معلوم میشود اگر مشتقِ ژئُدزیک پوچ نباشد پارامتر-ِ-طولِ ژئُدزیک یک پارامترِ آفین است. اگر مشتقِ خم پوچ باشد هم طول صفر است. پس اگر t یک پارامترِ آفین برا یِ یک ژئُدزیک باشد،

$$\ell=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\,t, \tag{191}$$

که $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ثابت َند.

رُشن است که اگر خم ژئُدزیک و پارامتر آفین باشد،

$$\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t}=0, \tag{192}$$

که یعنی علامت و طولِ بردارِ سرعت ثابت َند.

قبلَن ژئُدزیک خم ی تعریف شد که شتاب َش با سرعت َش موازی ست. با استفاده از شبه-ِ-متریک تعریفها یِ دیگر ی برا یِ ژئُدزیک میئاورم و نشان میدهم وقت ی هموستار لِوی-چیویتا باشد، این تعریفها با تعریفِ قبلی سازگار َند. تعریفِ اول بر اساسِ طول-ِ-جبری یِ خمها یی ست که از دُ نقطه یِ ثابت میگذرند. خمها یی را در نظر میگیرم که ابتدا و انتها یِ شان r_1 و r_2 (متناظر با پارامترها یِ، به ترتیب، t_1 و t_2) است. میگویم خمِ γ از این خمها یک-ژئُدزیک است، اگر مشتقِ $\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)$ نسبت به γ صفر باشد، یعنی وقت ی γ را تغییر میدهم تغییرِ $\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)$ تا مرتبه یِ یک

نسبت به تغییر ِ γ صفر باشد. دیده میشود

$$\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,\sqrt{|g_{i\,j}\,v^i\,v^j|}. \tag{193}$$

به این ترتیب، با فرض ِ این که $\mathsf{sgn}(v)$ صفر نیست،

$$\begin{aligned}\delta\,[\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)]&=\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,\frac{\mathsf{sgn}(v)}{2\,|v|}[(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j\,\delta r^k+2\,v_k\,\delta\,v^k]+o(\delta\,r),\\&=\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,\left[\frac{\mathfrak{F}}{2}(\partial_k\,g_{i\,j})v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,(\mathfrak{F}\,v_k)}{\mathrm{d}\,t}\right]\,\delta\,r^k\\&\quad+(\mathfrak{F}\,v_k\,\delta\,r^k)_{t_1}^{t_2}+o(\delta\,r).\end{aligned} \tag{194}$$

که

$$\mathfrak{F}=\frac{\mathsf{sgn}(v)}{|v|}. \tag{195}$$

جمله یِ مرزی صفر است، چون $(\delta\,r)$ در t_1 و t_2 صفر است. پس،

$$\begin{aligned}\frac{\delta\,\mathsf{al}_\gamma}{\delta\,r^k}&=\frac{\mathfrak{F}}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,(\mathfrak{F}\,v_k)}{\mathrm{d}\,t},\\&=\mathfrak{F}\,\left[\frac{1}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,(g_{k\,j}\,v^j)}{\mathrm{d}\,t}\right]-\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{F}}{\mathrm{d}\,t}\,v_k,\\&=\mathfrak{F}\,\left[\frac{1}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-(\partial_i\,g_{k\,j})\,v^i\,v^j-g_{k\,j}\,\frac{\mathrm{d}\,v^j}{\mathrm{d}\,t}\right]\\&\quad-\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{F}}{\mathrm{d}\,t}\,g_{k\,l}\,v^l.\end{aligned} \tag{196}$$

اما،

$$g_{k\,l}\,\Gamma^l{}_{i\,j}=\frac{1}{2}\,(\partial_i\,g_{k\,j}+\partial_j\,g_{i\,k}-\partial_k\,g_{i\,j}). \tag{197}$$

پس،

$$\frac{\delta\,\mathsf{al}_\gamma}{\delta r^k}=-\mathfrak{F}\,g_{k\,l}\,\left(\frac{\mathrm{d}\,v^l}{\mathrm{d}\,t}+\Gamma^l{}_{i\,j}\,v^i\,v^j-\mathfrak{f}\,v^l\right). \tag{198}$$

که

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{\mathfrak{F}}\,\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{F}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{199}$$

یعنی،

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{|v|}\,\frac{\mathrm{d}\,|v|}{\mathrm{d}\,t}. \tag{200}$$

یا،

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{2(v\cdot v)}\,\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{201}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\delta\,\mathsf{al}_\gamma}{\delta\,r^k} = -\mathfrak{F}\,g_{k\,l}\,(a^l - f\,v^l). \tag{202}$$

شرط ِ این که γ یک-ژئُدزیک باشد این است که طرف ِ چپ صفر باشد. دیده میشود این هم ان شرط ِ ژئُدزیک-بودن ِ γ است، البته با این شرط که سرعت پوچ نباشد. با جا-گذاری یِ $\mathfrak{f}$، شرط ِ این که γ یک-ژئُدزیک باشد میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{v}{2(v\cdot v)}\,\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{203}$$

تعریف ِ طول- ِ-جبری را میشود با یک پارامتر گسترش داد. $(\mathfrak{n})$-طول- ِ-جبری یِ خم ِ γ از t_1 تا t_2 را با $\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}(t_2,t_1)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}(t_2,t_1) = \frac{1}{\mathfrak{n}}\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,|(\mathbf{D}\,\gamma)(t)|^{\mathfrak{n}}. \tag{204}$$

با نماد-گذاری یِ سادِتر،

$$\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}(t_2,t_1) = \frac{1}{\mathfrak{n}}\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,|v|^{\mathfrak{n}}. \tag{205}$$

دیده میشود طول- ِ-جبری هم ان $(\mathfrak{n})$-طول- ِ-جبری به ازا یِ $\mathfrak{n}$ برابر با یک است. اما اگر $\mathfrak{n}$ برابر با یک نباشد، $(\mathfrak{n})$-طول- ِ-جبری مستقل از تغییر- ِ-پارامتر (با تابع- ِ-بازپارامترشها یِ مثبت) نیست.

خمها یی را در نظر میگیرم که ابتدا و انتها یِ شان r_1 و r_2 (متناظر با پارامترها یِ، به ترتیب، t_1 و t_2) است. میگویم خم ِ γ از این خمها $(\mathfrak{n})$-ژئُدزیک است، اگر مشتق ِ $\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}(t_2,t_1)$ نسبت به γ صفر باشد، یعنی وقت ی γ را تغییر میدهم تغییر ِ $\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}(t_2,t_1)$ تا مرتبه یِ یک نسبت به تغییر ِ γ صفر باشد. دیده میشود

$$\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}(t_2,t_1)=\frac{1}{\mathfrak{n}}\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,|g_{i\,j}\,v^i\,v^j|^{\mathfrak{n}/2}. \tag{206}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\delta[\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}(t_2,t_1)]&=\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,\frac{\mathsf{sgn}(v)}{2\,|v|}[(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j\,\delta r^k+2\,v_k\,\delta\,v^k]|\,v|^{\mathfrak{n}-1}+o(\delta\,r),\\&=\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,\left\{\frac{\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}}{2}(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,[\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}\,v_k]}{\mathrm{d}\,t}\right\}\,\delta\,r^k\\&\quad+[\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}\,v_k\,\delta\,r^k]_{t_1}^{t_2}+o(\delta\,r).\end{aligned} \tag{207}$$

که

$$\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}=|v|^{\mathfrak{n}-2}\,\mathsf{sgn}(v). \tag{208}$$

جمله یِ مرزی صفر است، چون $(\delta\,r)$ در t_1 و t_2 صفر است. پس،

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}}{\delta r^k}&=\frac{\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,[\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}\,v_k]}{\mathrm{d}\,t},\\&=\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}\,\left[\frac{1}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,(g_{k\,j}\,v^j)}{\mathrm{d}\,t}\right]-\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}}{\mathrm{d}\,t}\,v_k,\\&=\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}\,\left[\frac{1}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-(\partial_i\,g_{k\,j})v^i\,v^j-g_{k\,j}\,\frac{\mathrm{d}\,v^j}{\mathrm{d}\,t}\right]\\&\quad-\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}}{\mathrm{d}\,t}\,g_{k\,l}\,v^l.\end{aligned} \tag{209}$$

که میشود

$$\frac{\delta\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}}{\delta r^k}=-\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}\,g_{k\,l}\,\left[\frac{\mathrm{d}\,v^l}{\mathrm{d}\,t}+\Gamma^l{}_{i\,j}\,v^i\,v^j-\mathfrak{f}^{(\mathfrak{n})}\,v^l\right]. \tag{210}$$

که

$$\mathfrak{f}^{(\mathfrak{n})}=-\frac{1}{\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}}\,\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}}{\mathrm{d}\,t} \tag{211}$$

یعنی،

$$\mathfrak{f}^{(\mathfrak{n})} = \frac{2-\mathfrak{n}}{|v|}\,\frac{\mathrm{d}\,|v|}{\mathrm{d}\,t}. \tag{212}$$

یا،

$$\mathfrak{f}^{(\mathfrak{n})} = \frac{2-\mathfrak{n}}{2(v\cdot v)}\,\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{213}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\delta\,\mathsf{al}_\gamma^{(\mathfrak{n})}}{\delta\,r^k} = -\mathfrak{F}^{(\mathfrak{n})}\,g_{k\,l}\,[a^l - \mathfrak{f}^{(\mathfrak{n})}\,v^l]. \tag{214}$$

شرط ِ این که γ یک $(\mathfrak{n})$-ژئُدزیک باشد این است که طرف ِ چپ صفر باشد. دیده میشود این هم ان شرط ِ ژئُدزیک-بودن ِ γ است، البته با این شرط که سرعت پوچ نباشد. اگر γ یک $(\mathfrak{n})$-ژئُدزیک باشد،

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{(2-\mathfrak{n})\,v}{2(v\cdot v)}\,\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{215}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t} &= 2\,v\cdot\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t},\\ &= (2-\mathfrak{n})\,\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t}.\end{aligned} \tag{216}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathfrak{n}-1)\,\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t} = 0. \tag{217}$$

این یعنی $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{n})}$ صفر است، مگر $\mathfrak{n}$ برابر با یک باشد. پس وقت ی $\mathfrak{n}$ برابر با یک نیست، γ یک $(\mathfrak{n})$-ژئُدزیک است، اگر و تنها اگر γ ژئُدزیک با پارامتر ِ آفین باشد (و البته سرعت پوچ نباشد).

دی-طول- ِ-جبری ی ِ خم ِ γ از t_1 تا t_2 را با $\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\cdot[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]. \tag{218}$$

با نماد-گذاری یِ سادِتر،

$$\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,v\cdot v. \tag{219}$$

دی-طول- ِ-جبری دقیقَن هم ان ($\mathfrak{n}$)-طول- ِ-جبری به ازا یِ $\mathfrak{n}$ برابر با دُ نیست: انتگرال-ده یِ متناظر با دی-طول- ِ-جبری قدر- ِ-مطلق ندارد. اما اگر علامت ِ سرعت نامنفی باشد این-دُ با هم برابر َند. از جمله اگر شبه- ِ-متریک معین-مثبت باشد این-دُ با هم برابر َند. دی-طول- ِ-جبری هم مستقل از تغییر- ِ-پارامتر (با تابع- ِ-بازپارامترشها یِ مثبت) نیست.

خمها یی را در نظر میگیرم که ابتدا و انتها یِ شان r_1 و r_2 (متناظر با پارامترها یِ، به ترتیب، t_1 و t_2) است. میگویم خم ِ γ از این خمها دُ-ژئُدزیک است، اگر مشتق ِ $\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)$ نسبت به γ صفر باشد، یعنی وقت ی γ را تغییر میدهم تغییر ِ $\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)$ تا مرتبه یِ یک نسبت به تغییر ِ γ صفر باشد. دیده میشود

$$\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,g_{i\,j}\,v^i\,v^j. \tag{220}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\delta[\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)]&=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,[(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j\,\delta r^k+2\,v_k\,\delta\,v^k]+o(\delta\,r),\\&=\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{d}\,t)\,\left[\frac{1}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,v_k}{\mathrm{d}\,t}\right]\,\delta\,r^k\\&\quad+[v_k\,\delta\,r^k]_{t_1}^{t_2}+o(\delta\,r).\end{aligned} \tag{221}$$

جمله یِ مرزی صفر است، چون $(\delta\,r)$ در t_1 و t_2 صفر است. پس،

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathsf{Al}_\gamma}{\delta r^k}&=\frac{1}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,v_k}{\mathrm{d}\,t},\\&=\frac{1}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-\frac{\mathrm{d}\,(g_{k\,j}\,v^j)}{\mathrm{d}\,t},\\&=\frac{1}{2}\,(\partial_k\,g_{i\,j})\,v^i\,v^j-(\partial_i\,g_{k\,j})\,v^i\,v^j-g_{k\,j}\,\frac{\mathrm{d}\,v^j}{\mathrm{d}\,t},\end{aligned} \tag{222}$$

که میشود

$$\frac{\delta\,\mathsf{Al}_\gamma}{\delta\,r^k}=-g_{k\,l}\,\left(\frac{\mathrm{d}\,v^l}{\mathrm{d}\,t}+\Gamma^l{}_{i\,j}\,v^i\,v^j\right). \tag{223}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\delta\,\mathsf{Al}_\gamma}{\delta\,r^k} = -g_{k\,l}\,a^l. \tag{224}$$

شرط ِ این که γ یک دُ-ژئُدزیک باشد این است که طرف ِ چپ صفر باشد. دیده میشود این هم ان شرط ِ ژئُدزیک-بودن ِ γ با پارامتر ِ آفین است. پوچ-نبودن ِ سرعت هم لازم نیست.

16 کنج ِ فْرُنه

با استفاده از ضرب- ِ-درونی میشود چارچوب ِ همراه ِ ذره را یکه-متعامد کرد. مشتق ِ i ُم ِ مکان است را با v_i نشان میدهم:

$$\frac{\mathrm{d}^i\,r}{\mathrm{d}\,t^i} = v_i. \tag{113}$$

فرض میکنم $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل است و $\{[i, v_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}+1\}$ خطی-وابسته است. $\mathfrak{k}$ نابزرگتر از $\mathfrak{m}$ است، که $\mathfrak{m}$ بُعد ِ فضا ست. بردارها ی ِ u_i را چنین تعریف میکنم.

$$u_i = \begin{cases} v_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} u_j\,\frac{[u_j(t)]\cdot[v_i(t)]}{[u_j(t)]\cdot[u_j(t)]}, & i \leq \mathfrak{k}+1, \\ \\ v_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathfrak{k}} u_j\,\frac{[u_j(t)]\cdot[v_i(t)]}{[u_j(t)]\cdot[u_j(t)]}, & i > \mathfrak{k}+1 \end{cases}. \tag{225}$$

دیده میشود

$$u_1(t) = v_1(t). \tag{226}$$

و تعریف ِ استقرایی ی ِ $\{[i, u_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ کامل است. همچنین،

$$u_i = 0, \qquad i > \mathfrak{k}. \tag{227}$$

با یک استقرا نتیجه میشود

$$[u_i(t)]\cdot[u_j(t)]\propto\delta_{i\,j}. \tag{228}$$

$$|u_i(t)|>0, \qquad i\le\mathfrak{k}. \tag{229}$$

$$|u_i(t)|=0, \qquad i>\mathfrak{k}. \tag{230}$$

این هم ان روش ِ گْرام-شْمیت برا یِ ساختن ِ یک مجموعه یِ متعامد از $\{[i,v_i(t)]\mid 1\le i\le\mathfrak{m}\}$ است. مجموعه-یِ-متعامد ِ حاصل $\{[i,u_i(t)]\mid 1\le i\le\mathfrak{m}\}$ است، که البته u_i ها یِ با i بزرگتر از $\mathfrak{k}$ صفر َند. تعریف میکنم

$$\tau_i(t)=\frac{u_i(t)}{|u_i(t)|}, \qquad i\le\mathfrak{k}. \tag{231}$$

دیده میشود

$$[\tau_i(t)]\cdot[\tau_j(t)]=\delta_{i\,j}, \qquad i,j\le\mathfrak{k}. \tag{232}$$

به این ترتیب $\{[i,\tau_i(t)]\mid 1\le i\le\mathfrak{k}\}$ یک مجموعه یِ خطی-مستقل ِ یکه-متعامد است، که پهنه اَش با پهنه یِ $\{[i,u_i(t)]\mid 1\le i\le\mathfrak{k}\}$ برابر است. اگر $\mathfrak{k}$ برابر با $\mathfrak{m}$ باشد، $\{[i,\tau_i(t)]\mid 1\le i\le\mathfrak{k}\}$ یک پایه یِ یکه-متعامد برا یِ فضا ست. در واقع یک پایه یِ $\mathrm{T}_{r(t)}\mathbb{M}$ است، که $\mathbb{M}$ فضا ست. اگر $\mathfrak{k}$ کوچکتر از $\mathfrak{m}$ باشد، میشود به آن $(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})$ عضو افزود، چنان که $\{[i,\tau_i(t)]\mid 1\le i\le\mathfrak{m}\}$ یکه-متعامد باشد.

اگر فضا شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی داشته باشد (که لزومَن معین-مثبت نیست)، هنوز هم ممکن است ساختار ِ بالا شدنی باشد. یک شرط ِ لازم و کافی این است که اگر i نابزرگتر از $\mathfrak{k}$ باشد $u_i(t)$ پوچ نباشد. البته در این حالت رابطه یِ (232) هم چنین میشود.

$$|[\tau_i(t)]\cdot[\tau_j(t)]|=\delta_{i\,j}, \qquad i,j\le\mathfrak{k}. \tag{233}$$

دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,u_i}{\mathrm{d}\,t}=u_{i+1}+\sum_{j=1}^{i}\mathfrak{a}^j{}_i\,u_j. \tag{234}$$

از تعامد ِ $\{[i, u_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\, u_i}{\mathrm{d}\, t} \cdot u_j = -u_i \cdot \frac{\mathrm{d}\, u_j}{\mathrm{d}\, t}, \quad j \neq i. \tag{235}$$

از دُ-رابطه یِ اخیر همراه با تعامد ِ $\{[i, u_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ هم نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\, u_i}{\mathrm{d}\, t} \cdot u_j = \begin{cases} -u_i \cdot u_i, & j = i-1 \\ 0, & j < i-1 \end{cases}. \tag{236}$$

همچنین،

$$\frac{\mathrm{d}\, u_i}{\mathrm{d}\, t} \cdot u_i = \frac{1}{2}\, \frac{\mathrm{d}\, (u_i \cdot u_i)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{237}$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}\, u_i}{\mathrm{d}\, t} \cdot u_i = \frac{1}{2}\, \frac{\mathrm{d}\, \{[\mathsf{sgn}(u_i)]\, |u_i|^2\}}{\mathrm{d}\, t}. \tag{238}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\, u_i}{\mathrm{d}\, t} = u_{i+1} + \frac{\mathrm{d}\, |u_i|}{\mathrm{d}\, t}\, \frac{u_i}{|u_i|} - \frac{u_i \cdot u_i}{u_{i-1} \cdot u_{i-1}}\, u_{i-1}, \quad i \leq \mathfrak{k}. \tag{239}$$

در نتیجه،

$$\frac{\mathrm{d}\, \tau_i}{\mathrm{d}\, t} = \frac{|u_{i+1}|}{|u_i|}\, \tau_{i+1} - \frac{u_i \cdot u_i}{u_{i-1} \cdot u_{i-1}}\, \frac{|u_{i-1}|}{|u_i|}\, \tau_{i-1}, \quad i \leq \mathfrak{k}. \tag{240}$$

در اثر ِ تبدیل ِ پارامتر ِ t به t'، بردارها یِ v_i و u_i و τ_i به بردارها یِ، به ترتیب، v'_i و u'_i و τ'_i تبدیل میشوند. با یک استقرا دیده میشود

$$v'_i = \left(\frac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, t'}\right)^i v_i + \sum_{j=1}^{i-1} \mathfrak{b}^j{}_i\, v_j. \tag{241}$$

$\tilde{v}_i$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{v}_i = \left(\frac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, t'}\right)^i v_i. \tag{242}$$

دیده میشود

$$\tilde{v}_i = v'_i + \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\mathfrak{b}}^j{}_i \, v'_j. \tag{243}$$

از جمله،

$$\tilde{v}_1 = v'_1. \tag{244}$$

نتیجه یِ روش ِ گْرام-شْمیت برا یِ ساختن ِ یک مجموعه یِ متعامد از $\{[i, v'_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ مجموعه یِ $\{[i, u'_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ است. نتیجه یِ روش ِ گْرام-شْمیت برا یِ ساختن ِ یک مجموعه یِ متعامد از $\{[i, \tilde{v}_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ را هم با $\{[i, \tilde{u}_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ نشان میدهم. با استفاده از (243)، با یک استقرا دیده میشود

$$\tilde{u}_i = u'_i. \tag{245}$$

از (242) هم دیده میشود

$$\tilde{u}_i = \left(\frac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, t'}\right)^i u_i. \tag{246}$$

به این ترتیب،

$$u'_i = \left(\frac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, t'}\right)^i u_i. \tag{247}$$

این هم نتیجه میدهد

$$\tau'_i = \left[\mathsf{sgn}\left(\frac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, t'}\right)\right]^i \tau_i. \tag{248}$$

پس تغییر- ِ-پارامتر τ_i ها یِ با i ِ زُج را تغییر نمیدهد. تغییر- ِ-پارامتر τ_i ها یِ با i ِ فرد را تغییر نمیدهد، اگر تابع- ِ-بازپارامترش مثبت باشد؛ و τ_i ها یِ با i ِ فرد را در منفی ضرب میکند، اگر تابع- ِ-بازپارامترش منفی باشد.

رابطه یِ (240) بر حسب ِ ℓ (پارامتر ِ طول) به جا یِ t چنین میشود

$$\frac{\mathrm{d}\, \tau_i}{\mathrm{d}\, \ell} = \frac{1}{|v|} \frac{|u_{i+1}|}{|u_i|} \tau_{i+1} - \frac{1}{|v|} \frac{u_i \cdot u_i}{u_{i-1} \cdot u_{i-1}} \frac{|u_{i-1}|}{|u_i|} \tau_{i-1}, \quad i \leq \mathfrak{k}. \tag{249}$$

κ_i را چنین تعریف میکنم.

$$\kappa_i = \frac{1}{|v|}\,\frac{u_{i+1}\cdot u_{i+1}}{u_i\cdot u_i}\,\frac{|u_i|}{|u_{i+1}|}, \quad i \le \mathfrak{k}. \tag{250}$$

دیده میشود

$$\kappa_i = \frac{\tau_{i+1}\cdot \tau_{i+1}}{\tau_i\cdot \tau_i}\,\frac{|u_{i+1}|}{|v|\,|u_i|}, \qquad i \le \mathfrak{k}. \tag{251}$$

به این ترتیب معادله یِ تحول برا یِ τ_i چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\,\tau_i}{\mathrm{d}\,\ell} = |\kappa_i|\,\tau_{i+1} - \kappa_{i-1}\,\tau_{i-1}, \qquad i \le \mathfrak{k}. \tag{252}$$

κ_0 صفر تعریف شده:

$$\kappa_0 = 0. \tag{253}$$

رُشن است که κ_i ها با تغییر- ِ-پارامتر تغییر نمیکنند و

$$\kappa_{\mathfrak{k}} = 0. \tag{254}$$

ماتریس- ِ-خمش ِ $K(t)$ را با اثر َش بر $\{[i,\tau_i(t)] \mid 1 \le i \le \mathfrak{k}\}$ تعریف میکنم:

$$K\,\tau_i = |\kappa_i|\,\tau_{i+1} - \kappa_{i-1}\,\tau_{i-1}, \qquad i \le \mathfrak{k}. \tag{255}$$

دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\tau_i}{\mathrm{d}\,\ell} = K\,\tau_i, \qquad i \le \mathfrak{k}. \tag{256}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}\,\tau_i}{\mathrm{d}\,\ell} = \sum_{j=1}^{\mathfrak{k}} K^j{}_i\,\tau_j, \quad i \le \mathfrak{k}. \tag{257}$$

که برا یِ i و j نابزرگتر از $\mathfrak{k}$،

$$K^j{}_i = \begin{cases} |\kappa_i|, & j = i+1 \\ -\kappa_{i-1}, & j = i-1 \\ 0, & |j-i| \neq 1 \end{cases} . \tag{258}$$

البته اگر $\mathfrak{k}$ کوچکتر از بُعدِ فضا باشد $\{[i, \tau_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ پایه (برا یِ $\mathrm{T}_{r(t)}\mathbb{M}$) نیست و رابطه یِ بالا $K(t)$ را به طُرِ کامل مشخص نمیکند. اما اثرِ $K(t)$ بر $\{[i, \tau_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ برا یِ معادله یِ تحولِ τ_i ها برا یِ i ها یِ نابزرگتر از $\mathfrak{k}$ کافی ست. میشود مجموعه یِ $\{[i, \tau_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ را بزرگتر کرد تا یک پایه شود و اثرِ K را بر بردارها یِ اضافه-شده هم تعریف کرد. اما تعریفها یِ اضافی (و دل-بخاه) بر تحولِ $\{[i, \tau_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ ها اثر ی ندارند. از جمله میشود بقیه یِ عنصر-ِ-ماتریسی یِ K را صفر تعریف کرد. در واقع میشود $\{[i, \tau_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ را چنان ساخت که

$$|[\tau_i(t)] \cdot [\tau_j(t)]| = \delta_{i\,j}. \tag{259}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\tau_i}{\mathrm{d}\,\ell} = K\,\tau_i, \tag{260}$$

که آخری همئرز است با

$$\frac{\mathrm{d}\,\tau_i}{\mathrm{d}\,\ell} = K^j{}_i\,\tau_j. \tag{261}$$

عنصرها یِ قبلَن-تعریف-نشده یِ K هم صفر تعریف شده اند. این که این معادلات جواب دارند از اینجا میئاید که میشود به $\{[i, \tau_i(t_0)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{k}\}$ اعضا یی افزود که $\{[i, \tau_i(t_0)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ یکه-متعامد باشد. سپس (261) را با این شرط-ِ-اولیه حل کرد. دیده میشود (259) برقرار میمانَد.

به $\{[i, \tau_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ کنجِ فْرُنه میگویند. معلوم شد این کنج با تغییر-ِ-پارامترها یی که تابع-ِ-بازپارامترش ِشان مثبت باشد عوض نمیشود. اگر تابع-ِ-بازپارامترش منفی باشد هم فقط τ_i ها یِ با i ِفرد قرینه میشوند. البته رُشن است که در انتخابِ $\{[i, \tau_i(t)] \mid \mathfrak{k} < i \leq \mathfrak{m}\}$ آزادی هست، حتا اگر $\{[i, \tau_i(t)] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ یکه-متعامد باشد.

دیده میشود

$$(\tau_{i+1}\cdot\tau_{i+1})\,|\kappa_i| = (\tau_i\cdot\tau_i)\,\kappa_i. \tag{262}$$

مئلفِها یِ g (شبه- ِ-متریک) در پایه یِ τ هم چنین َند.

$$g_{i\,j} = \tau_i\cdot\tau_j. \tag{263}$$

به این ترتیب،

$$g_{i+1,i+1}\,|\kappa_i| = g_{i\,i}\,\kappa_i. \tag{264}$$

شاخص ِ بالا یِ K را با استفاده از g پایین میئاورم:

$$K_{j\,i} = g_{j\,l}\,K^{l}{}_{i}. \tag{265}$$

نتیجه میشود

$$K_{j\,i} = \begin{cases} g_{j\,j}\,|\kappa_i|, & j=i+1 \\ -g_{j\,j}\,\kappa_{i-1}, & j=i-1 \\ 0, & |j-i|\neq 1 \end{cases}, \tag{266}$$

یا،

$$K_{j\,i} = \begin{cases} g_{i+1\,i+1}\,|\kappa_i|, & j=i+1 \\ -g_{j\,j}\,\kappa_j, & j=i-1 \\ 0, & |j-i|\neq 1 \end{cases}. \tag{267}$$

پس،

$$K_{j\,i} = \begin{cases} g_{i\,i}\,\kappa_i, & j=i+1 \\ -g_{j\,j}\,\kappa_j, & j=i-1 \\ 0, & |j-i|\neq 1 \end{cases}. \tag{268}$$

این نشان میدهد K با هر-دُ-شاخص پایین پادمتقارن است:

$$K_{j\,i} = -K_{i\,j}. \tag{269}$$

البته این را مستقیمَن هم میشد به دست آورد:

$$\begin{aligned} \tau_j \cdot \frac{\mathrm{d}\,\tau_i}{\mathrm{d}\,t} &= K^l{}_i\,\tau_j \cdot \tau_l, \\ &= g_{j\,l}\,K^l{}_i. \end{aligned} \tag{270}$$

به این ترتیب،

$$\tau_j \cdot \frac{\mathrm{d}\,\tau_i}{\mathrm{d}\,t} = K_{j\,i}. \tag{271}$$

$(\tau_j \cdot \tau_i)$ ثابت است. پس مشتق ِ آن صفر است:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}\,(\tau_j \cdot \tau_i)}{\mathrm{d}\,t}, \\ &= \tau_j \cdot \frac{\mathrm{d}\,\tau_i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,\tau_j}{\mathrm{d}\,t} \cdot \tau_i, \end{aligned} \tag{272}$$

که نشان میدهد

$$K_{j\,i} + K_{i\,j} = 0. \tag{273}$$

3

دینامیک ِ ذرات

17 حالت ِ یک ذره و تحول ِ آن

معلوم شد حالت ِ یک ذره یک k تایی شامل ِ مکان و مشتقها یِ تا مرتبه یِ $(k-1)$ از آن است. میمانَد این که k چند است. آکسیم ِ زیر میگوید k برابر با 2 است:

حالت ِ یک ذره یک دُتایی شامل ِ مکان و سرعت ِ آن است.

این یعنی

$$\psi = (r, v) \tag{274}$$

این که تحول ِ حالت دینامیکی ست، یعنی معادله یِ تحول برا یِ حالت یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-یک است:

$$\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} e(t, r, v). \tag{275}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} f(t, r, v). \tag{276}$$

($\mathfrak{b} \overset{\text{ns}}{=} \mathfrak{a}$)، یعنی $\mathfrak{b}$ وقت ی معادله یِ تحول برقرار باشد با $\mathfrak{a}$ برابر است. میگویند $\mathfrak{b}$ بر-لاک با $\mathfrak{a}$ برابر است. وقت ی برابری یِ $\mathfrak{b}$ با $\mathfrak{a}$ به برقراری یِ معادله-یِ-حرکت وابسته نباشد، میگویم $\mathfrak{b}$ بیرون- ِ-لاک با $\mathfrak{a}$ برابر است. رُشن است که $e(t,r,v)$ هم ان v است. با حذف-کردن ِ v بین ِ این معادلات،

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\, t^2} \overset{\text{ns}}{=} f\left(t, r, \frac{\mathrm{d}\, r}{\mathrm{d}\, t}\right). \tag{277}$$

معادله یِ تحول برا یِ مکان ِ یک ذره یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-دُ است. البته مکان ِ یک-ذره به-تنهایی حالت ِ ذره را مشخص نمیکند. به هم ین خاطر دانستن ِ مکان ِ یک ذره در یک زمان برا یِ دانستن ِ مکان ِ آن ذره در زمانها یِ بعد کافی نیست: سرعت ِ این ذره در زمان ِ اولیه هم لازم است. این را میشود از آنجا دید که معادله یِ تحول برا یِ (r,v) یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-یک است، یا از اینجا که معادله یِ تحول برا یِ r یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-دُ است. و اینها همئرز َند با این که یک ذره را در یک زمان ِ معین میشود در یک جا یِ معین و با یک سرعت ِ معین گذاشت، اما شتاب ِ ذره در آن لحظه انتخابی نیست: با معلوم-بودن ِ زمان و مکان و سرعت، شتاب تعیین میشود.

شتاب از برهمکنش ِ ذره با محیط تعیین میشود. یعنی f به ذره و محیط بستگی دارد. اگر ذره با محیط برهمکنش نداشت چه؟

18 ذره یِ آزاد (بی-برهمکنش)

ذره یِ بی-برهمکنش، لابد یعنی ذره ای که با محیط برهمکنش ندارد (محیط بر آن اثر ی ندارد). اما چطُر میشود فهمید محیط بر ذره اثر دارد یا نَ؟ من راه ِ مستقل-از-تعریف ی نمیشناسم. پس ذره یِ بی-برهمکنش را تعریف میکنم. میگویم یک ذره آزاد (بی-برهمکنش) است، اگر آن ذره از همه یِ منابع ِ مادی دور باشد. رُشن است که این هم به معنی یِ ریاضی تعریف نیست، چون معلوم (تعریف) نشده منابع ِ مادی کدام َند، یا از کجا معلوم میشود جا یی خالی از منابع ِ مادی ست. و البته این تعریف یک فرض در بر دارد، و آن این که اگر فاصله یِ دُ چیز از هم خیل ی زیاد شود، اثر ِ آن دُ-چیز بر هم کوچک میشود، چنان که در تقریب ی میشود از این اثر چشم پوشید. با همه یِ اینها شاید این تعریف به طُر ِ عملیاتی بد نباشد. مثلَن ذره ای که نزدیک ِ زمین است، تحت ِ اثر ِ زمین است: گرانش ِ زمین بر

آن اثر میگذارد. این فرض که وقت ی ذره از زمین دور میشود اثر ِ زمین بر آن کم میشود، با تقریب ی میشود از اثر ِ زمین بر آن چشم پوشید، شاید نامعقول نباشد. مثل ِ این است که برا یِ ذره ای که از زمین دور است، عملَن زمین وجود ندارد.

با چشم-پوشیدن از این مشکلات در تعریف، به این سئال بر میگردم که حرکت ِ ذرات ِ بی-برهمکنش چگونه است. یعنی شتاب ِ ذرات ِ بی-برهمکنش چیست. آکسیم ِ زیر بخش ی از جواب به این سئال است.

اگر حالت- ِ-اولیه یِ دُ ذره یِ آزاد، در یک زمان یکسان باشد، جهان-خط ِ این دُ-ذره یکسان است.

به بیان ی دیگر، معادله یِ دیفرانسیل ِ جهان-خط برا یِ ذرات ِ آزاد یکسان است. البته شتاب ِ ذرات به چارچوب بستگی دارد. روابط ِ تبدیل ِ سرعت و شتاب به خاطر ِ تبدیل- ِ-چارچوب نشان میدهند شتاب، مثلَن اگر در یک چارچوب صفر باشد در چارچوبها یِ دیگر لزومَن صفر نیست.

19 شتاب ِ صفر

این که در یک چارچوب شتاب صفر است، با این که در آن چارچوب مشتق ِ زمانی یِ مئلفِها یِ سرعت صفر است یکسان نیست:

$$b^i = \frac{\mathrm{d}\, v^i}{\mathrm{d}\, t}. \tag{86}$$

$$a^k = \Gamma^k{}_{j\,i}\, v^j\, v^i + b^k. \tag{87}$$

گیرم تحول چنان است که در یک چارچوب مشتق ِ زمانی یِ مئلفِها یِ سرعت صفر است، یعنی b صفر است. این چارچوب را با پریم نشان میدهم:

$$0 \overset{\mathrm{ns}}{=} b'. \tag{278}$$

یک راه ِ بررسی یِ اثر ِ تغییر- ِ-چارچوب بر شکل ِ معادله این است که یک کمیت ِ دیگر، جز زمان، پارامتر تحول گرفته شود و تحول ِ مختصات ِ فضا-زمان نسبت به آن بررسی شود. پارامتر ِ تحول را با τ نشان میدهم. با حالت ی شروع میکنم که در یک چارچوب مشتق ِ مئلِفها یِ سرعت نسبت به زمان

صفر است، و پارامتر ِ تحول را زمان در هم ین چارچوب میگیرم. در این صورت مشتق ِ دوم ِ زمان نسبت به پارامتر ِ تحول هم صفر است. پارامتر ِ تحول و این چارچوب را با کمیتها یِ پریم-دار نشان میدهم. مانسته یِ (278) میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2\, r'^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau'^2}. \tag{279}$$

یک چارچوب ِ دیگر (بدون ِ پریم) میگیرم. در تبدیل ِ چارچوب، مختصات ِ پریم-دار تابع ِ مختصات ِ بدون- ِ-پریم َند و صریحَن به پارامتر ِ تحول بستگی ندارند. معادله یِ تحول در چارچوب ِ بدون- ِ-پریم چنین میشود.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\, r'^\alpha}{\partial\, r^\beta}\, \frac{\mathrm{d}^2\, r^\beta}{\mathrm{d}\,\tau'^2} + \frac{\partial^2\, r'^\alpha}{\partial\, r^\beta\, \partial\, r^\gamma}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\beta}{\mathrm{d}\,\tau'}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\gamma}{\mathrm{d}\,\tau'}. \tag{280}$$

یا،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2\, r^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau'^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\,\gamma}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\beta}{\mathrm{d}\,\tau'}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\gamma}{\mathrm{d}\,\tau'}. \tag{281}$$

که Γ چنین تعریف شده.

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\,\gamma} = \frac{\partial\, r^\alpha}{\partial\, r'^\delta}\, \frac{\partial^2\, r'^\delta}{\partial\, r^\beta\, \partial\, r^\gamma}. \tag{282}$$

یک پارامتر- ِ-تحول ِ دیگر (τ) میگیرم، که τ' تابع ِ فقط τ است و به مختصات ِ فضا-زمان بستگی ندارد. (279) بر حسب ِ τ چنین میشود.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,\tau'}\right)^2\, \frac{\mathrm{d}^2\, r'^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \frac{\mathrm{d}^2\,\tau}{\mathrm{d}\,\tau'^2}\, \frac{\mathrm{d}\, r'^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{283}$$

یا،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2\, r'^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \varkappa\, \frac{\mathrm{d}\, r'^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{284}$$

که

$$\varkappa = \left(\frac{\mathrm{d}\,\tau'}{\mathrm{d}\,\tau}\right)^2\, \frac{\mathrm{d}^2\,\tau}{\mathrm{d}\,\tau'^2}. \tag{285}$$

سرانجام، اگر هم چارچوب ِ بدون- ِ-پریم و هم پارامتر- ِ-تحول ِ بدون- ِ-پریم به کار رود، (279) چنین میشود.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2\, r^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\,\gamma}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\beta}{\mathrm{d}\,\tau}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\gamma}{\mathrm{d}\,\tau} + \varkappa\, \frac{\mathrm{d}\, r^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{286}$$

معادله ی ِ (286) شکل ِ کلی ی ِ معادله ی ِ تحول است، اگر در یک چارچوب و با یک پارامتر- ِ-تحول ِ خاص مشتق ِ دوم ِ مختصات ِ فضا-زمان صفر باشد.

گیرم (286) در یک چارچوب و با یک پارامتر- ِ-تحول برقرار باشد، اما با Γ و $\varkappa$ ی ِ دلبخاه، که البته Γ نسبت به شاخصها ی ِ پایین َ ش متقارن است. اگر چارچوب و پارامتر ِ تحول عوض شوند، معادله ی ِ تحول چه میشود؟ از (286) برا ی ِ کمیتها ی ِ پریم-دار شروع میکنم:

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2\, r'^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau'^2} + \Gamma'^{\alpha'}{}_{\beta'\,\gamma'}\, \frac{\mathrm{d}\, r'^\beta}{\mathrm{d}\,\tau'}\, \frac{\mathrm{d}\, r'^\gamma}{\mathrm{d}\,\tau'} + \varkappa'\, \frac{\mathrm{d}\, r'^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau'}. \tag{287}$$

با کمیتها ی ِ بدون- ِ-پریم،

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{\text{ns}}{=} & \frac{\partial\, r'^\alpha}{\partial\, r^\beta}\, \left[\left(\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,\tau'}\right)^2\, \frac{\mathrm{d}^2\, r^\beta}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \frac{\mathrm{d}^2\,\tau}{\mathrm{d}\,\tau'^2}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\beta}{\mathrm{d}\,\tau}\right] \\ & + \left(\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,\tau'}\right)^2\, \left(\frac{\partial^2\, r'^\alpha}{\partial\, r^\beta\, \partial\, r^\gamma} + \Gamma'^{\alpha'}{}_{\delta'\,\varepsilon'}\, \frac{\partial\, r'^\delta}{\partial\, r^\beta}\, \frac{\partial\, r'^\varepsilon}{\partial\, r^\gamma}\right)\, \frac{\mathrm{d}\, r^\beta}{\mathrm{d}\,\tau}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\gamma}{\mathrm{d}\,\tau} \\ & + \varkappa'\, \frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,\tau'}\, \frac{\partial\, r'^\alpha}{\partial\, r^\beta}\, \frac{\mathrm{d}\, r^\beta}{\mathrm{d}\,\tau}, \end{aligned} \tag{288}$$

که هم ان (286) است، با

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\,\gamma} = \frac{\partial\, r^\alpha}{\partial\, r'^\zeta}\, \left(\frac{\partial^2\, r'^\zeta}{\partial\, r^\beta\, \partial\, r^\gamma} + \Gamma'^{\zeta'}{}_{\delta'\,\varepsilon'}\, \frac{\partial\, r'^\delta}{\partial\, r^\beta}\, \frac{\partial\, r'^\varepsilon}{\partial\, r^\gamma}\right). \tag{289}$$

$$\varkappa = \left(\frac{\mathrm{d}\,\tau'}{\mathrm{d}\,\tau}\right)^2\, \frac{\mathrm{d}^2\,\tau}{\mathrm{d}\,\tau'^2} + \frac{\mathrm{d}\,\tau'}{\mathrm{d}\,\tau}\, \varkappa'. \tag{290}$$

پس شکل ِ (286) برا ی ِ معادله ی ِ تحول، با تغییر ِ پارامتر ِ تحول یا چارچوب تعییر نمیکند.

در معادله ی ِ (286) پارامتر ِ تحول را حذف و زمان را جایگزین ِ آن میکنم. یعنی تحول ِ مختصات ِ فضا بر حسب ِ زمان را حساب میکنم. برا ی ِ این کار، اول بخشها ی ِ زمانی و فضا یی ِ این معادله را از

هم جدا میکنم:

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2\,t}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \Gamma^0{}_{0\,0}\left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\right)^2 + 2\,\Gamma^0{}_{0\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,\tau} + \Gamma^0{}_{j\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,\tau}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,\tau} + \varkappa\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}. \quad (291)$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2\,r^i}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \Gamma^i{}_{0\,0}\left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\right)^2 + 2\,\Gamma^i{}_{0\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,\tau} + \Gamma^i{}_{j\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,\tau}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,\tau} + \varkappa\,\frac{\mathrm{d}\,r^i}{\mathrm{d}\,\tau}. \quad (292)$$

دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}^2\,r^i}{\mathrm{d}\,\tau^2} = \left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\right)^2\,\frac{\mathrm{d}^2\,r^i}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\,t}{\mathrm{d}\,\tau^2}\,\frac{\mathrm{d}\,r^i}{\mathrm{d}\,t}. \quad (293)$$

با استفاده از این، رابطه یِ (292) میشود

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{\text{ns}}{=}\ & \frac{\mathrm{d}^2\,r^i}{\mathrm{d}\,t^2} + \Gamma^i{}_{0\,0} + 2\,\Gamma^i{}_{0\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} + \Gamma^i{}_{j\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} \\ & + \left(\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,t}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2\,t}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \varkappa\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\right)\frac{\mathrm{d}\,r^i}{\mathrm{d}\,t}. \end{aligned} \quad (294)$$

این هم، با استفاده از (291)، میشود

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{\text{ns}}{=}\ & \frac{\mathrm{d}^2\,r^i}{\mathrm{d}\,t^2} + \Gamma^i{}_{0\,0} + 2\,\Gamma^i{}_{0\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} + \Gamma^i{}_{j\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} \\ & - \left(\Gamma^0{}_{0\,0} + 2\,\Gamma^0{}_{0\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} + \Gamma^0{}_{j\,k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t}\right)\frac{\mathrm{d}\,r^i}{\mathrm{d}\,t}. \end{aligned} \quad (295)$$

این را میشود چنین نوشت.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} b + \mathfrak{F}. \quad (296)$$

که $\mathfrak{F}$ نسبت به سرعت (v) از درجه یِ دست- ِ-بالا سه است:

$$\mathfrak{F}^i = (\mathfrak{F}_0)^i + (\mathfrak{F}_1)^i{}_j\,v^j + (\mathfrak{F}_2)^i{}_{j\,k}\,v^j\,v^k + (\mathfrak{F}_3)^i{}_{j\,k\,l}\,v^j\,v^k\,v^l. \quad (297)$$

$\mathfrak{F}_0$ و $\mathfrak{F}_1$ و $\mathfrak{F}_2$ و $\mathfrak{F}_3$ تابع ِ فقط زمان و مکان َند (مستقل از سرعت َند) و

$$(\mathfrak{F}_0)^i = \Gamma^i{}_{0\,0}. \quad (298)$$

$$(\mathfrak{F}_1)^i{}_j = 2\,\Gamma^i{}_{0\,j} - \Gamma^0{}_{0\,0}\,\delta^i_j. \quad (299)$$

$$(\mathfrak{F}_2)^i{}_{j\,k} = \Gamma^i{}_{j\,k} - \Gamma^0{}_{0\,k}\,\delta^i_j - \Gamma^0{}_{0\,j}\,\delta^i_k. \tag{300}$$

$$(\mathfrak{F}_3)^i{}_{j\,k\,l} = -\frac{1}{3}\,(\Gamma^0{}_{j\,k}\,\delta^i_l + \Gamma^0{}_{l\,j}\,\delta^i_k + \Gamma^0{}_{k\,l}\,\delta^i_j). \tag{301}$$

همچنین، (296)، با استفاده از (87) میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} a + \mathfrak{E}. \tag{302}$$

که $\mathfrak{E}$ نسبت به سرعت (v) از درجه یِ دست- ِ-بالا سه است:

$$\mathfrak{E}^i = (\mathfrak{E}_0)^i + (\mathfrak{E}_1)^i{}_j\,v^j + (\mathfrak{E}_2)^i{}_{j\,k}\,v^j\,v^k + (\mathfrak{E}_3)^i{}_{j\,k\,l}\,v^j\,v^k\,v^l. \tag{303}$$

$\mathfrak{E}_0$ و $\mathfrak{E}_1$ و $\mathfrak{E}_2$ و $\mathfrak{E}_3$ تابع ِ فقط زمان و مکان َند (مستقل از سرعت َند) و

$$(\mathfrak{E}_0)^i = \Gamma^i{}_{0\,0}. \tag{304}$$

$$(\mathfrak{E}_1)^i{}_j = 2\,\Gamma^i{}_{0\,j} - \Gamma^0{}_{0\,0}\,\delta^i_j. \tag{305}$$

$$(\mathfrak{E}_2)^i{}_{j\,k} = -\Gamma^0{}_{0\,k}\,\delta^i_j - \Gamma^0{}_{0\,j}\,\delta^i_k. \tag{306}$$

$$(\mathfrak{E}_3)^i{}_{j\,k\,l} = -\frac{1}{3}\,(\Gamma^0{}_{j\,k}\,\delta^i_l + \Gamma^0{}_{l\,j}\,\delta^i_k + \Gamma^0{}_{k\,l}\,\delta^i_j). \tag{307}$$

تنها-تفاوت ِ $\mathfrak{E}$ با $\mathfrak{F}$ در جمله یِ مجذوری-نسبت-سرعت است:

$$(\mathfrak{E}_2)^i{}_{j\,k} = (\mathfrak{F}_2)^i{}_{j\,k} - \Gamma^i{}_{j\,k}. \tag{308}$$

یا،

$$\mathfrak{E}^i = \mathfrak{F}^i - \Gamma^i{}_{j\,k}\,v^j\,v^k. \tag{309}$$

یک حالت ِ خاص ِ این است که فضا-زمان هموستار-جداشدنی باشد:

$$\Gamma^0{}_{0\,j} = 0. \tag{67}$$

$$\Gamma^0{}_{j\,k} = 0. \tag{68}$$

$$\Gamma^i{}_{0\,0} = 0. \tag{69}$$

$$\Gamma^i{}_{0\,j} = 0. \tag{70}$$

در این حالت تنها-بخشها یِ ناصفر ِ $\mathfrak{F}$ بخشها یِ درجه-یِ-یک و درجه-یِ-دُ (نسبت به سرعت) اند:

$$(\mathfrak{F}_1)^i{}_j = -\Gamma^0{}_{0\,0}\,\delta^i_j. \tag{310}$$

$$(\mathfrak{F}_2)^i{}_{j\,k} = \Gamma^i{}_{j\,k}. \tag{311}$$

$$\mathfrak{F}^i = -\Gamma^0{}_{0\,0}\,v^i + \Gamma^i{}_{j\,k}\,v^j\,v^k. \tag{312}$$

همچنین، تنها-بخش ِ ناصفر ِ $\mathfrak{E}$ بخش ِ درجه-یِ-یک (نسبت-به-سرعت) است:

$$(\mathfrak{E}_1)^i{}_j = -\Gamma^0{}_{0\,0}\,\delta^i_j. \tag{313}$$

$$\mathfrak{E}^i = -\Gamma^0{}_{0\,0}\,v^i. \tag{314}$$

به این ترتیب معادلات ِ تحول میشوند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} b^i + \Gamma^i{}_{j\,k}\,v^j\,v^k - \Gamma^0{}_{0,0}\,v^i. \tag{315}$$

یا بر حسب ِ a،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} a^i - \Gamma^0{}_{0,0}\,v^i. \tag{316}$$

این هم ان معادله یِ ژُندزیک است:

$$a \overset{\text{ns}}{=} \mathfrak{f}\,v. \tag{100}$$

$$\mathfrak{f} = \Gamma^0{}_{0,0}. \tag{317}$$

پس اگر فضا-زمان جداشدنی باشد، افکنش ِ هر ژُندزیک ِ فضا-زمان بر فضا یک ژُندزیک ِ فضا ست.

اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی، و زمان مستقل از فضا باشد (یعنی $\Gamma^0{}_{0\,0}$ مستقل از مکان باشد)، با تبدیل ِ زمان از t به t'، که تابع ِ فقط t است و

$$\frac{\mathrm{d}^2\, t'}{\mathrm{d}\, t^2} = \Gamma^0{}_{0\,0}\, \frac{\mathrm{d}\, t'}{\mathrm{d}\, t}, \tag{76}$$

میشود ؟ (یعنی هم ان $\Gamma^0{}_{0\,0}$) را صفر کرد. یعنی یک زمان هست که با آن شتاب صفر است:

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} a, \tag{318}$$

یا،

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} b^i + \Gamma^i{}_{j\,k}\, v^j\, v^k. \tag{319}$$

مفصلتر،

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} b^i(t) + \{\Gamma^i{}_{j\,k}[t, r(t)]\}\, [v^j(t)]\, [v^k(t)]. \tag{320}$$

رُشن است که این زمان یک پارامتر ِ آفین است. و البته این پارامتر- ِ-آفین مستقل از ژُنُدزیک است، یعنی چنین نیست که برا یِ هر ژُنُدزیک یک پارامتر- ِ-آفین ِ خاص تعریف شده باشد: یک تابع از فضا-زمان هست که برا یِ همه یِ ژُنُدزیکها یِ فضا (و فضا-زمان) پارامتر ِ آفین است.

اگر فضا-زمان ضربی باشد، هموستار ِ فضا مستقل از زمان است. در این صورت رابطه یِ (320)، معادله یِ حرکت برا یِ ذره یِ آزاد، چنین میشود.

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} b^i(t) + \{\Gamma^i{}_{j\,k}[r(t)]\}\, [v^j(t)]\, [v^k(t)]. \tag{321}$$

تفاوت ِ رابطه یِ (321) با رابطه یِ (320) این است که در (321) مئلفِها ی هموستار صریحَن به زمان بستگی ندارند. زمان-مقیاس-شده یِ r با پارامتر ِ λ (که λ ثابت است) را با $\tilde{r}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{r}(t) = r(\lambda^{-1}\, t). \tag{322}$$

مشتقها یِ اول و دوم ِ $\tilde{r}^i$ نسبت به t را هم با، به ترتیب، $\tilde{v}^i$ و $\tilde{b}^i$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\tilde{r}^i(t) = r^i(\lambda^{-1}\, t). \tag{323}$$

$$\tilde{v}^i(t) = \lambda^{-1}\, v^i(\lambda^{-1}\, t). \tag{324}$$

$$\tilde{b}^i(t) = \lambda^{-2}\, b^i(\lambda^{-1}\, t). \tag{325}$$

$\mathcal{E}$ و $\tilde{\mathcal{E}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{E}^i(t) = b^i(t) + \{\Gamma^i{}_{j\,k}[r(t)]\}\,[v^j(t)]\,[v^k(t)]. \tag{326}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}^i(t) = \tilde{b}^i(t) + \{\Gamma^i{}_{j\,k}[\tilde{r}(t)]\}\,[\tilde{v}^j(t)]\,[\tilde{v}^k(t)]. \tag{327}$$

دیده میشود

$$\tilde{\mathcal{E}}^i(t) = \lambda^{-2}\, \mathcal{E}^i(\lambda^{-1}\, t). \tag{328}$$

اگر r مکان ِ یک ذره یِ آزاد باشد،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mathcal{E}. \tag{329}$$

از این نتیجه میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \tilde{\mathcal{E}}. \tag{330}$$

پس اگر r معادله یِ تحول برا یِ ذره یِ آزاد را براورَد، $\tilde{r}$ هم معادله یِ تحول برا یِ ذره یِ آزاد را برمیئاورَد. این یعنی زمان-مقیاس-شده یِ حرکت ِ یک ذره یِ آزاد هم حرکت ِ یک ذره یِ آزاد است.

اگر فضا-زمان متریک-دار باشد،

$$\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t} = 2\,v\cdot a. \tag{331}$$

اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی و زمان مستقل از فضا باشد، یک زمان- ِ-آفین ِ t هست که با آن (318) برقرار است. پس اگر فضا-زمان متریک-دار و هموستار-جداشدنی و زمان مستقل از فضا باشد،

$$\frac{\mathrm{d}\,(v\cdot v)}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{332}$$

یعنی با زمان ِ آفین، بر همه یِ ژُنُدزیکها اندازه یِ سرعت ثابت میمانَد.

20 دینامیک ِ ذره یِ آزاد

این که حالت ِ ذره با مکان و سرعت ِ آن مشخص میشود، و جهان-خط ِ ذرات ِ آزاد با حالت- ِ-اولیه یِ یکسان یکسان است، یعنی دینامیک ِ ذرات ِ آزاد با یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-دُ داده میشود که برا یِ همه یِ ذرات ِ آزاد یکسان است. دینامیک ِ ذره یِ آزاد را با این آکسیم کامل میکنم.

جهان-خط ِ ذرات ِ آزاد ژُندزیک است.

البته معلوم شد اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی باشد، افکنش ِ هر ژُندزیک ِ فضا-زمان بر فضا یک ژُندزیک ِ فضا ست. پس

اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی باشد، شتاب ِ هر ذره یِ آزاد با سرعت ِ آن ذره موازی ست.

از جمله معلوم شد ذره یِ آزاد ی که سرعت ِ اولیه اَ ش صفر باشد (در یک زمان ساکن باشد) سرعت َ ش صفر میمانَد (ساکن میمانَد).

اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی و زمان مستقل از فضا باشد، یک زمان ِ آفین هست که (مستقل از جهان-خط ِ ذرات است و) با آن شتاب هر ذره یِ آزاد صفر است.

این یعنی سرعت ِ هر ذره یِ آزاد ثابت میمانَد.

این که شتاب صفر باشد، البته نمیتواند برا یِ همه یِ انتخابها یِ مختصات ِ فضا-زمان برقرار باشد: یک چارچوب ِ خاص و یک زمان ِ خاص هست که با آن شتاب هر ذره یِ آزاد صفر است. به این چارچوب یک چارچوب ِ لخت میگویم. به این ترتیب آکسیم ِ دینامیک ِ ذرات ِ آزاد در فضا-زمانها یِ هموستار-جداشدنی با زمان ِ مستقل-از-فضا چنین میشود.

یک چارچوب ِ لخت و یک زمان ِ خاص هست که با آن شتاب هر ذره یِ آزاد صفر است.

از این پس فرض میکنم فضا-زمان هموستار-جداشدنی با زمان ِ مستقل-از-فضا ست، و با چارچوب ِ لخت و آن زمان کار میکنم که با آنها شتاب ِ ذرات ِ آزاد صفر است.

21 محیط

هر ذره با محیط َ ش برهمکنش دارد، یعنی محیط ِ ذره بر آن اثر دارد. ذره یِ بی-برهمکنش یعنی ذره ای که محیط بر آن اثر ی ندارد، یا (تا جا یی که به مکانیک ِ ذرات مربوط میشود) بر حرکت َ ش

اثر ی ندارد. اینها هنوز جنس ِ برهمکنش (مثلَن شکل ی که برهمکنش وارد ِ معادله یِ حرکت میشود) را تعیین نمیکنند. همچنین معلوم نمیکنند محیط چگونه بر ذرات ِ مختلف اثر میکند. وقت ی محیط یکسان باشد (یعنی اثر ِ محیط بر ذرات یکسان باشد)، ولی ذرات متفاوت باشند چه میشود. اگر اثر ِ یکسان ی بر دُ ذره یِ متفاوت وارد شود، تفاوت ِ حرکت ِ دُ ذره چیست و چه کمیت ی این تفاوت را تعیین میکند؟ اساسَن چه طور معلوم میشود محیط برا یِ دُ ذره یکسان است، وقت ی خُد ِ محیط (یا برهمکنش) هنوز تعریف نشده؟

تا اینجا راه ی برا یِ تعریف (یا سنجش) ِ اثر ِ محیط نداده ام. حتا برا یِ یکسان-بودن ِ دُ محیط معیار ی نداده ام. اینجا هم، مثل ِ ذره یِ ازاد، میخاهم یک تعریف ِ عملیاتی به کار ببرم. دارم فرض میکنم اثر ِ محیط بر ذره را میشود به دُ بخش ِ جدا-از-هم تفکیک کرد: خُد ِ محیط، و ویژگیها یِ ذره. این تفکیک خوب است، چون کار میکند. دست- ِ-کم جاها یی هست که تفکیک ساده است.

یک مثال فنر ی ست که بک سر َ ش به یک ذره وصل شده و سر ِ دیگر َ ش ثابت است، و ذره میتواند در یک بُعد (در راستا یِ فنر) حرکت کند. مشاهده نشان میدهد یک وضعیت برا یِ فنر هست که در آن هر ذره یِ ابتدا-ساکن ی که به فنر وصل شود ساکن میمانَد. به این وضعیت، وضعیت ِ تعادل ِ فنر میگویم. اگر فنر نسبت به این وضعیت کشیده یا فشرده شود، ذره یِ ابتدا-ساکن ی که به فنر وصل شود ساکن نمیمانَد. میگویم محیط یکسان است، اگر وضعیت ِ فنر (وقت ی ذره به آن وصل میشود) یکسان باشد. سادِتر، میگویم محیط یکسان است اگر طول ِ فنر (نسبت به طول ِ وضعیت ِ تعادل ِ فنر) یکسان باشد. مشاهده نشان میدهد حرکت ِ دُ-ذره یِ ابتدا-ساکن که به فنرها یی یکسان با وضعیت ِ یکسان وصل شده اند، یکسان نیست.

این مثال یک مثال ِ ساده است که در آن تفکیک ِ برهمکنش به محیط و ذره بدیهی مینماید: محیط عملَن هم ان فنر است. اما چنین-تفکیک ی همیشه بدیهی (ساده) نیست.

مثال ِ دوم ذره ای ست که بین ِ صفحات ِ یک خازن است. مشاهده نشان میدهد برا یِ خازن ِ یکسان (و یکسان-باردار-شده) ذرات ی هستند که اگر ساکن رها شوند ساکن میمانند، و ذرات ی هستند که اگر ساکن رها شوند ساکن نمیمانند. رُشن است که محیط را نمیشود فقط وضعیت ِ خازن گرفت: ویژگی یی از ذره هم در محیط وارد وارد میشود.

مثال ِ سوم حرکت ِ ذرات نزدیک ِ زمین است، وقت ی آثار ِ دیگر (مثلَن هوا، در واقع مقاومت ِ

هوا) در برابر ِ اثر ِ ناشی از زمین چشم-پوشیدنی باشد. مشاهده نشان میدهد حرکت ِ همه یِ ذرات با حالت- ِ-اولیه یِ یکسان یکسان است. از جمله حرکت ِ ذرات ی که از مکان ِ معین ی ساکن رها میشوند یکسان است. اگر محیط فقط زمین باشد، محیط ِ یکسان با ذرات ِ مختلف به حرکت ِ یکسان انجامیده. یعنی خُد ِ ذره در اثر ِ محیط بر ذره وارد نمیشود؟ این با مثال ِ اول نمیخانَد. اگر بخاهم تفکیک ِ ساده یِ محیط-ذره در مثال ِ اول را بپذیرم، اینجا نمیتوانم محیط را فقط زمین بگیرم: ویژگی یی از ذره هم در محیط وارد میشود. آن هم به شکل ی که اثر ِ خُد ِ ذره در حرکت ِ ذره را خنثا میکند.

22 جرم

با این ادامه میدهم که اثر ِ ذره بر محیط را میشود به دُ بخش ِ جدا-از-هم (خُد ِ محیط، و ویژگیها یِ ذره) تفکیک کرد. این آکسیم نقش ِ ذره در اثر ِ محیط بر ذره را مشخص میکند:

گیرم دُ ذره در محیط ی یکسان اند و حالت ِ شان هم یکسان است. در این صورت شتاب ِ ذره یِ دوم برابر است با یک عدد ِ ثابت ضرب در شتاب ِ ذره یِ اول. این عدد ِ ثابت به فقط خُد ِ این دُ-ذره بستگی دارد، یعنی مستقل از محیط و حالت است.

از جمله، در محیط ِ یکسان و با حالت ِ یکسان، شتابها با هم موازی یَند.

این آکسیم را میشود چنین نوشت. در محیط ِ یکسان،

$$a_2(t,r,v) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{m}_{2\,1}\, a_1(t,r,v). \tag{333}$$

که $\mathfrak{m}_{2\,1}$ به فقط ذره یِ 1 و ذره یِ 2 بستگی دارد. مانسته یِ این رابطه را برا یِ 1 و 3، و نیز 2 و 3 مینویسم:

$$a_3(t,r,v) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{m}_{3\,1}\, a_1(t,r,v). \tag{334}$$

$$a_3(t,r,v) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{m}_{3\,2}\, a_2(t,r,v). \tag{335}$$

(333) را در (335) میگذارم:

$$a_3(t,r,v) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{m}_{3\,2}\, \mathfrak{m}_{2\,1}\, a_1(t,r,v). \tag{336}$$

از مقایسه یِ این با (334) نتیجه میشود

$$\mathfrak{m}_{3\,1} = \mathfrak{m}_{3\,2}\,\mathfrak{m}_{2\,1}. \tag{337}$$

یا

$$\mathfrak{m}_{2\,1} = \frac{\mathfrak{m}_{3\,1}}{\mathfrak{m}_{3\,2}}. \tag{338}$$

در کسر ِ طرف- ِ-راست، صورت مستقل از ذره یِ 2 و مخرج مستقل از ذره یِ 1 است. پس با انتخاب ِ یک ذره یِ ثابت به جا یِ ذره یِ 3، صورت تابع ِ فقط ذره یِ 1 و مخرج تابع ِ فقط ذره یِ 2 است. یک ذره یِ استاندارد (0) میگیرم و m را چنین تعریف میکنم.

$$m_{\mathfrak{a}} = m_0\,\mathfrak{m}_{0\,\mathfrak{a}}. \tag{339}$$

که m_0 دلبخاه است. (338)، برا یِ ذره یِ 0 به جا یِ 3، میشود

$$\mathfrak{m}_{2\,1} = \frac{m_1}{m_2}. \tag{340}$$

این رابطه برا یِ هر دُ-ذره برقرار است، و m را تعیین میکند. با جا-گذاری دیده میشود $\mathfrak{m}$ به شکل ِ (340)، رابطه یِ (338) را برمیئاورَد. پس (340) جواب ِ (338) است. m تا حد ِ یک ثابت ِ ضربی یکتا ست. این ثابت ِ ضربی را هم میشود m_0 گرفت. و اختیار در مقدار ِ m_0 مثل ِ اختیار در انتخاب- ِ-واحد است. به $m_{\mathfrak{a}}$ جرم ِ ذره یِ $\mathfrak{a}$ میگویم.

رابطه یِ (339) یک راه (ِ شاید نَ-چندان-کاربردی) برا یِ تعیین ِ جرم ِ ذره یِ $\mathfrak{a}$ میدهد. این ذره را در یک محیط میگذارند و شتاب ِ آن را میسنجند. شتاب ِ ذره یِ استاندارد (0) در هم ان محیط و با هم ان حالت ِ ذره یِ $\mathfrak{a}$ را هم میسنجند. از اینجا، با مانسته یِ (333) برا یِ ذرات ِ $\mathfrak{a}$ و 0، مقدار ِ $\mathfrak{m}_{0\,\mathfrak{a}}$ به دست میئاید، که نسبت ِ $m_{\mathfrak{a}}$ به m_0 است. با معلوم-بودن ِ m_0 (که یک بار مستقل از $\mathfrak{a}$ انتخاب شده) $m_{\mathfrak{a}}$ به دست میئاید.

23 نیرو

رابطه یِ (333) را میشود بر حسب ِ جرم بازنوشت:

$$m_2\, a_2(t,r,v) \stackrel{\text{ns}}{=} m_1\, a_1(t,r,v). \tag{341}$$

پس $[m_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}}(t,r,v)]$ به شاخص ِ $\mathfrak{a}$ (شاخص ِ ذره) بستگی ندارد، یعنی تابع ِ فقط محیط است. این کمیت را با $F(t,r,v)$ نشان میدهم و به آن نیرو میگویم:

$$m_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}}(t,r,v) \stackrel{\text{ns}}{=} F(t,r,v). \tag{342}$$

این رابطه، به شکل ی سادِتر میشود

$$m\, a \stackrel{\text{ns}}{=} F(t,r,v). \tag{343}$$

یا حتا سادِتر،

$$m\, a \stackrel{\text{ns}}{=} F. \tag{344}$$

معادله یِ (344) یک رابطه بین ِ شتاب و نیرو میدهد. با این معادله نمیشود شتاب و نیرو را همزمان تعیین کرد. میشود با سنجش ِ شتاب ِ یک ذره یِ آزمون در یک محیط، نیرو یِ متناظر با آن محیط را تعیین کرد. این نیرو مستقل از ذره است. پس میشود آن را برا یِ ذرات ِ دیگر هم به کار برد. نیرو یی که با این روش (یا با هر روش ِ دیگر ی) به دست آمده، شتاب ِ یک ذره یِ دلبخاه ِ $\mathfrak{a}$ (با جرم ِ معین ِ $m_{\mathfrak{a}}$) در آن محیط را میدهد. به این ترتیب معادله یِ دیفرانسیل ِ حرکت برا یِ ذره یِ $\mathfrak{a}$ به دست میئاید. با معلوم-بودن ِ حالت ِ این ذره (مکان و سرعت ِ آن) در یک زمان ِ اولیه، حالت ِ ذره (یا مکان ِ آن) بر حسب ِ زمان به دست میئاید.

شکل ِ مئلفیِئی یِ معادله یِ حرکت چنین است.

$$m\, a^i \stackrel{\text{ns}}{=} F^i(t,r,v). \tag{345}$$

یا مفصلتر،

$$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2 r^i}{\mathrm{d}\,t^2} + [\Gamma^i{}_{j\,k}(r)]\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t}\right\} \stackrel{\text{ns}}{=} F^i(t,r,v). \tag{346}$$

که یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2 r^i}{\mathrm{d}\,t^2} \stackrel{\text{ns}}{=} -\,[\Gamma^i{}_{j\,k}(r)]\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} + \frac{1}{m}\,F^i(t,r,v). \tag{347}$$

دیده میشود این معادله، با معلوم-بودنِ جرم و نیرو، مشتقِ دومِ مئلفِها یِ مکان نسبت به زمان را بر حسبِ زمان و مکان و سرعت میدهد.

24 فزونوریِ نیرو

نیرو یِ ناشی از یک محیط تابع ی از زمان و مکان و سرعت است. و این تابع به محیط بستگی دارد. اما محیطها بیشمار َند و شناختنِ نیرو برا یِ همه یِ محیطها نشدنی مینماید، مگر چیز ی شبیهِ دستِبندی یِ محیطها ممکن باشد. یک راه این است که هر محیط به زیرمحیطها یی سادِتر تفکیک شود که نیرو یِ متناظر با آنها مشخص است. این کار مفید است، به شرط ی که رابطه یِ نیرو یِ ناشی از محیط با نیروها یِ ناشی از زیرمحیطها ساده باشد. و البته تفکیکِ یک محیط به زیرمحیطها هم باید تعریف شود.

این که یک محیط از زیرمحیطها یِ 1 و 2 تشکیل شده، یعنی برهمکنشِ هر ذره با این محیط از برهمکنشِ این ذره با زیرمحیطها یِ 1 و 2 تشکیل شده، و برهمکنشِ این ذره با هر زیرمحیط مستقل از بودن یا نبودنِ زیرمحیطِ دیگر است. یعنی زیرمحیطها بر هم اثر ندارند. اینجا هم مثلِ تعریفِ ذره یِ آزاد و تفکیکِ برهمکنش به ذره و محیط، تعریف (تشخیص)ِ این که زیرمحیطها بر هم اثر ندارند عملیاتی ست. مثال میزنم.

مثالِ اول: یک ذره به دُ فنر (1 و 2) بسته شده. زیرمحیطِ α فنرِ α است، و محیط از زیرمحیطها یِ 1 و 2 تشکیل شده. فنرها (زیرمحیطها) بر هم اثر ندارند، مگر حرکتِ یک فنر مزاحمِ حرکتِ فنرِ دیگر باشد.

مثالِ دوم: یک جسمِ کوچکِ باردار (ذره) در محیط ی شاملِ دُ جسمِ کوچکِ باردار (زیرمحیطها یِ 1 و 2) است. منظور از این که این که اجسام کوچک َند این است که اندازِها در مقایسه با فاصلِها کوچک َند. اینجا هم زیرمحیطها تقریبَن بر هم اثر ندارند، چون عواملِ بیرونی نمیتوانند بارِ یک جسمِ کوچک را زیاد جا-به-جا کنند.

مثالِ سوم: یک جسمِ کوچکِ باردار (ذره) در محیط ی شاملِ دُ جسمِ رسانا یِ باردار

(زیرمحیطها یِ 1 و 2) است. اجسام لزومَن کوچک نیستند، یعنی اندازِها در مقایسه با فاصلِها لزومَن کوچک نیستند. اینجا زیرمحیطها بر هم اثر دارند: وجودِ هر یک از اجسامِ باردارِ 1 یا 2 تُزیعِ بار در رسانا یِ دیگر را تغییر میدهد. اما اینجا هم میشود زیرمحیطها را بازتعریف کرد، چنان که محیط از زیرمحیطها یِ 1 و 2 تشکیل شده باشد که بر هم اثر ندارند: وقت ی رساناها یِ 1 و 2 با هم هستند، تُزیعِ بار در هر کدام تعییر میکند. تُزیع-ِ-بارِ رسانا یِ $\mathfrak{a}$ در حضورِ رسانا یِ دیگر را با $\rho'_{\mathfrak{a}}$ نشان میدهم. محیط از زیرمحیطها یِ $1'$ و $2'$ تشکیل شده، که زیرمحیطِ $\mathfrak{a}'$ متناظر با تُزیع-ِ-بارِ $\rho'_{\mathfrak{a}}$ است. میشود گفت $\mathfrak{a}'$ هم ان $\rho'_{\mathfrak{a}}$ است. این زیرمحیطها بر هم اثر ندارند، چون تُزیع-ِ-بارها تثبیت شده اند.

از این پس هر جا میگویم یک محیط از یک دسته زیرمحیط تشکیل شده، منظور این است که آن زیرمحیطها بر هم اثر ندارند. اگر زیرمحیطها یِ اولیه هم بر هم اثر داشته باشند، منظور این است که محیط از زیرمحیطها یِ جدید ی تشکیل شده که در آنها این اثر در نظر گرفته شده.

میمانَد رابطه یِ نیرو یِ ناشی از یک محیط با نیروها یِ ناشی از زیرمحیطها یِ سازنده یِ آن محیط (وقت ی زیرمحیطها بر هم اثر ندارند). این رابطه با این آکسیم داده میشود:

نیرو فزونور است. یعنی اگر یک محیط از زیرمحیطها بی تشکیل شده، نیرو یِ ناشی از آن محیط مجموعِ نیروها یِ ناشی از زیرمحیطها یِ سازنده است.

اگر یک محیط از زیرمحیطها یِ 1 و 2 تشکیل شده، F (نیرو یِ ناشی از این محیط) چنین است.

$$F = F_1 + F_2. \tag{348}$$

که $F_{\mathfrak{a}}$ نیرو یِ ناشی از زیرمحیطِ $\mathfrak{a}$ است.

25 خُد-نیرو، عکس‌العملِ نیرو، فزونوریِ جرم

یک ذره یِ آزاد از محیط (جز احتمالَن خُد َش) اثر نمیگیرد، چون بر اساسِ تعریف از همه یِ منابعِ مادی دور است و فرض شده با دور-شدن از منابعِ مادی برهمکنشِ ذره با این منابع از بین میرود. نیرو یی که این ذره به خُد َش وارد میکند را خُد-نیرو مینامم. چون خُد-نیرو تنها-نیرو یِ وارد بر این ذره آزاد است، شتابِ این ذره میشود خُد-نیرو تقسیم بر جرمِ آن. اما شتابِ ذره یِ آزاد صفر است. پس خُد-نیرو یِ وارد بر این ذره صفر است. یک فرض اضافه میکنم، که خُد-نیرو به محیط (جز خُدِ ذره) وابسته نیست. نتیجه میشود

خُد-نیرو صفر است.

یعنی هیچ ذره ای به خُدَش نیرو وارد نمیکند.

دُ ذره یِ 1 و 2 چنان َند که مکانِ شان همیشه نزدیک به هم است، آرمانی-شده اَ ش این که مکانِ شان همیشه یکسان است. فرض میکنم دستگاهِ شاملِ این دُ-ذره را میشود مثلِ یک ذره گرفت. اول وضعیت ی را بررسی میکنم که این دستگاه از منابعِ مادی دور است. نتیجه این میشود که تنها-نیروها یی که به این دستگاه وارد میشود نیروها یِ ناشی از خُدِ ذراتِ 1 و 2 است. نیرو یی که ذره یِ $\mathfrak{a}$ به ذره یِ $\mathfrak{b}$ وارد میکند را با $F_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{b}}$ نشان میدهم. این که خُد-نیرو صفر است، یعنی

$$F_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}} = 0. \tag{349}$$

فرض شد دستگاه مثلِ یک ذره (با جرمِ m) رفتار میکند. چون ذراتِ 1 و 2 یک جا هستند (با هم حرکت میکنند)، شتابِ این ذرات یکسان است و شتابِ دستگاه هم با شتابِ هر یک از این ذرات برابر است. این شتاب را با a نشان میدهم. از این که خُد-نیروها صفر َند، فقط ذراتِ 1 و 2 به دستگاه نیرو وارد میکنند، و نیرو فزونور است، نتیجه میشود

$$F = F_{1\to2} + F_{2\to1}. \tag{350}$$

که F نیرو یِ وارد بر دستگاه است (و البته فرض شده نیرو یی که به هر ذره وارد میشود به کلِ دستگاه هم وارد میشود). به این ترتیب،

$$m\,a \overset{\text{ns}}{=} F_{1\to2} + F_{2\to1}. \tag{351}$$

اما این دستگاه آزاد است. پس a صفر است. نتیجه میشود $(F_{1\to2} + F_{2\to1})$ صفر است. باز فرض میکنم $F_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{b}}$ به محیط (جز خُدِ ذراتِ 1 و 2) وابسته نیست. نتیجه میشود همیشه

$$F_{1\to2} + F_{2\to1} = 0. \tag{352}$$

اگر دُ ذره یک جا باشند، نیرو یی که ذره یِ دوم به ذره یِ اول وارد میکند قرینه یِ نیرو یی ست که ذره یِ اول به ذره یِ دوم وارد میکند.

میگویند هر عمل (نیرو یی که ذره یِ اول به ذره یِ دوم وارد میکند) یک عکس‌العمل (نیرو یی که ذره یِ دوم به ذره یِ اول وارد میکند) دارد، که قرینه یِ عمل است.

در حالت ِ کلی که دستگاه ِ شامل ِ دُ- ذره آزاد نیست، علاوه بر نیروها یی که ذرات ِ دستگاه به هم وارد میکنند محیط هم به ذرات نیرو وارد میکند. نیرو یی که محیط (جز ذرات ِ دستگاه) بر ذره ی ِ $\mathfrak{a}$ وارد میکند را با $F_{\mathfrak{a}}^{\text{ext}}$ نشان میدهم. جرم ِ ذره ی ِ $\mathfrak{a}$ را با $m_{\mathfrak{a}}$ نشان میدهم. معادلات ِ حرکت میشوند

$$m_1\, a_1 \stackrel{\text{ns}}{=} F_{2\to 1} + F_1^{\text{ext}}. \tag{353}$$

$$m_2\, a_2 \stackrel{\text{ns}}{=} F_{1\to 2} + F_2^{\text{ext}}. \tag{354}$$

این معادلات را با هم جمع میکنم. a_1 و a_2 با یکدیگر برابر َند و هم ان a اند. با استفاده از (352) نتیجه میشود

$$(m_1 + m_2)\, a \stackrel{\text{ns}}{=} F_1^{\text{ext}} + F_2^{\text{ext}}. \tag{355}$$

طرف ِ راست کل ِ نیرو یی ست که دستگاه وارد میشود. به این ترتیب، مقایسه ی ِ این رابطه با

$$m\, a \stackrel{\text{ns}}{=} F. \tag{344}$$

نشان میدهد

$$m = m_1 + m_2. \tag{356}$$

به سادگی میشود این نتیجه را به حالت ی گسترش داد که چند ذره یک جا باشند:

اگر چند ذره یک جا باشند، دستگاه ِ شامل ِ این ذرات مثل ِ ذره ای رفتار میکند که جرم َ ش مجموع ِ جرم ِ ذرات ِ سازنده است: جرم فزونور است.

به علاوه، برا ی ِ ذرات ی که با هم حرکت میکنند، نیروها یی که این ذرات به یکدیگر وارد میکنند بر حرکت ِ دستگاه اثر ندارند و نیرو ی ِ کلی ی ِ وارد بر دستگاه برابر است با مجموع ِ نیروها یی که محیط (جز ذرات ِ خُد ِ دستگاه) به ذرات ِ دستگاه وارد میکنند. به نیروها یی که ذرات ِ دستگاه به یکدیگر وارد میکنند نیروها ی ِ داخلی، و به نیروها یی که محیط (جز ذرات ِ خُد ِ دستگاه) به ذرات ِ دستگاه وارد میکنند نیروها ی ِ خارجی میگویند.

برا ی ِ ذرات ی که با هم حرکت میکنند، نیروها ی ِ داخلی بر حرکت ِ دستگاه اثر ندارند و نیرو ی ِ کلی ی ِ وارد بر دستگاه برابر است با مجموع ِ نیروها ی ِ خارجی ی ِ وارد بر آن.

البته معنی یِ گزاره یِ بالا این نیست که نیروها یِ داخلی کلَن اثر ی ندارند. اگر این نیروها نمیبوند، شتاب ِ هر ذره چنین میشد.

$$m_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}} \stackrel{\text{ns}}{=} F_{\mathfrak{a}}^{\text{ext}}. \tag{357}$$

در این صورت در حالت ِ کلی شتاب ِ ذرات ِ دستگاه یکسان نمیشد و مکان ِ ذرات یکسان نمیمانْد. برا یِ این که ذرات ِ دستگاه کنار ِ هم بمانند نیروها یِ داخلی لازم َند.

26 وقت ی ذرات نزدیک ِ هم نیستند

بحث ِ بالا در باره یِ دستگاه ِ ذرات، محدود به وضعیت ی ست که ذرات ِ دستگاه یک جا هستند. این وضعیت آرمانی ست. شکل ِ عملی (و البته تقریبی) یِ این وضعیت ِ آرمانی آن است که ذرات نزدیک ِ هم بمانند، چنان که تحول ِ همه یِ ذرات را بشود به-تقریب، با یک مکان تُصیف کرد. اگر چنین نباشد، چه مشکل ی پیش میئاید؟

تا اینجا فرض نشده فضا یک فضا یِ برداری ست. پس همه یِ بردارها در فضا یِ مماس َند. از جمله، هر بردار یک نقطه از فضا را هم مشخص میکند. اما کل ِ فضا یِ مماس یک فضا یِ برداری نیست. فضاها یِ مماس بر یک نقطه اند که فضا یِ برداری یَند. عملیات ِ برداری (جمع و تفریق ِ بردارها) فقط برا یِ بردارها یی ممکن است که در فضا یِ مماس بر یک نقطه اند.

برا یِ یک ذره یِ نقطِئی، نیروها یِ ناشی از محیطها یِ مختلف را میشود با هم جمع کرد، چون همه یِ این نیروها بردارها یی در فضا یِ مماس در مکان ِ ذره اَند. اما اگر دُ ذره مکان ِ شان با هم فرق کند، مجموع ِ نیرو یی که به ذره یِ 1 وارد میشود و و نیرو یی که به ذره یِ 2 وارد میشود بی-معنی ست. چون این نیروها در دُ فضا-یِ-مماس ِ مختلف َند. به این ترتیب مفهوم ِ نیرو یِ وارد بر یک دستگاه، وقت ی دستگاه نقطِئی نباشد از دست میرود.

این که شتاب ِ دُ ذره یکسان باشد (یعنی تفاضل ِ شتابها صفر باشد) هم اگر دُ-ذره یک جا نباشد بیمعنی میشود، چون شتاب ِ هر ذره هم در فضا یِ مماس در مکان ِ ذره است. اگر مکانها متفات باشند، شتابها در دُ فضا-یِ-برداری یِ متفاوت َند و تفاضل ِ شان تعریف نشده. به این ترتیب شتاب ِ دستگاه هم، اگر دستگاه نقطِئی نباشد، بیمعنی میشود.

این که $F_{2\to1}$ قرینه ی ِ $F_{1\to2}$ است هم، اگر مکان ِ ذرات ِ 1 و 2 یکسان نباشد، بیمعنی میشود: $F_{2\to1}$ در فضا ی ِ مماس در مکان ِ ذره ی ِ 1 است و $F_{1\to2}$ در فضا ی ِ مماس در مکان ِ ذره ی ِ 2 است. پس اگر دستگاه نقطِئی نباشد، این که نیروها ی ِ درونی به شکل ِ عمل و عکس‌العمل َند هم بیمعنی میشود.

سرانجام، اگر دستگاه نقطِئی نباشد نیرو ی ِ وارد بر دستگاه و شتاب ِ دستگاه هیچ کدام تعریف نشده اند. پس جرم ِ دستگاه هم تعریف-نشده میمانَد.

وضع عوض میشود، اگر فضا یک فضا ی ِ برداری باشد و هموستار صفر باشد، یعنی فضا تخت باشد. در این صورت همه ی ِ بردارها در یک فضا یَند و عملیات ِ برداری (جمع و تفریق ِ بردارها) برا ی ِ همه ی ِ بردارها معنی دارد. مکان ِ هر ذره بردار است. مشتق-گیری از بردارها هم با هم ان تفاضل ِ معمول در تعریف ِ مشتق-گیری ست. معادلات ِ حرکت برا ی ِ ذرات ِ 1 و 2 میشوند

$$F_1^{\rm ext} + F_{2\to1} \stackrel{\rm ns}{=} m_1\, a_1. \tag{358}$$

$$F_2^{\rm ext} + F_{1\to2} \stackrel{\rm ns}{=} m_2\, a_2. \tag{359}$$

اینها را میشود با هم جمع کرد:

$$F^{\rm ext} + (F_{2\to1} + F_{1\to2}) \stackrel{\rm ns}{=} m_1\, a_1 + m_2\, a_2. \tag{360}$$

که

$$F^{\rm ext} = F_1^{\rm ext} + F_2^{\rm ext}. \tag{361}$$

در ین حالت فرض ِ عمل-و-عکس‌العمل را قویتر میکنم:

نیرو یی که ذره ی ِ دوم به ذره ی ِ اول وارد میکند قرینه ی ِ نیرو یی ست که ذره ی ِ اول به ذره ی ِ دوم وارد میکند.

تفاوت ِ این گزاره با آن چه قبلَن آمد این است که اینجا شرط ِ یک-جا-بودن (به-تقریب، نزدیک-بودن) ِ ذرات حذف شده. یعنی برا ی ِ ذرات ی که یک-جا نیستند هم،

$$F_{1\to2} + F_{2\to1} = 0. \tag{352}$$

به این ترتیب،

$$F^{\rm ext} \stackrel{\rm ns}{=} m_1\,a_1 + m_2\,a_2. \tag{362}$$

برا یِ ذرات ِ 1 و 2، مکان ِ مرکز- ِ-جرم را با $r_{\rm cm}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$(m_1+m_2)\,r_{\rm cm} = m_1\,r_1 + m_2\,r_2. \tag{363}$$

با مشتق-گیری نتیجه میشود

$$(m_1+m_2)\,a_{\rm cm} = m_1\,a_1 + m_2\,a_2. \tag{364}$$

که $a_{\rm cm}$ (شتاب ِ مرکز- ِ-جرم) مشتق ِ دوم ِ $r_{\rm cm}$ نسبت به زمان است. دیده میشود

$$F^{\rm ext} \stackrel{\rm ns}{=} (m_1+m_2)\,a_{\rm cm}. \tag{365}$$

این شبیه ِ رابطه یِ نیرو وشتاب برا یِ یک ذره است: مرکز- ِ-جرم مثل ِ یک ذره یِ مجازی رفتار میکند که جرم َ ش مجموع ِ جرم ِ ذرات است. جرم ِ این ذره ضرب در شتاب ِ آن برابر است با مجموع ِ نیروها یِ خارجی یِ وارد بر ذرات.

اما معادله یِ حرکت برا یِ این ذره یِ مجازی یک تفاوت ِ مهم با معادله یِ حرکت برا یِ ذرات ِ واقعی دارد: (365) یک معادله-یِ-تحول ِ بسته نیست. برا یِ هر دستگاه ِ تک-ذرِئی، نیرو یِ وارد بر ذره تابع ِ زمان، و مکان و سرعت ِ آن ذره است. به این ترتیب معادله یِ تحول یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-دُ برا یِ مکان ِ آن ذره است. برا یِ دستگاهها یِ چند-ذرِئی، نیرو یِ وارد بر هر ذره تابع ِ زمان، و مکان و سرعت ِ ذرات است. به این ترتیب معادله یِ تحول یک دستگاه ِ معادلات ِ دیفرانسیل برا یِ مکانها یِ ذرات است. اما نیرو یِ خارجی یِ وارد بر یک دستگاه ِ چند-ذرِئی، در حالت ِ کلی تابع ِ زمان، و مکان و سرعت ِ ذرات است، چون نیرو یِ خارجی یِ وارد بر هر یک از ذرات تابع ِ زمان، و مکان و سرعت ِ آن ذره است. پس در حالت ِ کلی، نیرو یِ خارجی یِ وارد بر یک دستگاه ِ ذرات با فقط زمان، و مکان و سرعت ِ مرکز- ِ-جرم تعیین نمیشود. این یعنی رابطه یِ (365)، در حالت ِ کلی یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-دُ برا یِ مکان ِ مرکز- ِ-جرم نیست. در حالت ِ کلی رابطه یِ (365) اصولَن بسته نیست، یعنی به-تنهایی حل-شدنی نیست.

یک وضعیت ِ خاص این است که نیرو یِ خارجی صفر باشد (مجموع ِ نیروها یِ خارجی صفر باشد). در این صورت از رابطه یِ (365) نتیجه میشود شتاب ِ مرکز- ِ-جرم صفر است:

$$a_{\rm cm} \stackrel{\rm ns}{=} 0. \tag{366}$$

این یعنی سرعت ِ مرکز- ِ-جرم ثابت است: مرکز- ِ-جرم مثل ِ یک ذره یِ آزاد است. رُشن است که در این وضعیت معادله یِ حرکت برا یِ مرکز- ِ-جرم بسته است. جواب ِ معادله میشود

$$r_{\rm cm}(t) = r_{\rm cm}(0) + v_{\rm cm}\, t. \tag{367}$$

که $v_{\rm cm}$ ثابت است.

وقت ی فضا برداری و تخت است، فرض ِ عمل-و-عکس‌العمل را میشود باز هم قویتر کرد:
نیرو یی که ذره یِ دوم به ذره یِ اول وارد میکند قرینه یِ نیرو یی ست که ذره یِ اول به ذره یِ دوم وارد میکند. و هر یک از این نیروها با بردار ِ تفاضل ِ مکان ِ دُ-ذره موازی ست.
این یعنی

$$F_{1\to 2} = \mathfrak{k}_{2\,1}\,(r_2 - r_1). \tag{368}$$

$$F_{2\to 1} = \mathfrak{k}_{1\,2}\,(r_2 - r_1). \tag{369}$$

که $\mathfrak{k}_{1\,2}$ یک عدد است که نسبت به شاخصها یَ ش (1 و 2) متقارن است:

$$\mathfrak{k}_{2\,1} = \mathfrak{k}_{1\,2}. \tag{370}$$

رُشن است که روابط ِ (368) و (369)، همراه با (370)، رابطه یِ (352) را هم نتیجه میدهند.

گسترش ِ اینها به وضعیت ی که دستگاه شامل ِ بیش از دُ ذره است هم بدیهی ست.

27 قانونها یِ نیوتُن

آن چه در باره یِ دینامیک ِ ذرات آمد را در قانونها یِ نیوتُن خلاصه میکنم:

e0 حالت ِ یک ذره یک دُتایی شامل ِ مکان و سرعت ِ آن است.

e1-0 اگر حالت- ِ-اولیه یِ دُ ذره یِ آزاد در یک زمان یکسان باشد، جهان-خط ِ این دُ-ذره یکسان است. جهان-خط ِ ذرات ِ آزاد ژنُدزیک است.

e1-1 اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی باشد، شتاب ِ هر ذره یِ آزاد با سرعت ِ آن ذره موازی ست.

e1-2 اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی و زمان مستقل از فضا باشد، یک زمان ِ آفین هست که (مستقل از جهان-خط ِ ذرات است و) با آن شتاب هر ذره یِ آزاد صفر است.

پس، اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی و زمان مستقل از فضا باشد،

e1 یک چارچوب ِ خاص (چارچوب ِ لخت) و یک زمان ِ خاص (زمان ِ مطلق) هست که با آن شتاب هر ذره یِ آزاد صفر است.

به **e0** قانون ِ صفرُم ِ نیوتُن و به **e1** قانون ِ اول ِ نیوتُن میگویم.

e2-0 شتاب ِ یک ذره در یک محیط، برابر است با نیرو تقسیم بر جرم.

e2-1 جرم ویژگی یِ ذره است: جرم ِ هر ذره یک عدد است که به فقط خُد ِ ذره بستگی دارد و مستقل از حالت ِ ذره و زمان است،

e2-2 نیرو ویژگی یِ محیط است. نیرو یِ وارد بر ذره یک بردار است که به محیط، و دست- ِ-بالا زمان، و حالت ِ ذره بستگی دارد.

e2-3 نیرو فزونور است: اگر یک محیط از زیرمحیطها یی تشکیل شده، نیرو یِ ناشی از آن محیط مجموع ِ نیروها یِ ناشی از زیرمحیطها یِ سازنده است.

e2-4 خُد-نیرو صفر است: ذره به خُد َ ش نیرو وارد نمیکند.

e2-5 جرم فزونور است: اگر چند ذره یک جا باشند، دستگاه ِ شامل ِ این ذرات مثل ِ ذره ای رفتار میکند که جرم َ ش مجموع ِ جرم ِ ذرات ِ سازنده است.

به **e2** (**e2-0** تا **e2-5**) قانون ِ دوم ِ نیوتُن میگویم.

سرانجام،

e3-0 اگر دُ ذره یک جا باشند، نیروها یی که این دُ- ذره به هم وارد میکنند به شکل ِ عمل و عکس‌العمل است: نیرو یی که ذره یِ دوم به ذره یِ اول وارد میکند قرینه یِ نیرو یی ست که ذره یِ اول به ذره یِ دوم وارد میکند.

به **e3-0** شکل ِ بسیار-ضعیف ِ قانون ِ سوم ِ نیوتُن میگویم.

اگر فضا برداری و تخت باشد، قید ِ یک-جا-بودن ِ ذرات لازم نیست:

e3-1 نیروها یی که دُ-ذره به هم وارد میکنند به شکل ِ عمل و عکس‌العمل است: نیرو یی که ذره یِ دوم به ذره یِ اول وارد میکند قرینه یِ نیرو یی ست که ذره یِ اول به ذره یِ دوم وارد میکند.

e3-2 نیرو یی که یک ذره به یک ذره یِ دیگر وارد میکند با بردار ِ تفاضل ِ مکان ِ دُ- ذره موازی ست.

به **e3-1** شکل ِ ضعیف ِ قانون ِ سوم ِ نیوتُن، و به **e3-1** و **e3-2** (با هم) شکل ِ قوی یِ قانون ِ سوم ِ نیوتُن میگویم.

28 زمان، نیرو، و دستگاهها یِ چند-ذرِئی

اگر فضا-زمان هموستار-جداشدنی و زمان مستقل از فضا باشد، یک زمان ِ آفین هست که مستقل از جهان-خط ِ ذرات است و با آن شتاب ِ ذرات ِ آزاد صفر است. اگر یک علامت باشد که انتشار ِ آن آنی باشد، یک همزمانی یِ مطلق هست که با آن میشود یک زمان تعریف کرد. لازم نیست این زمان هم ان زمان ِ آفین باشد، یا تابع ِ فقط آن باشد. اما در مکانیک ِ نانسبیتی فرض میشود چنین است. هر تابع ِ اکیدَن-یکنوا از زمان ی که با آن همزمانی یِ مطلق تعریف شده، یک زمان است که همزمانی با آن هم ان همزمانی یِ مطلق است. زمان ِ مطلق را آن ی میگیرم که آفین است. به این ترتیب، در مکانیک ِ نانسبیتی یک زمان ِ مطلق هست، و این زمان ِ مطلق پارامتر ِ آفین برا یِ ژئُدزیکها (مسیرها یِ ذرات ِ آزاد) است. این زمان- ِ-مطلق، تا حد ِ یک تابع ِ دست- ِ-بالا-خطی یکتا ست. یعنی اگر t_1 یک زمان ِ مطلق باشد، t_2 هم یک زمان- ِ-مطلق است اگر و تنها اگر

$$t_2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\, t_1. \tag{371}$$

که $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ثابت َند و $\mathfrak{b}$ ناصفر است. جهت ِ آینده برا یِ t_1 و t_2 یکسان است، اگر و تنها اگر $\mathfrak{b}$ مثبت باشد.

رابطه یِ (371) هم ان رابطه یِ بین ِ دُ پارامتر- ِ-آفین برا یِ یک ژنُدزیک است. اما در حالت ِ کلی پارامتر ِ آفین برا یِ یک ژنُدزیک به خُد ِ آن ژنُدزیک مربوط است. به هم ین خاطر تبدیل ِ پارامتر- ِ-آفین هم به ژنُدزیک مربوط است، یعنی اگر رابطه یِ (371) برا یِ پارامتر- ِ-آفینها یِ دلبخاه ِ ژنُدزیکها نوشته شود، $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ در حالت ِ کلی به ژنُدزیک بستگی دارند. در رابطه یِ (371) برا یِ زمان- ِ-مطلقها چنین نیست: $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ مستقل از ژنُدزیک َند و بر کل ِ فضا-زمان ثابت َند.

به خاطر ِ وجود ِ علامت ی که آنی منتشر میشود (و در نتیجه وجود ِ همزمانی یِ مطلق) در مکانیک ِ نانسبیتی ست که میشود معادله یِ تحول برا یِ دستگاهها یِ چند-ذرِئی را بی-ابهام نوشت:

$$m_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} F_{\mathfrak{a}}[t, r_1(t), v_1(t), r_2(t), v_2(t), \cdots]. \tag{372}$$

این معادله شتاب ِ هر ذره در زمان ِ t را بر حسب ِ t و مکان ِ همه یِ ذرات در هم ان زمان ِ t و سرعت ِ همه یِ ذرات در هم ان زمان ِ t میدهد. این فقط وقت ی ممکن است که یک ذره یِ $\mathfrak{a}$ از ذرات ِ دیگر (که احتمالَن با ذره یِ $\mathfrak{a}$ فاصله دارند) آنی اثر بگیرد (وجود ِ علامتی که آنی منتشر میشود)، و یکسان-بودن ِ زمان ی که در مکان و سرعت ِ ذرات وارد میشود خُش-تعریف باشد (وجود ِ همزمانی یِ مطلق).

به این ترتیب، در مکانیک ِ نسبیتی تحول ِ دستگاهها یِ چند-ذرِئی به-تنهایی خُش-تعریف نیست، دست- ِ-کم با معادلات ِ دیفرانسیل داده نمیشود: تحول ِ مکان ِ ذره یِ $\mathfrak{a}$ در زمانها یِ بزرگتر از t، با دانستن ِ مکان ِ ذرات و تعداد ِ محدود ی از مشتقها یِ زمانی یِ آنها معلوم نمیشود، چون اثر ی که ذره یِ $\mathfrak{a}$ در زمان ِ t از ذره یِ $\mathfrak{b}$ میگیرد، به حالت ِ ذره یِ $\mathfrak{b}$ در زمانها یی کوچکتر از t مربوط است. بیشینه یِ این زمانها را با $t_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}$ نشان میدهم. $t_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}$ چنان است که $[t_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}, r_{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}})]$ بر مخروط- ِ-نور ِ گذشته با رئس ِ $[t, r_{\mathfrak{a}}(t)]$ است:

$$[t_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}, r_{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}})] \in \tilde{\mathbb{M}}^{\times\,-}_{\text{ext}}[t, r(t)]. \tag{373}$$

یک حالت ِ ساده این است اثر ِ هر ذره بر هر ذره یِ دیگر با بیشینه یِ ممکن ِ سرعت منتشر شود. در این صورت اثر ی که ذره یِ $\mathfrak{a}$ در زمان ِ t از ذره یِ $\mathfrak{b}$ میگیرد به حالت ِ ذره یِ $\mathfrak{b}$ در زمان ِ $t_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}$ مربوط است. حتا در این حالت ِ ساده، انتظار میرود انتظار معادله یِ تحول، جایگزین ِ (372)، چیز ی شبیه ِ این باشد.

$$m_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} F_{\mathfrak{a}}[t_{1\,\mathfrak{a}}, r_1(t_{1\,\mathfrak{a}}), v_1(t_{1\,\mathfrak{a}}), \cdots]. \tag{374}$$

رُشن است که این رابطه یک معادله یِ دیفرانسیل نیست: کمیتها یِ طرف ِ راست در زمانها یی غیر از t ظاهر شده اند.

به این ترتیب در مکانیک ِ نسبیتی، اگر بنا بر حفظ ِ معادله یِ دیفرانسیل به عنوان ِ معادله یِ تحول باشد، برا یِ بررسی یِ دستگاهها یِ چند-ذرِئی چیز ی جز ذرات هم لازم است. روش ِ معمول وارد-کردن ِ میدان است: میدان است که به هر ذره نیرو وارد میکند، نَ ذرات ِ دیگر. پس معادله یِ تحول ِ هر ذره شامل ِ فقط خُد ِ ذره و میدان است. در معادله یِ تحول ِ خُد ِ میدان هم ذرات وارد میشود. پس دستگاه شامل ِ ذرات و میدان (یا میدانها) است، و معادلات- ِ-تحول ِ ذرات و میدانها به هم جفت شده اند. البته در معادله یِ تحول ِ هر ذره، ذرات ِ دیگر ظاهر نمیشوند. معادله یِ تحول برا یِ ذرات میشود

$$m_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} F_{\mathfrak{a}}\{t, r_{\mathfrak{a}}(t), v_{\mathfrak{a}}(t), (\mathfrak{D}\,\mathfrak{F})[t, r_{\mathfrak{a}}(t)]\}. \tag{375}$$

که $\mathfrak{F}$ نماینده یِ میدان (یا میدانها) است و $\mathfrak{D}$ عملگر ِ ست که احتمالَن شامل ِ مشتق-گیری ست. معادله یِ تحول برا یِ میدان چنین است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \{\mathcal{E}[t, r, r_1(t), v_1(t), r_2(t), v_2(t), \cdots]\}(\mathfrak{F}). \tag{376}$$

که این رابطه برا یِ همه یِ رویدادها یِ (t, r) نوشته میشود. $\mathcal{E}$ یک عملگر ِ کلی ست. اما حالت ِ خاص ِ مهم این است که این عملگر مُضعی ست، یعنی طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا تابع ی ازفقط خُد ِ میدان و تعداد ِ محدود ی از مشتقات ِ آن است.

یک پیامد ِ این که در مکانیک ِ نسبیتی اثر ِ ذرات بر هم آنی نیست، این است که مفهوم ِ نیرو یی که یک ذره به یک ذره یِ دیگر وارد میکند مفید نیست: طرف ِ راست ِ (375) را لزومَن به-سادگی نمیشود به شکل ِ مجموع ی دراورد که هر جمله اَ ش تابع ِ فقط حالت ِ ذره یِ $\mathfrak{a}$ و یک ی از ذرات ِ دیگر، هر-دُ در زمان ِ t است. این که مفهوم ِ نیرو یی که یک ذره به یک ذره یِ دیگر وارد میکند مفید نیست، از جمله به این مینجامد که قانون ِ سوم ِ نیوتُن از دست میرود.

این که برا یِ ذرات و میدانها معادلات ِ جفت-شده نوشته شود، در مکانیک ِ نانسبیتی هم ممکن است. ولی در مکانیک ِ نانسبیتی ممکن است بشود میدانها را حذف کرد و معادله-یِ-تحول ی برا یِ فقط ذرات به دست آورد، که معادله یِ دیفرانسیل است. در مکانیک ِ نسبیتی این کار شدنی نیست.

یک مثال برهمکنش ِ ذرات ِ باردار با هم است. (در فضا یِ سه-بُعدی یِ تخت) معادله-یِ-حرکت ِ نسبیتی برا یِ ذرات چنین است.

$$m_{\mathfrak{a}}\,\frac{\mathrm{d}\,[(\gamma\,v)_{\mathfrak{a}}(t)]}{\mathrm{d}\,t}\stackrel{\mathrm{ns}}{=}q_{\mathfrak{a}}\,\{E[t,r_{\mathfrak{a}}(t)]+v_{\mathfrak{a}}(t)\times B[t,r_{\mathfrak{a}}(t)]\}. \tag{377}$$

که

$$\gamma=(1-c^{-2}\,v\cdot v)^{-1/2}. \tag{378}$$

و c سرعت ِ نور است. طرف ِ چپ ِ معادله یِ (377) جرم-ضرب-در-شتاب نیست، اما یک تابع ِ خطی از آن است:

$$\frac{\mathrm{d}\,[(\gamma\,v)(t)]}{\mathrm{d}\,t}=\mathfrak{T}\,[a(t)]. \tag{379}$$

که

$$\mathfrak{T}\,\mathfrak{x}=\gamma\,\left[\frac{\gamma^2-1}{v\cdot v}\,v\,(v\cdot\mathfrak{x})+\mathfrak{x}\right]. \tag{380}$$

جرم-ضرب-در-شتاب میشود اثر ِ وارون ِ این تابع ِ خطی بر طرف ِ راست:

$$m_{\mathfrak{a}}\,a_{\mathfrak{a}}(t)\stackrel{\mathrm{ns}}{=}q_{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{T}^{-1}\,\{E[t,r_{\mathfrak{a}}(t)]+v_{\mathfrak{a}}(t)\times B[t,r_{\mathfrak{a}}(t)]\}. \tag{381}$$

E و B هم، به ترتیب، میدان ِ الکتریکی و مغناطیسی یَند. این میدانها معادلات ِ مَکسول را برمیئاورند:

$$\nabla\cdot B\stackrel{\mathrm{ns}}{=}0. \tag{382}$$

$$\nabla\times E+\frac{\partial\,B}{\partial\,t}\stackrel{\mathrm{ns}}{=}0. \tag{383}$$

$$\nabla\cdot E\stackrel{\mathrm{ns}}{=}\varepsilon_0^{-1}\,\rho. \tag{384}$$

$$\nabla\times B-c^{-2}\,\frac{\partial\,E}{\partial\,t}\stackrel{\mathrm{ns}}{=}\mu_0\,J. \tag{385}$$

ε_0 و μ_0، به ترتیب، گذردهی یِ الکتریکی یِ و تراوایی یِ مغناطیسی یِ خلئ َند و

$$\varepsilon_0\,\mu_0=c^{-2}. \tag{386}$$

ρ و J هم، به ترتیب، چگالی یِ بار و جریان َند. اینها با ذرات ِ باردار ساخته میشوند:

$$\rho(t,\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathfrak{a}} q_{\mathfrak{a}}\,\delta[r - r_{\mathfrak{a}}(t)]. \tag{387}$$

$$J(t,\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathfrak{a}} q_{\mathfrak{a}}\,v_{\mathfrak{a}}(t)\,\delta[r - r_{\mathfrak{a}}(t)]. \tag{388}$$

به این ترتیب معادلات (384) و (385) میشوند

$$\nabla\cdot E \stackrel{\text{ns}}{=} \varepsilon_0^{-1}\sum_{\mathfrak{a}} q_{\mathfrak{a}}\,\delta[r - r_{\mathfrak{a}}(t)]. \tag{389}$$

$$\nabla\times B - c^{-2}\,\frac{\partial E}{\partial t} \stackrel{\text{ns}}{=} \mu_0\sum_{\mathfrak{a}} q_{\mathfrak{a}}\,v_{\mathfrak{a}}(t)\,\delta[r - r_{\mathfrak{a}}(t)]. \tag{390}$$

رابطه یِ (377)، یا همئرز با آن (381)، معادله یِ تحول برا یِ ذرات است. روابط ِ (382) و (383) و (389) و (390) معادلات ِ تحول ِ برا یِ میدانها یَند. معادلات ِ تحول برا یِ ذرات و میدانها به هم جفت شده اند، اما با هم خُد-گردان َند.

در یک شکل ِ نانسبیتی یِ این معادلات، سرعت ِ ذرات بسیار کمتر از سرعت ِ نور است، میدان ِ مغناطیسی نیست، و میدان ِ الکتریکی هم معادلات ِ ایستاوار را برمیئاورَد:

$$m_{\mathfrak{a}}\,a_{\mathfrak{a}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q_{\mathfrak{a}}\,E[t, r_{\mathfrak{a}}(t)]. \tag{391}$$

$$\nabla\times E \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{392}$$

$$\nabla\cdot E \stackrel{\text{ns}}{=} \varepsilon_0^{-1}\sum_{\mathfrak{a}} q_{\mathfrak{a}}\,\delta[r - r_{\mathfrak{a}}(t)]. \tag{389}$$

اینجا هم معادلات ِ حاکم بر ذرات و میدانها به هم جفت شده اند. اما اینجا معادلات ِ میدان مشتق ِ زمانی یِ میدان ِ الکتریکی را ندارند و میدان ِ الکتریکی بر حسب ِ ذرات شکل ی ساده دارد:

$$E(t,r) \stackrel{\text{ns}}{=} (4\,\pi\,\varepsilon_0)^{-1}\sum_{\mathfrak{a}} \frac{q_{\mathfrak{a}}\,[r - r_{\mathfrak{a}}(t)]}{|r - r_{\mathfrak{a}}(t)|^3}. \tag{393}$$

این جواب ِ معادلات ِ (392) و (389) است، که با آن (391) میشود

$$m_{\mathfrak{a}}\,a_{\mathfrak{a}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} (4\,\pi\,\varepsilon_0)^{-1}\,q_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}{}' \frac{q_{\mathfrak{b}}\,[r_{\mathfrak{a}}(t) - r_{\mathfrak{b}}(t)]}{|r_{\mathfrak{a}}(t) - r_{\mathfrak{b}}(t)|^3}. \tag{394}$$

پریم در جمع-بندی یِ بالا به معنی یِ این است که در این جمع-بندی فقط $\mathfrak{b}$ ها یی وارد میشوند که با با $\mathfrak{a}$ برابر نیستند. رابطه یِ بالا به این شکل در میئاید.

$$m_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \sum_{\mathfrak{b}}{}' F_{\mathfrak{b}\to\mathfrak{a}}, \tag{395}$$

که

$$F_{\mathfrak{b}\to\mathfrak{a}} = (4\,\pi\,\varepsilon_0)^{-1}\,\frac{q_{\mathfrak{a}}\,q_{\mathfrak{b}}\,[r_{\mathfrak{a}}(t)-r_{\mathfrak{b}}(t)]}{|r_{\mathfrak{a}}(t)-r_{\mathfrak{b}}(t)|^3}. \tag{396}$$

دیده میشود نیرو یِ وارد بر هر ذره در زمان ِ t، تابع ِ حالت ِ ذرات در هم ان زمان ِ t است.

این که در طرف ِ راست ِ (394) یا (395) جمله یِ $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ نیست، به معنی یِ حذف ِ خُد-نیرو ست. البته اینجا اگر شکل ِ خُد-نیرو مثل ِ شکل ِ نیروها یی گرفته شود که دُ ذره به هم وارد میکنند، خُد-نیرو خُش-تعریف نمیشود: مقدار َ ش محدود نیست و جهت َ ش خُش-تعریف نیست.

در شکل ِ نسبیتی هم علی‌الاصول میشود از روابط ِ (382) و (383) و (389) و (390) میدانها را بر حسب ِ ذرات به دست آورد. اما نتیجه به سادگی یِ (393) نیست، و از آن مهمتر میدانها در زمان ِ t به وضعیت ِ ذرات در زمانها یی کوچکتر از t مربوط میشوند. پس نیرو یِ وارد بر هر ذره در زمان ِ t را نمیشود به شکل ِ تابع ی از مکانها یِ ذرات و تعداد ِ محدود ی از مشتقات ِ زمانی یِ آن، در هم ان زمان ِ t، نوشت. یعنی معادلات ِ تحول برا یِ ذرات، وقت ی میدانها حذف شوند معادلات ِ دیفرانسیل نیستند.

29 چارچوب ِ لخت یا چارچوبها یِ لخت

گیرم فضا-زمان هموستار-جداشدنی ست و زمان مستقل از فضا ست. چارچوب ِ لخت چارچوب ی ست که با آن و با زمان ِ مطلق، شتاب ِ هر ذره یِ آزاد صفر است. تبدیل- ِ-چارچوب یک تبدیل- ِ-مختصات است. در یک چارچوب، به هر نقطه از فضا-زمان مختصات ِ $(t, r^1, \dots)$ نسبت داده میشود. این مختصات را استاندارد میگیرم. در یک چارچوب ِ دیگر به هم ان رویداد مختصات ِ $(t', r'^1, \dots)$ نسبت داده میشود. در حالت ِ کلی، هر یک از r'^α ها تابع ِ r^β ها یَند. حالت ی را بررسی میکنم که t' هم ان t است. این تبدیل- ِ-چارچوب ی ست که در آن زمان عوض نمیشود. البته r'^i ها همچنان

ممکن است تابع ِ t هم باشند. تبدیل- ِ-چارچوب ی که در آن زمان عوض نمیشود مستقل-از-زمان است، اگر هر یک از r'^i ها تابع ِ فقط r^j ها باشد. یک تبدیل- ِ-چارچوب را میگویم لخت است، اگر آن تبدیل- ِ-چارچوب هر چارچوب ِ لخت را به یک چارچوب ِ لخت تبدیل کند. این یعنی تبدیل- ِ-چارچوب چنان باشد که شتاب ِ صفر را به شتاب ِ صفر تبدیل کند. دنبال ِ شرط ی میگردم که تبدیل ِ چارچوب لخت باشد.

دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,r'^i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,t} + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^j}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}. \tag{397}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,r'^i}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,t^2} + 2\,\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^j\,\partial\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^j\,\partial\,r^k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,\frac{\mathrm{d}^2\,r^l}{\mathrm{d}\,t^2}. \tag{398}$$

اینها را میشود چنین نوشت.

$$v'^{i'} = \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,t} + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^j}\,v^j. \tag{399}$$

$$b'^{i'} = \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,t^2} + 2\,\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^j\,\partial\,t}\,v^j + \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^j\,\partial\,r^k}\,v^j\,v^k + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,b^l. \tag{400}$$

رابطه یِ (400) را بر حسب ِ a مینویسم:

$$\begin{aligned} a'^{i'} &= \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,t^2} + 2\,\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^j\,\partial\,t}\,v^j + \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^j\,\partial\,r^k}\,v^j\,v^k \\ &\quad + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,(a^l - \Gamma^l{}_{j\,k}\,v^j\,v^k) + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,v'^{m'}\,v'^{n'}. \end{aligned} \tag{401}$$

پایه و هموستار ِ پریم-دار و بدون- ِ-پریم به این شکل به هم مربوط َند.

$$e_k = \frac{\partial\,r'^n}{\partial\,r^k}\,e'_n. \tag{402}$$

$$\frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,\Gamma^l{}_{j\,k} = \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^j\,\partial\,r^k} + \frac{\partial\,r'^m}{\partial\,r^j}\,\frac{\partial\,r'^n}{\partial\,r^k}\,\Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}. \tag{403}$$

به این ترتیب، با استفاده از (399) و (403)، نتیجه میشود

$$\begin{aligned} a'^{i'} &= \frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,t^2} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial\,r'^m}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,r'^n}{\partial\,t} \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial^2\,r'^i}{\partial\,r^j\,\partial\,t} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial\,r'^m}{\partial\,r^j}\,\frac{\partial\,r'^n}{\partial\,t}\right)v^j + \frac{\partial\,r'^i}{\partial\,r^l}\,a^l. \end{aligned} \tag{404}$$

v' و a' سرعت و شتاب در چارچوب ِ پریم-دار َند. اینها هم ان v و a اند، اگر و تنها اگر تبدیل- ِ- چارچوب مستقل-از-زمان باشد. اما سرعت و شتاب ِ بدون- ِ-پریم یا پریم-دار را میشود در پایه یِ بدون- ِ-پریم یا پریم-دار نوشت. اگر همه چیز در پایه یِ پریم-دار نوشته شود،

$$v'^{i'} = \frac{\partial r'^i}{\partial t} + v^{i'}. \tag{405}$$

$$\begin{aligned} a'^{i'} &= \frac{\partial^2 r'^i}{\partial t^2} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial r'^m}{\partial t}\,\frac{\partial r'^n}{\partial t} \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\,\partial t}\,\frac{\partial r^j}{\partial r'^m} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial r'^n}{\partial t}\right) v^{m'} + a^{i'}. \end{aligned} \tag{406}$$

و البته رابطه یِ اخیر را میشود چنین هم نوشت.

$$\begin{aligned} a'^{i'} &= \frac{\partial^2 r'^i}{\partial t^2} - \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial r'^m}{\partial t}\,\frac{\partial r'^n}{\partial t} - 2\,\frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\,\partial t}\,\frac{\partial r^j}{\partial r'^m}\,\frac{\partial r'^m}{\partial t} \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\,\partial t}\,\frac{\partial r^j}{\partial r'^m} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial r'^n}{\partial t}\right) v'^{m'} + a^{i'}. \end{aligned} \tag{407}$$

دیده میشود اگر تبدیل- ِ-چارچوب مستقل-از-زمان باشد،

$$v' = v. \tag{408}$$

$$a' = a. \tag{409}$$

از جمله معلوم است که برا یِ تبدیل- ِ-چارچوبها یِ مستقل-از-زمان، اگر شتاب ِ بدون- -پریم صفر باشد شتاب ِ پریم-دار هم صفر است. پس تبدیل- ِ-چارچوبها یِ مستقل-از-زمان حتمَن لخت َند. در حالت ِ کلی، که تبدیل- ِ-چارچوب لزومَن مستقل-از-زمان نیست، شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که تبدیل- ِ-چارچوب لخت باشد این است که در طرف ِ راست ِ (406) سطر ِ اول و ضریب ِ سرعت صفر شوند:

$$0 = \frac{\partial^2 r'^i}{\partial t^2} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial r'^m}{\partial t}\,\frac{\partial r'^n}{\partial t}. \tag{410}$$

$$0 = \frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\,\partial t}\,\frac{\partial r^j}{\partial r'^m} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial r'^n}{\partial t}. \tag{411}$$

میدان ِ برداری یِ w را چنین تعریف میکنم.

$$w^{i'} = \frac{\partial r'^i}{\partial t}. \tag{412}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\,\partial t}\,\frac{\partial r^j}{\partial r'^m}+\Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial r'^n}{\partial t}=\frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^m}+\Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,w^{n'}. \tag{413}$$

یا،

$$\frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\,\partial t}\,\frac{\partial r^j}{\partial r'^m}+\Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\,\frac{\partial r'^n}{\partial t}=\left(\frac{\partial w}{\partial r'^m}\right)^{i'}. \tag{414}$$

طرف ِ راست، مئلفه ی ِ m' ِ مشتق ِ هموردا ی ِ w (در زمان ِ ثابت) است. مشتق ِ پارِئی ی ِ w نسبت به زمان چنین میشود.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{i'}=\frac{\partial w^{i'}}{\partial t}+w^{m'}\,\left(\frac{\partial e'_m}{\partial t}\right)^{i'}. \tag{415}$$

اینجا منظور از مشتق ِ پارِئی نسبت به زمان این است که مختصات ِ استاندارد (بدون- ِ-پریم) ثابت َند. برا ی ِ محاسبه ی ِ مشتق ِ بردار- ِ-پایِها ی ِ پریم-دار نسبت به زمان، رابطه-ی ِ-تبدیل- ِ-پایه ی ِ (402) را به کار میبرم، همراه با این که مشتق ِ بردار- ِ-پایِها ی ِ بدون- ِ-پریم نسبت به زمان صفر است. دیده میشود

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial e_j}{\partial t},\\&=\frac{\partial^2 r'^n}{\partial t\,\partial r^j}\,e'_n+\frac{\partial r'^n}{\partial r^j}\,\frac{\partial e'_n}{\partial t}.\end{aligned} \tag{416}$$

پس،

$$\frac{\partial e'_m}{\partial t}=-\frac{\partial r^j}{\partial r'^m}\,\frac{\partial w^{n'}}{\partial r^j}\,e'_n. \tag{417}$$

یا،

$$\frac{\partial e'_m}{\partial t}=-\frac{\partial w^{n'}}{\partial r'^m}\,e'_n. \tag{418}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\, w}{\partial\, t}\right)^{i'} &= \frac{\partial\, w^{i'}}{\partial\, t} - \frac{\partial\, w^{i'}}{\partial\, r'^{m}}\, w^{m'},\\ &= \left(\frac{\partial\, w^{i'}}{\partial\, t} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{m'}\, w^{n'}\right)\\ &\quad - \left(\frac{\partial\, w^{i'}}{\partial\, r'^{m}} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{n'}\right) w^{m'}. \qquad (419)\end{aligned}$$

یا،

$$\left(\frac{\partial\, w}{\partial\, t} + \partial_w\, w\right)^{i'} = \frac{\partial\, w^{i'}}{\partial\, t} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{m'}\, w^{n'}. \qquad (420)$$

به این ترتیب،

$$\frac{\partial^2\, r'^{i}}{\partial\, t^2} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, \frac{\partial\, r'^{m}}{\partial\, t}\, \frac{\partial\, r'^{n}}{\partial\, t} = \left(\frac{\partial\, w}{\partial\, t} + \partial_w\, w\right)^{i'}. \qquad (421)$$

پس معادلات ِ (410) و (411)، به ترتیب، میشوند

$$0 = \frac{\partial\, w}{\partial\, t} + \partial_w\, w. \qquad (422)$$

$$0 = \partial\, w. \qquad (423)$$

این دُ-معادله همئرز َند با (423) و

$$0 = \frac{\partial\, w}{\partial\, t}. \qquad (424)$$

تبدیل- ِ-چارچوب لخت است، اگر و تنها اگر مشتق ِ پارِئی یِ w نسبت به زمان، و مشتق ِ همردا یِ w، هر-دُ صفر باشند.

روابط ِ تبدیل ِ سرعت و شتاب را بر حسب ِ w مینویسم. معادله یِ (405) چنین میشود.

$$v' = w + v. \qquad (425)$$

میشود اسم ِ w را سرعت ِ چارچوب ِ بدون- ِ-پریم نسبت به چارچوب ِ پریم-دار گذاشت. البته در حالت ِ کلی این سرعت تابع ِ زمان و مکان است. معادله یِ (406) میشود

$$a'^{i'} = \frac{\partial w^{i'}}{\partial t} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{m'}\, w^{n'} + 2\left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{n'}\right) v^{m'} + a^{i'}. \tag{426}$$

یا،

$$a'^{i'} = \left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial t} - \frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}}\, w^{m'}\right) + \left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{n'}\right) w^{m'} + 2\left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{n'}\right) v^{m'} + a^{i'}. \tag{427}$$

به این ترتیب،

$$a' = \frac{\partial w}{\partial t} + \partial_w\, w + 2\,\partial_v\, w + a. \tag{428}$$

معادله یِ (407) میشود

$$a'^{i'} = \frac{\partial w^{i'}}{\partial t} - \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{m'}\, w^{n'} - 2\,\frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}}\, w^{m'} + 2\left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{n'}\right) v'^{m'} + a^{i'}. \tag{429}$$

یا،

$$a'^{i'} = \left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial t} - \frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}}\, w^{m'}\right) - \left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{n'}\right) w^{m'} + 2\left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial r'^{m}} + \Gamma'^{i'}{}_{m'\,n'}\, w^{n'}\right) v'^{m'} + a^{i'}. \tag{430}$$

به این ترتیب،

$$a' = \frac{\partial w}{\partial t} - \partial_w\, w + 2\,\partial_{v'}\, w + a. \tag{431}$$

معادلات ِ (428) و (431) حالتها یی خاص َند از رابطه یِ مشتق ِ زمانی یِ یک بردار نسبت به چارچوب ِ پریم-دار با مشتق ِ زمانی یِ آن بردار نسبت به چارچوب ِ بدون- ِ-پریم. گیرم u یک بردار تابع ِ زمان و مکان است. مشتق ِ پارِئی یِ u نسبت به زمان در چارچوب ِ بدون- ِ-پریم چنین میشود.

$$\frac{\partial\,\mathrm{u}}{\partial\,t}=\frac{\partial\,\mathrm{u}^i}{\partial\,t}\,e_i. \tag{432}$$

این مشتق-گیری یعنی متغیرها یِ مستقل t و r^i ها یَند. مشتق-گیری نسبت به زمان در چارچوب ِ پریم-دار را با پریم نشان میدهم:

$$\frac{\partial'\,\mathrm{u}}{\partial\,t}=\frac{\partial'\,\mathrm{u}^{j'}}{\partial\,t}\,e'_j. \tag{433}$$

مشتق-گیری یِ پریم-دار یعنی متغیرها یِ مستقل t و r'^j ها یَند. از تعریف ِ w دیده میشود

$$\mathrm{d}\,r'^j=w^{j'}\,\mathrm{d}\,t+\frac{\partial\,r'^j}{\partial\,r^i}\,\mathrm{d}\,r^i. \tag{434}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\partial'\,r^i}{\partial\,t}=-\frac{\partial\,r^i}{\partial\,r'^j}\,w^{j'}. \tag{435}$$

یا،

$$\frac{\partial'\,r^i}{\partial\,t}=-w^i. \tag{436}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,\mathrm{u}^i}{\partial\,t}&=\frac{\partial'\,\mathrm{u}^i}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\mathrm{u}^i}{\partial\,r'^j}\,\frac{\partial\,r'^j}{\partial\,t},\\&=\frac{\partial'\,\mathrm{u}^i}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\mathrm{u}^i}{\partial\,r'^j}\,w^{j'},\\&=\frac{\partial'}{\partial\,t}\left(\frac{\partial\,r^i}{\partial\,r'^j}\,\mathrm{u}^{j'}\right)+\frac{\partial\,\mathrm{u}^i}{\partial\,r'^j}\,w^{j'},\\&=\frac{\partial\,r^i}{\partial\,r'^j}\,\frac{\partial'\,\mathrm{u}^{j'}}{\partial\,t}+\left[\frac{\partial'}{\partial\,t}\left(\frac{\partial\,r^i}{\partial\,r'^j}\right)\right]\mathrm{u}^{j'}+\frac{\partial\,\mathrm{u}^i}{\partial\,r'^j}\,w^{j'}.\end{aligned} \tag{437}$$

و،

$$\frac{\partial'}{\partial t}\left(\frac{\partial r^i}{\partial r'^j}\right)=\frac{\partial}{\partial r'^j}\left(\frac{\partial' r^i}{\partial t}\right),$$
$$=-\frac{\partial w^i}{\partial r'^j}. \tag{438}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\partial \mathfrak{u}^i}{\partial t}=\frac{\partial r^i}{\partial r'^j}\,\frac{\partial' \mathfrak{u}^{j'}}{\partial t}-\mathfrak{u}^{j'}\,\frac{\partial w^i}{\partial r'^j}+w^{j'}\,\frac{\partial \mathfrak{u}^i}{\partial r'^j}. \tag{439}$$

پس،

$$\frac{\partial \mathfrak{u}^i}{\partial t}\,e_i=\frac{\partial' \mathfrak{u}^{j'}}{\partial t}\,e'_j+\left(w^{j'}\,\frac{\partial \mathfrak{u}^i}{\partial r'^j}-\mathfrak{u}^{j'}\,\frac{\partial w^i}{\partial r'^j}\right)e_i. \tag{440}$$

جا-به-جاگر ِ میدان ِ برداری یِ $\mathfrak{x}$ با میدان ِ برداری یِ $\mathfrak{y}$ را با $\mathfrak{x}\diamond\mathfrak{y}$ نشان میدهم. (440) میشود

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}=\frac{\partial' \mathfrak{u}}{\partial t}+w\diamond\mathfrak{u}. \tag{441}$$

یا،

$$\frac{\partial' \mathfrak{u}}{\partial t}=\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}-w\diamond\mathfrak{u}. \tag{442}$$

همچنین، (440) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\partial' \mathfrak{u}^i}{\partial t}\,e_i=\frac{\partial' \mathfrak{u}^{j'}}{\partial t}\,e'_j$$
$$+\left[w^j\,\left(\frac{\partial \mathfrak{u}^i}{\partial r^j}+\Gamma^i{}_{j\,k}\,\mathfrak{u}^k\right)-\mathfrak{u}^{j'}\,\left(\frac{\partial w^i}{\partial r'^j}+\Gamma^i{}_{j\,k}\,w^k\right)\right]e_i. \tag{443}$$

پس،

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}=\frac{\partial' \mathfrak{u}}{\partial t}+\partial_w\,\mathfrak{u}-\partial_{\mathfrak{u}}\,w. \tag{444}$$

یا،

$$\frac{\partial' \mathfrak{u}}{\partial t}=\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}-\partial_w\,\mathfrak{u}+\partial_{\mathfrak{u}}\,w. \tag{445}$$

از جمله دیده میشود

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial' w}{\partial t}. \tag{446}$$

$$\frac{\partial' e_i}{\partial t} = \frac{\partial w^j}{\partial r^i}\, e_j. \tag{447}$$

مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ $\mathfrak{u}$ (بر یک خم)، در چارچوب ِ بدون- ِ-پریم، چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{u}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\,\mathfrak{u}}{\partial\,t} + \partial_v\,\mathfrak{u}. \tag{448}$$

مشتق ِ زمانی یِ کامل در چارچوب ِ پریم-دار را هم با پریم نشان میدهم:

$$\frac{\mathrm{d}'\,\mathfrak{u}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial'\,\mathfrak{u}}{\partial\,t} + \partial_{v'}\,\mathfrak{u}. \tag{449}$$

با استفاده از (444)، معادله یِ (448) میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{u}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial'\,\mathfrak{u}}{\partial\,t} + \partial_w\,\mathfrak{u} - \partial_{\mathfrak{u}}\,w + \partial_v\,\mathfrak{u}. \tag{450}$$

این هم، با استفاده از (425) میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{u}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial'\,\mathfrak{u}}{\partial\,t} + \partial_{v'}\,\mathfrak{u} - \partial_{\mathfrak{u}}\,w. \tag{451}$$

و با استفاده از (449)،

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{u}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}'\,\mathfrak{u}}{\mathrm{d}\,t} - \partial_{\mathfrak{u}}\,w. \tag{452}$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}'\,\mathfrak{u}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{u}}{\mathrm{d}\,t} + \partial_{\mathfrak{u}}\,w. \tag{453}$$

برا یِ به-دست-آوردن ِ رابطه یِ شتاب در چارچوب ِ پریم-دار با شتاب در چارچوب ِ بدون- ِ-پریم، از (425) نسبت به زمان مشتق میگیرم:

$$\frac{\mathrm{d}\,v'}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}. \tag{454}$$

$$\frac{\mathrm{d}'\,v'}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} + \partial_{v'}\,w. \tag{455}$$

اما

$$\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\,w}{\partial\,t} + \partial_v\,w. \tag{456}$$

پس،

$$\frac{\mathrm{d}'\,v'}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{\partial\,w}{\partial\,t} + \partial_v\,w + \partial_{v'}\,w\right) + \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}. \tag{457}$$

از (425) دیده میشود

$$\partial_{v'}\,w = \partial_w\,w + \partial_v\,w. \tag{458}$$

پس جمله یِ اول در طرف ِ راست ِ (457) برابر با مجموع ِ سه-جمله یِ اول در طرف ِ راست ِ (428) یا مجموع ِ سه-جمله یِ اول در طرف ِ راست ِ (431) است:

$$\frac{\partial\,w}{\partial\,t} + \partial_v\,w + \partial_{v'}\,w = \frac{\partial\,w}{\partial\,t} + 2\,\partial_v\,w + \partial_w\,w. \tag{459}$$

شتاب در چارچوب ِ پریم-دار مشتق ِ زمانی یِ سرعت در چارچوب ِ پریم-دار نسبت به چارچوب ِ پریم-دار است:

$$a' = \frac{\mathrm{d}'\,v'}{\mathrm{d}\,t}. \tag{460}$$

$$a' = \left(\frac{\partial\,w}{\partial\,t} + \partial_v\,w + \partial_{v'}\,w\right) + a. \tag{461}$$

شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که یک تبدیل- ِ-چارچوب لخت باشد، این است که مشتق ِ پارِئی یِ سرعت- ِ-نسبی نسبت به زمان، و مشتق ِ هموردا یِ سرعت- ِ-نسبی، هر-دُ صفر باشند. میشود گفت شرط ِ و کافی برا یِ این که یک تبدیل- ِ-چاروب لخت باشد این است که سرعت ِ نسبی ثابت باشد. مشتق ِ پارِئی یِ سرعت- ِ-نسبی نسبت به زمان را میشود در چارچوب ِ بدون- ِ-پریم یا در چارچوب ِ پریم-دار حساب کرد. از (446) دیده میشود اینها برا یِ سرعت- ِ-نسبی با هم برابر َند. شرط ِ این که

مشتق ِ پارئی یِ w نسبت به زمان در چارچوب ِ بدون- ِ-پریم صفر باشد، این است که مشتق ِ زمانی یِ بدون- ِ-پریم ِ w^i ها صفر باشد:

$$\frac{\partial\, w^i}{\partial\, t} = 0. \tag{462}$$

شرط ِ این که مشتق ِ پارئی یِ w نسبت به زمان در چارچوب ِ پریم-دار صفر باشد، این است که مشتق ِ زمانی یِ پریم-دار ِ $w^{i'}$ ها صفر باشد:

$$\frac{\partial'\, w^{i'}}{\partial\, t} = 0. \tag{463}$$

البته این-دُ همئرز َند. بد نیست توجه شود که $w^{i'}$ ها با رابطه یِ (412)، به شکل ِ تابعها یی از t و مختصات ِ بدون- ِ-پریم تعریف شده اند. اما در رابطه یِ (463) مشتق-گیری یِ پریم-دار نسبت به زمان ظاهر شده، یعنی مشتق-گیری نسبت زمان با ثابت-گرفتن ِ مختصات ِ پریم-دار. به هم ین ترتیب، w^i ها در در رابطه یِ (436) به شکل ِ تابعها یی از t و مختصات ِ پریم-دار ظاهر شده اند. اما در رابطه یِ (462) مشتق-گیری یِ بدون- ِ-پریم نسبت به زمان ظاهر شده، یعنی مشتق-گیری نشسبت زمان با ثابت-گرفتن ِ مختصات ِ بدون- ِ-پریم: مفصلتر، روابط ِ (462) و (463)، به ترتیب، چنین َند.

$$\left(\frac{\partial\, w^i}{\partial\, t}\right)_r = 0. \tag{464}$$

$$\left(\frac{\partial\, w^{i'}}{\partial\, t}\right)_{r'} = 0. \tag{465}$$

شکل ِ مفصل ِ رابطه یِ مختصات ِ پریم-دار با مختصات ِ بدون- ِ-پریم چنین است.

$$\frac{\partial\,[r'^i(t,r)]}{\partial\, t} = w^{i'}[r'(t,r)]. \tag{466}$$

به هم ین ترتیب،

$$\frac{\partial\,[r^i(t,r')]}{\partial\, t} = -w^i[r(t,r')]. \tag{467}$$

در این روابط، منظور از r و r'، به ترتیب، مختصات ِ بدون- ِ-پریم و مختصات ِ پریم-دار است. و البته مشتق ِ هموردا یِ w هم صفر است.

به عنوانِ یک مثال، میخاهم تبدیل-ِ-چارچوبهایِ لخت برایِ یک فضایِ تخت را به دست آورم. در فضایِ تخت، با مختصاتِ دِکَرتی، هموستار صفر است:

$$\Gamma = 0. \tag{468}$$

برایِ چارچوبِ پریم-دار، مختصاتِ دِکَرتی را به کار میبَرم. به این ترتیب،

$$\frac{\partial\, w}{\partial\, r'^j} = \frac{\partial\, w^{i'}}{\partial\, r'^j}\, e'_i. \tag{469}$$

از (423) نتیجه میشود طرفِ چپِ معادلهیِ بالا صفر است. پس،

$$\frac{\partial\, w^{i'}}{\partial\, r'^j} = 0. \tag{470}$$

یعنی $w^{i'}$ ها مستقل از مکان َند. $w^{i'}$ ها مستقل از زمان هم بودند، پس ثابت َند. به این ترتیب انتگرالِ (466) نسبت به زمان چنین میشود.

$$r'^i = w^{i'}\, t + \mathfrak{R}^i(r). \tag{471}$$

$\mathfrak{R}$ یک وابرریختیِ دلبخاه است. به هم ین ترتیب، اگر برایِ چارچوبِ بدون-ِ-پریم مختصاتِ دِکَرتی به کار رود w^i ها ثابت میشوند و انتگرالِ (467) نسبت به زمان چنین میشود.

$$r^i = -w^i\, t + \mathfrak{S}^i(r). \tag{472}$$

که $\mathfrak{S}$ یک وابرریختیِ دلبخاه است.

اگر برایِ هر-دُ-چارچوب مختصاتِ دِکَرتی به کار رود، مئلفهایِ Γ و Γ' هر-دُ صفر َند. از (403) دیده میشود

$$\frac{\partial^2\, r'^i}{\partial\, r^j\, \partial\, r^k} = 0. \tag{473}$$

پس r'^i نسبت به r^j ها دست-ِ-بالا خطی ست:

$$\mathfrak{R}^i(r) = \mathfrak{r}'^i + \mathfrak{U}^{i'}{}_j\, r^j. \tag{474}$$

که $\mathfrak{r}'^i$ ها و $\mathfrak{U}^{i'}{}_j$ ها ثابت َند. به این ترتیب،

$$r'^i = \mathfrak{r}'^i + w^{i'}\, t + \mathfrak{U}^{i'}{}_j\, r^j. \tag{475}$$

از جمله،

$$\frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^j} = \mathfrak{U}^{i'}{}_j. \tag{476}$$

$$e_j = \mathfrak{U}^{i'}{}_j\, e'_i. \tag{477}$$

$$w^{i'} = \mathfrak{U}^{i'}{}_j\, w^j. \tag{478}$$

به این ترتیب،

$$r'^i = \mathfrak{r}'^i + \mathfrak{U}^{i'}{}_j\, (w^j\, t + r^j). \tag{479}$$

و البته،

$$r^j = -\mathfrak{r}^j - w^i\, t + (\mathfrak{U}^{-1})^j{}_{i'}\, r'^i. \tag{480}$$

که

$$\mathfrak{r}^j = (\mathfrak{U}^{-1})^j{}_{i'}\, \mathfrak{r}'^i. \tag{481}$$

یک انتخاب ِ خاصتر این است که

$$\mathfrak{U}^{i'}{}_j = \delta^i{}_j. \tag{482}$$

این انتخاب نتیجه میدهد

$$e' = e. \tag{483}$$

با این انتخاب، تمایز ِ بین ِ شاخصها یِ پریم-دار و بدون- ِ-پریم از بین میرود:

$$r'^i = \mathfrak{r}^i + w^i\, t + r^i. \tag{484}$$

30 تقارنهایِ حرکتِ ذره یِ آزاد

گیرم فضا-زمان هموستار-جداشدنی ست و زمان مستقل از فضا ست. چارچوبِ لخت چارچوب ی ست که با آن و با زمانِ مطلق، شتابِ هر ذره یِ آزاد صفر است. تبدیل ی بر فضا-زمان، که زمان را عوض نکند، با یک تابعِ $\mathfrak{f}$ از فضا-زمان به فضا داده میشود:

$$s = \mathfrak{f}(t, r). \tag{485}$$

با شاخص،

$$s^i = \mathfrak{f}^i(t, r). \tag{486}$$

که تحدیدِ $\mathfrak{f}$ به هر زمانِ ثابت وارون-پذیر است. یعنی به ازا یِ همه یِ t ها، تابعِ $\mathfrak{f}(t, \cdot)$ وارون-پذیر است.

این که این تبدیل تقارنِ حرکتِ ذره یِ آزاد باشد، یعنی اگر r تابع ی از زمان به فضا باشد که مشتقِ دومَ ش صفر است:

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\, t^2}, \tag{487}$$

آنگاه مشتقِ دومِ (کاملِ) s صفر است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\, t^2}. \tag{488}$$

البته در محاسبه یِ مشتقِ دومِ r یا s هموستار ظاهر میشود: شکلِ مئلفِئی یِ (487) و (488) چنین است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2 r^i}{\mathrm{d}\, t^2} + [\Gamma^i{}_{j\,k}(r)]\, \frac{\mathrm{d}\, r^j}{\mathrm{d}\, t}\, \frac{\mathrm{d}\, r^k}{\mathrm{d}\, t}. \tag{489}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}^2 s^i}{\mathrm{d}\, t^2} + [\Gamma^i{}_{j\,k}(s)]\, \frac{\mathrm{d}\, s^j}{\mathrm{d}\, t}\, \frac{\mathrm{d}\, s^k}{\mathrm{d}\, t}. \tag{490}$$

گیرم $\mathfrak{f}$ مستقل از زمان است:

$$s = \mathfrak{f}(r). \tag{491}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial s^i}{\partial t} = 0. \tag{492}$$

$$\frac{\mathrm{d}\, s^i}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\partial s^i}{\partial r^j}\,\frac{\mathrm{d}\, r^j}{\mathrm{d}\, t}. \tag{493}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s^i}{\mathrm{d}\, t^2} = \frac{\partial^2 s^i}{\partial r^j\,\partial r^k}\,\frac{\mathrm{d}\, r^j}{\mathrm{d}\, t}\,\frac{\mathrm{d}\, r^k}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\partial s^i}{\partial r^l}\,\frac{\mathrm{d}^2 r^l}{\mathrm{d}\, t^2}. \tag{494}$$

پس معادله-یِ-حرکت ِ (489) نتیجه میدهد

$$\frac{\mathrm{d}^2 s^i}{\mathrm{d}\, t^2} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial^2 s^i}{\partial r^j\,\partial r^k}\,\frac{\mathrm{d}\, r^j}{\mathrm{d}\, t}\,\frac{\mathrm{d}\, r^k}{\mathrm{d}\, t} - \frac{\partial s^i}{\partial r^l}\,[\Gamma^l{}_{j\,k}(r)]\,\frac{\mathrm{d}\, r^j}{\mathrm{d}\, t}\,\frac{\mathrm{d}\, r^k}{\mathrm{d}\, t}. \tag{495}$$

معادله-یِ-حرکت ِ (490) همئرز است با

$$\frac{\mathrm{d}^2 s^i}{\mathrm{d}\, t^2} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} -\,[\Gamma^i{}_{m\,n}(s)]\,\frac{\partial s^m}{\partial r^j}\,\frac{\partial s^n}{\partial r^k}\,\frac{\mathrm{d}\, r^j}{\mathrm{d}\, t}\,\frac{\mathrm{d}\, r^k}{\mathrm{d}\, t}. \tag{496}$$

به این ترتیب معادله-یِ-حرکت ِ (489) معادله-یِ-حرکت ِ (490) را نتیجه میدهد، اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial s^i}{\partial r^l}\,[\Gamma^l{}_{j\,k}(r)] = \frac{\partial^2 s^i}{\partial r^j\,\partial r^k} + [\Gamma^i{}_{m\,n}(s)]\,\frac{\partial s^m}{\partial r^j}\,\frac{\partial s^n}{\partial r^k}. \tag{497}$$

شرط ِ (497) را میشود بر حسب ِ پیشران بیان کرد. اثر ِ $\mathfrak{f}_*$ (پیشران ِ $\mathfrak{f}$) بر میدان-پایه یِ e چنین است.

$$(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s) = \frac{\partial s^m}{\partial r^j}\, e_m(s). \tag{498}$$

$\mathfrak{f}_*(\Gamma)$ را با یک مشتق- ِ-هموردا تعریف میکنم که هموستار ِ متناظر با آن $\mathfrak{f}_*(\Gamma)$ است. این مشتق- ِ-هموردا را با پریم نشان میدهم، و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\partial'_{(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s)}\,[(\mathfrak{f}_*\, e_k)(s)] = [\Gamma^i{}_{j\,k}(r)]\,(\mathfrak{f}_*\, e_i)(s). \tag{499}$$

این را میشود بر حسب ِ $\mathfrak{f}_*(\Gamma)$ نوشت:

$$\partial'_{e_m(s)}\, e_n(s) = \{[\mathfrak{f}_*(\Gamma)]^i{}_{m\,n}(s)\}\, e_i(s). \tag{500}$$

پس،

$$\begin{aligned}\partial'_{(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s)}\,[(\mathfrak{f}_*\, e_k)(s)] &= \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\partial'_{e_m(s)}\,\left[\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,e_n(s)\right],\\ &= \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\left[\frac{\partial}{\partial\, s^m}\,\left(\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\right)\right]\,e_n(s) + \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,\partial'_{e_m(s)}\,e_n(s),\\ &= \frac{\partial^2\, s^n}{\partial\, r^j\,\partial\, r^k}\,e_n(s) + \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,\{[\mathfrak{f}_*(\Gamma)]^i{}_{m\,n}(s)\}\,e_i(s). \quad (501)\end{aligned}$$

که نتیجه میدهد

$$\partial'_{(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s)}\,[(\mathfrak{f}_*\, e_k)(s)] = \left(\frac{\partial^2\, s^i}{\partial\, r^j\,\partial\, r^k} + \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,\{[\mathfrak{f}_*(\Gamma)]^i{}_{m\,n}(s)\}\right)\,e_i(s). \quad (502)$$

با استفاده از (498)، رابطه یِ (499) چنین میشود

$$\partial'_{(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s)}\,[(\mathfrak{f}_*\, e_k)(s)] = [\Gamma^l{}_{j\,k}(r)]\,\frac{\partial\, s^i}{\partial\, r^l}\,e_i(s). \quad (503)$$

پس

$$[\Gamma^l{}_{j\,k}(r)]\,\frac{\partial\, s^i}{\partial\, r^l} = \frac{\partial^2\, s^i}{\partial\, r^j\,\partial\, r^k} + \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,\{[\mathfrak{f}_*(\Gamma)]^i{}_{m\,n}(s). \quad (504)$$

از این دیده میشود (497) برقرار است، اگر و تنها اگر

$$\mathfrak{f}_*(\Gamma) = \Gamma. \quad (505)$$

یک راه ِ دیگر ِ رسیدن به این رابطه چنین است. مشتق ِ هموردا یِ $(\mathfrak{f}_*\, e_j)$ با هموستار ِ Γ چنین میشود.

$$\begin{aligned}\partial_{(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s)}\,[(\mathfrak{f}_*\, e_k)(s)] &= \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\partial_{e_m(s)}\,\left[\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,e_n(s)\right],\\ &= \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\left[\frac{\partial}{\partial\, s^m}\,\left(\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\right)\right]\,e_n(s) + \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,\partial_{e_m(s)}\,e_n(s),\\ &= \frac{\partial^2\, s^n}{\partial\, r^j\,\partial\, r^k}\,e_n(s) + \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,[\Gamma^i{}_{m\,n}(s)]\,e_i(s). \quad (506)\end{aligned}$$

که نتیجه میدهد

$$\partial_{(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s)}\,[(\mathfrak{f}_*\, e_k)(s)] = \left\{\frac{\partial^2\, s^i}{\partial\, r^j\,\partial\, r^k} + \frac{\partial\, s^m}{\partial\, r^j}\,\frac{\partial\, s^n}{\partial\, r^k}\,[\Gamma^i{}_{m\,n}(s)]\right\}\,e_i(s). \quad (507)$$

از (503) و (507) دیده میشود (497) برقرار است، اگر و تنها اگر

$$\partial'_{(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s)}\,[(\mathfrak{f}_*\, e_k)(s)] = \partial_{(\mathfrak{f}_*\, e_j)(s)}\,[(\mathfrak{f}_*\, e_k)(s)]. \tag{508}$$

یا، مختصرتر،

$$\partial' = \partial. \tag{509}$$

رُشن است که این هم ان (505) است.

پس رابطه یِ (489) رابطه یِ (490) را نتیجه میدهد، اگر و تنها اگر (505) برقرار باشد. یعنی تبدیل ِ مستقل-از-زمان ِ $\mathfrak{f}$ تقارن ِ حرکت ِ ذره یِ آزاد است، اگر و تنها اگر $\mathfrak{f}$ یک تقارن ِ هموستار باشد.

اگر $\mathfrak{f}$ مستقل-از-زمان نباشد، (492) برقرار نیست و (493) و (494) به اینها تبدیل میشوند.

$$\frac{\mathrm{d}\,s^i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\,s^i}{\partial\,t} + \frac{\partial\,s^i}{\partial\,r^j}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}. \tag{510}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,s^i}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,t^2} + 2\,\frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,r^j\,\partial\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,r^j\,\partial\,r^k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial\,s^i}{\partial\,r^l}\,\frac{\mathrm{d}^2\,r^l}{\mathrm{d}\,t^2}. \tag{511}$$

معادله-یِ-حرکت ِ (489) نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\,s^i}{\mathrm{d}\,t^2} \overset{\mathrm{ns}}{=} {}& \frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,t^2} + 2\,\frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,r^j\,\partial\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,r^j\,\partial\,r^k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} \\ & - \frac{\partial\,s^i}{\partial\,r^l}\,[\Gamma^l{}_{j\,k}(r)]\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t}.\end{aligned} \tag{512}$$

پس معادله-یِ-حرکت ِ (489) معادله-یِ-حرکت ِ (490) را نتیجه میدهد، اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned}0 = {}& \frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,t^2} + 2\,\frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,r^j\,\partial\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,r^j\,\partial\,r^k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} \\ & - \frac{\partial\,s^i}{\partial\,r^l}\,[\Gamma^l{}_{j\,k}(r)]\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t} \\ & + [\Gamma^i{}_{m\,n}(s)]\,\left(\frac{\partial\,s^m}{\partial\,t} + \frac{\partial\,s^m}{\partial\,r^j}\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\right)\,\left(\frac{\partial\,s^n}{\partial\,t} + \frac{\partial\,s^n}{\partial\,r^k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t}\right).\end{aligned} \tag{513}$$

این رابطه باید به ازا یِ همه یِ سرعتها برقرار باشد. پس ضریبها یِ جملات ِ از درجها یِ صفر و یک و دُ نسبت به سرعت باید تک-تک صفر باشند:

$$0 = \frac{\partial^2\,s^i}{\partial\,t^2} + [\Gamma^i{}_{m\,n}(s)]\,\frac{\partial\,s^m}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,s^n}{\partial\,t}. \tag{514}$$

$$0 = \frac{\partial^2 s^i}{\partial r^j \, \partial t} + [\Gamma^i{}_{m\,n}(s)] \, \frac{\partial s^m}{\partial r^j} \, \frac{\partial s^n}{\partial t}. \tag{515}$$

$$0 = \frac{\partial^2 s^i}{\partial r^j \, \partial r^k} - \frac{\partial s^i}{\partial r^l} \, [\Gamma^l{}_{j\,k}(r)] + [\Gamma^i{}_{m\,n}(s)] \, \frac{\partial s^m}{\partial r^j} \, \frac{\partial s^n}{\partial r^k}. \tag{516}$$

رابطه یِ (516) هم ان رابطه یِ (497) است. رابطه یِ (515)، با اثر-دادن ِ ماتریس ِ مشتق ِ r نسبت به s بر آن، چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial}{\partial s^l} \left(\frac{\partial s^i}{\partial t} \right) + [\Gamma^i{}_{l\,n}(s)] \, \frac{\partial s^n}{\partial t}. \tag{517}$$

میدان ِ برداری یِ u را چنین تعریف میکنم.

$$u^i(t,s) = \frac{\partial s^i}{\partial t}. \tag{518}$$

رابطه یِ (517) میشود

$$0 = \frac{\partial u^i}{\partial s^l} + [\Gamma^i{}_{l\,n}(s)] \, u^n. \tag{519}$$

یعنی مشتق ِ هموردا یِ میدان ِ برداری یِ u صفر است. همچنین، دیده میشود

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s^i}{\partial t^2} &= \frac{\partial u^i}{\partial t} + \frac{\partial u^i}{\partial s^m} \, \frac{\partial s^m}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial t} + \frac{\partial u^i}{\partial s^m} \, u^m. \end{aligned} \tag{520}$$

به این ترتیب (514) میشود

$$0 = \frac{\partial u^i}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial u^i}{\partial s^m} + [\Gamma^i{}_{m\,n}(s)] \, u^n \right\} u^m. \tag{521}$$

این و (519) نتیجه میدهند

$$0 = \frac{\partial u^i}{\partial t}. \tag{522}$$

یعنی بستگی یِ u به زمان، از طریق ِ فقط s است. این رابطه یِ (518) را به این شکل در میاورَد.

$$\frac{\partial s^i}{\partial t} = u^i(s). \tag{523}$$

یعنی $\mathfrak{f}$ شارش ِ میدان ِ برداری یِ u است.

پس تبدیل ِ $\mathfrak{f}$ تقارن ِ حرکت ِ ذره یِ آزاد است، اگر و تنها اگر
$\mathfrak{f}$ شارش ِ یک میدان ِ برداری یِ u با پارمتر ِ زمان باشد،
مشتق ِ هموردا یِ میدان ِ برداری یِ u صفر باشد،
و $\mathfrak{f}(t,\cdot)$ به ازا یِ هر t یک تقارن ِ هموستار باشد.

اگر فضا-زمان متریک-دار باشد، این که مشتق ِ هموردا یِ یک میدان ِ برداری یِ u صفر باشد نتیجه میدهد u یک میدان ِ برداری یِ کیلینگ است، یعنی شارش ِ u یک تقارن هموستار است. اگر یک تابع ِ $\mathfrak{f}$ تقارن ِ متریک باشد (یعنی طول را حفظ کند) $\mathfrak{f}$ تقارن ِ هموستار (ِلِوی-چیویتا) هم هست. اما عکس ِ این گزاره لزومَن درست نیست. مثلَن در فضا یِ تخت، هموستار با مختصات ِ دِکَرتی صفر است. هر $\mathfrak{f}$ که دست- ِ-بالا-خطی باشد هموستار را صفر نگه میدارد، پس تقارن ِ هموستار است، اما هر $\mathfrak{f}$ که دست- ِ-بالا-خطی باشد لزمَن تقارن ِ متریک نیست. در فضا-زمان ِ متریک-دار، شرط بر تقارن ِ حرکت ِ ذره یِ آزاد را قویتر میکنم: این که هر ژئُدزیک به ژئُدزیک تبدیل شود، و فاصله یِ هر دُ-نقطه (در یک زمان) هم ثابت بماند. با این تعریف،

در فضازمان ِ متریک-دار، تبدیل ِ $\mathfrak{f}$ تقارن ِ حرکت ِ ذره یِ آزاد است، اگر و تنها اگر
$\mathfrak{f}$ شارش ِ یک میدان ِ برداری یِ u با پارمتر ِ زمان باشد،
مشتق ِ هموردا یِ میدان ِ برداری یِ u صفر باشد،
و $\mathfrak{f}(t,\cdot)$ به ازا یِ هر t یک تقارن ِ متریک باشد.

از جمله دیده میشود تقارنها یِ نابدیهی یِ حرکت ِ ذره-یِ-آزاد وجود دارند، اگر و تنها اگر فضا تقارن ِ نابدیهی (یِ هموستار یا متریک) داشته باشد. برا یِ وجود ِ تقارنها یِ نابدیهی یِ وابسته-به-زمان، جز این لازم است میدان ِ برداری یی باشد که مشتق ِ هموردا یَ ش صفر است.

به عنوان ِ یک مثال، گیرم فضا تخت است. در این صورت، با مختصات ِ دِکَرتی، هموستار صفر است:

$$\Gamma = 0. \tag{524}$$

میخاهم $\mathfrak{f}$ ها یی را به دست آورم که تقارن ِ حرکت ِ ذره یِ آزاد َند. s را با (485) تعریف میکنم و برا یِ r و s مختصات ِ دِکَرتی را به کار میبرم. از (497) دیده میشود

$$\frac{\partial^2 s^i}{\partial r^j \, \partial r^k} = 0. \tag{525}$$

این نتیجه میدهد $\mathfrak{f}(t,r)$، نسبت به r دست- ِ-بالا خطی ست:

$$\mathfrak{f}(t,r) = \mathfrak{s}(t) + [\mathfrak{R}(t)]\, r. \tag{526}$$

که r و $\mathfrak{s}$ بردار َند و $\mathfrak{R}$ ماتریس است. این که $\mathfrak{f}(t,\cdot)$ وارون-پذیر باشد، یعنی $\mathfrak{R}$ وارون-پذیر است. رابطه یِ (526) یعنی

$$s = \mathfrak{s} + \mathfrak{R}\, r. \tag{527}$$

مئلفیئِی،

$$\mathfrak{f}^i(t,r) = \mathfrak{s}^i(t) + [\mathfrak{R}^i{}_j(t)]\, r^j. \tag{528}$$

یا،

$$s^i = \mathfrak{s}^i(t) + [\mathfrak{R}^i{}_j(t)]\, r^j. \tag{529}$$

از تعریف ِ u با (518)، دیده میشود

$$u^i = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{s}^i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{R}i_j}{\mathrm{d}\,t}\, r^j. \tag{530}$$

بسته،

$$u = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{s}}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\,t}\, r. \tag{531}$$

یا،

$$u = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{s}}{\mathrm{d}\,t} - \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\,t}\, \mathfrak{R}^{-1}\, \mathfrak{s} + \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\,t}\, \mathfrak{R}^{-1}\, s. \tag{532}$$

از (519) و (524) نتیجه میشود

$$0 = \frac{\partial\, u^i}{\partial\, s^l}. \tag{533}$$

به این ترتیب،

$$0 = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\,t}\,\mathfrak{R}^{-1}. \tag{534}$$

که نتیجه میدهد

$$0 = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{R}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{535}$$

پس $\mathfrak{R}$ ثابت است و

$$u = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{s}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{536}$$

به این ترتیب، از (522) نتیجه میشود

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2\,\mathfrak{s}}{\mathrm{d}\,t^2}. \tag{537}$$

پس،

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{v}\,t. \tag{538}$$

که $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{v}$ بردارها ی ثابت َند. نتیجه این که

$$\mathfrak{f}(t, r) = \mathfrak{a} + \mathfrak{v}\,t + \mathfrak{R}\,r. \tag{539}$$

که در طرف ِ راست، همه چیز جز t و r ثابت است.

اگر فضا متریک-دار نباشد، همه یِ $\mathfrak{f}$ ها یی که به شکل ِ (539) اند تقارن ِ حرکت ِ ذره یِ آزاد َند. اما اگر فضا متریک-دار باشد، یک شرط ِ دیگر هم لازم است: این که $\mathfrak{f}(t, \cdot)$ طول را حفظ

کند. چون فضا تخت است و مختصات دِکَرتی یَند، مئلفِها یِ متریک ثابت َند، و فاصله یِ r_1 و r_2 از هم $|r_2 - r_1|$ است، که

$$|r_2 - r_1| = \sqrt{(r_2 - r_1) \cdot (r_2 - r_1)}. \tag{540}$$

یعنی،

$$|r_2 - r_1| = \sqrt{g(r_2 - r_1, r_2 - r_1)}. \tag{541}$$

که g متریک ِ فضا ست. دیده میشود

$$s_2(t) - s_1(t) = \mathfrak{R}\,[r_2(t) - r_1(t)]. \tag{542}$$

پس شرط ِ این که تحت ِ $\mathfrak{f}(t, \cdot)$ فاصله یِ دُ نقطه ثابت بماند این است که به ازا یِ هر بردار ِ $\mathfrak{x}$،

$$(\mathfrak{R}\,\mathfrak{x}) \cdot (\mathfrak{R}\,\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}. \tag{543}$$

یعنی

$$g(\mathfrak{R}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{R}\,\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}). \tag{544}$$

این یعنی $\mathfrak{R}$ طول را ثابت نگه دارد، یعنی متعامد باشد.

4

فرمول- بندی یِ لَگرانژ

31 انرژی یِ جنبشی

گیرم فضا متریک- دار است. انرژی یِ جنبشی را با K نشان میدهم و آن را، در یک چارچوب ِ لخت، برا یِ ذره ای نانسبیتی به جرم ِ m چنین تعریف میکنم.

$$K = \frac{1}{2}\, m\, v \cdot v. \tag{545}$$

مئلفِئی،

$$K = \frac{1}{2}\, m\, g_{i\,j}\, v^i\, v^j. \tag{546}$$

که g متریک ِ فضا ست. مئلفِها یِ متریک، در حالت ِ کلی تابع ِ مکان َند. به این ترتیب انرژی یِ جنبشی تابع ِ مئلفِها یِ مکان و مئلفِها یِ سرعت میشود. از جمله،

$$\frac{\partial\, K}{\partial\, v^j} = m\, g_{i\,j}\, v^i. \tag{547}$$

یا،

$$\frac{\partial K}{\partial v^j} = m\, v_j. \tag{548}$$

یک ذره به جرم ِ m تحت ِ نیرو یِ F حرکت میکند. معادله یِ حرکت ِ ذره چنین است.

$$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2 r^i}{\mathrm{d}\,t^2} + [\Gamma^i{}_{j\,k}(r)]\,\frac{\mathrm{d}\,r^j}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t}\right\} \stackrel{\text{ns}}{=} F^i(t,r,v). \tag{346}$$

متناظر با هر نقطه یِ r، مختصات ی هست که مشتق ِ مئلفِها یِ متریک در r را صفر میکند. پس مئلفِها یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا هم در r صفر میشوند. برا یِ یک نقطه یِ r_0 از مسیر ِ ذره، متناظر با زمان ِ t_0، این مختصات را به کار میبرم. نتیجه میشود

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\,r^i}{\mathrm{d}\,t^2} \stackrel{\text{ns}}{=} F^i, \qquad t = t_0. \tag{549}$$

یا،

$$m\,\frac{\mathrm{d}\,v^i}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} F^i, \qquad t = t_0. \tag{550}$$

دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,g_{i\,j}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\,g_{i\,j}}{\partial\,r^k}\,\frac{\mathrm{d}\,r^k}{\mathrm{d}\,t}. \tag{551}$$

به این ترتیب مشتق ِ کامل ِ مئلفِها یِ متریک نسبت به زمان، در t_0 صفر است. پس (550) را میشود چنین نوشت.

$$m\,\frac{\mathrm{d}\,(g_{i\,j}\,v^i)}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} g_{i\,j}\,F^i, \qquad t = t_0. \tag{552}$$

یا،

$$m\,\frac{\mathrm{d}\,v_j}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} F_j, \qquad t = t_0. \tag{553}$$

این هم، با استفاده از (548) میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,K}{\partial\,v^j}\right) \stackrel{\text{ns}}{=} F_j, \qquad t = t_0. \tag{554}$$

معادله یِ (554) در مختصات ی خاص برقرار است. میخاهم آن را به شکل ی بنویسم که مستقل از مختصات باشد. مختصات ِ پریم-دار را تابع ی هموار از زمان و مختصات ِ بدون- ِ-پریم میگیرم، چنان که مختصات ِ بدون- ِ-پریم هم تابع ی هموار از زمان و مختصات ِ پریم-دار است. دیده میشود

$$\frac{\partial r'^i}{\partial v^j} = 0. \tag{555}$$

$$v'^i = \frac{\partial r'^i}{\partial t} + \frac{\partial r'^i}{\partial r^j}\, v^j. \tag{556}$$

در طرف ِ راست، جمله یِ اول و ضریبها یِ مئلفِها یِ سرعت تابع ِ فقط زمان و مکان َند. پس،

$$\frac{\partial v'^i}{\partial v^j} = \frac{\partial r'^i}{\partial r^j}. \tag{557}$$

همچنین،

$$\frac{\partial v'^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 r'^i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 r'^i}{\partial t\, \partial r^j}\, v^j. \tag{558}$$

$$\frac{\partial v'^i}{\partial r^j} = \frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\, \partial t} + \frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\, \partial r^k}\, v^k. \tag{559}$$

مشتق ِ مختصات ِ پریم-دار نسبت به زمان یا مختصات ِ بدون- ِ-پریم، تابع ِ فقط زمان و مختصات ِ بدون- ِ-پریم است. پس،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial r'^i}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 r'^i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^j\, \partial t}\, v^j. \tag{560}$$

که نشان میدهد

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial r'^i}{\partial t}\right) = \frac{\partial v'^i}{\partial t}. \tag{561}$$

همچنین،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial r'^i}{\partial r^j}\right) = \frac{\partial^2 r'^i}{\partial t\, \partial r^j} + \frac{\partial^2 r'^i}{\partial r^k\, \partial r^j}\, v^k. \tag{562}$$

که نشان میدهد

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial r'^i}{\partial r^j}\right) = \frac{\partial v'^i}{\partial r^j}. \tag{563}$$

گیرم $\mathfrak{X}$ تابع ی از زمان و مکان و سرعت است. مشتقها یِ این تابع نسبت به متغیرها یِ بدون- ِ-پریم را برحسب ِ مشتقها یِ آن نسبت به متغیرها یِ پریم-دار مینویسم:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial r^j} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial r'^i}\,\frac{\partial r'^i}{\partial r^j} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v'^i}\,\frac{\partial v'^i}{\partial r^j}. \tag{564}$$

همچنین،

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v^j} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v'^i}\,\frac{\partial v'^i}{\partial v^j}. \tag{565}$$

که با استفاده از (557) میشود

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v^j} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v'^i}\,\frac{\partial r'^i}{\partial r^j}. \tag{566}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v^j}\right) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v'^i}\right)\right]\frac{\partial r'^i}{\partial r^j} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v'^i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial r'^i}{\partial r^j}\right). \tag{567}$$

که با استفاده از (563) میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v^j}\right) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v'^i}\right)\right]\frac{\partial r'^i}{\partial r^j} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v'^i}\,\frac{\partial v'^i}{\partial r^j}. \tag{568}$$

از رابطه یِ (564) دیده میشود مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به مختصات ِ بدون- ِ-پریم را نمیشود بر حسب ِ فقط مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به مختصات ِ پریم-دار و معادلات ِ تغییر- ِ-مختصات نوشت. از رابطه یِ (568) هم دیده میشود مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به سرعت ِ بدون- ِ-پریم را نمیشود بر حسب ِ فقط مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به سرعت ِ پریم-دار و معادلات ِ تغییر- ِ-مختصات نوشت. اما از هم ین روابط دیده میشود

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial r^j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v^j}\right) = \left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial r'^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v'^i}\right)\right]\frac{\partial r'^i}{\partial r^j}. \tag{569}$$

برا یِ یک تابع از زمان و مکان و سرعت، مشتق ِ گسترش-یافته را با ȫ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\text{ȫ}_i\,\mathfrak{X} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v^i}\right). \tag{570}$$

به این ترتیب (569) میشود

$$\text{ð}_j\,\mathfrak{X} = (\text{ð}_{i'}\,\mathfrak{X})\,\frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^j}. \tag{571}$$

انرژی یِ جنبشی یِ ذره در یک چارچوب ِ لخت، به شکل ِ (546) است. جا یی که مشتق ِ مئلفِها یِ متریک نسبت به مختصات ِ فضا صفر باشند، مشتق ِ انرژی یِ جنبشی نسبت به مختصات ِ فضا هم صفر میشود. پس با مختصات ی که مشتق ِ مئلفِها یِ متریک را در نقطه یِ r_0 از مسیر ِ ذره (متناظر با زمان ِ t_0) صفر میکنند،

$$\frac{\partial\, K}{\partial\, r^j} = 0, \qquad t = t_0. \tag{572}$$

به این ترتیب معادله یِ (554) را میشود چنین نوشت.

$$-\left[\frac{\partial\, K}{\partial\, r^j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\,\left(\frac{\partial\, K}{\partial\, v^j}\right)\right] \stackrel{\text{ns}}{=} F_j, \qquad t = t_0. \tag{573}$$

یا،

$$-\text{ð}_j\, K \stackrel{\text{ns}}{=} F_j, \qquad t = t_0. \tag{574}$$

این معادله را بر حسب ِ مختصات ِ (دلبخاه ِ) پریم-دار مینویسم. با استفاده از (571)،

$$-(\text{ð}_{i'}\, K)\,\frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^j} \stackrel{\text{ns}}{=} F_j, \qquad t = t_0. \tag{575}$$

یا، با ضرب ِ دُ-طرف در وارون ِ ماتریس ِ مشتق ِ تغییر- ِ-مختصات،

$$-\text{ð}_{i'}\, K \stackrel{\text{ns}}{=} F_j\,\frac{\partial\, r^j}{\partial\, r'^i}, \quad t = t_0. \tag{576}$$

طرف ِ راست، مئلفه یِ نیرو در پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصات ِ پریم-دار است:

$$F_j\,\frac{\partial\, r^j}{\partial\, r'^i} = F_{i'}. \tag{577}$$

پس معادله یِ (576) چنین میشود

$$-\text{ð}_{i'}\, K \stackrel{\text{ns}}{=} F_{i'}, \qquad t = t_0. \tag{578}$$

مختصات ِ پریم-دار خاص نیستند (مثلَن لزومَن جا یی مشتق ِ مئلفِها یِ متریک را صفر نمیکنند). به این ترتیب، معادله یِ حرکت را میشود با مختصات ِ دلبخاه و برا یِ هر زمان ی به شکل ِ (578) نوشت. شاخص ِ پریم را هم از مختصات برمیدارم. معادله یِ حرکت میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mathscr{a}\partial_i K + F_i. \tag{579}$$

مفصلتر،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \left[\frac{\partial K}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial v^i}\right)\right] + F_i. \tag{580}$$

32 کار

انتگرال ِ نیرو بر مسیر ِ $\mathbb{C}$ را با $W_{\mathbb{C}}$ نشان میدهم و به آن کار ِ نیرو بر مسیر ِ $\mathbb{C}$ میگویم. برا یِ تعریف ِ انتگرال ِ نیرو بر مسیر بر حسب ِ بردار ِ نیرو، ضرب ِ درونی لازم است:

$$W_{\mathbb{C}} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\,[v(t)] \cdot \{F[t, r(t), v(t)]\}. \tag{581}$$

بسته،

$$W_{\mathbb{C}} = \int_{\mathbb{C}} (\mathrm{d}\,r) \cdot F. \tag{582}$$

این انتگرال را میشود بر حسب ِ همبردار ِ نیرو نوشت، که در آن صورت دیگر ضرب ِ درونی لازم نیست:

$$W_{\mathbb{C}} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\,[v^i(t)]\,F_i[t, r(t), v(t)]. \tag{583}$$

بسته،

$$W_{\mathbb{C}} = \int_{\mathbb{C}} (\mathrm{d}\,r^i)\,F_i. \tag{584}$$

در حالت ِ کلی که نیرو تابع ِ زمان و مکان و سرعت است، کار واقعَن یک انتگرال بر مسیر نیست و به شکل ِ پیمایش ِ مسیر هم بستگی دارد. از جمله، کار مستقل از پارامترش ِ مسیر نیست. اما اگر نیرو مستقل از زمان و سرعت باشد، کار واقعَن یک انتگرال بر مسیر است و از جمله مستقل از پارامترش ِ مسیر است.

معادله یِ حرکت برا یِ جسم ی به جرم ِ m تحت ِ نیرو یِ F، در یک چارچوب ِ لخت، چنین است.

$$m\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} F. \tag{585}$$

این را در سرعت ضرب ِ درونی میکنم:

$$m\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\cdot v \stackrel{\text{ns}}{=} F\cdot v. \tag{586}$$

طرف ِ چپ مشتق ِ انرژی یِ جنبشی نسبت به زمان، و طرف ِ راست مشتق ِ کار ِ نیرو نسبت به زمان است:

$$\frac{\mathrm{d}\,K}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}\,W}{\mathrm{d}\,t}. \tag{587}$$

به مشتق ِ کار نسبت به زمان توان میگویم، و آن را با $\mathcal{P}$ نشان میدهم:

$$\frac{\mathrm{d}\,K}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} \mathcal{P}. \tag{588}$$

معادله یِ (588) یعنی مشتق ِ انرژی-یِ-جنبشی نسبت به زمان توان ِ نیرو ست. به این برابری شکل ِ دیفرانسیلی یِ قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی میگویند. از دُ-طرف (587) نسبت زمان انتگرل میگیرم:

$$\Delta\,K \stackrel{\text{ns}}{=} W. \tag{589}$$

یعنی تغییر ِ انرژی یِ جنبشی برابر با کار ِ نیرو ست. به این قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی (یا شکل ِ انتگرالی یِ قضیه یِ کار-انرژی-یِ-جنبشی) میگویند.

33 نیرو یِ پایستار

میگویند نیرو یِ F پایستار است، اگر F تابع ِ فقط مکان باشد (به زمان و سرعت بستگی نداشته باشد) و انتگرال ِ آن بر هر حلقه در فضا صفر شود. یعنی متناظر با هر حلقه یِ $\mathbb{L}$،

$$W_{\mathbb{L}} = 0. \tag{590}$$

این که انتگرال ِ نیرو بر هر حلقه صفر شود، همئرز است با این که انتگرال ِ نیرو بر مسیر ِ $\mathbb{C}$ تابع ِ فقط ابتدا و انتها یِ مسیر باشد. یعنی متناظر با هر دُ-مسیر ِ $\mathbb{C}_1$ و $\mathbb{C}_2$ که ابتدا یِ شان یکسان و انتها یِ شان یکسان باشد،

$$W_{\mathbb{C}_2} = W_{\mathbb{C}_1}. \tag{591}$$

این که نیرو تابع ِ فقط مکان باشد و انتگرال َ ش بر هر حلقه صفر شود (یا ا انتگرال َ ش بر هر مسیر تابع ِ فقط ابتدا و انتها یِ مسیر باشد)، همئرز است با این که یک تابع از فقط مکان هست که نیرو مشتق ِ آن است. یعنی یک تابع ِ U از مکان هست که

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial r^i}. \tag{592}$$

به U انرژی یِ پتانسیل میگویند. رابطه یِ بالا انرژی یِ پتانسیل را تا حد ِ یک ثابت ِ جمعی مشخص میکند: به هر U که رابطه یِ بالا را براورَد میشود یک ثابت افزود، و نتیجه همچنان رابطه یِ بالا را برمیئاورَد. علامت ِ منفی هم اهمیت ی ندارد و فقط نقش ِ تاریخی دارد: میشد انرژی-یِ-پتانسیل را بدون ِ علامت ِ منفی تعریف کرد، اما قرارداد ِ اولیه با علامت ِ منفی بوده.

اگر نیرو پایستار باشد، کار ِ نیرو را میشود بر حسب ِ انرژی یِ پتانسیل نوشت. از (584) دیده میشود

$$W_{\mathbb{C}} = -\int_{\mathbb{C}} (\mathrm{d}\, r^i)\, \frac{\partial U}{\partial r^i}. \tag{593}$$

که نتیجه میدهد

$$W = -\Delta\, U. \tag{594}$$

از ترکیب ِ این با (589) هم نتیجه میشود

$$\Delta K + \Delta U \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{595}$$

انرژی یِ مکانیکی را با H نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$H = K + U. \tag{596}$$

رابطه یِ (595) میشود

$$\Delta H \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{597}$$

به این پایستگی یِ انرژی یِ مکانیکی میگویند: اگر نیرو پایستار باشد، با تحول (حرکت ِ ذره) انرژی یِ مکانیکی ثابت میمانَد.

انرژی یِ مکانیکی هم، مثل ِ انرژی یِ پتانسیل، تا حد ِ یک ثابت ِ جمعی تعریف میشود: میشود به انرژی یِ مکانیکی یک ثابت افزود، و از جمله پایستگی یِ انرژی یِ مکانیکی عوض نمیشود.

اگر بخش ی از نیرو پایستار باشد، یعنی بخش ی از نیرو تابع ِ فقط مکان باشد و انتگرال ِ آن بر هر حلقه صفر باشد، برا یِ آن بخش از نیرو میشود انرژی یِ پتانسیل تعریف کرد. گیرم

$$F = F_{\mathrm{c}} + F_{\mathrm{n}}, \tag{598}$$

که F_{c} پایستار است. پس یک U هست که تابع ِ فقط مکان است و

$$F_{\mathrm{c}\,i} = -\frac{\partial U}{\partial r^i}. \tag{599}$$

دیده میشود

$$W = -\Delta U + W_{\mathrm{n}}. \tag{600}$$

که W_{n} کار ِ متناظر با نیرو یِ F_{n} است. به این ترتیب رابطه یِ (595) تبدیل میشود به

$$\Delta K + \Delta U \stackrel{\text{ns}}{=} W_{\mathrm{n}}. \tag{601}$$

انرژی یِ مکانیکی را همچنان با (596) تعریف میکنم. رابطه یِ (597) تبدیل میشود به

$$\Delta H \stackrel{\text{ns}}{=} W_{\text{n}}. \tag{602}$$

یعنی تغییر ِ انرژی برابر است با کار ِ بخش ی از نیرو که وارد ِ انرژی-یِ-پتانسیل نشده. البته تفکیک ِ نیرو به بخشها یِ پایستار و ناپایستار یکتا نیست. میشود چیز ی از بخش ِ پایستار برداشت و در بخش ِ پایستار گذاشت. با این کار انرژی یِ پتانسیل عوض میشود (نَ فقط با یک ثابت ِ جمعی) و در نتیجه انرژی یِ مکانیکی هم عوض میشود (باز، نَ فقط با یک ثابت ِ جمعی). چنین تغییر ی، هیچ یک از دُ-طرف ِ معادله یِ (600) را عوض نمیکند، اما هر یک از دُ-طرف ِ معادلات ِ (601) و (602) را عوض میکند، البته به شکل ی که معادلات ِ (601) و (602) همچنان برقرار َند.

34 لَگرانژی

معادله یِ حرکت به این شکل درامد.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \left[\frac{\partial K}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial v^i}\right)\right] + F_i. \tag{580}$$

اگر نیرو پایستار باشد، در (580) میشود نیرو را بر حسب ِ انرژی-یِ-پتانسیل نوشت:

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \left[\frac{\partial K}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial v^i}\right)\right] - \frac{\partial U}{\partial r^i}. \tag{603}$$

چون انرژی-یِ-پتانسیل مستقل از سرعت بود، معادله یِ بالا همئرز است با

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \left[\frac{\partial K}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial v^i}\right)\right] - \left[\frac{\partial U}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial v^i}\right)\right]. \tag{604}$$

لَگرانژی را با L نشان میدهم و آن را انرژی یِ جنبشی منها یِ انرژی یِ پتانسیل تعریف میکنم:

$$L = K - U. \tag{605}$$

معادله یِ حرکت میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right). \tag{606}$$

مختصرتر،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} e\partial_i L. \tag{607}$$

اگر فقط بخش ی از نیرو را بشود از انرژی-یِ-پتانسیل به دست آورد، همچنان میشود لَگرانژی را با (605) نعریف کرد. معادله یِ حرکت میشود.

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \left[\frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\right] + F_{\mathfrak{n}\,i}. \tag{608}$$

مختصرتر،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} e\partial_i L + F_{\mathfrak{n}\,i}. \tag{609}$$

که $F_{\mathfrak{n}}$ بخش ی از نیرو ست که وارد ِ انرژی-یِ-پتانسیل نشده.

ممکن است یک تابع ِ U از زمان و مکان و سرعت باشد که نیرو یِ F (منفی یِ) مشتق ِ گسترش-یافته یِ U باشد:

$$F_i = -\left[\frac{\partial U}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial v^i}\right)\right]. \tag{610}$$

مختصرتر،

$$F_i = -e\partial_i U. \tag{611}$$

در این صورت هم معادله یِ حرکت، معادله یِ (580)، به معادله یِ (606)، یا مختصرتر (607) تبدیل میشود. همچنین، اگر بخش ی از نیرو (منفی یِ) مشتق ِ گسترش-یافته یِ U باشد، معادله یِ حرکت به شکل ِ معادله یِ (608)، یا مختصرتر (609) تبدیل میشود، که $F_{\mathfrak{n}}$ بخش ی از نیرو ست که وارد ِ U نشده.

در همه یِ این موارد، معادله یِ حرکت عملَن با یک لَگرانژی (و احتمالَن بخش ی از نیرو) نوشته میشود و نیاز ی نیست K و U تک-تک معلوم باشند. لَگرانژی یِ L یک تابع از زمان و مکان و سرعت است، که در شکل ِ ساده اَ ش تفاضل ِ دُ تابع است: K (انرژی یِ جنبشی) که نسبت به سرعت

مجذوری ست، و U (انرژی یِ پتانسیل) که مستقل از سرعت است. به این ترتیب، از لَگرانژی در شکل ِ ساده اَ ش میشود انرژی یِ جنبشی و انرژی یِ پتانسیل را استخراج کرد:

$$K = \frac{1}{2}\, v^i\, v^j\, \frac{\partial^2 L}{\partial v^i\, \partial v^j}. \tag{612}$$

$$U = L - K. \tag{613}$$

اما در چارچوب ِ لخت است که انرژی یِ جنبشی نسبت به سرعت مجذوری ست. اگر مختصات ِ پریم-دار متناظر با یک چارچوب ِ لخت باشند و با یک تبدیل ِ وابسته-به-زمان به مختصات ِ بدون- ِ-پریم مربوط باشند،

$$K = \frac{1}{2}\, m\, g_{i'\,j'}\, \frac{\mathrm{d}\, r'^i}{\mathrm{d}\, t}\, \frac{\mathrm{d}\, r'^j}{\mathrm{d}\, t}. \tag{614}$$

پس،

$$K = \frac{1}{2}\, m\, g_{i'\,j'}\, \left(\frac{\partial\, r'^i}{\partial\, t} + \frac{\partial\, r'^i}{\partial\, r^k}\, \frac{\mathrm{d}\, r^k}{\mathrm{d}\, t}\right)\, \left(\frac{\partial\, r'^j}{\partial\, t} + \frac{\partial\, r'^j}{\partial\, r^l}\, \frac{\mathrm{d}\, r^l}{\mathrm{d}\, t}\right). \tag{615}$$

که نشان میدهد در یک چارچوب ِ دلبخاه، انرژی یِ جنبشی ممکن است جملات ِ مستقل-از-سرعت و خطی-نسبت-به-سرعت هم داشته باشد. تازه همه یِ اینها وقت ی ست که ذره نانسبیتی باشد. انرژی یِ پتانسیل هم، که قرار است نیرو یا بخش ی از نیرو از آن بیاید، ممکن است به سرعت بستگی داشته باشد. در این وضعیتها، تفکیک ِ لَگرانژی به انرژی یِ جنبشی و انرژی یِ پتانسیل بدیهی نیست، اما برا یِ نوشتن ِ معادله یِ حرکت لازم هم نیست.

برا یِ سیستم ی شامل ِ چند ذره هم میشود به شکل ی مشابه، معادلات ِ حرکت را بر حسب ِ لَگرانژی نوشت. انرژی-یِ-جنبشی ی کل را مجموع ِ انرژی-یِ-جنبشیها یِ ذرات تعریف میکنم:

$$K = \sum_{\mathfrak{a}} K_{\mathfrak{a}}. \tag{616}$$

که شاخص ِ $\mathfrak{a}$ متناظر با ذره یِ $\mathfrak{a}$ است، و انرژی-یِ-جنبشی ذره یِ $\mathfrak{a}$ تابع ِ زمان، و مکان و سرعت ِ ذره یِ $\mathfrak{a}$ است. معادله یِ حرکت برا یِ ذره یِ $\mathfrak{a}$ میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \epsilon \partial_{\mathfrak{a}\, i}\, K + F_{\mathfrak{a}\, i}. \tag{617}$$

گیرم بخش ی از نیرو از یک انرژی-یِ-پتانسیل میئاید:

$$F_{\mathfrak{a}\,i} = F_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,i} + F_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}\,i}. \tag{618}$$

$$F_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,i} = -\mathscr{e}\partial_{\mathfrak{a}\,i}\,U. \tag{619}$$

معادله یِ حرکت میشود

$$0 \overset{\mathrm{ns}}{=} \mathscr{e}\partial_{\mathfrak{a}\,i}\,L + F_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}\,i}. \tag{620}$$

که L (لَگرانژی) همان $(K-U)$ است. وقت ی ذرات با هم برهمکنش دارند، لابد در نیرو یِ وارد بر ذره یِ $\mathfrak{a}$ حالت ِ ذرات ِ دیگر هم ظاهر میشود. در این وضعیت U را نمیشود به شکل ِ مجموع ی از جملات ی نوشت که هر کدام تابع ِ زمان و حالت ِ فقط یک ذره باشند. پس لَگرانژی یِ L را هم نمیشود به شکل ِ مجموع ِ لَگرانژیها یِ تک-ذرات (که هر کدام تابع ِ زمان و حالت ِ فقط یک ذره اند) نوشت. علاوه بر این، ممکن لَگرانژی چنان باشد که تفکیک ِ آن به انرژی-یِ-جنبشی و انرژی-یِ-پتانسیل بدیهی نباشد. و ممکن است معادلات بر حسب ِ مختصات ی نوشته شوند که هر مختصه یِ جدید تابع یِ از زمان و مختصات ِ چند ذره باشد. در این صورت، تفکیک ِ انرژی-یِ-جنبشی به انرژی-یِ-چنبشی یِ تک-ذرات هم از دست میرود. اما شکل ِ کلی یِ معادله یِ حرکت حفظ میشود.

مختصات را با q^i ها نشان میدهم و به جا یِ زُج- ِ-شاخص ِ ذره و مئلفه یِ فضایی، یک شاخص ِ کلی به کار میبَرم. به مجموعه یِ q ها فضا یِ پیکربندی میگویم. مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ $\mathfrak{q}$ را با $\dot{\mathfrak{q}}$ نشان میدهم:

$$\dot{\mathfrak{q}} = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{q}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{621}$$

و قرارداد میکنم شاخص بر مشتق-گیری مقدم است:

$$\dot{\mathfrak{q}}^i = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{q}^i}{\mathrm{d}\,t}. \tag{622}$$

که یعنی

$$\dot{\mathfrak{q}}^i = \frac{\mathrm{d}\,(\mathfrak{q}^i)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{623}$$

معادله یِ حرکت میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\, L + F_{\mathrm{n}\, i}. \tag{609}$$

که

$$\text{ϵ}\partial_i\, \mathfrak{X} = \frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, \dot{q}^i}\right). \tag{624}$$

به F_{n}، آن بخش از نیرو که وارد ِ لَگرانژی نشده، نیرو یِ اضافی میگویم. اگر نیرو یِ اضافی صفر باشد، معادله-یِ-حرکت ِ میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\, L. \tag{607}$$

به این، معادله یِ اُیلِر-لَگرانژ (برا یِ L) میگویند. به طُر ِ کلی، به q و $\dot{q}$ هم، به ترتیب، مکان و سرعت میگویم.

باز-شده یِ تعریف ِ مشتق- ِ-گسترش-یافته میشود

$$\text{ϵ}\partial_i\, \mathfrak{X} = \frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, q^i} - \frac{\partial^2\, \mathfrak{X}}{\partial\, t\, \partial\, \dot{q}^i} - \frac{\partial^2\, \mathfrak{X}}{\partial\, q^j\, \partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^j - \frac{\partial^2\, \mathfrak{X}}{\partial\, \dot{q}^j\, \partial\, \dot{q}^i}\, \ddot{q}^j. \tag{625}$$

در طرف ِ راست ِ (625)، همه چیز تابع ِ دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت است، جز $\ddot{q}^j$ که مشتق ِ زمانی یِ $\dot{q}^j$ است. پس مشتق- ِ-گسترش-یافته یِ یک تابع از زمان و مکان و سرعت، نسبت به مشتق ِ مئلفِها یِ سرعت دست- ِ-بالا خطی ست. از جمله معادلات- ِ-حرکت، معادلات ِ (609)، معادله-یِ-دیفرانسیلها یی از مرتبه یِ دست- ِ-بالا دُ اند. ماتریس ِ $\mathfrak{M}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{M}_{i\, j} = \frac{\partial^2\, L}{\partial\, \dot{q}^j\, \partial\, \dot{q}^i}. \tag{626}$$

معادلات ِ (609) چنین میشوند.

$$\mathfrak{M}_{i\, j}\, \ddot{q}^j \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{F}_i. \tag{627}$$

بسته،

$$\mathfrak{M}\, b \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{F}. \tag{628}$$

که

$$b^i = \ddot{q}^i. \tag{629}$$

$$\mathfrak{F}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t\, \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\, \partial \dot{q}^i}\, \dot{q}^j + F_{\mathrm{n}\, i}. \tag{630}$$

$\mathfrak{F}$ تابع ِ زمان و مکان و سرعت است. اگر $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر باشد، معادلات ِ حرکت میشوند.

$$b \overset{\mathrm{ns}}{=} \mathfrak{M}^{-1}\, \mathfrak{F}. \tag{631}$$

مفصلتر،

$$b^i \overset{\mathrm{ns}}{=} (\mathfrak{M}^{-1})^{i\, j}\, \mathfrak{F}_j. \tag{632}$$

پس اگر $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر باشد، معادلات ِ حرکت مشتق ِ سرعت را بر حسب ِ زمان و مکان و سرعت میدهند، یعنی مرتبه یِ معادلات ِ حرکت دُ است. اگر ماتریس ِ $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر نباشد، معادلات ِ حرکت مشتق ِ اول ِ همه یِ مئلفِها یِ سرعت را بر حسب ِ زمان و مکان و سرعت نمیدهند. پس معادلات ِ حرکت از مرتبه یِ دُ اند، اگر و تنها اگر ماتریس ِ $\mathfrak{M}$ (مشتق ِ دوم ِ لَگرانژی نسبت به سرعت) وارون-پذیر باشد.

35 تکانه

معادله یِ حرکت برا یِ یک جسم به جرم ِ m تحت ِ نیرو یِ F، در یک چارچوب ِ لخت و در یک نقطه از مسیر که در آن مشتق ِ مئلفِها یِ متریک صفر است، را میشود چنین نوشت.

$$0 \overset{\mathrm{ns}}{=} -\frac{\mathrm{d}\,(m\, v_i)}{\mathrm{d}\, t} + F_i. \tag{633}$$

با تعریف ِ تکانه یِ مکانیکی یِ یک جسم به شکل ِجرم ِ جسم ضرب در در سرعت ِ آن، این رابطه میشود

$$0 \overset{\mathrm{ns}}{=} -\dot{p}_i + F_i. \tag{634}$$

که p تکانه است:

$$p = m\,v. \tag{635}$$

در این حالت ضمنَن،

$$\frac{\partial\,K}{\partial\,v^i} = m\,v_i. \tag{548}$$

که K انرژی یِ جنبشی ست. پس در این حالت،

$$p_i = \frac{\partial\,K}{\partial\,v^i}. \tag{636}$$

برا یِ دستگاهها، مختصات، و چارچوبها یِ کلیتر، معادله یِ (634) تبدیل میشود به

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,K}{\partial\,q^i} - \frac{\mathrm{d}\,p_i}{\mathrm{d}\,t} + F_i. \tag{637}$$

که در آن p چنین تعریف شده.

$$p_i = \frac{\partial\,K}{\partial\,\dot{q}^i}. \tag{638}$$

اگر بخش ی از نیرو از انرژی-یِ-پتانسیل ِ U بیاید، معادله یِ (637) میشود

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,K}{\partial\,q^i} - \dot{p}_i - \frac{\partial\,U}{\partial\,q^i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\left(\frac{\partial\,U}{\partial\,\dot{q}^i}\right) + F_{\mathrm{n}\,i}. \tag{639}$$

یا،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i} - \dot{p}_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\left(\frac{\partial\,U}{\partial\,\dot{q}^i}\right) + F_{\mathrm{n}\,i}. \tag{640}$$

که لَگرانژی یِ L برابر با $(K-L)$ تعریف شده. اما معلوم شد در حالت ِ کلی راه ِ رُشن ی برا یِ تفکیک ِ لَگرانژی به انرژی-یِ-جنبشی و انرژی-یِ-پتانسیل نیست. برا یِ نوشتن ِ معادله-یِ-حرکت فقط لَگرانژی (و نیرو-یِ-اضافی) لازم است. اما تعریف ِ تکانه به شکل ِ (638) به انرژی-یِ-پتانسیل نیاز دارد. میشود تعریف ِ تکانه را عوض کرد، چنان که در حالت ِ ساده ای که انرژی-یِ-پتانسیل معلوم و مستقل از سرعت است، هم ان (638) به دست آید، اما در حالت ِ کلی تعریف ِ تکانه بر اساس ِ لَگرانژی باشد و به تفکیک ِ لَگرانژی به انرژی-یِ-جنبشی و انرژی-یِ-پتانسیل وابسته نباشد. تکانه یِ تعمیم-یافته را با هم ان p نشان میدهم، و آن را چنین تعریف میکنم

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{641}$$

دیده میشود اگر L برابر با $(K-U)$ باشد و U مستقل از سرعت باشد، (641) هم ان (638) است. با تعریف ِ (641)،

$$\epsilon\partial_i L = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{p}_i. \tag{642}$$

پس معادله-یِ-حرکت چنین میشود.

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}\, p_i}{\mathrm{d}\, t} + F_{\mathrm{n}\, i}. \tag{643}$$

از این پس دیگر صفت ِ تعمیم-یافته را برا یِ تکانه به کار نمیبَرم و منظور َم از تکانه هم ان تکانه یِ تعمیم-یافته، تعریف ِ (641)، است.

از تعریف ِ تکانه رُشن است که مئلفِها یِ تکانه به مختصات وابسته اند. گیرم q'^i ها مختصات ی وابسته به q^i ها و (احتمالَن) زمان َند. $\dot{q}'^i$ ها تابع ِ زمان، مختصات ِ بدون- ِ-پریم، و مئلفِها یِ بدون- ِ-پریم ِ سرعت میشوند:

$$\dot{q}'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\, \dot{q}^j + \frac{\partial q'^i}{\partial t}. \tag{644}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\partial \dot{q}'^i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}. \tag{645}$$

همچنین،

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'^i}\,\frac{\partial \dot{q}'^i}{\partial \dot{q}^j}. \tag{646}$$

که نتیجه میدهد

$$p_j = p'_i\,\frac{\partial \dot{q}'^i}{\partial \dot{q}^j}. \tag{647}$$

این هم، با استفاده از (645) میشود

$$p_j = p'_i\,\frac{\partial q'^i}{\partial q^j}. \tag{648}$$

ضمنَن دیده میشود

$$\begin{aligned} p_j\,\dot{q}^j &= p'_i\,\frac{\partial q'^i}{\partial q^j}\,\dot{q}^j, \\ &= p'_i\,\left(\dot{q}'^i - \frac{\partial q'^i}{\partial t}\right). \end{aligned} \tag{649}$$

که یعنی

$$p_j\,\dot{q}^j = p'_i\,\dot{q}'^i - p'_i\,\frac{\partial q'^i}{\partial t}. \tag{650}$$

در تعریفِ ابتدایی، تکانه برابر بود با جرم (یک عددِ ثابت) ضرب در سرعت. از جمله مشتقِ تکانه نسبت به سرعت ثابت بود. در این شکلِ تعمیم-یافته، دیگر لزومَن چنین نیست. تکانه لزومَن نسبت به سرعت خطی نیست. اگر لَگرانژی نسبت به سرعت درجه-یِ-دُ باشد، تکانه نسبت به سرعتِ دست-ِ-بالا خطی ست. ولی حتا در این حالت هم لازم نیست مشتقِ تکانه نسبت به سرعت ثابت باشد.

36 لَگرانژیها یِ همئرز

نیرو مشاهده-پذیر است: با سنجشِ شتابِ هر ذره (و دانستنِ جرمِ آن) میشود نیرو را حساب کرد. به بیان ی دیگر، رابطه یِ بینِ نیرو یِ وارد بر ذره ای با جرمِ معین، و معادله-یِ-حرکتِ آن ذره،

یک-به-یک است: از نیرو میشود معادله یِ حرکت را به دست آورد و از معادله یِ حرکت میشود نیرو را حساب کرد.

اما لَگرانژی چنین نیست. مثلَن گیرم برا یِ سیستم ی با یک مختصه (درجه-یِ-آزادی) یِ r، نیرو یِ اضافی صفر است و لَگرانژی چنین است.

$$L = \frac{m\,v^2}{2}. \tag{651}$$

که v سرعت است:

$$v = \dot{r}. \tag{652}$$

و m ثابت ی ناصفر است. معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با L میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\,m\,\dot{v}. \tag{653}$$

یا، همئرز با آن،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{v}. \tag{654}$$

$\tilde{L}$ را یک لَگرانژی یِ دیگر میگیرم که تابع ِ فقط سرعت است. معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با $\tilde{L}$ میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\mathrm{d}\,\tilde{L}}{\mathrm{d}\,v}\right). \tag{655}$$

که یعنی

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\frac{\mathrm{d}^2\,\tilde{L}}{\mathrm{d}\,v^2}\,\dot{v}. \tag{656}$$

این معادله با (654) همئرز است، اگر مشتق ِ دوم ِ $\tilde{L}$ هرگز صفر نشود. نتیجه این که یک دسته لَگرانژی یَند که به معادله-یِ-حرکت ِ یکسان ی مینجامند: از لَگرانژی (و نیرو یِ اضافی، اگر لازم باشد) معادله-یِ-حرکت به طُر ِ یکتا به دست میئاید. اما از معادله-یِ-حرکت لَگرانژی به طُر ِ یکتا به دست نمیئاید.

در حالت ِ کلی که نیرو یِ اضافی صفر نیست، معادله یِ حرکت چنین است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{e}\partial_i\, L + F_{\text{n}\,i}. \tag{609}$$

معادله یِ حرکت متناظر با لَگرانژی یِ $\tilde{L}$ و هم ان نیرو-یِ-اضافی یِ F_{n} میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{e}\partial_i\, \tilde{L} + F_{\text{n}\,i}. \tag{657}$$

معادلات ِ (609) و (657) همئرز َند، اگر این اتحاد برقرار باشد.

$$\text{e}\partial_i\, \tilde{L} - \text{e}\partial_i\, L = 0. \tag{658}$$

یا،

$$\text{e}\partial_i\, (\tilde{L} - L) = 0. \tag{659}$$

وقت ی این اتحاد برقرار باشد، میگویند $\tilde{L}$ با L همئرز است.

$$\begin{aligned}\text{e}\partial_i\, (\tilde{L} - L) = {} & \frac{\partial\, (\tilde{L} - L)}{\partial\, q^i} - \frac{\partial^2\, (\tilde{L} - L)}{\partial\, t\, \partial\, \dot{q}^i} - \frac{\partial^2\, (\tilde{L} - L)}{\partial\, q^j\, \partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^j \\ & - \frac{\partial^2\, (\tilde{L} - L)}{\partial\, \dot{q}^j\, \partial\, \dot{q}^i}\, \ddot{q}^j.\end{aligned} \tag{660}$$

یک شرط ِ لازم برا یِ برقراری یِ اتحاد ِ (659) این است که ضریب ِ $\ddot{q}^j$ در طرف ِ راست ِ برابری یِ بالا صفر باشد:

$$\frac{\partial^2\, (\tilde{L} - L)}{\partial\, \dot{q}^j\, \partial\, \dot{q}^i} = 0. \tag{661}$$

این یعنی $(\tilde{L} - L)$، نسبت به سرعت دست- ِ-بالا خطی ست:

$$\tilde{L} - L = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}_i\, \dot{q}^i. \tag{662}$$

که $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}_i$ ها تابعها یی از زمان و مکان َند (به سرعت بستگی ندارند). به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\text{e}\partial_i\, (\tilde{L} - L) &= \frac{\partial\, \mathfrak{A}}{\partial\, q^i} + \frac{\partial\, \mathfrak{B}_{\text{j}}}{\partial\, q^i}\, \dot{q}^j - \frac{\text{d}\, \mathfrak{B}_i}{\text{d}\, t}, \\ &= \frac{\partial\, \mathfrak{A}}{\partial\, q^i} + \frac{\partial\, \mathfrak{B}_{\text{j}}}{\partial\, q^i}\, \dot{q}^j - \frac{\partial\, \mathfrak{B}_i}{\partial\, t} - \frac{\partial\, \mathfrak{B}_i}{\partial\, q^j}\, \dot{q}^j.\end{aligned} \tag{663}$$

یا،

$$\epsilon\partial_i\left(\tilde{L}-L\right)=\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,q^i}-\frac{\partial\,\mathfrak{B}_i}{\partial\,t}+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{B}_{\mathrm{j}}}{\partial\,q^i}-\frac{\partial\,\mathfrak{B}_i}{\partial\,q^j}\right)\dot{q}^j. \tag{664}$$

مشتقها یِ پارئی یِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}_i$ ها تابعها یی از زمان و مکان َند. پس یک شرط ِ لازم برا یِ برقراری یِ اتحاد ِ (659) این است که ضریب ِ $\dot{q}^j$ در طرف ِ راست ِ برابری یِ بالا صفر باشد:

$$\frac{\partial\,\mathfrak{B}_{\mathrm{j}}}{\partial\,q^i}-\frac{\partial\,\mathfrak{B}_i}{\partial\,q^j}=0. \tag{665}$$

این یعنی یک $\mathfrak{C}$ هست که تابع ِ زمان و مکان است و

$$\mathfrak{B}_i=\frac{\partial\,\mathfrak{C}}{\partial\,q^i}. \tag{666}$$

به این ترتیب،

$$\epsilon\partial_i\left(\tilde{L}-L\right)=\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,q^i}-\frac{\partial^2\,\mathfrak{C}}{\partial\,t\,\partial\,q^i}. \tag{667}$$

یا،

$$\epsilon\partial_i\left(\tilde{L}-L\right)=\frac{\partial}{\partial\,q^i}\left(\mathfrak{A}-\frac{\partial\,\mathfrak{C}}{\partial\,t}\right). \tag{668}$$

پس یک شرط ِ لازم برا یِ برقراری یِ اتحاد ِ (659) این است که پرانتز ِ طرف- ِ-راست مستقل از مکان باشد:

$$\mathfrak{A}-\frac{\partial\,\mathfrak{C}}{\partial\,t}=\mathfrak{D}. \tag{669}$$

که $\mathfrak{D}$ تابع ِ فقط زمان است. پس یک $\mathfrak{E}$ هست که تابع ِ فقط زمان است، و $\mathfrak{D}$ مشتق ِ $\mathfrak{E}$ نسبت به زمان است:

$$\mathfrak{D}=\dot{\mathfrak{E}}. \tag{670}$$

Λ را چنین تعریف میکنم.

$$\Lambda=\mathfrak{C}+\mathfrak{E}. \tag{671}$$

رُشن است که Λ تابع ِ فقط زمان و مکان است، و دیده میشود

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \tag{672}$$

$$\mathfrak{B}_i = \frac{\partial \Lambda}{\partial q^i}. \tag{673}$$

در نتیجه،

$$\tilde{L} - L = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q^i}\,\dot{q}^i. \tag{674}$$

که یعنی،

$$\tilde{L} - L = \dot{\Lambda}. \tag{675}$$

پس اگر دُ لگرانژی همئرز باشند، تفاصل ِ آنها مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع از زمان و مکان است. به سادگی دیده میشود عکس ِ این هم درست است: اگر تفاضل ِ دُ لگرانژی مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع از زمان و مکان باشد، آن دُ-لَگرانژی همئرز َند. برا یِ اثبات ِ این، گیرم $\mathfrak{X}$ مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ $\mathfrak{Y}$ است، که $\mathfrak{Y}$ تابع ِ فقط زمان و مکان است:

$$\mathfrak{X} = \dot{\mathfrak{Y}}. \tag{676}$$

یعنی،

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial q^i}\,\dot{q}^i. \tag{677}$$

در این صورت،

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial q^j}\,\dot{q}^j\right). \tag{678}$$

پس،

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial q^i\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial q^i\,\partial q^j}\,\dot{q}^j. \tag{679}$$

همچنین،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\dot{q}^i}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Y}}{\partial\,q^i}\right). \tag{680}$$

و

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Y}}{\partial\,q^i}\right)=\frac{\partial^2\,\mathfrak{Y}}{\partial\,t\,\partial\,q^i}+\frac{\partial^2\,\mathfrak{Y}}{\partial\,q^j\,\partial\,q^i}\,\dot{q}^j. \tag{681}$$

پس،

$$\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,q^i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\dot{q}^i}\right). \tag{682}$$

و از آنجا،

$$\epsilon\partial_i\,\mathfrak{X}=0. \tag{683}$$

به این ترتیب، دُ لَگرانژی همئرز َند اگر و تنها اگر تفاضل ِ شان مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع از زمان و مکان باشد.

این که دُ لَگرانژی همئرز باشند، نتیجه میدهد معادلات- ِ-حرکت ِ حاصل از آنها همئرز است. اما عکس ِ این درست نیست: از این که معادلات- ِ-حرکت ِ دُ لَگرانژی همئرز باشند نتیجه نمیشود آن دُ-لَگرانژی همئرز َند. یک مثال که دُ-لَگرانژی همئرز نیستند اما معادلات- ِ-حرکت ِ حاصل از آنها همئرز است، مثال ی ست که در ابتدا یِ هم ین بخش آمد.

از این که لَگرانژی مشاهده-پذیر نیست، نتیجه میشود تکانه هم مشاهده-پذیر نیست. حتا تکانه یِ متناظر با لَگرانژیها یِ همئرز هم یکسان نیست. اگر لَگرانژی یِ $\tilde{L}$ با لَگرانژی یِ L همئرز باشد، $(\tilde{L}-L)$ مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ Λ (یک تابع ِ زمان و مکان) است: رابطه یِ (674). تکانه یِ متناظر با $\tilde{L}$ را با $\tilde{p}$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\tilde{p}_i=p_i+\frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,q^i}. \tag{684}$$

بسته،

$$\tilde{p}=p+\frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,q}. \tag{685}$$

37 قید ِ برابری

قید ِ برابری یک یا چند معادله بین ِ زمان و مکان و مشتقها یِ مکان (آنها که در حالت وارد میشوند) است. چون حالت شامل ِ فقط مکان و سرعت (مشتق ِ اول ِ مکان) است، قید ِ برابری یک یا چند معادله-یِ-دیفرانسیل ِ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک است.

برا یِ سیستم ی با لَگرانژی یِ L، نیرو-یِ-اضافی یِ F_{n}، و قید- ِ-برابری یِ Z، معادلات ِ حرکت میشوند

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\, L + F_{\mathrm{n}\,i}. \tag{609}$$

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} Z^a. \tag{686}$$

Z^a ها تابعها یی از زمان و مکان و سرعت َند، و (686) معادلات ِ قید است. نیرو یِ اضافی شامل ِ نیرو یِ قیدی هم هست. با لَگرانژی یِ L و قید ِ Z، یک لَگرانژی یِ گسترش-یافته تعریف میکنم که آن را با $L_{\mathfrak{z}}$ نشان میدهم:

$$L_{\mathfrak{z}}(t,q,\dot{q},\lambda,\dot{\lambda}) = L(t,q,\dot{q}) + \lambda_a\, Z^a(t,q,\dot{q}). \tag{687}$$

به λ ضریب ِ لَگرانژ میگویند. (یا به λ_a ها ضریبها یِ لَگرانژ میگویند.) اگر با λ هم مثل ِ q رفتار کنم و برا یِ مئلفِها یِ آن هم معادله یِ حرکت بنویسم، معادلات ِ متناظر با $L_{\mathfrak{z}}$ و نیرو-یِ-اضافی یی که مئلفِها یَ ش $\mathfrak{F}_i$ ها و $\mathfrak{F}^a_\lambda$ ها یَند چنین میشوند.

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\, L_{\mathfrak{z}} + \mathfrak{F}_i. \tag{688}$$

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \text{ϵ}\partial^a_\lambda\, L_{\mathfrak{z}} + \mathfrak{F}^a_\lambda. \tag{689}$$

که

$$\text{ϵ}\partial^a_\lambda\, \mathfrak{X} = \frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, \lambda_a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, \dot{\lambda}_a}\right). \tag{690}$$

$L_{\mathfrak{z}}$ مستقل از $\dot{\lambda}$ است. پس

$$\text{ϵ}\partial^a_\lambda\, L_{\mathfrak{z}} = \frac{\partial\, L_{\mathfrak{z}}}{\partial\, \lambda_a}. \tag{691}$$

و (689) میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\, L_{\mathfrak{z}}}{\partial\, \lambda_a} + \mathfrak{F}^a_\lambda. \tag{692}$$

یا،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} Z^a + \mathfrak{F}^a_\lambda. \tag{693}$$

این هم ان (686) است، به شرط ِ آن که

$$\mathfrak{F}^a_\lambda = 0. \tag{694}$$

معادله یِ (688) هم میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\, L + \text{ϵ}\partial_i\, (\lambda_a\, Z^a) + \mathfrak{F}_i. \tag{695}$$

اما،

$$\text{ϵ}\partial_i\, (\lambda_a\, Z^a) = \lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, \left(\lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}\right). \tag{696}$$

یا،

$$\text{ϵ}\partial_i\, (\lambda_a\, Z^a) = \lambda_a\, \text{ϵ}\partial_i\, Z^a - \dot{\lambda}_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{697}$$

پس (688) میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\, L + \lambda_a\, \text{ϵ}\partial_i\, Z^a - \dot{\lambda}_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i} + \mathfrak{F}_i. \tag{698}$$

این هم ان (609) است، به شرط ِ آن که

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathfrak{n}\, i} - \lambda_a\, \text{ϵ}\partial_i\, Z^a + \dot{\lambda}_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{699}$$

مفصلتر،

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathrm{n}\,i} - \lambda_a \frac{\partial Z^a}{\partial q^i} + \dot{\lambda}_a \frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i} + \lambda_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \left(\frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i} \right). \tag{700}$$

یا،

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_i = F_{\mathrm{n}\,i} + \dot{\lambda}_a \frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i} + \lambda_a \left(-\frac{\partial Z^a}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 Z^a}{\partial t\, \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial^2 Z^a}{\partial q^j\, \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j \right) \\ + \lambda_a \frac{\partial^2 Z^a}{\partial \dot{q}^j\, \partial \dot{q}^i} \ddot{q}^j. \end{aligned} \tag{701}$$

همه یِ چیزها یِ طرف ِ راست، تابع ِ دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت (و البته ضریب- ِ-لَگرانژها و مشتق ِ زمانی یِ شان) اند، جز $\ddot{q}^j$ ها. به این ترتیب در حالت ِ کلی دست- ِ-کم یک ی از $\mathfrak{F}$ یا F_{n} به شتاب هم وابسته است. اگر این را فرض کنم که F_{n} تابع ِ دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت است، در حالت ِ کلی $\mathfrak{F}$ تابع ِ شتاب هم خاهد بود.

به $L_{\mathfrak{z}}$ لَگرانژی یِ گسترش-یافته، و به $\mathfrak{F}$ نیرو-یِ-اضافی یِ گسترش-یافته میگویم.

برا یِ یک سیستم با $\mathfrak{m}$ درجه یِ آزادی و $\mathfrak{k}$ قید- ِ-برابری، معادلات ِ (688) و (689) تعداد ِ شان $(\mathfrak{m}+\mathfrak{k})$ است. با این معادلات؛ به شرط ِ این که از هم مستقل باشند؛ و با معلوم-بودن ِ $\mathfrak{F}_\lambda$، که صفر است؛ و $\mathfrak{F}$، که به شکل ِ (699) یا مفصلتر (701) است؛ و با معلوم-بودن ِ شرایط ِ اولیه؛ علی‌الاصول میشود q و λ را، که جمعَن $(\mathfrak{m}+\mathfrak{k})$ متغیر دارند، به دست آورد.

این شرط که یک قید برقرار باشد، به تنهایی نیرو یِ قیدی را به طُر ِ کامل مشخص نمیکند. یک مثال حرکت ِ یک جسم بر یک سطح ِ افقی ست. گیرم نیروها یِ وارد بر جسم عبارت َند از وزن ِ جسم و نیرو یی که سطح بر جسم وارد میکند. از این که جسم بر سطح ِ افقی میمانَد (قید) نتیجه میشود مئلفه یِ عمود-بر-سطح ِ نیرو یی که سطح بر جسم وارد میکند برابر با وزن ِ جسم است. قید مئلفه-یِ-مماس-بر-سطح ِ این نیرو را مشخص نمیکند. البته میشود گفت فقط مئلفه یِ عمود-بر-سطح ِ این نیرو نیرو یِ قیدی ست. باقیمانده (مئلفه یِ مماس-بر-سطح، که به آن اصطکاک میگویند) باید مستقل از قید مشخص باشد. اما در حالت ِ کلی تفکیک ِ نیرو به نیرو یِ قیدی و غیر- ِ-قیدی یکتا نیست. در هم ان مثال ِ حرکت ِ جسم بر یک یک سطح ِ افقی، میشد نیرو یِ ناشی از سطح را به شکل ِ مجموع ِ یک نیرو یِ معلوم و یک نیرو یِ موازی با یک راستا یِ مشخص (نَ لزومَن عمود بر سطح) نوشت، که این دومی نیرو یِ قیدی باشد.

چیز ی که از تعداد ِ معادلِها (با فرض ِ این که مستقل از هم َند) نتیجه میشود این است که با معلوم-گرفتن ِ $\mathfrak{F}_\lambda$، که صفر است، و $\mathfrak{F}$، جمعَن $(\mathfrak{m}+\mathfrak{k})$ متغیر (مئلفِها ی ِ q و λ) را میشود به دست آورد. با دانستن ِ اینها $F_{\mathfrak{n}}$ مشخص میشود:

$$F_{\mathfrak{n}\,i} = \mathfrak{F}_i + \lambda_a\, \partial_i\, Z^a - \dot{\lambda}_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{702}$$

البته این هم ان (699) است. اینجا منظور این است که $\mathfrak{F}$ بخش ی ِ از داده است، که با معلوم-بودن ِ آن همراه با L و Z، معادلات ِ حرکت نوشته میشوند و $F_{\mathfrak{n}}$ از رو ی ِ جواب ِ معادلات به دست میئاید.

از جمله از (702) بر میئاید تغییر-دادن ِ $\mathfrak{F}$ مسئله ی ِ اولیه، معادلات ِ (609) و (686)، را تغییر میدهد. اما دیده میشود همه ی ِ تغییرات ِ $\mathfrak{F}$ چنین-اثر ی ندارند. این از آنجا میئاید که ضریب- ِ-لَگرانژ متغیر ی کمکی ست. اگر λ و $\mathfrak{F}$ چنان تغییر کنند که $F_{\mathfrak{n}}$ عوض نشود، معادلات ِ (609) و (686) عوض نمیشوند و مسئله ی ِ جدید با مسئله ی ِ اولیه همئرز است، به این معنی که جواب ِ معادله-ی ِ-تحول ِ جدید برا ی ِ q هم ان جواب ی ست که از معادله-ی ِ-تحول ِ اولیه به دست میئاید. دیده میشود اگر λ به $\tilde{\lambda}$ تبدیل شود، $F_{\mathfrak{n}}$ تغییر نمیکند اگر و تنها اگر $\mathfrak{F}$ به $\tilde{\mathfrak{F}}$ تبدیل شود که

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{F}_i - (\tilde{\lambda}_a - \lambda_a)\, \partial_i\, Z^a + (\dot{\tilde{\lambda}}_a - \dot{\lambda}_a)\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{703}$$

پس $\mathfrak{F}$ ها یی هستند که به مسئلِها ی ِ همئرز مینجامند: تبدیل ِ $\mathfrak{F}$ به $\tilde{\mathfrak{F}}$ مسئله ی ِ اولیه را به یک مسئله ی ِ همئرز با آن تبدیل میکند، وقت ی

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{s}_a\, \partial_i\, Z^a - \dot{\mathfrak{s}}_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{704}$$

که $\mathfrak{s}$ تابع ی دلبخاه از زمان است. به تبدیل ِ $\mathfrak{F}$ به $\tilde{\mathfrak{F}}$ به شکل ِ (704) تبدیل ِ پیمانِئی میگویم. رُشن است که این تبدیل را چنین هم میشود نوشت.

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{s}_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\mathfrak{s}_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}\right). \tag{705}$$

یا،

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{F}_i + \partial_i\, (\mathfrak{s}_a\, Z^a). \tag{706}$$

تبدیل ِ پیمانِئی بین ِ نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافتِها یک رابطه یِ همئرزی تعریف میکند: دُ نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافته همئرز َند، اگر و تنها اگر با یک تبدیل ِ پیمانِئی به هم مربوط باشند. و دو نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافته همئرز َند، اگر و تنها اگر به معادله-یِ-تحول ِ یکسان ی برا یِ q بینجامند. به این معنی، میگویم تبدیل ِ پیمانِئی فیزیک را عوض نمیکند. بخش ی از نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافته که فیزیکی ست (یعنی بر معادله-یِ-تحول اثر دارد)، رده-یِ-همئرزی یِ نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافتِها ست.

وقت ی سیستم $\mathfrak{m}$ درجه-یِ-آزادی دارد، نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافته هم $\mathfrak{m}$ درجه-یِ-آزادی دارد. اگر سیستم $\mathfrak{k}$ قید- ِ-برابری داشته باشد، تبدیل ِ پیمانِئی هم $\mathfrak{k}$ درجه-یِ-آزادی دارد. پس هر نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافته با یک خانواده یِ $\mathfrak{k}$-پارامتری از نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافتِها همئرز است. پس خانواده یِ ردی-یِ-همئرزیها $(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})$ پارامتر دارد. یعنی وقت ی سیستم $\mathfrak{m}$ درجه-یِ-آزادی و $\mathfrak{k}$ قید- ِ-برابری دارد، بخش ِ فیزیکی یِ نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافته با $(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})$ پارامتر مشخص میشود. $\mathfrak{k}$ قید- ِ-برابری به داده یِ مسئله اضافه شده، و در مقابل $\mathfrak{k}$ درجه-یِ-آزادی در نیرو-یِ-اضافی-یِ-گسترش-یافته پیمانِئی (غیر- ِ-فیزیکی) شده. تعداد ِ پارامترها یِ داده-یِ-فیزیکی تغییر نکرده.

38 قید- ِ-برابریها یِ همئرز

به جا یِ معادلات ِ قید- ِ-برابری، میشود ترکیبها یی همئرز با آنها را به کار برد. انتظار میرود چنین-تغییر ی تحول ِ q را عوض نکند. یک شکل ِ این است که قید- ِ-برابری یک تابع ِ خطی (با ضریبها یی که تابع ِ زمان و مکان و سرعت َند) از یک تابع ِ دیگر است. یعنی یک N و یک Y هستند که

$$Z^a = N^a{}_b\, Y^b. \tag{707}$$

لَگرانژی یِ گسترش-یافته چنین میشود.

$$L_{\mathfrak{z}}(t,q,\dot{q},\lambda,\dot{\lambda}) = L(t,q,\dot{q}) + \lambda_a\, N^a{}_b\, Y^b. \tag{708}$$

معادلات- ِ-حرکت میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \partial_i L + \lambda_a N^a{}_b \partial_i Y^b - \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_a N^a{}_b)}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial Y^b}{\partial \dot{q}^i} + \lambda_a \frac{\partial N^a{}_b}{\partial q^i}\,Y^b + \mathfrak{F}_i. \tag{709}$$

و البته،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} N^a{}_b\,Y^b. \tag{710}$$

معادله-یِ-قید ِ (710)، از معادله یِ زیر نتیجه میشود.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} Y^b. \tag{711}$$

اما عکس ِ این لزومَن درست نیست. اگر از معادله یِ (710) هم معادله یِ (711) نتیجه شود، میشود Y را جایگزین ِ Z کرد. گیرم چنین است. در این صورت معادلات- ِ-حرکت ِ (709) و معادلات- ِ-قید ِ (710) همئرز میشوند با یک دسته یِ دیگر ِ معادلات- ِ-حرکت و معادلات ِ قید. معادلات- ِ-حرکت چنین اند.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \partial_i L + \lambda_a N^a{}_b \partial_i Y^b - \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_a N^a{}_b)}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial Y^b}{\partial \dot{q}^i} + \mathfrak{F}_i. \tag{712}$$

و معادلات- ِ-قید معادلات ِ (711) اند. در این معادلات λ و N فقط به شکل ِ حاصل- ِ-ضرب ِ $(\lambda\,N)$ ظاهر شده اند. میشود ضریب- ِ-لَگرانژ را خُد ِ این حاصل- ِ-ضرب گرفت. به جا یِ λ ضریب- ِ-لَگرانژ ِ μ را به کار میبرم:

$$\mu_b = \lambda_a N^a{}_b. \tag{713}$$

لَگرانژی-یِ-گسترش-یافته یِ $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{L}_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \mu, \dot{\mu}) = L_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}). \tag{714}$$

که یعنی

$$\tilde{L}_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \mu, \dot{\mu}) = L(t, q, \dot{q}) + \mu_b\,Y^b. \tag{715}$$

معادلات- ِ-حرکت ِ متناظر با $\tilde{L}_3$ میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\, L + \mu_b\, \text{ϵ}\partial_i\, Y^b - \dot{\mu}_x\, \frac{\partial\, Y^x}{\partial\, \dot{q}^i} + \mathfrak{F}_i. \tag{716}$$

و البته معادلات- ِ-قید، که هم ان (711) اند. رُشن است که (716) هم ان (712) است. این که (711) با (710) همئرز باشد مهم است. فقط در این صورت است که (712) و (711) با (709) و (710) همئرز َند. و فقط در این صورت است که میشود Y را جایگزین ِ Z کرد.

دیده میشود اگر (711) با (710) همئرز باشد، این که N ثابت باشد یا نَ مهم نیست. چون اصولَن N از معادلات- ِ-حرکت حذف میشود. اگر Z تابع ِ دلبخاه ی از Y باشد هم وضع ِ مشابه ی رخ میدهد: مشتقها یِ Z را میشود بر حسب ِ مشتقها یِ Y نوشت:

$$\frac{\partial\, Z^a}{\partial\, q^i} = \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, Y^b}\, \frac{\partial\, Y^b}{\partial\, q^i}. \tag{717}$$

$$\frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i} = \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, Y^b}\, \frac{\partial\, Y^b}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{718}$$

دیده میشود

$$\text{ϵ}\partial_i\, Z^a = \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, Y^b}\, \text{ϵ}\partial_i\, Y^b - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, \left(\frac{\partial\, Z^a}{\partial\, Y^b}\right)\right]\, \frac{\partial\, Y^b}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{719}$$

$$\text{ϵ}\partial_i\, (\lambda_a\, Z^a) = \lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, Y^b}\, \text{ϵ}\partial_i\, Y^b - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, \left(\lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, Y^b}\right)\right]\, \frac{\partial\, Y^b}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{720}$$

پس معادلات- ِ-حرکت میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\, L + \lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, Y^b}\, \text{ϵ}\partial_i\, Y^b - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, \left(\lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, Y^b}\right)\right]\, \frac{\partial\, Y^b}{\partial\, \dot{q}^i} + \mathfrak{F}_i. \tag{721}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} Z^a. \tag{686}$$

گیرم معادلات- ِ-قید ِ (686) مقدار ِ Y^x ها را تعیین میکنند، یعنی همئرز َند با

$$Y^x \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{Y}^x. \tag{722}$$

در این صورت میشود Y را جایگزین ِ Z کرد. در این حالت معادلات ِ (721) و (722) با معادلات ِ حرکت و قید همئرز َند. اینجا هم دیده میشود در معادلات ضریب- ِ-لَگرانژ ِ λ به شکل ِ فقط

حاصل- ِ-ضرب ِ λ در مشتق ِ Z نسبت به Y وارد شده. به جا یِ λ ضریب- ِ-لَگرانژ ِ μ را به کار میبرم:

$$\mu_b = \lambda_a \frac{\partial Z^a}{\partial Y^b}. \tag{723}$$

لَگرانژی-یِ-گسترش-یافته یِ $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{L}_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \mu, \dot{\mu}) = L(t, q, \dot{q}) + \mu_b\,(Y^b - \mathfrak{Y}^b). \tag{724}$$

معادلات- ِ-حرکت ِ متناظر با $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ میشوند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \mathscr{e}\partial_i\, L + \mu_b\, \mathscr{e}\partial_i\, Y^b - \dot{\mu}_b\, \frac{\partial Y^b}{\partial \dot{q}^i} + \mathfrak{F}_i. \tag{725}$$

$$0 \overset{\text{ns}}{=} Y^b - \mathfrak{Y}^b. \tag{726}$$

رُشن است که (725) و (726)، به ترتیب، هم ان (721) و (722) اند. همه چیز شبیه ِ مسئله یِ قبلی ست، با این تفاوت که مشتق ِ Z نسبت به Y جایگزین ِ N شده، و (722) جایگزین ِ (711) شده. اینجا هم میشود Z را با Y، یا در واقع با $(Y - \mathfrak{Y})$، جایگزین کرد و با این کار معادله-یِ-حرکت برا یِ q عوض نمیشود.

به قیدها یی که با جایگزین-کردن ِ شان با یکدیگر جواب ِ معادلات- ِ-حرکت برا یِ q عوض نمیشود قیدها یِ همئرز میگویند.

از جمله، اگر قیدها مستقل-از-هم نباشند، یعنی براورده-شدن ِ بعض ی از آنها براورده-شدن ِ بقیه را نتیجه بدهد، میشود قیدها یِ اضافی را حذف کرد، یا همه یِ قیدها را بر حسب ِ قیدها یِ مستقل نوشت. این قیدها یِ مستقل، با قیدها یِ ابتدایی همئرز َند.

39 قید- ِ-برابری یِ سرعت-آفین

یک شکل ِ خاص ِ قید- ِ-برابری، قید- ِ-برابری یِ سرعت-آفین است، که معادلات ِ قید نسبت به سرعت آفین (دست- ِ-بالا-خطی) اند:

$$Z^a = Z^a{}_0 + Z^a{}_i\, \dot{q}^i. \tag{727}$$

یا

$$Z^a = Z^a{}_\alpha\, \dot{q}^\alpha. \tag{728}$$

که t با q^0 نشان داده شده:

$$q^0 = t. \tag{729}$$

و $Z^a{}_\alpha$ ها مستقل از سرعت َند. به این ترتیب،

$$L_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) = L(t, q, \dot{q}) + \lambda_a \left\{ Z^a{}_0(t, q) + [Z^a{}_i(t, q)]\, \dot{q}^i \right\}. \tag{730}$$

یا

$$L_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) = L(t, q, \dot{q}) + \lambda_a\, [Z^a{}_\alpha(t, q)]\, \dot{q}^\alpha. \tag{731}$$

معادلات- ِ-حرکت میشوند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \epsilon \partial_i\, L + \lambda_a \left[\frac{\partial\, Z^a{}_0}{\partial\, q^i} - \frac{\partial\, Z^a{}_i}{\partial\, t} + \left(\frac{\partial\, Z^a{}_j}{\partial\, q^i} - \frac{\partial\, Z^a{}_i}{\partial\, q^j} \right) \dot{q}^j \right] - \dot{\lambda}_a\, Z^a{}_i + \mathfrak{F}_i. \tag{732}$$

$$0 \overset{\text{ns}}{=} Z^a{}_0 + Z^a{}_i\, \dot{q}^i. \tag{733}$$

یا

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \epsilon \partial_i\, L + \lambda_a \left(\frac{\partial\, Z^a{}_\alpha}{\partial\, q^i} - \frac{\partial\, Z^a{}_i}{\partial\, q^\alpha} \right) \dot{q}^\alpha - \dot{\lambda}_a\, Z^a{}_i + \mathfrak{F}_i. \tag{734}$$

$$0 \overset{\text{ns}}{=} Z^a{}_\alpha\, \dot{q}^\alpha. \tag{735}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i} = Z^a{}_i. \tag{736}$$

$$\frac{\partial^2\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^j\, \partial\, \dot{q}^i} = 0. \tag{737}$$

به این ترتیب رابطه یِ $\mathfrak{F}$ با $F_{\mathfrak{n}}$ میشود

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathfrak{n}\,i} + \dot{\lambda}_a\, Z^a{}_i + \lambda_a \left[\frac{\partial\, Z^a{}_i}{\partial\, t} - \frac{\partial\, Z^a{}_0}{\partial\, q^i} + \left(\frac{\partial\, Z^a{}_i}{\partial\, q^j} - \frac{\partial\, Z^a{}_j}{\partial\, q^i}\right) \dot{q}^j\right]. \tag{738}$$

یا

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathfrak{n}\,i} + \dot{\lambda}_a\, Z^a{}_i + \lambda_a \left(\frac{\partial\, Z^a{}_i}{\partial\, q^\alpha} - \frac{\partial\, Z^a{}_\alpha}{\partial\, q^i}\right) \dot{q}^\alpha. \tag{739}$$

دیده میشود با قید- ِ-برابری یِ سرعت-آفین، $(\mathfrak{F} - F_{\mathfrak{n}})$ تابع ِ فقط زمان و مکان و سرعت است. پس با قید- ِ-برابری یِ سرعت-آفین، میشود $\mathfrak{F}$ و $F_{\mathfrak{n}}$ هر-دُ تابع ِ فقط زمان و مکان و سرعت باشند، یعنی مستقل از شتاب باشند.

40 قید ِ هُلُنُم

یک شکل ِ خاصتر ِ قید- ِ-برابری، قید ِ هُلُنُم است، که معادلات ِ قید مستقل از سرعت َند:

$$\frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i} = 0. \tag{740}$$

پس

$$L_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) = L(t, q, \dot{q}) + \lambda_a\, Z^a(t, q). \tag{741}$$

و معادلات- ِ-حرکت میشوند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \mathscr{e}\partial_i\, L + \lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, q^i} + \mathfrak{F}_i. \tag{742}$$

$$0 \overset{\text{ns}}{=} Z^a. \tag{686}$$

رابطه یِ $\mathfrak{F}$ با $F_{\mathfrak{n}}$ هم میشود

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathfrak{n}\,i} - \lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, q^i}. \tag{743}$$

دیده میشود با قید ِ هُلُنُم، $(\mathfrak{F} - F_{\mathfrak{n}})$ تابع ِ فقط زمان و مکان است.

وقت ی قید هُلُنُم است، میشود مختصات را چنان گرفت که هر یک از Z^a ها یک مختصه شوند. یعنی اگر تعداد ِ درجات- ِ-آزادی $\mathfrak{m}$ و تعداد ِ قیدها $\mathfrak{k}$ است،

$$q^i = Z^i, \qquad i \leq \mathfrak{k}. \tag{744}$$

البته فرض بر این است که Z^a ها مستقل از هم اند، یعنی هیچ کدام از آنها را نمیشود به شکل ِ تابع ی از بقیه نوشت، یا $\{(a, \mathbf{d}\, Z^a) \mid 1 \leq a \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل است. اگر چنین نباشد، Z^a ها را یک دسته یِ مستقل از قیدها را میگیرم که همه یِ قیدها تابع ِ آنها یَند، و مختصات را با این دسته یِ مستقل تعریف میکنم. پس $\mathfrak{k}$ تعداد ِ قیدها یِ مستقل است. به q^i ها یِ با $i \leq \mathfrak{k}$ مختصات ِ قیدی، و به بقیه (q^i ها یِ با $i > \mathfrak{k}$) مختصات ِ آزاد میگویم. لَگرانژی یِ گسترش-یافته میشود

$$L_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) = L(t, q, \dot{q}) + \lambda_a\, q^a. \tag{745}$$

قرارداد میکنم شاخص وقت ی از حروف ِ ابتدایی یِ لاتین است، از 1 تا $\mathfrak{k}$ تغییر میکند. از جمله،

$$\lambda_a\, q^a = \sum_{a=1}^{\mathfrak{k}} \lambda_a\, q^a. \tag{746}$$

معادلات- ِ-حرکت میشوند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \mathscr{e}\partial_i\, L + \lambda_a\, \frac{\partial\, q^a}{\partial\, q^i} + \mathfrak{F}_i. \tag{747}$$

یا

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \mathscr{e}\partial_i\, L + \lambda_a\, \delta^a_i + \mathfrak{F}_i. \tag{748}$$

که یعنی

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \mathscr{e}\partial_i\, L + \lambda_i + \mathfrak{F}_i, \qquad i \leq \mathfrak{k}. \tag{749}$$

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \mathscr{e}\partial_i\, L + \mathfrak{F}_i, \qquad i > \mathfrak{k}. \tag{750}$$

معادله یِ قید هم میشود

$$0 \overset{\text{ns}}{=} q^i, \qquad i \leq \mathfrak{k}. \tag{751}$$

و رابطه یِ $\mathfrak{F}$ با $F_{\mathfrak{n}}$ میشود

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathfrak{n}\,i} - \lambda_a\,\delta^a_i. \tag{752}$$

که یعنی

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathfrak{n}\,i} - \lambda_i, \qquad i \leq \mathfrak{k}. \tag{753}$$

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathfrak{n}\,i}, \qquad i > \mathfrak{k}. \tag{754}$$

با این مختصات، معادلات ی که λ را میدهند از بقیه یِ معادلات جدا میشوند: میشود (751) را در (750) گذاشت و با آن q^i ها یِ باقی-مانده (q^i ها یِ با $i > \mathfrak{k}$) را به دست آورد. (749) به این کار میئاید که λ حساب شود. همچنین، رُشن است که (749) و (750)، به ترتیب، میشوند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \epsilon\partial_i\,L + F_{\mathfrak{n}\,i}, \qquad i \leq \mathfrak{k}. \tag{755}$$

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \epsilon\partial_i\,L + F_{\mathfrak{n}\,i}, \qquad i > \mathfrak{k}. \tag{756}$$

اینها جدید نیستند: هم ان معادله-یِ-حرکت ِ با نیرو-یِ-اضافی یَند. با این شکل، معلوم میشود آن بخش از نیرو-یِ-اضافی که با قید تعیین میشود $F_{\mathfrak{n}\,i}$ ها یِ با $i \leq \mathfrak{k}$ است. و البته این هم با نتیجه ای که قبلَن به دست آمد، که بخش ِ فیزیکی یِ نیرو-یِ-اضافی با $(\mathfrak{m} - \mathfrak{k})$ پارامتر مشخص میشود، سازگار است، چنان که باید.

در معادلات ِ (751) و (755) و (756)، دیگر ضریب- ِ-لَگرانژ وارد نشده. و البته برا یِ حل ِ (751) و (756)، معادلات ِ (755) لازم نیست. کلَن $(\mathfrak{m}+\mathfrak{k})$ مجهول هست، شامل $\mathfrak{m}$ مختصه یِ q و $\mathfrak{k}$تا از مئلفِها یِ نیرو-یِ-اضافی ($F_{\mathfrak{n}\,i}$ ها یِ با $i \leq \mathfrak{k}$). $\mathfrak{k}$ مجهول ِ اخیر در فقط (755) ظاهر میشوند، و اگر بقیه یِ مجهولها حساب شده باشند به سادگی از (755) به دست میئایند. (751) هم شامل ِ فقط $\mathfrak{k}$ مئلفه یِ اول ِ q است، و البته حل َش بدیهی ست: $\mathfrak{k}$ مئلفه یِ اول ِ q صفر َند. به این ترتیب تنها بخش ِ نابدیهی یِ معادلات (756) است، که قرار است $(\mathfrak{m} - \mathfrak{k})$ مختصه یِ دیگر ِ q (مختصات ِ آزاد) را بدهد.

با مختصات ِ بالا، میشود مسئله را به شکل ی طرح کرد که در آن فقط مختصات ِ آزاد وارد شوند.

$q_{\mathfrak{c}}$ را با $(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})$ مختصه، از $(\mathfrak{k}+1)$ تا $\mathfrak{m}$، تعریف میکنم:

$$q_{\mathfrak{c}}^i = q^i, \qquad i > \mathfrak{k}. \tag{757}$$

$q_{\mathfrak{p}}$ را هم چنان تعریف میکنم که $\mathfrak{k}$ مختصه یِ اول َش صفر است و بقیه یِ مختصات َش با مختصات ِ متناظر ِ q برابر است:

$$q_{\mathfrak{p}}^i = 0, \qquad i \leq \mathfrak{k}. \tag{758}$$

$$q_{\mathfrak{p}}^i = q^i, \qquad i > \mathfrak{k}. \tag{759}$$

لَگرانژی یِ قید-اعمال-شده را با $L_{\mathfrak{c}}$ نشان میدهم و آن را هم ان L تعریف میکنم که در آن قید اعمال شده:

$$L_{\mathfrak{c}}(t, q_{\mathfrak{c}}, \dot{q}_{\mathfrak{c}}) = L(t, q_{\mathfrak{p}}, \dot{q}_{\mathfrak{p}}). \tag{760}$$

معادلات- ِ-حرکت هم ان (756) اند که در آن $q_{\mathfrak{p}}$ جایگزین ِ q شده، یعنی قید اعمال شده. اینها $(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})$ معادله برا یِ $(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})$ مجهول (مختصات ِ $q_{\mathfrak{c}}$) اند. دیده میشود

$$\partial_i L_{\mathfrak{c}} = \partial_i L\Big|_{q=q_{\mathfrak{p}}}, \quad i > \mathfrak{k}. \tag{761}$$

پس معادلات- ِ-حرکت را میشود مستقیمَن با لَگرانژی یِ قید-اعمال-شده به دست آورد، که در آن فقط مختصات ِ آزاد وارد شده اند.

41 قید- ِ-برابری یِ انتگرال-پذیر

گیرم قید- ِ-برابری سرعت-آفین است:

$$Z^a = Z^a{}_\alpha\, \dot{q}^\alpha. \tag{728}$$

که $Z^a{}_\alpha$ ها مستقل از سرعت َند. لَگرانژی-یِ-گسترش-یافته یِ $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ چنین میشود

$$L_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) = L(t, q, \dot{q}) + \lambda_a \left[Z^a{}_\alpha(t, q)\right] \dot{q}^\alpha. \tag{731}$$

معادلات- ِ-حرکت هم میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \epsilon\partial_i\, L + \lambda_a \left(\frac{\partial\, Z^a{}_\alpha}{\partial\, q^i} - \frac{\partial\, Z^a{}_i}{\partial\, q^\alpha}\right) \dot{q}^\alpha - \dot{\lambda}_a\, Z^a{}_i + \mathfrak{F}_i. \tag{734}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} Z^a{}_\alpha\, \dot{q}^\alpha. \tag{735}$$

گیرم

$$0 = \frac{\partial\, Z^a{}_\alpha}{\partial\, q^\beta} - \frac{\partial\, Z^a{}_\beta}{\partial\, q^\alpha}. \tag{762}$$

در این صورت معادله یِ (734) میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \epsilon\partial_i\, L - \dot{\lambda}_a\, Z^a{}_i + \mathfrak{F}_i. \tag{763}$$

رابطه یِ (762) ضمنَن به معنی یِ آن است که یک X هست که

$$Z^a{}_\alpha = \frac{\partial\, X^a}{\partial\, q^\alpha}. \tag{764}$$

این هم یعنی Z مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع (X) است:

$$Z^a = \dot{X}^a. \tag{765}$$

پس،

$$L_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) = L(t, q, \dot{q}) + \lambda_a\, \dot{X}^a. \tag{766}$$

لَگرانژی-یِ-گسترش-یافته یِ $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{L}_{\mathfrak{z}} = L_{\mathfrak{z}} - \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_a\, X^a)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{767}$$

پس

$$\tilde{L}_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}) = L(t, q, \dot{q}) - \dot{\lambda}_a\, X^a. \tag{768}$$

$(\tilde{L}_{\mathfrak{z}} - L_{\mathfrak{z}})$ مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع است. پس معادلات- ِ-حرکت ِ حاصل از $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ و $L_{\mathfrak{z}}$ یکسان َند. دیده میشود

$$\text{ϵ}\partial_i\,\tilde{L}_{\mathfrak{z}} = \text{ϵ}\partial_i\,L - \dot{\lambda}_a\,\frac{\partial\,X^a}{\partial\,q^i}. \tag{769}$$

$$\text{ϵ}\partial^a_\lambda\,\tilde{L}_{\mathfrak{z}} = \dot{X}^a. \tag{770}$$

پس معادلات- ِ-حرکت ِ حاصل از $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ میشوند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\,L - \dot{\lambda}_a\,\frac{\partial\,X^a}{\partial\,q^i} + \mathfrak{F}_i. \tag{771}$$

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \dot{X}^a. \tag{772}$$

که، به ترتیب، هم ان (763) و (735) اند.

لَگرانژی یِ $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ به خُد ِ λ بستگی ندارد. فقط $\dot{\lambda}$ در آن وارد میشود. لَگرانژی یِ $\tilde{L}^{\backprime}_{\mathfrak{z}}$ را چنان تعریف میکنم که مقدار َش با مقدار ِ $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}$ یکسان است، اما $\dot{\lambda}$ به شکل ِ متغیر ِ اصلی (نَ مشتق ِ زمانی یِ یک متغیر ِ دیگر) در آن وارد شده. $\dot{\lambda}$ را با ϖ نشان میدهم:

$$\varpi = \dot{\lambda}. \tag{773}$$

$$\tilde{L}^{\backprime}_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \varpi, \dot{\varpi}) = \tilde{L}_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \lambda, \dot{\lambda}). \tag{774}$$

این یعنی

$$\tilde{L}^{\backprime}_{\mathfrak{z}}(t, q, \dot{q}, \varpi, \dot{\varpi}) = L(t, q, \dot{q}) - \varpi_a\,X^a. \tag{775}$$

دیده میشود

$$\text{ϵ}\partial_i\,\tilde{L}^{\backprime}_{\mathfrak{z}} = \text{ϵ}\partial_i\,L - \varpi_a\,\frac{\partial\,X^a}{\partial\,q^i}. \tag{776}$$

$$\text{ϵ}\partial^a_\varpi\,\tilde{L}^{\backprime}_{\mathfrak{z}} = -X^a. \tag{777}$$

از (776) هم ان معادله-یِ-حرکت ِ (771) نتیجه میشود. اما معادله-یِ-حرکت ی که از (777) به دست میئاید این است که

$$0 \overset{\text{ns}}{=} -X^a. \tag{778}$$

این با (772) همئرز نیست: از معادله یِ (777) معادله یِ (772) نتیجه میشود. اما بر عکس نَ. یک راه که به این شکل هم معادلات- ِ-حرکت ِ همئرز با (771) و (772) به دست آید، این است که یک تغییر ِ کوچک در $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}^{\backprime}$ اعمال شود. $\tilde{L}_{\mathfrak{z}}^{\backprime\backprime}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{L}_{\mathfrak{z}}^{\backprime\backprime}(t,q,\dot{q},\varpi,\dot{\varpi}) = L(t,q,\dot{q}) - \varpi_a\,(X^a - \mathfrak{X}^a). \tag{779}$$

که $\mathfrak{X}$ ثابت ولی نامعلوم است. دیده میشود

$$\text{ɵ}\partial_i\,\tilde{L}_{\mathfrak{z}}^{\backprime\backprime} = \text{ɵ}\partial_i\,L - \varpi_a\,\frac{\partial\,X^a}{\partial\,q^i}. \tag{780}$$

$$\text{ɵ}\partial^a_{\varpi}\,\tilde{L}_{\mathfrak{z}}^{\backprime\backprime} = -X^a + \mathfrak{X}^a. \tag{781}$$

از (780) هم ان معادله-یِ-حرکت ِ (771) به دست میئاید. معادله-یِ-حرکت ی که از (781) به دست میئاید هم میشود

$$0 \overset{\text{ns}}{=} -X^a + \mathfrak{X}^a. \tag{782}$$

و این معادله با (772) همئرز است.

وقت ی قید- ِ-برابری یِ Z سرعت-آفین باشد و (762) را براورَد، Z مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع (X) از فقط زمان و مکان است. میگویم Z انتگرال-پذیر است. در این صورت میشود Z را با $(X-\mathfrak{C})$ جایگزین کرد، که $\mathfrak{C}$ ثابت است. یعنی یک قید- ِ-برابری یِ انتگرال-پذیر را میشود با یک قید ِ هُلُنُم جایگزین کرد. رُشن است که در این صورت میشود مختصات را به مختصات ِ قیدی و آزاد تفکیک کرد و معادلات ِ شامل ِ مختصات ِ آزاد از بقیه یِ معادلات جدا میشوند. اینجا (وقت ی تعداد ِ درجات- ِ-آزادی $\mathfrak{m}$ و تعداد ِ قیدها $\mathfrak{k}$ است) مختصات را چنان میگیرم که $\mathfrak{k}$ تا یِ اول هم ان مئلفِها یِ X اند:

$$q^i = X^i, \qquad\qquad i \le \mathfrak{k}. \tag{783}$$

$q_{\mathfrak{c}}$ را با $(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})$ مختصه، از $(\mathfrak{k}+1)$ تا $\mathfrak{m}$، تعریف میکنم:

$$q^i_{\mathfrak{c}} = q^i, \qquad\qquad i > \mathfrak{k}. \tag{757}$$

$q_{\mathfrak{p}}$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$q^i_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{X}^i, \qquad i \leq \mathfrak{k}. \tag{784}$$

$$q^i_{\mathfrak{p}} = q^i, \qquad i > \mathfrak{k}. \tag{759}$$

لَگرانژی یِ قید-اعمال-شده را با $L_{\mathfrak{c}}$ نشان میدهم و آن را هم ان L تعریف میکنم که در آن قید اعمال شده:

$$L_{\mathfrak{c}}(t, q_{\mathfrak{c}}, \dot{q}_{\mathfrak{c}}) = L(t, q_{\mathfrak{p}}, \dot{q}_{\mathfrak{p}}). \tag{760}$$

معادلات- ِ-حرکت ی که از $L_{\mathfrak{c}}$ به دست میئایند هم ان معادلات- ِ-حرکت ِ متناظر با مختصات ِ آزاد میشوند که از L به دست میئایند و در آنها قید اعمال شده.

42 کار ِ مجازی

کار ِ نیرو یِ F متناظر با خم ِ q از زمان ِ t_1 تا زمان ِ t_2 میشود

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\, t)\, \dot{q}^i\, F_i. \tag{785}$$

مفصلتر،

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\, t)\, [\dot{q}^i(t)]\, F_i[t, q(t), \dot{q}(t)]. \tag{786}$$

میگویم خم ِ q با قید- ِ-برابری یِ Z (تابع ِ زمان و مکان و سرعت) سازگار است، وقت ی به ازا یِ این خم معادله-یِ-قید براورده شود:

$$0 = Z^a[t, q(t), \dot{q}(t)]. \tag{787}$$

با مشتق-گیری از این رابطه نسبت به زمان دیده میشود اگر خم ِ q با قید- ِ-برابری یِ Z سازگار باشد،

$$0 = \frac{\mathrm{d}\, Z^a}{\mathrm{d}\, t}. \tag{788}$$

یعنی

$$0 = \frac{\partial Z^a}{\partial t} + \frac{\partial Z^a}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i. \tag{789}$$

با انتگرال-گیری از (789)، که هم ان (788) است، نتیجه میشود Z^a ها ثابت َند. این دقیقَن (787) نیست، اما با شرط-ِ-اولیه-یِ-مناسب به (787) مینجامد. پس (789) با (787) همئرز نیست. اما (789) همراه با شرطِ اولیه، با (787) همئرز است. وقت ی (789) برقرار است، میگویم خمِ q با تغییرِ قید-ِ-برابری یِ Z سازگار است.

اگر Z مستقل-از-زمان میبود، یعنی مشتقِ پارئی یِ Z نسبت به زمان صفر میبود، (789) میشد

$$0 = \frac{\partial Z^a}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i. \tag{790}$$

با یک قید-ِ-برابری یِ کلی یِ Z، معادله یِ (790) با معادله یِ (789) یا (788) همئرز نیست، بل که به این شکل است.

$$0 = \frac{\mathrm{d}\,Z^a}{\mathrm{d}\,t} - \frac{\partial Z^a}{\partial t}. \tag{791}$$

وقت ی (790) برقرار است، میگویم خمِ q با تغییرِ قید-ِ-برابری یِ Z در زمانِ ثابت سازگار است. به کارِ متناظر با خم ی که با تغییرِ قید-ِ-برابری در زمانِ ثابت سازگار است، کارِ مجازی میگویم.

متناظر با قید-ِ-برابری یِ Z، رابطه یِ نیرو-یِ-اضافی یِ $\mathfrak{F}$ با نیرو-یِ-اضافی یِ F_{n} چنین است.

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathrm{n}\,i} - \lambda_a\,\frac{\partial Z^a}{\partial q^i} + \dot{\lambda}_a\,\frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i} + \lambda_a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i}\right). \tag{700}$$

یا

$$\mathfrak{F}_i = F_{\mathrm{n}\,i} - \lambda_a\,\frac{\partial Z^a}{\partial q^i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\lambda_a\,\frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i}\right). \tag{792}$$

کارِ متناظر با F_{n} را با W_{n} نشان میدهم. دیده میشود

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{n}} = &\int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\,\dot{q}^i\,\mathfrak{F}_i + \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\,\dot{q}^i\,\lambda_a\,\frac{\partial Z^a}{\partial q^i} \\ &- \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\,\dot{q}^i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\lambda_a\,\frac{\partial Z^a}{\partial \dot{q}^i}\right). \end{aligned} \tag{793}$$

با انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ در جمله یِ آخر،

$$W_{\mathfrak{n}} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\, \dot{q}^i\, \mathfrak{F}_i + \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\, \lambda_a \left(\frac{\partial\, Z^a}{\partial\, q^i}\, \dot{q}^i + \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}\, \ddot{q}^i \right) - \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \left(\lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^i \right). \tag{794}$$

کار ِ مجازی یِ متناظر با $F_{\mathfrak{n}}$ را با $W_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}$ نشان میدهم. وقت ی خم ِ q با تغییر ِ قید- ِ-برابری یِ Z در زمان ِ ثابت سازگار است، رابطه یِ (790)، جمله یِ دوم در طرف ِ راست ِ (794) صفر میشود:

$$W_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\, \dot{q}^i\, \mathfrak{F}_i + W'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}. \tag{795}$$

که

$$W'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\, \dot{\mathfrak{W}}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}. \tag{796}$$

$$\mathfrak{W}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = -\lambda_a\, \frac{\partial\, Z^a}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^i. \tag{797}$$

پس

$$W'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = \mathfrak{W}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}(t_2) - \mathfrak{W}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}(t_1). \tag{798}$$

$\dot{\mathfrak{W}}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}$ توان ِ متناظر با $W'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}$ است. دیده میشود اگر مکانها و سرعتها محدود بمانند (که نتیجه میدهد $\mathfrak{W}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}$، با فرض ِ پیوستگی یِ آن، محدود میمانَد) $W'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}$ محدود میمانَد، حتا اگر گستره یِ زمانی بینهایت شود. یعنی میانگین ِ زمانی یِ توان ِ متناظر با $W'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}$، در گستره-یِ-زمانی-یِ بینهایت صفر میشود.

اگر قید هُلُنُم باشد، مشتق ِ Z نسبت به سرعت صفر است. پس

$$\mathfrak{W}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = 0. \tag{799}$$

$$W'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = 0. \tag{800}$$

$$W_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{d}\,t)\, \dot{q}^i\, \mathfrak{F}_i. \tag{801}$$

در این صورت $W_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}$ (برا یِ هر بازه-یِ-زمانی یی) صفر است، اگر و تنها اگر متناظر با هر خم ی که با تغییر ِ قید- ِ-برابری در زمان ِ ثابت سازگار است

$$0 = \mathfrak{F}_i\, \dot{q}^i. \tag{802}$$

وقت ی قید هُلُنُم است، شرطِ (790) برا یِ این که خمِ q با تغییرِ قید-ِ-برابری در زمانِ ثابت سازگار باشد میشود

$$0 = \frac{\partial Z^a}{\partial q^i}\,\dot{q}^i. \tag{803}$$

این شرط که برا یِ همه یِ q ها یی که (803) را براورند رابطه یِ (802) براورده شود، میشود این که $\mathfrak{F}$ یک ترکیبِ خطی از مشتقِ Z^a ها نسبت به q باشد. یعنی $\mathfrak{c}_a$ ها یی باشند که

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{c}_a\,\frac{\partial Z^a}{\partial q^i}. \tag{804}$$

در این صورت با یک تبدیلِ پیمانِئی میشود $\mathfrak{F}$ را صفر کرد:

$$\tilde{\lambda}_a = \lambda_a + \mathfrak{c}_a. \tag{805}$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_i = \mathfrak{F}_i + \partial_i\,(-\mathfrak{c}_a\,Z^a). \tag{806}$$

که یعنی

$$\tilde{\mathfrak{F}}_i = \mathfrak{F}_i - \mathfrak{c}_a\,\frac{\partial Z^a}{\partial q^i}. \tag{807}$$

نتیجه این که اگر قید هُلُنُم باشد، این که کارِ مجازی یِ متناظر با $F_{\mathfrak{n}}$ صفر باشد همئرز است با این که $\mathfrak{F}$ همئرز با صفر باشد.

اگر $\mathfrak{F}$ صفر باشد،

$$W_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = W'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}. \tag{808}$$

پس

$$W_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}} = \mathfrak{W}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}(t_2) - \mathfrak{W}'_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}(t_1). \tag{809}$$

$W_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{z}}$ لزومَن صفر نیست (اگر قید هُلُنُم باشد صفر است) اما اگر مکانها و سرعتها محدود بمانند، میانگینِ زمانی یِ توانِ متناظر با آن صفر است.

5

کنش

43 شاخص ِ پیوسته

گیرم شاخص ِ مئلفِها یِ بردار ِ $\mathfrak{h}$ گسسته است:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^j \, e_j. \tag{810}$$

که $\{(j, e_j) \mid j\}$ یک پایه است. در این صورت اثر ِ تبدیل ِ خطی یِ $\mathfrak{A}$ بر بردار ِ $\mathfrak{h}$ چنین است.

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{h} = \mathfrak{A}_j \, \mathfrak{h}^j. \tag{811}$$

که

$$\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}\, e_j. \tag{812}$$

وقت ی شاخص ِ مئلفِها یِ بردار ِ $\mathfrak{h}$ پیوسته است، اثر ِ تبدیل ِ خطی یِ $\mathfrak{A}$ بر $\mathfrak{h}$ را نمیشود به شکل ِ رابطه یِ (811) نوشت. طرف ِ راست ِ این رابطه خُش-تعریف نیست. اما (811) را میشود مبنا یِ یک شکل ِ تقریبی برا یِ اثر ِ $\mathfrak{A}$ بر $\mathfrak{h}$ کرد.

مجموعه یِ شاخصها را با $\mathbb{S}$ نشان، و مئلفه یِ $\mathfrak{t}$ یِ بردار ِ $\mathfrak{h}$ را با $\mathfrak{h}(\mathfrak{t})$ نشان میدهم. به این ترتیب بردار ِ $\mathfrak{h}$ با یک تابع متناظر شده که دامنه اَ ش $\mathbb{S}$ است و مقدار َ ش عدد است. این تابع را با هم ان $\mathfrak{h}$ نشان داده ام. یک تابع تکِئی-ثابت است، وقت ی دامنه اَ ش اجتماع ِ یک دسته یِ محدود از مجموعِها یی باشد که اشتراک ِ هر دُ-تا یِ متمایز ِ شان تهی ست، و مقدار ِ تابع بر هر یک از این مجموعِها ثابت است. در ادامه، $\mathfrak{h}$ را با تابعها یِ تکِئی-ثابت تقریب میکنم.

مجموعه یِ $\mathbb{S}$ را تکه-تکه میکنم. یعنی مجموعِها یِ $\mathbb{S}_j$ (که شاخص ِ j گسسته است) را چنان میگیرم که اجتماع ِ شان $\mathbb{S}$ است:

$$\mathbb{S} = \bigcup_j \mathbb{S}_j. \tag{813}$$

و اشتراک ِ هر-دُ-تا یِ متمایز ِ شان تهی ست:

$$\mathbb{S}_j \cap \mathbb{S}_k = \varnothing, \quad j \neq k. \tag{814}$$

متناظر با هر زیرمجموعه یِ $\mathbb{X}$ از $\mathbb{S}$، بردار (و تابع) ِ $\mathfrak{e}(\mathbb{X})$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathfrak{e}(\mathbb{X})](\mathfrak{t}) = 1. \qquad \mathfrak{t} \in \mathbb{X}. \tag{815}$$

$$[\mathfrak{e}(\mathbb{X})](\mathfrak{t}) = 0. \qquad \mathfrak{t} \notin \mathbb{X}. \tag{816}$$

بردار (و تابع) ِ $\mathfrak{e}_j$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{e}_j(\mathfrak{t}) = 1, \qquad \mathfrak{t} \in \mathbb{S}_j. \tag{817}$$

$$\mathfrak{e}_j(\mathfrak{t}) = 0, \qquad \mathfrak{t} \notin \mathbb{S}_j. \tag{818}$$

رُشن است که

$$\mathfrak{e}_j = \mathfrak{e}(\mathbb{S}_j). \tag{819}$$

همچنین، دیده میشود $\{(j, \mathfrak{e}_j) \mid j\}$ خطی-مستقل است. و هر تابع که مقدار َ ش بر هر یک از $\mathbb{S}_j$ ها ثابت باشد را میشود بر حسب ِ $\mathfrak{e}_j$ ها بسط داد. از جمله خُد ِ $\mathfrak{e}_j$ چنین است:

$$\mathfrak{e}_j = \delta_j^k \, \mathfrak{e}_k, \tag{820}$$

که یعنی

$$(\mathfrak{e}_j)^k = \delta_j^k. \tag{821}$$

گیرم تابع ِ $\mathfrak{h}$ پیوسته است، و تکِها یِ $\mathbb{S}$ چنان َند که بر هر کدام مقدار ِ تابع ِ $\mathfrak{h}$ تقریبَن ثابت است. این مقدار ِ ثابت را برا یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_j$ با $\mathfrak{h}^j$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{t}) \approx \mathfrak{h}^j, \qquad \mathfrak{x} \in \mathbb{S}_j. \tag{822}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{h} \approx \mathfrak{h}^j\, \mathfrak{e}_j. \tag{823}$$

پس با تعریف ِ $\mathfrak{A}_j$ با

$$\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}\, \mathfrak{e}_j, \tag{824}$$

و با فرض ِ این که اثر ِ $\mathfrak{A}$ بر بردارها نسبت به بردارها پیوسته است،

$$\mathfrak{A}\, \mathfrak{h} \approx \mathfrak{A}_j\, \mathfrak{h}^j, \tag{825}$$

که یعنی (811) یک شکل ِ تقریبی برا یِ اثر ِ $\mathfrak{A}$ بر $\mathfrak{h}$ است.

برا یِ این که (823) و (825) دقیق شوند، باید تکِها یِ $\mathbb{S}$ کوچک شوند، و در نتیجه تعداد ِ شان زیاد شود. اما این طرف- ِ-راستها یِ (823) و (825) را بی-معنی میکند، مگر جملات ِ جمع-بندیها یی که در طرف- ِ-راستها یِ (823) و (825) وارد میشوند بازتعریف شوند. یک راه این است که مفهوم ِ اندازه یِ مجموعه وارد شود و جمع-بندی به انتگرال-گیری تبدیل شود. این را دقیقتر کنم.

میگویم تابع ِ $\mathfrak{Q}$ یک تابع ِ برداری ست، اگر مجموعه یِ مقدارها یِ $\mathfrak{Q}$ زیرمجموعه یِ یک فضا یِ برداری باشد.

میگویم تابع- ِ-برداری یِ $\mathfrak{Q}$، که دامنه اَ ش مجموعه یِ زیرمجموعَها یِ $\mathbb{S}$ است، فزونوَر است، اگر برا یِ هر دُ-زیرمجموعه یِ $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ که اشتراک ِ شان تهی باشد، $\mathfrak{Q}(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})$ مجموع ِ $\mathfrak{Q}(\mathbb{A})$ و $\mathfrak{Q}(\mathbb{B})$

باشد:

$$\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\varnothing.\quad\Rightarrow$$
$$\mathfrak{Q}(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})=\mathfrak{Q}(\mathbb{A})+\mathfrak{Q}(\mathbb{B}). \tag{826}$$

از این دیده میشود برا یِ دُ زیرمجموعه یِ دلبخاه ِ $\mathbb{X}$ و $\mathbb{Y}$ (که لزومَن اشتراک ِ شان تهی نیست)

$$\mathfrak{Q}(\mathbb{X}\cup\mathbb{Y})=\mathfrak{Q}(\mathbb{X})+\mathfrak{Q}(\mathbb{Y})-\mathfrak{Q}(\mathbb{X}\cap\mathbb{Y}). \tag{827}$$

همچنین،

$$\mathfrak{Q}(\varnothing)=0. \tag{828}$$

از تعریف ِ $\mathfrak{e}$ دیده میشود برا یِ دُ زیرمجموعه یِ دلبخاه ِ $\mathbb{X}$ و $\mathbb{Y}$

$$\mathfrak{e}(\mathbb{X}\cup\mathbb{Y})=\mathfrak{e}(\mathbb{X})+\mathfrak{e}(\mathbb{Y})-\mathfrak{e}(\mathbb{X}\cap\mathbb{Y}). \tag{829}$$

یعنی $\mathfrak{e}$ یک تابع ِ فزونوَر است.

رُشن است که برا یِ این که یک تابع فزونوَر باشد، باید مجموع (و تفاضل) ِ مقدارها یِ آن تابع تعریف-شده باشد. اگر مجموعه یِ مقدارها یِ یک تابع زیرمجموعه یِ یک فضا یِ برداری باشد، این مجموع- و- تفاضلها تعریف-شده اند. به هم ین خاطر است که اینجا فزونوَر- بودن برا یِ تابعها یِ برداری تعریف شده است.

به تابع ی که مقدار َ ش عدد است (یعنی مجموعه یِ مقدارها یَ ش زیرمجموعه یِ یک هیئت است) تابعی میگویند. اندازه یک تابعی یِ فزونوَر است که مقدار َ ش (حقیقی و) نامنفی ست: یعنی تابعی یِ فزونوَر ِ $\boldsymbol{\mu}$ اندازه است، اگر برا یِ هر زیرمجموعه یِ $\mathbb{X}$،

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbb{X})\geq 0. \tag{830}$$

با استفاده از اندازه، میشود برا یِ هر تابع ِ فزونوَر چگالی تعریف کرد. $\boldsymbol{\mu}$-چگالی یِ میانگین ِ $\mathfrak{Q}$ بر $\mathbb{X}$ را با $(\overline{\varrho_{\boldsymbol{\mu}}\,\mathfrak{Q}})(\mathbb{X})$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$(\overline{\varrho_{\boldsymbol{\mu}}\,\mathfrak{Q}})(\mathbb{X})=\frac{\mathfrak{Q}(\mathbb{X})}{\boldsymbol{\mu}(\mathbb{X})}. \tag{831}$$

$\boldsymbol{\mu}$-چگالی یِ $\mathfrak{Q}$ در نقطه یِ $\mathfrak{t}$ را حد ِ $(\overline{\varrho_{\boldsymbol{\mu}}\,\mathfrak{Q}})(\mathbb{X})$ برا یِ $\mathbb{X}$ ها یِ شامل ِ $\mathfrak{t}$ وقت ی $\mathbb{X}$ کوچک میشود میگیرم، به شرط ِ آن که این حد وجود داشته باشد. $\boldsymbol{\mu}$-چگالی یِ $\mathfrak{Q}$ در نقطه یِ $\mathfrak{t}$ را با $(\varrho_{\boldsymbol{\mu}}\,\mathfrak{Q})(\mathfrak{t})$ نشان میدهم:

$$(\varrho_{\boldsymbol{\mu}}\,\mathfrak{Q})(\mathfrak{t}) = \lim_{|\mathbb{X}-\mathfrak{t}|\to 0}[(\overline{\varrho_{\boldsymbol{\mu}}\,\mathfrak{Q}})(\mathbb{X})]. \tag{832}$$

حد-گیری بر مجموعِها یی انجام شده که شامل ِ $\mathfrak{t}$ یَند، و منظور از حد ِ $|\mathbb{X}-\mathfrak{t}|$ به صفر (به شکل ی نَ-چندان-دقیق) این است که همه یِ نقاط ِ $\mathbb{X}$ به $\mathfrak{t}$ نزدیک شوند.

گیرم در $\mathbb{S}$ (مجموعه یِ شاخصها) یک اندازه یِ $\boldsymbol{\mu}$ تعریف شده. $\mathfrak{e}_j$ ها با تعریف ِ (817) و (818) را با اندازه یِ مجموعِها یِ متناظر متناسب میکنم. یعنی $\mathfrak{d}_j$ ها را بر حسب ِ $\mathfrak{e}_j$ ها چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{e}_j = [\boldsymbol{\mu}(\mathbb{S}_j)]\,\mathfrak{d}_j. \tag{833}$$

این یعنی

$$\mathfrak{e}(\mathbb{S}_j) = [\boldsymbol{\mu}(\mathbb{S}_j)]\,\mathfrak{d}_j. \tag{834}$$

پس $\mathfrak{d}_j$ هم ان $\boldsymbol{\mu}$-چگالی یِ میانگین ِ $\mathfrak{e}$ بر $\mathbb{S}_j$ است:

$$\mathfrak{d}_j = (\overline{\varrho_{\boldsymbol{\mu}}\,\mathfrak{e}})(\mathbb{S}_j). \tag{835}$$

با $\mathfrak{d}_j$ ها یک تابع ِ تکِئی-ثابت میسازم که آن را با $\mathfrak{d}$ نشان میدهم. $\mathfrak{d}$ بر هر یک از $\mathbb{S}_j$ ها ثابت است و به ازا یِ هر j مقدار َش بر $\mathbb{S}_j$ برابر با $\mathfrak{d}_j$ است:

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{d}_j, \quad \mathfrak{t}\in\mathbb{S}_j. \tag{836}$$

رابطه یِ (823) میشود

$$\mathfrak{h} \approx \mathfrak{h}^j\,\mathfrak{d}_j\,[\boldsymbol{\mu}(\mathbb{S}_j)]. \tag{837}$$

یا

$$\mathfrak{h} \approx \sum_j [\boldsymbol{\mu}(\mathbb{S}_j)]\,[\mathfrak{d}(\mathfrak{t}_j)]\,[\mathfrak{h}(\mathfrak{t}_j)]. \tag{838}$$

که $\mathfrak{t}_j$ یک عضو ِ دلبخاه ِ $\mathbb{S}_j$ است. طرف ِ راست، در حد ی که تکِها یِ $\mathbb{S}$ کوچک شوند به انتگرال میگراید، به شرط ی که این حد وجود داشته باشد. پس

$$\mathfrak{h} = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,[\mathfrak{d}(\mathfrak{t})]\,[\mathfrak{h}(\mathfrak{t})]. \tag{839}$$

$(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})$ اندازه یِ انتگرالگیری ست. رُشن است که $(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})$ و $\mathfrak{d}(\mathfrak{t})$، تک-تک به $\boldsymbol{\mu}$ وابسته اند، اما $\{[\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu}(\mathfrak{t})]\,[\mathfrak{d}(\mathfrak{t})]\}$ چنین نیست.

به شکل ی مشابه، (825) هم میشود

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{h} = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,[\mathfrak{A}(\mathfrak{t})]\,[\mathfrak{h}(\mathfrak{t})]. \tag{840}$$

که

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{A}\,[\mathfrak{d}(\mathfrak{t})]. \tag{841}$$

دُ-طرف ِ (839) بردار َند. به ویژه $\mathfrak{h}$ در طرف ِ چپ و $\mathfrak{d}(\mathfrak{t})$ در طرف ِ راست بردار َند. بقیه یِ چیزها یی که در طرف ِ راست َند عدد َند. معلوم شد هر بردار متناظر با یک تابع است. پس رابطه یِ (839) یک برابری بین ِ دُ تابع هم هست. مقدار ِ دُ-طرف را در یک نقطه یِ دلبخاه ِ $\mathfrak{u}$ مینویسم:

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{u}) = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,\{[\mathfrak{d}(\mathfrak{t})](\mathfrak{u})\}\,[\mathfrak{h}(\mathfrak{t})]. \tag{842}$$

این برابری یعنی

$$[\mathfrak{d}(\mathfrak{t})](\mathfrak{u}) = \delta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathfrak{t},\mathfrak{u}). \tag{843}$$

که $\delta_{\boldsymbol{\mu}}$ تابع ِ (تعمیم-یافته یِ) دلتا یِ دیرَک با اندازه یِ $\boldsymbol{\mu}$ است. طبق ِ تعریف، متناظر با تابع ِ $\mathfrak{f}$،

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{u}) = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,[\delta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathfrak{t},\mathfrak{u})]\,[\mathfrak{f}(\mathfrak{t})]. \tag{844}$$

رابطه یِ (842) هم ان رابطه یِ (844) است که برا یِ $\mathfrak{h}$ به جا یِ $\mathfrak{f}$ نوشته شده:

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{u}) = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,[\delta_{\boldsymbol{\mu}}(\mathfrak{t},\mathfrak{u})]\,[\mathfrak{h}(\mathfrak{t})]. \tag{845}$$

دیده میشود رابطه یِ (839) شکل ِ پیوسته یِ (810) است. رابطه یِ (840) شکل ِ پیوسته یِ (811) است. رابطه یِ (841) شکل ِ پیوسته یِ (812) است. رابطه یِ (842) میشود شکل ِ پیوسته یِ

$$\mathfrak{h}^k = (e_j)^k\, \mathfrak{h}^j. \tag{846}$$

رابطه یِ (843) میشود شکل ِ پیوسته یِ

$$(e_j)^k = \delta^k_j. \tag{847}$$

رابطه یِ (845) هم میشود شکل ِ پیوسته یِ

$$\mathfrak{h}^k = \delta^k_j\, \mathfrak{h}^j. \tag{848}$$

از جمله، همه جا جمع-بندیها (یِ گسسته) به انتگرال-گیری تبدیل شده.

آن چه در بالا برا یِ تبدیل ِ شاخصها یِ گسسته به پیوسته آمد، استدلال ِ دقیق ِ ریاضی نیست، یک بحث ِ صوری ست که عملیات با شاخصها یِ پیوسته را موجه نشان میدهد. استدلال ِ دقیق، همراه با شرطها یِ لازم برا یِ درستی یِ گزارِها، را میشود در متنها یِ آنالیز ِ تابعی دنبال کرد.

44 مشتق-گیری از تابع-ِ-برداری

تابع-ِ-برداری یِ $\mathfrak{S}$ در نقطه یِ $\mathfrak{x}$ مشتق-پذیر است، اگر یک تابع-ِ-خطی یِ $\mathfrak{A}$ باشد که

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+\mathfrak{h}) - \mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{h} + o(\mathfrak{h}). \tag{849}$$

این رابطه را این طُر هم مینویسند.

$$\delta\,\mathfrak{S} = \mathfrak{A}\,(\delta\,\mathfrak{x}) + o(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{850}$$

به $\mathfrak{A}$ مشتق ِ $\mathfrak{S}$ در نقطه یِ $\mathfrak{x}$ میگویند و آن را با $(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})$ نشان میدهند. به این ترتیب (849) میشود

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+\delta\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = [(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]\,(\delta\,\mathfrak{x}) + o(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{851}$$

وقت ی شاخص ِ $\mathfrak{x}$، و در نتیجه شاخص ِ $(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})$، گسسته است، جمله یِ اول در طرف ِ راست ِ (851) چنین میشود.

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]\,(\delta\,\mathfrak{x}) = [(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]_j\,(\delta\,\mathfrak{x})^j. \tag{852}$$

که

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]_j = [(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]\,e_j. \tag{853}$$

$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_j$ مشتق ِ پارِئی یِ $\mathfrak{S}$ نسبت به $\mathfrak{x}^j$ است:

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_j = \frac{\partial\,\mathfrak{S}}{\partial\,\mathfrak{x}^j}. \tag{854}$$

پس رابطه یِ $(\delta\,\mathfrak{S})$ با $(\delta\,\mathfrak{x})$ چنین میشود.

$$\delta\,\mathfrak{S} = (\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_j\,(\delta\,\mathfrak{x})^j + o(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{855}$$

یا

$$\delta\,\mathfrak{S} = \frac{\partial\,\mathfrak{S}}{\partial\,\mathfrak{x}^j}\,(\delta\,\mathfrak{x})^j + o(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{856}$$

وقت ی شاخص ِ $\mathfrak{x}$ پیوسته است، (853) به این تبدیل میشود.

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})](\mathfrak{t}) = [(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]\,[\mathfrak{d}(\mathfrak{t})]. \tag{857}$$

مشتق ِ پارِئی با شاخص ِ پیوسته را هم با علامت ِ δ (به جا یِ ∂) نشان میدهند:

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})](\mathfrak{t}) = \frac{\delta\,\mathfrak{S}}{(\delta\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})}. \tag{858}$$

و روابط ِ (855) و (856) چنین میشوند.

$$\delta\,\mathfrak{S} = \int [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,\{[(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})](\mathfrak{t})\}\,[(\delta\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})] + o(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{859}$$

یا

$$\delta\,\mathfrak{S} = \int [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,\frac{\delta\,\mathfrak{S}}{(\delta\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})}\,[(\delta\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})] + o(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{860}$$

مشتق ِ پارِئی یِ تابع- ِ-برداری یِ $\mathfrak{S}$، وقت ی شاخص ِ متغیر گسسته است یک مشتق ِ سویی ست:

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]_j = \lim_{\iota\to 0}\frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+\iota\,e_j)-\mathfrak{S}(\mathfrak{x})}{\iota}. \tag{861}$$

به شکل ی مشابه، مشتق ِ پارِئی با شاخص ِ پیوسته را هم چنین مینویسند.

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})](\mathfrak{t}) = \lim_{\iota\to 0}\frac{\mathfrak{S}[\mathfrak{x}+\iota\,\mathfrak{d}(\mathfrak{t})]-\mathfrak{S}(\mathfrak{x})}{\iota}. \tag{862}$$

اما ممکن است در طرف ِ راست ِ رابطه یِ اخیر، پیش از حد-گیری چیزها یی ظاهر شود که نسبت به $\mathfrak{d}(\mathfrak{t})$ غیر- ِ-خطی یَند. معمولَن چنین است، مگر $\mathfrak{S}$ خطی باشد. عملیات ِ غیر- ِ-خطی بر $\mathfrak{d}(\mathfrak{t})$ خُش-تعریف نیستند: $\mathfrak{d}(\mathfrak{t})$ دلتا یِ دیرَک است. حد-گیری یِ طرف ِ راست ِ (862) هم صوری ست: به این معنی که حد ِ ι-به-صفر بدون ِ توجه به این که رفتار ِ متغیرها یِ دیگر (جز ι) چیست گرفته میشود. مثلَن حد ِ $(\mathfrak{C}\,\iota)$، که $\mathfrak{C}$ مستقل از ι است، در ι-به-صفر برابر با صفر گذاشته میشود، حتا اگر $\mathfrak{C}$ خُش-تعریف نباشد.

به مشتق ِ پارِئی یِ $\mathfrak{S}$ نسبت به $\mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ وردش ِ $\mathfrak{S}$ نسبت به $\mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ میگویند.

45 تابع- ِ-برداری یِ مُضعی

گیرم متغیر ِ تابع- ِ-برداری یِ $\mathfrak{S}$ یک شاخص ِ گسسته دارد، که در مجموعه یِ $\mathbb{S}$ مقدار میگیرد. به این ترتیب متغیر ِ $\mathfrak{x}$ یک تابع با دامنه یِ $\mathbb{S}$ است:

$$\mathfrak{x} = \{(\mathfrak{a},\mathfrak{x}_\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a}\in\mathbb{S}\}. \tag{863}$$

به جا یِ این، میشود $\mathfrak{x}$ را با مقدارها یَ ش نمایش داد:

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_\mathfrak{a},\ldots). \tag{864}$$

متناظر با این نماد-گذاری یِ سادِتر، میشود بستگی یِ $\mathfrak{S}$ به $\mathfrak{x}$ را هم با بستگی یِ $\mathfrak{S}$ به $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}$ ها نشان داد:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}, \dots). \tag{865}$$

البته $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}$ ها ممکن است یک شاخص ِ دیگر هم داشته باشند.

گیرم $\mathbb{S}$ اجتماع ِ یک دسته مجموعه یِ $\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}$ است:

$$\mathbb{S} = \bigcup_{\mathfrak{z}} \mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}. \tag{866}$$

که هر کدام از $\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}$ ها دست- ِ-بالا $(\mathfrak{k}+1)$ عضو دارد. البته خُد ِ $\mathbb{S}$ ممکن است بینهایت-عضوی باشد. به هر یک از $\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}$ ها یک یاخته میگویم. تحدید ِ $\mathfrak{x}$ به $\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}$ را با $\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}}$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}} = \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}) \mid \mathfrak{a} \in \mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}\}. \tag{867}$$

برا یِ $\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}}$ هم میشود نماد ِ سادِتر چندتایی، مشابه با (864) را به کار برد.

اگر یک یاخته باشد که شامل ِ هم $\mathfrak{a}$ و هم $\mathfrak{b}$ باشد، میگویم $\mathfrak{b}$ یک همسایه یِ $\mathfrak{a}$ است:

$$\mathfrak{b} \boxed{\mathbb{N}} \mathfrak{a}. \tag{868}$$

رُشن است که همسایه-بودن بازتابی ست:

$$\mathfrak{a} \boxed{\mathbb{N}} \mathfrak{a}, \tag{869}$$

و متقارن است. یعنی اگر (868) برقرار باشد، آنگاه

$$\mathfrak{a} \boxed{\mathbb{N}} \mathfrak{b}. \tag{870}$$

همسایه-بودن ترایا نیست. یعنی از (870) و

$$\mathfrak{b} \boxed{\mathbb{N}} \mathfrak{c}, \tag{871}$$

لزومَن نتیجه نمیشود

$$\mathfrak{a} \boxed{\mathbb{N}} \mathfrak{c}. \tag{872}$$

اشتراک ِ دُ یاخته یِ متمایز لزومَن تهی نیست. اجتماع ِ همه یِ یاختِها یِ شامل ِ $\mathfrak{a}$، مجموعه یِ همه یِ $\mathfrak{b}$ ها یی ست که با $\mathfrak{a}$ همسایه اند. این مجموعه را با $\mathsf{N}_{\mathfrak{a}}$ نشان میدهم:

$$\mathsf{N}_{\mathfrak{a}} = \bigcup_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{a}\in \mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}} \mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}. \tag{873}$$

یا،

$$\mathsf{N}_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{b} \in \mathbb{S} \mid \mathfrak{b} \boxed{\mathsf{N}} \mathfrak{a}\}. \tag{874}$$

میگویم $\mathfrak{S}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{k}$ است، اگر $\mathbb{S}$ اجتماع ِ یک دسته یاخته باشد، (866)، که هر کدام دست- ِ-بالا $(\mathfrak{k}+1)$ عضو دارند و

$$\mathfrak{S} = \sum_{\mathfrak{z}} \mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}. \tag{875}$$

که $\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}$ تابع ِ فقط $\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}}$ است:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{z}} [\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}})]. \tag{876}$$

این که $\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}$ تابع ِ فقط $\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}}$ است، یعنی (به فرض ِ مشتق-پذیری)

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}})_{\mathfrak{b}} = 0, \quad \mathfrak{b} \notin \mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}. \tag{877}$$

میگویم $\mathfrak{S}$ مُضعی ست، اگر یک $\mathfrak{k}$ باشد که $\mathfrak{S}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{k}$ است. میگویم $\mathfrak{S}$ نقطِئی ست، اگر $\mathfrak{S}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا صفر باشد.

اگر $\mathfrak{S}$ مُضعی باشد، $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}$ در فقط $\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}$ ها یی ظاهر میشود که $\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}$ شامل ِ $\mathfrak{a}$ باشد. $\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{a}\in \mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}} \mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}. \tag{878}$$

پس به فرض ِ مشتق-پذیری،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{a}\in \mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}} (\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}})_{\mathfrak{b}}. \tag{879}$$

از این، همراه با (877) نتیجه میشود

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{b}} = 0, \quad \mathfrak{b} \notin \mathsf{N}_{\mathfrak{a}}. \tag{880}$$

از جمله،

$$\left[\mathbf{D}\left(\sum_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{a}\notin \mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}} \mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}\right)\right]_{\mathfrak{a}} = 0. \tag{881}$$

یا

$$[\mathbf{D}\,(\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{a}})]_{\mathfrak{a}} = 0. \tag{882}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{a}} = (\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}}. \tag{883}$$

اگر $\mathfrak{S}$ نقطِئی باشد، هر یک از یاختِها یک-عضوی ست. در این صورت هر یاخته را با تنها-عضو َش (به جا یِ یک مجموعه) نمایش میدهم:

$$\mathsf{Z}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}. \tag{884}$$

$\mathsf{N}_{\mathfrak{a}}$ هم تک-عضوی ست، و تنها عضو َش $\mathfrak{a}$ است. $\mathsf{N}_{\mathfrak{a}}$ را هم با $\mathfrak{a}$، به جا یِ مجموعه، نمایش میدهم:

$$\mathsf{N}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}. \tag{885}$$

پس،

$$\mathsf{N}_{\mathfrak{a}} = \mathsf{Z}_{\mathfrak{a}}. \tag{886}$$

$$\mathfrak{S} = \sum_{\mathfrak{a}} \mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}. \tag{887}$$

که $\mathfrak{S}_\mathfrak{a}$ تابع ِ فقط $\mathfrak{x}_\mathfrak{a}$ است:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \sum_\mathfrak{a} [\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(\mathfrak{x}_\mathfrak{a})]. \tag{888}$$

این یعنی $\mathfrak{S}$ اگر نقطِئی باشد، مجموع ِ تابع- ِ-برداریها یی ست که هر کدام از آنها یک-متغیره اند. به فرض ِ مشتق-پذیری،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_\mathfrak{a})_\mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}. \tag{889}$$

رُشن است که اینجا هم (882) و (883) برقرار َند.

این که تابع- ِ-برداری یِ $\mathfrak{S}$ مُضعی ست، به بیان ی نَ-چندان-دقیق یعنی همه یِ متغیرها یِ آن با هم مخلوط نمیشوند: فقط متغیرها یِ متناظر با یاختِها با هم مخلوط میشوند. یا، با تعریف ِ همسایه-بودن، فقط متغیرها یِ متناظر با شاخصها یی که با هم همسایه اند با هم مخلوط میشوند.

وقت ی شاخص پیوسته است، همسایه-بودن ِ دُ شاخص خُش-تعریف نیست. اما اینجا هم میشود (875) را نقطه-یِ-شروع ی برا یِ یک تعریف ِ تقریبی یِ مُضعی-بودن ِ تابع- ِ-برداری گرفت. متناظر با هر یاخته یِ $\mathsf{Z}_\mathfrak{a}$، یک شاخص ِ $\mathfrak{t}_\mathfrak{a}$ میگیرم که در $\mathsf{Z}_\mathfrak{a}$ است. جا یِ همسایه-بودن ِ شاخصها یِ عضو ِ $\mathsf{Z}_\mathfrak{a}$ را این میگیرد که شاخصها یِ عضو ِ $\mathsf{Z}_\mathfrak{a}$ به یکدیگر نزدیک َند، یا به $\mathfrak{t}_\mathfrak{a}$ نزدیک َند. پس به فرض ِ این که $\mathfrak{x}$ نسبت به شاخص مشتق-پذیر باشد، $\mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ وقت ی $\mathfrak{t}$ در $\mathsf{Z}_\mathfrak{a}$ است را میشود به-تقریب بر حسب ِ $\mathfrak{x}$ و مشتقها یَ ش در $\mathfrak{t}_\mathfrak{a}$ نوشت. این یعنی یک تابع از $\mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ ها یِ با $\mathfrak{t} \in \mathsf{Z}_\mathfrak{a}$) را میشود به تقریب با تابع ی از $\mathfrak{x}$ و مشتقها یَ ش در $\mathfrak{t}_\mathfrak{a}$ جایگزین کرد:

$$\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(\mathfrak{x}_\mathfrak{a}) \approx \tilde{\mathfrak{S}}_\mathfrak{a}\{\mathfrak{x}(\mathfrak{t}_\mathfrak{a}), (\mathbf{D}\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t}_\mathfrak{a}), \ldots, [(\mathbf{D})^\mathfrak{l}\,\mathfrak{x}](\mathfrak{t}_\mathfrak{a})\}. \tag{890}$$

مختصرتر،

$$\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(\mathfrak{x}_\mathfrak{a}) \approx \tilde{\mathfrak{S}}_\mathfrak{t}[(\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t}_\mathfrak{a})]. \tag{891}$$

که $\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}$ نماینده یِ مشتقها یِ از مرتبه یِ صفر تا $\mathfrak{l}$ است. $\mathfrak{D}$ (بدون ِ شاخص) هم نماینده یِ همه یِ مشتقها (از جمله مشتق ِ از مرتبه یِ صفر) است.

رابطه ی ِ (875) شامل ِ یک جمع-بندی هم هست. برا ی ِ این که این را هم وقت ی شاخص پیوسته میشود معنی-دار کنم، $\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{a}}$ را با اندازه ی ِ $\mathrm{Z}_{\mathfrak{a}}$ متناسب میکنم. یعنی $\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{a}}$ را بر حسب ِ $\mathfrak{L}$ مینویسم:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{a}}[(\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}\,\mathfrak{x})(\mathrm{t}_{\mathfrak{a}})] = [\boldsymbol{\mu}(\mathrm{Z}_{\mathfrak{a}})]\,\mathfrak{L}[\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}, (\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}\,\mathfrak{x})(\mathrm{t}_{\mathfrak{a}})]. \tag{892}$$

پس (875) تبدیل میشود به

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) \approx \sum_{\mathfrak{a}} [\boldsymbol{\mu}(\mathrm{Z}_{\mathfrak{a}})]\,\mathfrak{L}[\mathrm{t}_{\mathfrak{a}}, (\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}\,\mathfrak{x})(\mathrm{t}_{\mathfrak{a}})]. \tag{893}$$

و در حد ی که یاختِها کوچک شوند (به شرط ی که این حد وجود داشته باشد)،

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \int [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathrm{t})]\,\mathfrak{L}[\mathrm{t}, (\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}\,\mathfrak{x})(\mathrm{t})]. \tag{894}$$

بر اساس ِ اینها، میگویم $\mathfrak{S}$ از مرتبه ی ِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{l}$ است، اگر یک $\mathfrak{L}$ باشد که تابع ِ شاخص و مشتقها ی ِ تا-مرتبه-ی ِ-$\mathfrak{l}$ ِ متغیر ِ $\mathfrak{S}$ به ازا ی ِ شاخص باشد، و $\mathfrak{S}$ انتگرال ِ $\mathfrak{L}$ باشد. رُشن است که $(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathrm{t})$ (اندازه ی ِ انتگرالگیری) و $\mathfrak{L}$، تک-تک به $\boldsymbol{\mu}$ وابسته اند، اما $\{[(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathrm{t})]\,\mathfrak{L}\}$ چنین نیست.

میگویم $\mathfrak{S}$ مُضعی ست، اگر یک $\mathfrak{l}$ باشد که $\mathfrak{S}$ از مرتبه ی ِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{l}$ است. میگویم $\mathfrak{S}$ نقطِئی ست، اگر $\mathfrak{S}$ از مرتبه ی ِ دست- ِ-بالا صفر باشد.

تعریف ِ مرتبه وقت ی شاخص پیوسته است، هم ان تعریف ِ مرتبه وقت ی شاخص گسسته است نیست: تعداد ِ اعضا ی ِ $\mathrm{Z}_{\mathfrak{t}}$ جز خُد ِ $\mathfrak{t}$ را میشود با تعداد ِ مشتقها یی از $\mathfrak{x}$ که در طرف ِ راست ِ (890) ظاهر میشوند برابر گرفت، تا تعداد ِ کل ِ متغیرها یی که در دُ-طرف ِ (890) ظاهر میشوند یکسان باشد، اما این تعداد با بالاترین-مرتبه-ی ِ-مشتق-گیری یی که در طرف ِ راست ِ (890) ظاهر میشود فرق دارد: این تعداد نُعَن از بالاترین-مرتبه-ی ِ-مشتق-گیری یی که در طرف ِ راست ِ (890) ظاهر میشود بیشتر است. با $\mathfrak{k}$ و $\mathfrak{l}$ که برا ی ِ تعریف ِ مرتبه به کار رفت وقت ی شاخص، به ترتیب، گسسته و پیوسته است، نُعَن $\mathfrak{k}$ بزرگتر از $\mathfrak{l}$ است. البته اگر $\mathfrak{S}$ نقطِئی باشد، $\mathfrak{k}$ و $\mathfrak{l}$ با هم برابر َند، هر-دُ صفر َند. یک حالت ِ دیگر هم که $\mathfrak{k}$ و $\mathfrak{l}$ با هم برابر َند وقت ی ست که $\mathbb{S}$ یک-بُعدی باشد.

$\mathfrak{S}$ وقت ی ِ مُضعی ست رابطه ی ِ (894) را برمیئاورَد. $\mathfrak{L}$ در این رابطه $\boldsymbol{\mu}$-چگالی ی ِ $\mathfrak{S}$ است. وقت ی $\boldsymbol{\mu}$ معلوم باشد، سادِتر میگویم $\mathfrak{L}$ چگالی ی ِ $\mathfrak{S}$ است. مشتق ِ $\mathfrak{S}$ نسبت به $\mathfrak{x}$ را میشود بر حسب ِ

مشتق ِ $\mathfrak{L}$ نسبت به $\mathfrak{x}$ نوشت. دیده میشود

$$\delta\,\mathfrak{L} = \sum_{\mathfrak{j}=0}^{\mathfrak{l}} \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_{\alpha_1}\cdots\mathbf{D}_{\alpha_\mathfrak{j}}\,\mathfrak{x})}\,[\mathbf{D}_{\alpha_1}\cdots\mathbf{D}_{\alpha_\mathfrak{j}}\,(\delta\,\mathfrak{x})] + o(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{895}$$

به این ترتیب،

$$\delta\,\mathfrak{S} = (\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}} + o(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{896}$$

که $(\delta\,\mathfrak{X})_{=\mathbf{1}}$ بخش ی از $(\delta\,\mathfrak{X})$ است که نسبت به تغییر ِ متغیر خطی ست (و باقی-مانده سریعتر از تغییر ِ متغیر به صفر میگراید):

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}} = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,\sum_{\mathfrak{j}=0}^{\mathfrak{l}} \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_{\alpha_1}\cdots\mathbf{D}_{\alpha_\mathfrak{j}}\,\mathfrak{x})}\,[\mathbf{D}_{\alpha_1}\cdots\mathbf{D}_{\alpha_\mathfrak{j}}\,(\delta\,\mathfrak{x})]. \tag{897}$$

برا یِ این که مشتق ِ $\mathfrak{S}$ نسبت به $\mathfrak{x}$ معلوم شود، باید $(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}}$، بخش ی از $(\delta\,\mathfrak{S})$ که نسبت به $(\delta\,\mathfrak{x})$ خطی ست، به شکل ِ انتگرال ِ یک تابع ضرب در $(\delta\,\mathfrak{x})$ نوشته شود. در این صورت آن تابع مشتق ِ $(\delta\,\mathfrak{S})$ نسبت به $(\delta\,\mathfrak{x})$ است. برا یِ این کار، طرف ِ راست ِ (897) را با انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ به این شکل درمیئاورم:

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}} = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,[(\text{ȫ}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{t})]\,[(\delta\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})] + \oint_{\partial\,\mathbb{S}} \mathrm{d}\,S_\alpha\,\mathfrak{B}^\alpha. \tag{898}$$

که

$$\text{ȫ}\,\mathfrak{L} = \sum_{\mathfrak{j}=0}^{\mathfrak{l}} (-1)^{\mathfrak{j}}\,\mathbf{D}_{\alpha_1}\cdots\mathbf{D}_{\alpha_\mathfrak{j}}\,\left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_{\alpha_1}\cdots\mathbf{D}_{\alpha_\mathfrak{j}}\,\mathfrak{x})}\right]. \tag{899}$$

جمله یِ دوم ِ در طرف ِ راست ِ (898) مجموع ِ همه یِ جملات ِ مرزی یی ست که از انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ میئایند. $\mathfrak{B}$ در انتگرال-ده یِ این جمله، یک ترکیب ِ خطی از مشتقها یِ $(\delta\,\mathfrak{x})$ تا مرتبه یِ $(\mathfrak{l}-1)$ است. تعریف ِ (899) هم تعمیم ِ تعریف ِ مشتق ِ گسترش-یافته است. به این ترتیب $(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}}$ دُ جمله دارد. جمله یِ اول به $(\delta\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})$ ها یِ با $\mathfrak{t}$ در درون ِ $\mathbb{S}$ وابسته است، و جمله یِ دوم به $(\delta\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})$ ها یِ با $\mathfrak{t}$ در مرز ِ $\mathbb{S}$ وابسته است. اینها را با، به ترتیب، $(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{in}}$ و $(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}}$ نشان میدهم:

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}} = (\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{in}} + (\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}}. \tag{900}$$

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{in}} = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}}\,(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{901}$$

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}} = \mathscr{d}\,\mathfrak{L}. \tag{902}$$

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}} = \oint_{\partial\,\mathbb{S}} \mathrm{d}\,S_\alpha\,\mathfrak{B}^\alpha. \tag{903}$$

شکل ِ صریح ِ $\mathfrak{B}$ هم چنین است.

$$\mathfrak{B}^\alpha = \sum_{\mathfrak{j}=1}^{\mathfrak{l}} \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\mathfrak{j}-1} (-1)^{\mathfrak{j}-\mathfrak{k}} \left\{ \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{k}+1}} \cdots \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{j}-1}} \left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{j}-1}}\,\mathbf{D}_\alpha\,\mathfrak{x})} \right] \right\}$$
$$[\mathbf{D}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{k}}}\,(\delta\,\mathfrak{x})]. \tag{904}$$

به $(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}}$ مشتق ِ درونی یِ $\mathfrak{S}$ میگویم.

اگر $\mathfrak{x}$ یک شاخص ِ گسسته هم داشته باشد،

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{in}} = \int_{\mathbb{S}} [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}\,k}\,(\delta\,\mathfrak{x}^k). \tag{905}$$

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}\,k} = \mathscr{d}_k\,\mathfrak{L}. \tag{906}$$

$$\mathscr{d}_k\,\mathfrak{L} = \sum_{\mathfrak{j}=0}^{\mathfrak{l}} (-1)^{\mathfrak{j}}\,\mathbf{D}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{j}}} \left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{j}}}\,\mathfrak{x}^k)} \right]. \tag{907}$$

$$\mathfrak{B}^\alpha = \sum_{\mathfrak{j}=0}^{\mathfrak{l}} \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\mathfrak{j}-1} (-1)^{\mathfrak{j}-\mathfrak{k}} \left\{ \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{k}+1}} \cdots \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{j}-1}} \left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{j}-1}}\,\mathbf{D}_\alpha\,\mathfrak{x}^k)} \right] \right\}$$
$$[\mathbf{D}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{D}_{\alpha_{\mathfrak{k}}}\,(\delta\,\mathfrak{x}^k)]. \tag{908}$$

اگر $\mathfrak{S}$ نقطِئی باشد،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}} = \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{x}}. \tag{909}$$

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}} = 0. \tag{910}$$

پس،

$$\mathfrak{B} = 0. \tag{911}$$

اگر $\mathfrak{S}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک باشد،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}} = \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{x}} - \mathbf{D}_\alpha\,\left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_\alpha\,\mathfrak{x})}\right]. \tag{912}$$

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}} = \oint_{\partial\,\mathbb{S}} (\mathrm{d}\,S_\alpha)\,\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_\alpha\,\mathfrak{x})}\,(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{913}$$

پس،

$$\mathfrak{B}^\alpha = \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,(\mathbf{D}_\alpha\,\mathfrak{x})}\,(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{914}$$

اگر شاخص- ِ-پیوسته یِ $\mathfrak{x}$ یک-بُعدی باشد، آن را با t (به جا یِ $\mathfrak{t}$) نمایش میدهم. اندازه یِ انتگرال-گیری را هم $(\mathrm{d}\,t)$ میگیرم. در سادِترین شکل، مجموعه یِ $\mathfrak{S}$ یک بازه میشود که آن را با $[t_0, t_\mathrm{f}]$ نشان میدهم. (894) میشود

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \int_{t_0}^{t_\mathrm{f}} (\mathrm{d}\,t)\,\mathfrak{L}[t, (\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{915}$$

مشتق نسبت به t هم بدون- ِ-شاخص میشود. مشتق ِ $\mathfrak{n}$ اُم ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t را با $\mathfrak{X}^{(\mathfrak{n})}$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}} = \sum_{\mathfrak{j}=0}^{\mathfrak{l}} (-1)^{\mathfrak{j}}\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)^{\mathfrak{j}}\,\left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{x}^{(\mathfrak{j})}}\right]. \tag{916}$$

و البته

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}} = \mathfrak{B}(t_\mathrm{f}) - \mathfrak{B}(t_0), \tag{917}$$

که

$$\mathfrak{B} = \sum_{\mathfrak{j}=1}^{\mathfrak{l}} \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\mathfrak{j}-1} (-1)^{\mathfrak{j}-\mathfrak{k}}\,\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\right)^{\mathfrak{j}-\mathfrak{k}-1}\,\left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{x}^{(\mathfrak{j})}}\right]\right\}\,(\delta\,\mathfrak{x})^{(\mathfrak{k})}. \tag{918}$$

به ویژه، وقت ی شاخص ِ پیوسته یک-بُعدی و $\mathfrak{S}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک است،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathrm{in}} = \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}}\right). \tag{919}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}}\,(\delta\,\mathfrak{x}). \tag{920}$$

گیرم شاخص ِ پیوسته یک-بُعدی و $\mathfrak{S}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک است. تقریب ِ $\mathfrak{S}$ بر حسب ِ متغیر ِ شاخص-گسسته را مفصلتر بررسی میکنم. بازه یِ $[t_0, t_{\mathrm{f}}]$ را به n تکه تقسیم میکنم:

$$\iota = \frac{t_{\mathrm{f}} - t_0}{\mathfrak{n}}. \tag{921}$$

$$t_{\mathfrak{a}} = t_0 + \iota\, \mathfrak{a}. \tag{922}$$

رُشن است که

$$t_{\mathfrak{n}} = t_{\mathrm{f}}. \tag{923}$$

به جا یِ شاخص ِ پیوسته یِ t، شاخص ِ گسسته را به کار میبَرم: $\mathfrak{a}$ را جایگزین ِ $t_{\mathfrak{a}}$ میکنم. به این ترتیب، مجموعه یِ شاخصها $\{0, \ldots, \mathfrak{n}\}$ میشود. هر یاخته شامل ِ دُ-نقطه یِ مرزی یِ یک ی از تکِها ست. پس هر یاخته دُ عضو دارد، که اختلاف ِ شان 1 است. از جمله $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ همسایه اند، اگر و تنها اگر اختلاف ِ شان نابزرگتر از 1 باشد:

$$\mathfrak{b}\ \boxed{\mathsf{N}}\ \mathfrak{a}, \quad \Leftrightarrow \quad |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| \leq 1. \tag{924}$$

شاخص ِ $\mathfrak{z}$ متناظر با یاخته یِ $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ را میانگین ِ $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ تعریف میکنم:

$$\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{2}. \tag{925}$$

پس،

$$\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}} = \{(\mathfrak{z} - \varsigma), (\mathfrak{z} + \varsigma)\}. \tag{926}$$

که

$$\varsigma = \frac{1}{2}. \tag{927}$$

دیده میشود

$$\mathsf{N}_{\mathfrak{a}} = \mathsf{Z}_{\mathfrak{a}-\varsigma} \cup \mathsf{Z}_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \qquad 0 < \mathfrak{a} < \mathfrak{n}. \tag{928}$$

پس

$$\mathsf{N}_{\mathfrak{a}} = \{(\mathfrak{a}-1), \mathfrak{a}, (\mathfrak{a}+1)\}, \qquad 0 < \mathfrak{a} < \mathfrak{n}. \tag{929}$$

و البته،

$$\begin{aligned} \mathsf{N}_0 &= \mathsf{Z}_{\varsigma}, \\ &= \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{930}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{N}_{\mathfrak{n}} &= \mathsf{Z}_{\mathfrak{n}-\varsigma}, \\ &= \{(\mathfrak{n}-1), \mathfrak{n}\}. \end{aligned} \tag{931}$$

تقریب ِ $\mathfrak{S}$ چنین میشود.

$$\mathfrak{S} \approx \sum_{\mathfrak{z}=\varsigma}^{\mathfrak{n}-\varsigma} \mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}. \tag{932}$$

یا،

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) \approx \sum_{\mathfrak{z}=\varsigma}^{\mathfrak{n}-\varsigma} \mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}-\varsigma}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{z}+\varsigma}). \tag{933}$$

پس،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{a}} \approx (\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}-\varsigma})_{\mathfrak{a}} + (\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}+\varsigma})_{\mathfrak{a}}, \qquad 0 < \mathfrak{a} < \mathfrak{n}. \tag{934}$$

و البته،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_0 \approx (\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\varsigma})_0. \tag{935}$$

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{n}} \approx (\mathbf{D}\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}-\varsigma})_{\mathfrak{n}}. \tag{936}$$

حالا شاخص ِ پیوسته را دُباره وارد میکنم: این یعنی هر یاخته را خُد ِ یک ی از تکِها ی ِ بازه ی ِ $[t_0, t_{\mathrm{f}}]$ میگیرم، نَ دُ-نقطه-ی ِ-مرزی ی ِ آن. پس هر یاخته یک پاره-خط به طول ِ ι است:

$$\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}} = [t_{\mathfrak{z}} - \iota\,\varsigma, t_{\mathfrak{z}} + \iota\,\varsigma]. \tag{937}$$

که

$$t_{\mathfrak{z}} = t_0 + \iota\,\mathfrak{z}. \tag{938}$$

$\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}$ تابع ِ $\mathfrak{x}$ در دُ نقطه از $\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}$ است. این دُ-نقطه را میشود ابتدا و انتها یِ $\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}$ گرفت. در این صورت متغیرها یِ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}$ میشوند $\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}-\varsigma}$ و $\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}+\varsigma}$، که

$$\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{x}(t_{\mathfrak{a}}). \tag{939}$$

به جا یِ $\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}-\varsigma}$ و $\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}+\varsigma}$، میشود متغیرها یِ $\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}}$ و $\mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}$ را به کار برد:

$$\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}-\varsigma} + \mathfrak{x}_{\mathfrak{z}+\varsigma}}{2}. \tag{940}$$

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}+\varsigma} - \mathfrak{x}_{\mathfrak{z}-\varsigma}}{\iota}. \tag{941}$$

و دیده میشود

$$\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x}(t_{\mathfrak{z}}) + o(\iota). \tag{942}$$

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{z}} = \dot{\mathfrak{x}}(t\mathfrak{z}) + o(\iota). \tag{943}$$

$\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{z}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}-\varsigma}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{z}+\varsigma}) = \tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{z}}(\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}). \tag{944}$$

دیده میشود

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{z}}(\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}) = \tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{z}}[\mathfrak{x}(t_{\mathfrak{z}}), \dot{\mathfrak{x}}(t_{\mathfrak{z}})] + o(\iota). \tag{945}$$

پس،

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}-\varsigma}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{z}+\varsigma}) = \tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{z}}[\mathfrak{x}(t_{\mathfrak{z}}), \dot{\mathfrak{x}}(t_{\mathfrak{z}})] + o(\iota). \tag{946}$$

اندازه یِ انتگرال-گیری را $(\mathrm{d}\,t)$ میگیرم. این یعنی

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}(\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}) &= t_{\mathfrak{z}+\varsigma} - t_{\mathfrak{z}-\varsigma}, \\ &= [t_0 + (\mathfrak{z} + \varsigma)\,\iota] - [t_0 + (\mathfrak{z} - \varsigma)\,\iota]. \end{aligned} \tag{947}$$

پس،

$$\boldsymbol{\mu}(\mathsf{Z}_{\mathfrak{z}}) = \iota. \tag{948}$$

به این ترتیب $\mathfrak{L}$ چنین میشود.

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{z}}[\mathfrak{x}(t_{\mathfrak{z}}), \dot{\mathfrak{x}}(t_{\mathfrak{z}})] = \iota\, \mathfrak{L}[t_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{x}(t_{\mathfrak{z}}), \dot{\mathfrak{x}}(t_{\mathfrak{z}})]. \tag{949}$$

از اینجا،

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{z}-\varsigma}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{z}+\varsigma}) = \iota\, \mathfrak{L}[t_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{x}(t_{\mathfrak{z}}), \dot{\mathfrak{x}}(t_{\mathfrak{z}})] + o(\iota). \tag{950}$$

و (933) میشود

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) \approx \iota \sum_{\mathfrak{z}=\varsigma}^{\mathfrak{n}-\varsigma} \mathfrak{L}[t_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{x}(t_{\mathfrak{z}}), \dot{\mathfrak{x}}(t_{\mathfrak{z}})]. \tag{951}$$

برابری دقیق میشود در حد ی که ι به صفر بگراید، به شرط ی که طرف ِ راست در این حد وجود داشته. در این صورت طرف ِ راست به انتگرال تبدیل میشود:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\, t)\, \mathfrak{L}[t, \mathfrak{x}(t), \dot{\mathfrak{x}}(t)]. \tag{952}$$

با استفاده از (951)، میشود مشتق ِ $\mathfrak{S}$ را هم به مشتق ِ $\mathfrak{L}$ مربوط کرد. برا یِ این کار با استفاده از (942) و (943)، رابطه یِ (951) را چنین مینویسم.

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) \approx \iota \sum_{\mathfrak{z}=\varsigma}^{\mathfrak{n}-\varsigma} \mathfrak{L}(t_{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}). \tag{953}$$

در طرف ِ راست، فقط $\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}}$ و $\mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}$ با $(\mathfrak{z} = \mathfrak{a} - \varsigma)$ یا $(\mathfrak{z} = \mathfrak{a} + \varsigma)$ اند که به $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}$ بستگی دارند. پس مشتق ِ $\mathfrak{S}$ نسبت به $\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}$ ، اگر $\mathfrak{a}$ برابر با 0 یا $\mathfrak{n}$ نباشد از فقط دُ جمله در طرف ِ راست میئاید؛ و اگر $\mathfrak{a}$

برابر با 0 یا $\mathfrak{n}$ باشد از فقط یک جمله در طرف ِ راست میئاید:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) \approx \iota \Bigg\{ & \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}-\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}-\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}-\varsigma})]}{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}-\varsigma}}\,\frac{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}-\varsigma}}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} \\ & + \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}+\varsigma})]}{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}+\varsigma}}\,\frac{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}+\varsigma}}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} \\ & + \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}-\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}-\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}-\varsigma})]}{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}-\varsigma}}\,\frac{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}-\varsigma}}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} \\ & + \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}+\varsigma})]}{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}+\varsigma}}\,\frac{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}+\varsigma}}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} \Bigg\}, \quad 0 < \mathfrak{a} < \mathfrak{n}. \end{aligned} \tag{954}$$

از (940) و (941) دیده میشود

$$\frac{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}-\varsigma}}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} = \frac{1}{2}. \tag{955}$$

$$\frac{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}+\varsigma}}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} = \frac{1}{2}. \tag{956}$$

$$\frac{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}-\varsigma}}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} = \frac{1}{\iota}. \tag{957}$$

$$\frac{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}+\varsigma}}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} = -\frac{1}{\iota}. \tag{958}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) \approx \iota \Bigg\{ & \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}-\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}-\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}-\varsigma})]}{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}-\varsigma}} \\ & + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}+\varsigma})]}{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}+\varsigma}} \\ & + \frac{1}{\iota}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}-\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}-\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}-\varsigma})]}{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}-\varsigma}} \\ & - \frac{1}{\iota}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}+\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}+\varsigma})]}{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}+\varsigma}} \Bigg\}, \quad 0 < \mathfrak{a} < \mathfrak{n}. \end{aligned} \tag{959}$$

یا،

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) \approx \iota \Bigg(& \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}})]}{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}}} \\ & - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \left\{ \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{a}})]}{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}}} \right\} \Bigg), \qquad 0 < \mathfrak{a} < \mathfrak{n}. \end{aligned} \tag{960}$$

طرف ِ راست را بر حسب ِ $\mathfrak{x}$ و $\dot{\mathfrak{x}}$ مینویسم:

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) \approx \iota \left(\frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}, \dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}})]}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \left\{ \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}, \dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}})]}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}}} \right\} \right), \qquad 0 < \mathfrak{a} < \mathfrak{n}. \tag{961}$$

همچنین،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{0}(\mathfrak{x}) \approx \frac{\iota}{2}\, \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\varsigma}, \mathfrak{v}_{\varsigma})]}{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\varsigma}} - \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\varsigma}, \mathfrak{v}_{\varsigma})]}{\partial\,\mathfrak{v}_{\varsigma}}. \tag{962}$$

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{x}) \approx \frac{\iota}{2}\, \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{n}-\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{n}-\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{n}-\varsigma})]}{\partial\,\bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{n}-\varsigma}} + \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{n}-\varsigma}, \bar{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{n}-\varsigma}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{n}-\varsigma})]}{\partial\,\mathfrak{v}_{\mathfrak{n}-\varsigma}}. \tag{963}$$

یا،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{0}(\mathfrak{x}) \approx \frac{\iota}{2}\, \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{0}, \mathfrak{x}_{0}, \dot{\mathfrak{x}}_{0})]}{\partial\,\mathfrak{x}_{0}} - \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{0}, \mathfrak{x}_{0}, \dot{\mathfrak{x}}_{0})]}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}_{0}}. \tag{964}$$

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{x}) \approx \frac{\iota}{2}\, \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathrm{f}}, \mathfrak{x}_{\mathrm{f}}, \dot{\mathfrak{x}}_{\mathrm{f}})]}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathrm{f}}} + \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathrm{f}}, \mathfrak{x}_{\mathrm{f}}, \dot{\mathfrak{x}}_{\mathrm{f}})]}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}_{\mathrm{f}}}. \tag{965}$$

به این ترتیب بخش ی از $(\delta\,\mathfrak{S})$ که نسبت به $(\delta\,\mathfrak{x})$ خطی ست چنین میشود.

$$\begin{aligned}(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}} &\approx \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{n}} (\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{a}}\,(\delta\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}),\\ &\approx (\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{0}\,(\delta\,\mathfrak{x}_{0}) + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}-1} (\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{a}}\,(\delta\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}) + (\mathbf{D}\,\mathfrak{S})_{\mathfrak{n}}\,(\delta\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{n}}).\end{aligned} \tag{966}$$

یا

$$\begin{aligned}(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}} \approx &-\frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{0}, \mathfrak{x}_{0}, \dot{\mathfrak{x}}_{0})]}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}_{0}}\,(\delta\,\mathfrak{x}_{0})\\ &+ \iota \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}-1} \left(\frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}, \dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}})]}{\partial\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \left\{ \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}, \dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}})]}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{a}}} \right\} \right) (\delta\,\mathfrak{x}_{\mathfrak{a}})\\ &+ \frac{\partial\,[\mathfrak{L}(t_{\mathrm{f}}, \mathfrak{x}_{\mathrm{f}}, \dot{\mathfrak{x}}_{\mathrm{f}})]}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}_{\mathrm{f}}}\,(\delta\,\mathfrak{x}_{\mathrm{f}}).\end{aligned} \tag{967}$$

این رابطه در حد ِ ι به صفر دقیق میشود:

$$\begin{aligned}(\delta\,\mathfrak{S})_{1} = &\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\,t) \left\{ \left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}} \right) \right] (t) \right\} [(\delta\,\mathfrak{x})(t)]\\ &+ \left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}} \right) (\delta\,\mathfrak{x}) \right] (t_{\mathrm{f}}) - \left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}} \right) (\delta\,\mathfrak{x}) \right] (t_{0}).\end{aligned} \tag{968}$$

این هم ان (900) است، که تفکیک ِ $(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}}$ به بخشها یِ درونی و مرزی را نشان میدهد:

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{in}} = \int_{t_0}^{t_\mathrm{f}} (\mathrm{d}\,t)\,\left\{\left[\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}}\right)\right](t)\right\}\,[(\delta\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{969}$$

$$(\delta\,\mathfrak{S})_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}} = \left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}}\right)\,(\delta\,\mathfrak{x})\right](t_\mathrm{f}) - \left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\dot{\mathfrak{x}}}\right)\,(\delta\,\mathfrak{x})\right](t_0). \tag{970}$$

اینها هم هم ان (919) و (920) اند.

46 لَگرانژی و کنش

گیرم لَگرانژی یِ L تابع ِ زمان و مکان و سرعت است. کنش ِ S را یک تابعی از مسیر تعریف میکنم، چنان که

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_\mathrm{f}} (\mathrm{d}\,t)\,L[t, q(t), \dot{q}(t)]. \tag{971}$$

q ممکن است علاوه بر شاخص ِ پیوسته یِ t یک شاخص ِ گسسته هم داشته باشد. دیده میشود

$$(\mathbf{D}_i\,S)_\mathrm{in}(t) = \frac{\partial\,L}{\partial\,[q^i(t)]} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\left\{\frac{\partial\,L}{\partial\,[\dot{q}^i(t)]}\right\}. \tag{972}$$

یا

$$\left[\frac{\delta\,S}{(\delta\,q^i)(t)}\right]_\mathrm{in} = \frac{\partial\,L}{\partial\,[q^i(t)]} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\left\{\frac{\partial\,L}{\partial\,[\dot{q}^i(t)]}\right\}. \tag{973}$$

پس،

$$(\mathbf{D}\,S)_\mathrm{in} = \epsilon\partial\,L. \tag{974}$$

و البته،

$$(\delta\,S)_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}} = \left[\left(\frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}}\right)\,(\delta\,q)\right](t_\mathrm{f}) - \left[\left(\frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}}\right)\,(\delta\,q)\right](t_0). \tag{975}$$

معادله یِ حرکت برا یِ سیستم ی متناظر با لَگرانژی یِ L و نیرو-یِ-اضافی یِ $F_\mathfrak{n}$ چنین است.

$$0 \overset{\mathrm{ns}}{=} \epsilon\partial_i\,L + F_{\mathfrak{n}\,i}. \tag{609}$$

بر حسب ِ کنش، این معادله-یِ-حرکت میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\, S)_{\text{in}} + F_{\mathfrak{n}}. \tag{976}$$

یعنی معادله یِ حرکت این است که مشتق ِ درونی یِ کنش قرینه یِ نیرو-یِ-اضافی ست. اگر نیرو-یِ-اضافی صفر باشد، معادله-یِ-حرکت میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \epsilon \partial_i\, L. \tag{607}$$

و بر حسب ِ کنش،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\, S)_{\text{in}}. \tag{977}$$

یعنی معادله یِ حرکت این است که مشتق ِ درونی یِ کنش صفر است. میگویند مسیر ِ حرکت آن مسیر است که کنش را فرینه میکند. البته رُشن است که منظور فرینه-شدن نسبت به نقاط ِ درونی یِ مسیر است. این را این طُر هم میگویند که مسیر ِ حرکت با ابتدا-وِ-انتها یِ ثابت، مسیر ی ست که کنش را فرینه میکند. این که ابتدا و انتها یِ مسیر ثابت است، یعنی یک q_0 و یک q_{f} هست که برا یِ همه یِ مسیرها یِ q،

$$q(t_0) = q_0. \tag{978}$$

$$q(t_{\text{f}}) = q_{\text{f}}. \tag{979}$$

وقت ی q عوض میشود، q_0 و یک q_{f} عوض نمیشوند. یعنی

$$(\delta\, q)(t_0) = 0. \tag{980}$$

$$(\delta\, q)(t_{\text{f}}) = 0. \tag{981}$$

پس،

$$(\delta\, S)_{=\mathbf{1}\ \text{bo}} = 0. \tag{982}$$

که یعنی

$$(\delta\, S)_{=\mathbf{1}} = \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\, t)\, (\mathbf{D}\, S)_{\mathrm{in}}\, (\delta\, q). \tag{983}$$

مفصلتر،

$$(\delta\, S)_{=\mathbf{1}} = \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\, t)\, \{[(\mathbf{D}_i\, S)_{\mathrm{in}}(q)](t)\}\, [(\delta\, q^i)(t)]. \tag{984}$$

معادلات ِ حرکت برا یِ یک دستگاه از ذرات، در شکل ِ نیوتُنی بر حسب ِ جرمها و نیروها نوشته میشوند. در شکل ِ لَگرانژی، میشود از جرمها و نیرو انرژی-یِ-جنبشی و انرژی-یِ-پتانسیل، و از آنها لَگرانژی ساخت، و معادلات- ِ-حرکت را بر حسب ِ لَگرانژی نوشت. ضمنَن میشود ساختار ِ لَگرانژی را گسترش داد، چنان که لزومَن انرژی-یِ-جنبشی منها یِ انرژی-یِ-پتانسیل نباشد، و خُد ِ لَگرانژی را اصل گرفت. به این ترتیب معادله یِ اُیلِر-لَگرانژ جا یِ معادله یِ نیوتُن را میگیرد.

معادله یِ اُیلِر-لَگرانژ برا یِ یک لَگرانژی که تابع ِ زمان و مکان و سرعت است، این است که مشتق ِ درونی یِ کنش ِ متناظر با آن لَگرانژی صفر است. اینجا هم میشود خُد ِ کنش را اصل گرفت. حتا لازم نیست کنش مُضعی باشد. اما اگر کنش مُضعی باشد، معادلات- ِ-حرکت همچنان معادله یِ دیفرانسیل َند: اگر کنش از مرتبه یِ دست- ِ-بالا ۱ باشد، معادلات- ِ-حرکت معادلات- ِ-دیفرانسیل ی از مرتبه یِ دست- ِ-بالا (2 ۱) َند.

47 کنشها یِ همئرز

از این که معادله یِ حرکت این است که مشتق ِ درونی یِ کنش قرینه یِ نیرو یِ اضافی ست، نتیجه میشود اگر دُ کنش مشتق- ِ-درونی یِ یکسان داشته باشد معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با آنها یکسان است. میگوییم $\tilde{S}$ با S همئرز است، اگر این اتحاد برقرار باشد.

$$(\mathbf{D}\, \tilde{S})_{\mathrm{in}} = (\mathbf{D}\, S)_{\mathrm{in}}. \tag{985}$$

یعنی،

$$0 = [\mathbf{D}\, (\tilde{S} - S)]_{\mathrm{in}}. \tag{986}$$

این یعنی $(\tilde{S}-S)$ به نقاطِ درونی یِ مسیر بستگی ندارد. گیرم S و $\tilde{S}$ از مرتبه یِ دست-ِ-بالا 1 اند. لَگرانژیها یِ متناظر با S و $\tilde{S}$ را با، به ترتیب، L و $\tilde{L}$ نشان میدهم. لَگرانژی یِ متناظر با $(\tilde{S}-S)$ هم $(\tilde{L}-L)$ میشود:

$$(\tilde{S}-S)(q)=\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}(\mathrm{d}\,t)\,(\tilde{L}-L)[t,q(t),\dot{q}(t)]. \tag{987}$$

این که $(\tilde{S}-S)$ به نقاطِ درونی یِ q بستگی ندارد، یعنی یک $\mathfrak{A}$ هست که

$$(\tilde{S}-S)(q)=\mathfrak{A}(t_0,t_\mathrm{f}). \tag{988}$$

البته $\mathfrak{A}$ ممکن است تابعِ q و تعدادِ محدود ی از مشتقاتِ آن هم باشد. منظور از رابطه یِ بالا این است که اگر چنین باشد هم در طرفِ راست، q و مشتقاتِ آن در فقط t_0 و t_f در ظاهر میشوند.

روابطِ (987) و (988) برا یِ هر مسیر ی برقرار َند. یک t_m بینِ t_0 و t_f میگیرم. تحدیدِ q به $[t_0,t_\mathrm{m}]$ را با q_1، و تحدیدِ q به $[t_\mathrm{m},t_\mathrm{f}]$ را با q_2 نشان میدهم. دیده میشود

$$(\tilde{S}-S)(q)=(\tilde{S}-S)(q_1)+(\tilde{S}-S)(q_2). \tag{989}$$

این یعنی

$$\mathfrak{A}(t_0,t_\mathrm{f})=\mathfrak{A}(t_0,t_\mathrm{m})+\mathfrak{A}(t_\mathrm{m},t_\mathrm{f}). \tag{990}$$

یا،

$$\mathfrak{A}(t_\mathrm{m},t_\mathrm{f})=\mathfrak{A}(t_0,t_\mathrm{f})-\mathfrak{A}(t_0,t_\mathrm{m}). \tag{991}$$

این یعنی یک Λ هست که

$$\mathfrak{A}(t_1,t_2)=\Lambda(t_2)-\Lambda(t_1). \tag{992}$$

این را در (988)میگذارم. نتیجه میشود

$$(\tilde{S}-S)(q)=\Lambda(t_\mathrm{f})-\Lambda(t_0). \tag{993}$$

یا،

$$(\tilde{S}-S)(q)=\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}(\mathrm{d}\,t)\,\dot{\Lambda}. \tag{994}$$

این و (987) هم نتیجه میدهند $(\tilde{L}-L)$ مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ Λ است:

$$\tilde{L}-L=\dot{\Lambda}. \tag{675}$$

اگر L تابع ِ فقط زمان و مکان و سرعت باشد، یعنی S از مرتبه یِ دست- ِ-بالا 1 باشد، و Λ تابع ِ فقط زمان و مکان باشد، $\tilde{L}$ تابع ِ فقط زمان و مکان و سرعت خاهد بود، یعنی $\tilde{S}$ هم از مرتبه یِ دست- ِ-بالا 1 خاهد بود. در این صورت فرینه-کردن ِ $\tilde{S}$ بر مسیرها یِ با ابتدا-و-انتها-یِ-یکسان، با فرینه-کردن ِ S بر مسیرها یِ با ابتدا-و-انتها-یِ-یکسان همئرز میشود. اما اگر S از مرتبه یِ دست- ِ-بالا 1 باشد ولی Λ به مشتقها یِ مکان هم بستگی داشته باشد، ممکن است $\tilde{S}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا 1 نباشد. در این صورت صورت فرینه-کردن ِ $\tilde{S}$ بر مسیرها یِ با ابتدا-و-انتها-یِ-یکسان، با فرینه-کردن ِ S بر مسیرها یِ با ابتدا-و-انتها-یِ-یکسان همئرز نمیشود. اما همچنان این که مشتق ِ درونی یِ $\tilde{S}$ صفر باشد با این که مشتق ِ درونی یِ S صفر باشد همئرز است.

به عنوان ِ مثال، گیرم

$$L=\frac{m\,v^2}{2}. \tag{651}$$

که v سرعت است:

$$v=\dot{r}. \tag{652}$$

و m ثابت ی ناصفر است. معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با L میشود

$$0\overset{\mathrm{ns}}{=}\mathscr{e}\partial\,L. \tag{995}$$

که

$$\mathscr{e}\partial\,L=-m\,\ddot{r}. \tag{996}$$

Λ را چنین میگیرم.

$$\Lambda = -\frac{m\,r\,v}{2}. \tag{997}$$

$\tilde{L}$ چنین میشود

$$\tilde{L} = -\frac{m\,r\,\dot{v}}{2}. \tag{998}$$

یا،

$$\tilde{L} = -\frac{m\,r\,\ddot{r}}{2}. \tag{999}$$

دیده میشود $\tilde{S}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا 2 است. معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با $\tilde{L}$ میشود

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{e}\partial\,\tilde{L}. \tag{1000}$$

که

$$\text{e}\partial\,\tilde{L} = \frac{\partial\,\tilde{L}}{\partial\,r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\,\tilde{L}}{\partial\,\dot{r}}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\left(\frac{\partial\,\tilde{L}}{\partial\,\ddot{r}}\right). \tag{1001}$$

مشتقها یِ $\tilde{L}$ چنین اند.

$$\frac{\partial\,\tilde{L}}{\partial\,r} = -\frac{m\,\ddot{r}}{2}. \tag{1002}$$

$$\frac{\partial\,\tilde{L}}{\partial\,\dot{r}} = 0. \tag{1003}$$

$$\frac{\partial\,\tilde{L}}{\partial\,\ddot{r}} = -\frac{m\,r}{2}. \tag{1004}$$

به این ترتیب،

$$\text{e}\partial\,\tilde{L} = -m\,\ddot{r}. \tag{1005}$$

روابط ِ (996) و (1005) نشان میدهند معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با $\tilde{S}$ هم ان معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با S است، چنان که باید.

48 قید- ِ-برابری و کنش

یک روش برا یِ فرینه-کردن ِ تابع ِ $\mathfrak{S}$ با قیدها یِ $\mathfrak{Z}$ استفاده از ضریبها یِ لَگرانژ است: از $\mathfrak{S}$ و $\mathfrak{Z}$ و ضریب- ِ-لَگرانژ ِ $\mathfrak{K}$ تابع ِ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}$ را چنین میسازند.

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{x},\mathfrak{K}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{K}_{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{Z}^{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x}). \tag{1006}$$

این که $\mathfrak{S}$ با قید ِ $\mathfrak{Z}$ فرینه شود، همئرز است با این که $\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}$ فرینه شود، یعنی این معادلات.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}}{\partial\,\mathfrak{x}^{\mathfrak{a}}}. \tag{1007}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}}{\partial\,\mathfrak{K}_{\mathfrak{c}}}. \tag{1008}$$

اینها میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,\mathfrak{S}}{\partial\,\mathfrak{x}^{\mathfrak{a}}} + \mathfrak{K}_{\mathfrak{c}}\,\frac{\partial\,\mathfrak{Z}^{\mathfrak{c}}}{\partial\,\mathfrak{x}^{\mathfrak{a}}}. \tag{1009}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{Z}^{\mathfrak{c}}. \tag{1010}$$

حالت ی را بررسی میکنم که شاخص ِ متغیرها یِ $\mathfrak{x}$ و $\mathfrak{K}$ شامل ِ یک شاخص ِ پیوسته و یک شاخص ِ گسسته است. (1006) چنین میشود.

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{x}) + \int [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,[\mathfrak{y}_a(\mathfrak{t})]\,[\mathfrak{Z}^a(\mathfrak{t},\mathfrak{x})]. \tag{1011}$$

$\mathbb{S}$ دامنه یِ متغیر ِ $\mathfrak{x}$، و $\mathfrak{y}$ چگالی یِ متناظر با $\mathfrak{K}$ است. معادلات ِ (1009) و (1010) هم میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} [(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]_i(\mathfrak{t}) + \int [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t}')]\,[\mathfrak{y}_a(\mathfrak{t}')]\,\frac{\delta\,[\mathfrak{Z}^a(\mathfrak{t}',\mathfrak{x})]}{\delta\,\mathfrak{x}^i(\mathfrak{t})}. \tag{1012}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{Z}^a(\mathfrak{t},\mathfrak{x}). \tag{1013}$$

گیرم علاوه بر این $[\mathfrak{Z}^a(\mathfrak{t},\mathfrak{x})]$ هم تابع ِ $\mathfrak{t}$ و مشتقها یِ $\mathfrak{x}$ تا مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{l}$ از $\mathfrak{x}$ به ازا یِ $\mathfrak{t}$ است:

$$\mathfrak{Z}^a(\mathfrak{t},\mathfrak{x}) = \mathfrak{Z}^a[\mathfrak{t},(\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})]. \tag{1014}$$

(برا یِ ساده-کردن ِ نماد-گذاری، تابع ِ طرف- ِ-راست هم با هم ان $\mathfrak{Z}^a$ نشان داده شده.) در این صورت از (1012) نتیجه میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} [(\mathbf{D}\,\mathfrak{S})(\mathfrak{x})]_i(\mathfrak{t}) + [\partial\!\!\!/_i\,(\mathfrak{y}_a\,\mathfrak{Z}^a)](\mathfrak{t},\mathfrak{x}), \quad \mathfrak{t} \notin (\partial\,\mathbb{S}). \tag{1015}$$

سرانجام، گیرم علاوه بر اینها $\mathfrak{S}$ هم انتگرال ِ $\mathfrak{L}$ بر $\mathbb{S}$ است، چنان که

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \int [(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\mu})(\mathfrak{t})]\,\mathfrak{L}[\mathfrak{t},(\mathrm{D}^{(\mathfrak{l})}\,\mathfrak{x})(\mathfrak{t})]. \tag{894}$$

در این صورت این که $\mathfrak{S}$ با قید ِ $\mathfrak{Z}$ به ازا یِ نقاط ِ درونی یِ $\mathbb{S}$ فرینه شود، میشود (1013) همراه با

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \partial\!\!\!/_i\,\mathfrak{L} + \partial\!\!\!/_i\,(\mathfrak{y}_a\,\mathfrak{Z}^a). \tag{1016}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \partial\!\!\!/_i\,\mathfrak{L}_{\mathfrak{z}}. \tag{1017}$$

که

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{L} + \mathfrak{y}_a\,\mathfrak{Z}^a. \tag{1018}$$

از اینها برا یِ کنش ِ مُضعی یِ S به جا یِ تابع ِ $\mathfrak{S}$، دیده میشود معادلات ِ حرکت با قید- ِ-برابری (وقت ی قید تابع ِ زمان و تعداد ِ محدود ی از مشتقها یِ مکان باشد)، هم ان معادلات ِ فرینه-کردن ِ کنش با قید (البته به ازا یِ زمانها یِ درونی) اند: متناظر با کنش ِ S و قید ِ Z، کنش- ِ-گسترش-یافته یِ $S_{\mathfrak{z}}$ چنین تعریف میشود.

$$S_{\mathfrak{z}} = S + \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\,t)\,\lambda_a\,Z^a. \tag{1019}$$

کنش ِ S انتگرال ِ L است:

$$S = \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\,t)\,L. \tag{1020}$$

به این ترتیب، $S_{\mathfrak{z}}$ هم انتگرال ِ $L_{\mathfrak{z}}$ است:

$$S_{\mathfrak{z}} = \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\,t)\, L_{\mathfrak{z}}. \tag{1021}$$

که

$$L_{\mathfrak{z}} = L + \lambda_a\, Z^a. \tag{1022}$$

این هم ان رابطه یِ لَگرانژی یِ گسترش-یافته با لَگرانژی و قید است. دیده میشود معادلات ی که به این ترتیب با $S_{\mathfrak{z}}$ به دست میئایند هم ان معادلات ِ اُیلِر-لَگرانژ برا یِ $L_{\mathfrak{z}}$ اند. یعنی معادلات- ِ-حرکت ِ با قید (بدون ِ نیرو یِ اضافی) هم هم ان َند که مشتق ِ درونی یِ کنش (ِ گسترش-یافته) صفر است. البته با نیرو-یِ-اضافی یِ $\mathfrak{F}$ هم معادلات میشوند

$$0 \overset{\mathrm{ns}}{=} (\mathbf{D}\, S_{\mathfrak{z}})_{\mathrm{in}} + \mathfrak{F}. \tag{1023}$$

یعنی معادلات- ِ-حرکت ِ با قید این است که مشتق ِ درونی یِ کنش (ِ گسترش-یافته) قرینه یِ نیرو-یِ-اضافی ست.

49 زمان به عنوان ِ یک متغیر

کنش ِ مُضعی یِ S انتگرال ِ لَگرانژی یِ L بر زمان است. و زمان پارامتر ِ مسیر (در فضا) است. یک متغیر ِ دیگر (τ) را پارامتر میگیرم و به جا یِ مسیر در فضا، مسیر در فضا-زمان را برسی میکنم: زمان و مئلفِها یِ مکان تابع ِ این پارامتر میشوند. متغیر ِ انتگرال-گیری برا یِ کنش را هم هم ین پارامتر میگیرم. گیرم S از مرتبه یِ دست- ِ-بالا 1 است. دیده میشود

$$S = \int (\mathrm{d}\,\tau)\, \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\, L(t, q, \dot{q}). \tag{1024}$$

مشتق ِ (کامل ِ) $\mathfrak{q}$ نسبت به τ را با $\acute{\mathfrak{q}}$ نشان میدهم:

$$\acute{\mathfrak{q}} = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{q}}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1025}$$

معلوم است که

$$\acute{\mathsf{q}} = \acute{t}\,\dot{\mathsf{q}}. \tag{1026}$$

$$\dot{\mathsf{q}} = (\acute{t})^{-1}\,\acute{\mathsf{q}}. \tag{1027}$$

یک لَگرانژی یِ L_τ تعریف میکنم، که تابع ِ زمان، مئلفِها یِ مکان، و مشتق ِ زمان و مئلفِها یِ مکان نسبت به τ است:

$$L_\tau(t, q, \acute{t}, \acute{q}) = \acute{t}\,L(t, q, \dot{q}). \tag{1028}$$

t را با q^0 نشان میدهم:

$$q^0 = t. \tag{729}$$

و رابطه یِ بالا را چنین مینویسم.

$$L_\tau(\underset{\sim}{q}, \acute{\underset{\sim}{q}}) = \acute{t}\,L(t, q, \dot{q}). \tag{1029}$$

S انتگرال ِ L_τ بر τ است:

$$S = \int (\mathrm{d}\,\tau)\,L_\tau(\underset{\sim}{q}, \acute{\underset{\sim}{q}}). \tag{1030}$$

به L_τ لَگرانژی یِ فضا-زمانی میگویم. رُشن است که طرف ِ راست تابع ِ مسیر در فضا-زمان است. جا یی که میخاهم بر این تئکید کنم، رابطه یِ بالا را چنین مینویسم.

$$S_\tau = \int (\mathrm{d}\,\tau)\,L_\tau(\underset{\sim}{q}, \acute{\underset{\sim}{q}}). \tag{1031}$$

به S_τ کنش ِ فضا-زمانی میگویم.

از رابطه یِ (1029) دیده میشود

$$\frac{\partial\,L_\tau}{\partial\,q^0} = \acute{t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\,t}. \tag{1032}$$

$$\frac{\partial\,L_\tau}{\partial\,q^i} = \acute{t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}. \tag{1033}$$

اینها را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\partial L_\tau}{\partial q^\alpha} = \acute{t}\,\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}. \tag{1034}$$

همچنین،

$$\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \acute{t}} = -(\acute{t})^{-2}\,\acute{q}^i. \tag{1035}$$

یا،

$$\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \acute{t}} = -(\acute{t})^{-1}\,\dot{q}^i. \tag{1036}$$

و،

$$\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \acute{q}^j} = (\acute{t})^{-1}\,\delta^i_j. \tag{1037}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_\tau}{\partial \acute{q}^0} &= L + \acute{t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \acute{t}},\\ &= L - \acute{t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,(\acute{t})^{-1}\,\dot{q}^i.\end{aligned} \tag{1038}$$

که یعنی

$$\frac{\partial L_\tau}{\partial \acute{q}^0} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i. \tag{1039}$$

و،

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_\tau}{\partial \acute{q}^i} &= \acute{t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\,\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \acute{q}^i},\\ &= \acute{t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\,(\acute{t})^{-1}\,\delta^j_i.\end{aligned} \tag{1040}$$

که یعنی

$$\frac{\partial L_\tau}{\partial \acute{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{1041}$$

برا یِ (1041) نمیشود چیز ی شبیه ِ (1034) نوشت، که برا یِ صفر به جا یِ i هم برقرار باشد: طرف ِ راست ِ (1041) برا یِ صفر به جا یِ i خُش-تعریف نیست.

مشتق ِ L نسبت به $\dot{q}$ تکانه است. با مشتق ِ L_τ نسبت به $\acute{q}$ میشود یک تکانه یِ دیگر (p_τ) تعریف کرد:

$$p_{\tau\, i} = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, \acute{q}^i}. \tag{1042}$$

از (1041) دیده میشود

$$p_{\tau\, i} = \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{1043}$$

که یعنی

$$p_{\tau\, i} = p_i. \tag{1044}$$

طرف ِ راست با صفر به جا یِ i تعریف نشده است. اما میشود (1044) را به صفر به جا یِ i هم گسترش داد:

$$p_{\tau\, 0} = p_0. \tag{1045}$$

طرف ِ چپ ِ (1045) قبلَن تعریف شده است. پس (1045) تعریف ِ p_0 است. به این ترتیب،

$$p_0 = L - \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^i. \tag{1046}$$

یا

$$p_0 = L - p_i\, \dot{q}^i. \tag{1047}$$

بسته،

$$p_0 = L - p\, \dot{q}. \tag{1048}$$

و البته،

$$p_{\tau\,\alpha} = p_\alpha. \tag{1049}$$

بسته،

$$\underset{\sim}{p}_\tau = \underset{\sim}{p}. \tag{1050}$$

از این پس شاخص ِ τ را از تکانه بر میدارم. از (1047) ضمنَن نتیجه میشود

$$L = p_\alpha\, \dot{q}^\alpha. \tag{1051}$$

یا

$$L_\tau = p_\alpha\, \acute{q}^\alpha. \tag{1052}$$

معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با پارامتر ِ τ را بررسی میکنم. مشتق ِ گسترش-یافته با پارامتر ِ τ را با $\text{ϵ}\underset{\sim}{\partial}_\tau$ نشان میدهم:

$$\text{ϵ}\partial_{\tau\,\alpha}\, L_\tau = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha} - \acute{p}_\alpha. \tag{1053}$$

و با استفاده از (1034)،

$$\text{ϵ}\partial_{\tau\,\alpha}\, L_\tau = \acute{t}\, \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, q^\alpha} - \dot{p}_\alpha\right). \tag{1054}$$

بخشها یِ زمانی و فضایی را از هم جدا میکنم:

$$\text{ϵ}\partial_{\tau\,0}\, L_\tau = \acute{t}\, \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, t} - \dot{p}_0\right). \tag{1055}$$

$$\text{ϵ}\partial_{\tau\,i}\, L_\tau = \acute{t}\, \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, q^i} - \dot{p}_i\right). \tag{1056}$$

پس،

$$\text{ϵ}\partial_{\tau\,i}\, L_\tau = \acute{t}\, \text{ϵ}\partial_i\, L. \tag{1057}$$

به نظر میرسد با وارد-کردن ِ پارامتر ِ τ تعداد ِ مئلفِها یِ معادله-یِ-حرکت یک ی بیشتر شده. نشان میدهم چنین نیست:

$$\begin{aligned}\dot{p}_0 &= \dot{L} - \frac{\mathrm{d}\,(p_i\,\dot{q}^i)}{\mathrm{d}\,t},\\ &= \frac{\partial\,L}{\partial\,t} + \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}^i}\,\ddot{q}^i - \dot{p}_i\,\dot{q}^i - p_i\,\ddot{q}^i,\\ &= \frac{\partial\,L}{\partial\,t} + \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}\,\dot{q}^i - \dot{p}_i\,\dot{q}^i.\end{aligned} \tag{1058}$$

پس،

$$\dot{p}_0 = \frac{\partial\,L}{\partial\,t} + \left(\frac{\partial\,L}{\partial\,q^i} - \dot{p}_i\right)\,\dot{q}^i. \tag{1059}$$

یعنی،

$$0 = \left(\frac{\partial\,L}{\partial\,q^0} - \dot{p}_0\right) + \left(\frac{\partial\,L}{\partial\,q^i} - \dot{p}_i\right)\,\dot{q}^i. \tag{1060}$$

یا

$$0 = \left(\frac{\partial\,L}{\partial\,q^\alpha} - \dot{p}_\alpha\right)\,\dot{q}^\alpha. \tag{1061}$$

پس،

$$0 = (\text{ϵ}\partial_{\tau\,\alpha}\,L_\tau)\,\acute{q}^\alpha. \tag{1062}$$

با زمان به عنوان ِ پارامتر، معادلات- ِ-حرکت بدون ِ نیرو یِ اضافی میشوند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\,L. \tag{607}$$

با پارامتر ِ τ، بخش ِ فضایی یِ معادلات- ِ-حرکت بدون ِ نیرو یِ اضافی میشود

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_{\tau\,i}\,L_\tau. \tag{1063}$$

رابطه یِ (1057) نشان میدهد معادله یِ (1063) با (607) همئرز است. رابطه یِ (1062) هم یعنی

$$\text{ϵ}\partial_{\tau\,0}\,L_\tau = -(\text{ϵ}\partial_{\tau\,i}\,L_\tau)\,\dot{q}^i. \tag{1064}$$

یا، با استفاده از (1057)،

$$\text{ϵ}\partial_{\tau\,0}\,L_\tau = -\acute{t}\,(\text{ϵ}\partial_i\,L_\tau)\,\dot{q}^i. \tag{1065}$$

رابطه ِ (1064) نشان میدهد از (1063) نتیجه میشود

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_{\tau\,0}\,L_\tau. \tag{1066}$$

پس (1063) همئرز است با

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_{\tau\,\alpha}\,L_\tau. \tag{1067}$$

این یعنی در نبود ِ نیرو-یِ-اضافی معادلات ِ (1067)، معادلات- ِ-حرکت ی که با پارامتر ِ τ به دست میئایند، با معادلات ِ (607)، معادلات- ِ-حرکت ی که با پارامتر ِ t به دست میئایند، همئرز َند.

با نیرو یِ اضافی، معادلات- ِ-حرکت با پارامتر ِ τ چنین َند.

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_\tau\,L_\tau + F_{\tau\,\mathfrak{n}}. \tag{1068}$$

مفصلتر،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_{\tau\,\alpha}\,L_\tau + F_{\tau\,\mathfrak{n}\,\alpha}. \tag{1069}$$

از رابطه یِ (1062) دیده میشود این معادلات خُد-سازگار َند، اگر و تنها اگر

$$0 = F_{\tau\,\mathfrak{n}\,\alpha}\,\acute{q}^\alpha. \tag{1070}$$

همچنین، معادلات- ِ-حرکت با پارامتر ِ t چنین َند

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial_i\,L + F_{\mathfrak{n}\,i}. \tag{609}$$

اینها، با استفاده از رابطه یِ (1057)، میشوند

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \epsilon \partial_{\tau\, i}\, L_\tau + \acute{t}\, F_{\mathrm{n}\, i}. \tag{1071}$$

بخش ِ فضایی یِ معادلات- ِ-حرکت با پارامتر ِ τ میشود

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \epsilon \partial_{\tau\, i}\, L_\tau + F_{\tau\, \mathrm{n}\, i}. \tag{1072}$$

این معادله با معادله یِ (1071) همئرز است، اگر و تنها اگر

$$F_{\tau\, \mathrm{n}\, i} = \acute{t}\, F_{\mathrm{n}\, i}. \tag{1073}$$

این هم، همراه با شرط- ِ-سازگاری یِ (1070) نتیجه میدهد

$$F_{\tau\, \mathrm{n}\, 0} = -F_{\mathrm{n}\, i}\, \acute{q}^i. \tag{1074}$$

رُشن است که اگر (1073) و (1074) برقرار باشند، (1070) هم برقرار است. پس معادلات- ِ-حرکت با پارامتر ِ τ خُد-سازگار و با معادلات- ِ-حرکت با پارامتر ِ t همئرز َند، اگر و تنها اگر (1073) و (1074) برقرار باشند.

مئلفه یِ صفر ِ تکانه هم به مختصات وابسته است. برا یِ تغییر- ِمختصات ی که زمان را عوض نمیکند،

$$p_j = p'_i\, \frac{\partial\, q'^i}{\partial\, q^j}. \tag{648}$$

به این ترتیب، از (1047) دیده میشود

$$p_0 = L - p'_i\, \frac{\partial\, q'^i}{\partial\, q^j}\, \dot{q}^j. \tag{1075}$$

اما،

$$\dot{q}'^i = \frac{\partial\, q'^i}{\partial\, q^j}\, \dot{q}^j + \frac{\partial\, q'^i}{\partial\, t}. \tag{644}$$

پس،

$$p_0 = L - p'_i \left(\dot{q}'^i - \frac{\partial q'^i}{\partial t} \right). \tag{1076}$$

یا

$$p_0 = p'_0 + p'_i \frac{\partial q'^i}{\partial t}. \tag{1077}$$

دیده شد

$$p_j \dot{q}^j = p'_i \dot{q}'^i - p'_i \frac{\partial q'^i}{\partial t}. \tag{650}$$

به این ترتیب،

$$p_0 + p_j \dot{q}^j = p'_0 + p'_i \dot{q}'^i. \tag{1078}$$

t' با t برابر است:

$$q'^0 = t. \tag{1079}$$

پس،

$$p_0 \dot{q}^o + p_j \dot{q}^j = p'_0 \dot{q}'^0 + p'_i \dot{q}'^i. \tag{1080}$$

یعنی

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha = p'_\alpha \dot{q}'^\alpha. \tag{1081}$$

البته این مستقیمَن از (1051) هم معلوم است. در حالت ِ کلیتر، که تغییر- ِ-مختصات زمان را عوض کند، از (1052) دیده میشود

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha = p'_\alpha \dot{q}'^\alpha. \tag{1082}$$

6

تقارن

50 تقارن و گروه

به طُر ِ کلی، تقارن یک عمل است که یک چیز ِ خاص را عوض نمیکند، یا یک چیز ِ خاص تحت ِ آن ناوردا ست، همراه با این ویژگیها یِ اضافی که آن عمل وارون-پذیر باشد وارون ِ آن عمل هم آن چیز ِ خاص را عوض نکند.

رسمیتر، گیرم یک مجموعه یِ $\mathbb{S}$ هست، و یک تابع ِ $\mathcal{E}$ که دامنه اَ ش $\mathbb{S}$ است. میگویند $\mathfrak{A}$ یک تقارن ِ $\mathcal{E}$ است، وقت ی

f1 $\mathfrak{A}$ یک تابع با دامنه یِ $\mathbb{S}$ و مقدار در $\mathbb{S}$ است.

f2 $\mathfrak{A}$ یک-به-یک است و بر $\mathbb{S}$ پوشا ست. یا، همئرز با آن، $\mathfrak{A}$ وارون-پذیر است و $\mathfrak{A}^{-1}$ یک تابع با با دامنه یِ $\mathbb{S}$ و مقدار در $\mathbb{S}$ است.

f3 $\mathcal{E}$ تحت ِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{A}^{-1}$ ناوردا ست. یعنی $(\mathcal{E} \circ \mathfrak{A})$ و $(\mathcal{E} \circ \mathfrak{A}^{-1})$ با $\mathcal{E}$ برابر َند.

مجموعه یِ تقارنها یِ $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{G}$ نشان میدهم. دیده میشود

f4 اگر $\mathfrak{A}_1$ و $\mathfrak{A}_2$ عضو ِ $\mathbb{G}$ باشند، $(\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{A}_2)$ هم عضو ِ $\mathbb{G}$ است.

f5 همانی یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ عضو ِ $\mathbb{G}$ است.

f6 اگر $\mathfrak{A}$ عضو ِ $\mathbb{G}$ باشد، $\mathfrak{A}^{-1}$ هم عضو ِ $\mathbb{G}$ است.

رُشن است که

f7 ترکیب ِ توابع شرکت-پذیر است. از جمله ترکیب ِ اعضا یِ $\mathbb{G}$ شرکت-پذیر است.

f8 همانی یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ همانی یِ ترکیب ِ اعضا یِ $\mathbb{G}$ است.

f9 وارون ِ هر تابع وارون ِ آن تابع باترکیب است. از جمله اگر $\mathfrak{A}$ عضو ِ $\mathbb{G}$ باشد، $\mathfrak{A}^{-1}$ وارون ِ $\mathfrak{A}$ با ترکیب است.

به این ترتیب مجموعه یِ $\mathbb{G}$ با عمل ِ ترکیب این ویژگیها را دارد که

f10 ترکیب بسته است.

f11 ترکیب شرکت-پذیر است.

f12 همانی یِ ترکیب عضو ِ $\mathbb{G}$ است.

f13 وارون ِ ترکیبی یِ هر عضو ِ $\mathbb{G}$ یک عضو ِ $\mathbb{G}$ است.

اینها یعنی $\mathbb{G}$ با ترکیب یک گروه است. مجموعه یِ تقارنها یِ یک چیز، یک گروه است.

51 تبدیل- ِ-مسیر

تبدیل- ِ-مسیر یک تابع (عملگر) است که دامنه اَ ش مجموعه یِ مسیرها (در یک مجموعه-یِ مقصد ِ $\mathbb{M}$) است، و هر مقدار َش هم یک مسیر (در هم ان $\mathbb{M}$) است. یعنی هر تبدیل- ِ-مسیر یک تابع از $\mathsf{F}(\mathbb{M};\mathbb{T})$ به $\mathsf{F}(\mathbb{M};\mathbb{T})$ است، که $\mathbb{T}$ دامنه یِ مسیرها ست. مثل ِ تعریف ِ فضا-زمان از رو یِ زمان و فضا، مجموعه-یِ-مقصد ِ گسترش-یافته را با $\mathbb{M}_{\mathsf{ext}}$ نشان میدهم و آن را حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ $\mathbb{T}$ در $\mathbb{M}$ تعریف میکنم:

$$\mathbb{M}_{\mathsf{ext}} = \mathbb{T} \times \mathbb{M}. \tag{4}$$

رابطه یِ $\mathfrak{A}$ (یک تبدیل- ِ-مسیر در فضا) با $\mathfrak{A}_\tau$ (تبدیل- ِ-مسیر ِ متناظر در فضا-زمان) چنین است.

$$[\mathfrak{A}^i(q)]\{[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau)\} = [\mathfrak{A}^i_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau), \tag{1083}$$

که τ پارامتر ِ مسیر در فضا-زمان است، و

$$\underset{\sim}{q}^0(\tau) = t(\tau). \tag{1084}$$

$$\underset{\sim}{q}^i(\tau) = q^i[t(\tau)]. \tag{1085}$$

بسته یِ (1083) میشود

$$[\mathfrak{A}(q)]\{[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau)\} = [\mathfrak{A}_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau). \tag{1086}$$

البته میشود یک $\mathfrak{A}^0$ هم تعریف کرد که (1083) چنین گسترش یابد.

$$[\mathfrak{A}^\alpha(q)]\{[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau)\} = [\mathfrak{A}^\alpha_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau). \tag{1087}$$

بسته،

$$[\underset{\sim}{\mathfrak{A}}(q)]\{[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau)\} = [\mathfrak{A}_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau). \tag{1088}$$

از جمله دیده میشود $\mathfrak{A}^0(q)$ همانی ست:

$$[\mathfrak{A}^0(q)]\{[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau)\} = [\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau). \tag{1089}$$

برا یِ یک تبدیل- ِ-مسیر ِ $\mathfrak{A}$، در حالت ِ کلی $[\mathfrak{A}(q)](t)$ تابع ِ همه یِ اعضا یِ مسیر ِ q است. یک حالت ِ خاص این است که $\mathfrak{A}$ با یک تابع ِ $\mathfrak{f}$ از $\mathbb{M}_{\text{ext}}$ به $\mathbb{M}_{\text{ext}}$ ساخته میشود، به این شکل که هر نقطه از مسیر ِ $\mathfrak{A}(q)$ برابر با اثر ِ $\mathfrak{f}$ بر یک نقطه از مسیر ِ q است. یعنی، گیرم

$$[t, q(t)] \in q. \tag{1090}$$

در این صورت،

$$\{\mathfrak{f}[t, q(t)]\} \in [\mathfrak{A}(q)]. \tag{1091}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$[\mathfrak{A}^i(q)]\{\mathfrak{f}^0[t, q(t)]\} = \mathfrak{f}^i[t, q(t)]. \tag{1092}$$

یا،

$$[\mathfrak{A}^\alpha_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau) = \mathfrak{f}^\alpha[\underset{\sim}{q}(\tau)]. \tag{1093}$$

بسته،

$$[\mathfrak{A}_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau) = \mathfrak{f}[\underset{\sim}{q}(\tau)]. \tag{1094}$$

به تبدیل- ِ-مسیر ی که به این شکل از یک تابع از مجموعه-یِ-مقصد ِ گسترش-یافته یِ مسیرها به هم ان مجموعه ساخته میشود یک تبدیل- ِمسیر ِ نقطِئی میگویم. به تبدیل- ِ-مسیر ی که چنین نباشد، یک تبدیل- ِ-مسیر ِ دینامیکی میگویم.

یک تعمیم ِ تبدیل- ِ-مسیر ِ نقطِئی این است که هر نقطه از مسیر ِ $\mathfrak{A}(q)$ به یک نقطه از مسیر ِ q و تعداد ِ محدودی یِ مشتقها یِ مسیر ِ q در هم ان نقطه وابسته باشد. میگویم تبدیل- ِ-مسیر ِ $\mathfrak{A}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{l}$ است، اگر

$$[\mathfrak{A}_\tau(\underset{\sim}{q})](\tau) = \mathfrak{f}[(\mathfrak{D}^{(\mathfrak{l})}\,\underset{\sim}{q})(\tau)]. \tag{1095}$$

میگویم تبدیل- ِ-مسیر ِ $\mathfrak{A}$ مُضعی ست، اگر یک $\mathfrak{l}$ (ِ محدود) باشد که تبدیل- ِ-مسیر ِ $\mathfrak{A}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{l}$ باشد. دیده میشود (1094) یک حالت ِ خاص ِ (1095) است، حالت ی که $\mathfrak{l}$ صفر باشد.

همچنین، معلوم است که اگر تبدیل- ِ-مسیر ِ $\mathfrak{A}$ مُضعی باشد، هر نقطه یِ مرزی یِ $\mathfrak{A}_\tau(\underset{\sim}{q})$ تابع ِ فقط نقطه یِ مرزی یِ متناظر در $\underset{\sim}{q}$ و تعداد ِ محدود یِ از مشتقها یِ $\underset{\sim}{q}$ در آن نقطه است. از جمله نقاط ِ مرزی یِ $\mathfrak{A}_\tau(\underset{\sim}{q})$ به نقاط ِ درونی یِ $\underset{\sim}{q}$ بستگی ندارند. به هم ین ترتیب، نقاط ِ درونی یِ $\mathfrak{A}_\tau(\underset{\sim}{q})$ هم به

نقاط ِ مرزی یِ q وابسته نیستند. و البته گزارها یِ مشابه، با $\mathfrak{A}(q)$ و q به جا یِ، به ترتیب، $\mathfrak{A}_\tau(q)$ و q هم، درست َند: هر نقطه یِ مرزی یِ $\mathfrak{A}(q)$ تابع ِ فقط نقطه یِ مرزی یِ متناظر در q و تعداد ِ محدود یِ از مشتقها یِ q در آن نقطه است. از جمله نقاط ِ مرزی یِ $\mathfrak{A}(q)$ به نقاط ِ درونی یِ q بستگی ندارند. نقاط ِ درونی یِ $\mathfrak{A}(q)$ هم به نقاط ِ مرزی یِ q وابسته نیستند.

پس اگر $\mathfrak{A}$ مُضعی باشد،

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})(q)]^{\rm bo}_{\rm in} = 0. \tag{1096}$$

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})(q)]^{\rm in}_{\rm bo} = 0. \tag{1097}$$

که $[(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})(q)]^{\rm bo}_{\rm in}$ مشتق ِ درونی یِ نقاط ِ مرزی یِ $\mathfrak{A}(q)$ نسبت به q است، و $[(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})(q)]^{\rm in}_{\rm bo}$ مشتق ِ نقاط ِ درونی یِ $\mathfrak{A}(q)$ نسبت به نقاط ِ مرزی یِ q است. مشتق ِ درونی یِ نقاط ِ درونی یِ $\mathfrak{A}(q)$ نسبت به q را هم با $[(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})(q)]^{\rm in}_{\rm in}$ نشان میدهم.

رُشن است که این که اسم ِ $\mathbb{T}$ (دامنه یِ مسیرها) و $\mathbb{M}$ (مقصد ِ مسیرها) چه باشد مهم نیست. اینجا دامنه یِ مسیرها مجموعه یِ زمانها، و مقصد ِ مسیرها فضا ست. به این ترتیب مجموعه-یِ-مقصد ِ گسترش-یافته فضا-زمان است. البته منظور از فضا فضا یِ پیکربندی ست.

52 تقارن ِ معادله-یِ-حرکت

تقارن ِ معادله-یِ-حرکت یک تبدیل- ِ-مسیر است که یک جواب ِ معادله-یِ-حرکت (معادلات- ِ-حرکت) را به یک جواب ِ معادله-یِ-حرکت (معادلات- ِ-حرکت) تبدیل میکند، و البته وارون-پذیر است و وارون َش هم یک جواب ِ معادله-یِ-حرکت (معادلات- ِ-حرکت) را به یک جواب ِ معادله-یِ-حرکت (معادلات- ِ-حرکت) تبدیل میکند. یعنی چیز ی که با اثر-کردن ِ تقارن ِ معادله-یِ-حرکت ناوردا میمانَد برقرار-بودن ِ معادله-یِ-حرکت (معادلات- ِ-حرکت) است.

چند تبدیل- ِ-مسیر را بررسی میکنم.

$$\{[\mathfrak{A}_1(s)](r)\}(t) = r(t) + s. \tag{1098}$$

$$\{[\mathfrak{A}_2(s)](r)\}(t) = r(t - s). \tag{1099}$$

$$\{[\mathfrak{A}_3(s)](r)\}(t) = s\,r(t). \tag{1100}$$

$$\{[\mathfrak{A}_4(s)](r)\}(t) = r(s^{-1}\,t). \tag{1101}$$

$$\{[\mathfrak{A}_5(s)](r)\}(t) = r(t) + s\,t. \tag{1102}$$

$$\{[\mathfrak{A}_6(s)](r)\}(t) = r(t) + s\,t^2. \tag{1103}$$

در همه یِ اینها، s پارامتر ی ثابت (مستقل-از-زمان) است. $\mathfrak{A}_1(s)$ انتقالِ مکان به اندازه یِ s است. $\mathfrak{A}_2(s)$ انتقالِ زمان به اندازه یِ s است. $\mathfrak{A}_3(s)$ مقیاس-کردنِ مکان به اندازه یِ s است. $\mathfrak{A}_4(s)$ مقیاس-کردنِ زمان به اندازه یِ s است. $\mathfrak{A}_5(s)$ تبدیلِ گالیلِیٔ به اندازه یِ s است. برا یِ $\mathfrak{A}_6(s)$ اسمِ رایج ی سراغ ندارم. $\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_2(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ و $\mathfrak{A}_6(s)$ همانی یَند، اگر s صفر باشد. $\mathfrak{A}_3(s)$ و $\mathfrak{A}_4(s)$ همانی یَند، اگر s یک باشد. $\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_2(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ و $\mathfrak{A}_6(s)$، به ازا یِ هر مقدارِ (محدودِ) s وارون-پذیر َند، و وارونِ هر یک با تبدیلِ s به $(-s)$ به دست میئاید. $\mathfrak{A}_3(s)$ و $\mathfrak{A}_4(s)$ وارون-پذیر َند، وقت ی s صفر یا بینهایت نباشد، و وارونِ هر یک با تبدیلِ s به s^{-1} به دست میئاید.

همه یِ این تبدیلها نقطِئی یَند: $\mathfrak{A}_{\mathfrak{c}}(s)$ متناظر با تابعِ $\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}}(s)$ از فضا-زمان به فضا-زمان است:

$$[\mathfrak{f}_1(s)](t,r) = (t, r+s). \tag{1104}$$

$$[\mathfrak{f}_2(s)](t,r) = (t+s, r). \tag{1105}$$

$$[\mathfrak{f}_3(s)](t,r) = (t, s\,r). \tag{1106}$$

$$[\mathfrak{f}_4(s)](t,r) = (s\,t, r). \tag{1107}$$

$$[\mathfrak{f}_5(s)](t,r) = (t, r+s\,t). \tag{1108}$$

$$[\mathfrak{f}_6(s)](t,r) = (t, r+s\,t^2). \tag{1109}$$

یک مثال: معادله-یِ-حرکت این است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \ddot{r} + \mathfrak{a}\,r. \tag{1110}$$

$\mathfrak{a}$ ثابت است. اثرِ تبدیلها یِ بالا بر این معادله-یِ-حرکت را بررسی میکنم. $[\mathfrak{A}_{\mathfrak{c}}(s)](r)$ را با $r_{\mathfrak{c}}$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\ddot{r}_1(t) = \ddot{r}(t). \tag{1111}$$

$$\ddot{r}_2(t) = \ddot{r}(t-s). \tag{1112}$$

$$\ddot{r}_3(t) = s\,\ddot{r}(t). \tag{1113}$$

$$\ddot{r}_4(t) = s^{-2}\,\ddot{r}(s^{-1}\,t). \tag{1114}$$

$$\ddot{r}_5(t) = \ddot{r}(t). \tag{1115}$$

$$\ddot{r}_6(t) = \ddot{r}(t) + 2\,s. \tag{1116}$$

به این ترتیب،

$$(\ddot{r}_1 + \mathfrak{a}\,r_1)(t) = (\ddot{r} + \mathfrak{a}\,r)(t) + \mathfrak{a}\,s. \tag{1117}$$

$$(\ddot{r}_2 + \mathfrak{a}\,r_2)(t) = (\ddot{r} + \mathfrak{a}\,r)(t-s). \tag{1118}$$

$$(\ddot{r}_3 + \mathfrak{a}\,r_3)(t) = s\,(\ddot{r} + \mathfrak{a}\,r)(t). \tag{1119}$$

$$(\ddot{r}_4 + \mathfrak{a}\,r_4)(t) = s^{-2}\,(\ddot{r} + \mathfrak{a}\,s^2\,r)(s^{-1}\,t). \tag{1120}$$

$$(\ddot{r}_5 + \mathfrak{a}\,r_5)(t) = (\ddot{r} + \mathfrak{a}\,r)(t) + \mathfrak{a}\,s\,t. \tag{1121}$$

$$(\ddot{r}_6 + \mathfrak{a}_6\,r)(t) = (\ddot{r} + \mathfrak{a}\,r)(t) + 2\,s + \mathfrak{a}\,s^2\,t. \tag{1122}$$

اگر r معادله یِ (1110) را براورَد، r_2 و r_3 هم معادله یِ (1110) را برمیئاورند.

اگر r معادله یِ (1110) را براورَد، r_1 و r_5 به شرط ی معادله یِ (1110) را برمیئاورَند که

$$\mathfrak{a}\,s = 0. \tag{1123}$$

این یعنی یا $\mathfrak{a}$ صفر باشد، یا s صفر باشد. حالت ِ اول یعنی معادله یِ (1110) معادله-یِ-حرکت ِ ذره یِ آزاد باشد. حالت ِ دوم یعنی تبدیل همانی باشد.

اگر r معادله یِ (1110) را براورَد، r_4 به شرط ی معادله یِ (1110) را برمیئاورد که

$$\mathfrak{a}\,s^2 = \mathfrak{a}. \tag{1124}$$

این یعنی یا $\mathfrak{a}$ صفر باشد، یا s یک باشد، یا s منفی-یِ-یک باشد. حالت ِ اول یعنی معادله یِ (1110) معادله-یِ-حرکت ِ ذره یِ آزاد باشد. حالت ِ دوم یعنی تبدیل همانی باشد. حالت ِ سوم یعنی تبدیل وارونی-یِ-زمان باشد.

سرانجام، اگر r معادله یِ (1110) را براورَد، r_6 به شرط ی معادله یِ (1110) را برمیئاورد که

$$s = 0. \tag{1125}$$

این یعنی تبدیل همانی باشد.

پس اگر $\mathfrak{a}$ ناصفر باشد، $\mathfrak{A}_2(s)$ (انتقالِ زمان به اندازه یِ s)، به ازا یِ همه یِ مقادیرِ (محدودِ) s، تقارنِ معادله-یِ-حرکتِ (1110) است. $\mathfrak{A}_3(s)$ (مقیاس-کردنِ مکان به اندازه یِ s) هم، به ازا یِ همه یِ مقادیرِ s (جز صفر و بینهایت)، تقارنِ معادله-یِ-حرکتِ (1110) است. $\mathfrak{A}_4(1)$ (که همانی ست) و $\mathfrak{A}_4(-1)$ (وارونی یِ زمان) هم تقارنِ معادله-یِ-حرکتِ (1110) اند.

اگر $\mathfrak{a}$ صفر باشد، $\mathfrak{A}_1(s)$ (انتقالِ مکان به اندازه یِ s) و $\mathfrak{A}_2(s)$ (انتقالِ زمان به اندازه یِ s) و $\mathfrak{A}_5(s)$ (تبدیلِ گالیلِئُ به اندازه یِ s)، به ازا یِ همه یِ مقادیرِ (محدودِ) s، تقارنِ معادله-یِ-حرکتِ (1110) اند. $\mathfrak{A}_3(s)$ (مقیاس-کردنِ مکان به اندازه یِ s) و $\mathfrak{A}_4(s)$ (مقیاس-کردنِ زمان به اندازه یِ s) هم، به ازا یِ همه یِ مقادیرِ s (جز صفر و بینهایت)، تقارنِ معادله-یِ-حرکتِ (1110) اند.

53 تقارنِ کنش

تقارنِ کنش یک تبدیل-ِ-مسیر است که کنش را به کنش ی همئرز تبدیل میکند، و البته وارون-پذیر است و وارون َش هم کنش را به کنش ی همئرز تبدیل میکند. یعنی چیز ی که با اثر-کردنِ تقارنِ کنش ناوردا میمانَد کنش است. دقیقتر این است که رده یِ همئرزی یِ کنش ناوردا میمانَد.

گیرم کنش مُضعی ست. در این صورت کنش انتگرالِ یک لَگرانژی ست. گیرم علاوه بر این یک تبدیل-ِ-مسیر هست که دامنه یِ مسیر را عوض نمیکند و تقارنِ کنش است. در این صورت در اثرِ این تبدیل-ِ-مسیر، به لَگرانژی یِ متناظر با کنش مشتقِ زمانی یِ کاملِ یک تابع اضافه میشود. این که تبدیل-ِمسیر دامنه یِ مسیر را (برا یِ هیچ مسیر ی) عوض نکند، به معنی یِ آن است که تبدیل-ِ-مسیر زمان را عوض نمیکند. پس برا یِ کنشها یِ مُضعی و تبدیل-ِ-مسیرها یی که زمان را عوض نمیکنند، تقارنِ کنش یک تبدیل-ِ-مسیر است که در اثرِ آن به لَگرانژی مشتقِ زمانی یِ کاملِ یک تابع اضافه میشود، و البته وارون-پذیر است و در اثرِ وارون َش هم به لَگرانژی مشتقِ زمانی یِ کاملِ یک تابع اضافه میشود.

البته تبدیل- ِ-مسیر ممکن است دامنه یِ مسیر را هم عوض کند. رُشن است که کنش برا یِ مسیر ِ تبدیل-یافته، با دامنه یِ تبدیل-یافته حساب میشود. اما میشود زمان به عنوان ِ پارامتر ِ تحول را با پارامتر ِ یِ اضافی یِ τ جایگزین کرد. در این صورت میشود دامنه یِ مسیر ِ تبدیل-یافته (در فضا-زمان) را هم ان دامنه یِ مسیر ِ اولیه (در فضا-زمان) گرفت.

اگر تبدیل- ِ-مسیر دامنه یِ مسیر را عوض کند، دیگر نمیشود با یک مسیر ِ یکسان کنش ِ تبدیل-یافته را با کنش ِ اولیه مقایسه کرد. پس لزومَن نمیشود نتیجه گرفت که لَگرانژی یِ تبدیل-یافته (در اثر ِ تقارن ِ کنش) هم ان لَگرانژی یِ اولیه به اضافه یِ مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع است.

اما همچنان میشود پارامتر- ِ-اضافی یِ τ را چنان گرفت که دامنه یِ مسیر- ِ-فضا-زمانی یِ تبدیل-یافته با دامنه یِ مسیر- ِ-فضا-زمانی یِ اولیه یکسان باشد. پس نتیجه ای مشابه با آن چه برا یِ لَگرانژی (و تبدیل- ِ-مسیرها یی که دامنه یِ مسیر را عوض نمیکنند) به دست آمد، برا یِ لَگرانژی یِ فضا-زمانی به دست میئاید: برا یِ کنشها یِ مُضعی، تقارن ِ کنش یک تبدیل- ِ-مسیر است که در اثر ِ آن به لَگرانژی یِ فضا-زمانی (L_τ) مشتق ِ کامل ِ یک تابع نسبت به پارامتر (τ) اضافه میشود، و البته وارون-پذیر است و در اثر ِ وارون َش هم به لَگرانژی یِ فضا-زمانی مشتق ِ کامل ِ یک تابع نسبت به پارامتر اضافه میشود.

اثر ِ تبدیل- ِ-مسیر ِ $\mathfrak{A}$ بر لَگرانژی یِ L را با $(\mathfrak{A}^*\,L)$ نشان میدهم:

$$(\mathfrak{A}^*\,L)[t,(\mathrm{D}\,q)(t)] = L\Big(t,\{\mathrm{D}\,[\mathfrak{A}(q)]\}(t)\Big). \tag{1126}$$

اثر ِ تبدیل- ِ-مسیر ِ $\mathfrak{A}$ بر کنش ِ S را هم با $(\mathfrak{A}^*\,S)$ نشان میدهم:

$$(\mathfrak{A}^*\,S)(q) = S[\mathfrak{A}(q)]. \tag{1127}$$

البته،

$$S(q) = \int_{\mathsf{dom}(q)} (\mathrm{d}\,t)\,L[t,(\mathrm{D}\,q)(t)]. \tag{1128}$$

$$(\mathfrak{A}^*\,S)(q) = \int_{\mathsf{dom}[\mathfrak{A}(q)]} (\mathrm{d}\,t)\,(\mathfrak{A}^*\,L)[t,(\mathrm{D}\,q)(t)]. \tag{1129}$$

یا،

$$(\mathfrak{A}^*\,S)(q) = \int_{\mathsf{dom}[\mathfrak{A}(q)]} (\mathrm{d}\,t)\,L\Big(t, \{\mathfrak{D}\,[\mathfrak{A}(q)]\}(t)\Big). \tag{1130}$$

مانسته یِ اینها برا یِ تبدیل-ِ-مسیرِ $\mathfrak{A}_\tau$ (متناظر با مسیرها یِ فضا-زمان) چنین است.

$$[(\mathfrak{A}_\tau)^*\,L_\tau][(\mathfrak{D}\,q)(\tau)] = L_\tau\Big(\{\mathfrak{D}\,[\mathfrak{A}_\tau(q)]\}(\tau)\Big). \tag{1131}$$

$$[(\mathfrak{A}_\tau)^*\,S](q) = S[\mathfrak{A}_\tau(q)]. \tag{1132}$$

$$S(q) = \int_{\mathsf{dom}_\tau(q)} (\mathrm{d}\,\tau)\,L_\tau[(\mathfrak{D}\,q)(\tau)]. \tag{1133}$$

$$[(\mathfrak{A}_\tau)^*\,S](q) = \int_{\mathsf{dom}_\tau(q)} (\mathrm{d}\,\tau)\,[(\mathfrak{A}_\tau)^*\,L_\tau][(\mathfrak{D}\,q)(\tau)]. \tag{1134}$$

یا،

$$[(\mathfrak{A}_\tau)^*\,S](q) = \int_{\mathsf{dom}_\tau(q)} (\mathrm{d}\,\tau)\,L_\tau\Big(\{\mathfrak{D}\,[\mathfrak{A}_\tau(q)]\}(\tau)\Big). \tag{1135}$$

گیرم $\mathfrak{A}$ تقارنِ کنشِ S است. این یعنی برا یِ هر مسیرِ q،

$$\mathfrak{A}^*\,S = S + \mathfrak{C}. \tag{1136}$$

که $\mathfrak{C}(q)$ به نقاطِ درونی یِ q بستگی ندارد:

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{C})_{\mathrm{in}} = 0. \tag{1137}$$

گیرم S مُضعی ست. اگر $\mathfrak{A}$ دامنه یِ مسیر را عوض نکند، (1136) به معنی یِ آن است که یک Λ هست که

$$\mathfrak{A}^*\,L = L + \dot{\Lambda}. \tag{1138}$$

که L لَگرانژی یِ متناظر با S است. اگر $\mathfrak{A}$ دامنه یِ مسیر را عوض کند هم، همچنان با مسیرها یِ فضا-زمانی نتیجه یِ مشابه ی به دست میئاید: $\mathfrak{A}_\tau$ دامنه یِ مسیرِ فضا-زمانی را عوض نمیکند. پس یک Λ هست که

$$(\mathfrak{A}_\tau)^*\,L_\tau = L_\tau + \acute{\Lambda}. \tag{1139}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]}{\mathrm{d}\,\tau}\,(\mathfrak{A}^*\,L)\{\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q}),(\text{Đ}\,q)[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]\}=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\,L[t,(\text{Đ}\,q)(t)]+\frac{\mathrm{d}\,\Lambda}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1140}$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]}{\mathrm{d}\,\tau}\,L\Big(\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q}),\{\text{Đ}\,[\mathfrak{A}(q)]\}[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]\Big)=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\,L[t,(\text{Đ}\,q)(t)]+\frac{\mathrm{d}\,\Lambda}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1141}$$

با یک نماد-گذاری یِ سادِتر، $L[t,(\text{Đ}\,q)(t)]$ را با $L(t)$ نشان میدهم:

$$L(t)=L[t,(\text{Đ}\,q)(t)]. \tag{1142}$$

با این نماد-گذاری، (1140) چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]}{\mathrm{d}\,\tau}\,(\mathfrak{A}^*\,L)[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\tau}\,L(t)+\frac{\mathrm{d}\,\Lambda}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1143}$$

و از آنجا،

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]}{\mathrm{d}\,t}\,(\mathfrak{A}^*\,L)[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]=L(t)+\frac{\mathrm{d}\,\Lambda}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1144}$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]}{\mathrm{d}\,t}\,(\mathfrak{A}^*\,L)[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]=L(t)+\dot{\Lambda}. \tag{1145}$$

اگر $\mathfrak{A}$ زمان را عوض نکند، یا به زمان فقط یک مقدار ِ ثابت بیفزاید،

$$\frac{\mathrm{d}\,[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]}{\mathrm{d}\,t}=1. \tag{1146}$$

در این صورت (1145) میشود

$$(\mathfrak{A}^*\,L)[\mathfrak{A}^0_\tau(\underset{\sim}{q})]=L(t)+\dot{\Lambda}. \tag{1147}$$

این رابطه شبیهِ رابطه یِ (1138) است. اما هم ان رابطه نیست. در (1138) لَگرانژیها یِ $(\mathfrak{A}^* L)$ و L در درُ-طرفِ رابطه، هر-دُ در یک زمان (t) محاسبه شده اند. رابطه یِ (1138) این است.

$$(\mathfrak{A}^* L)(t) = L(t) + \dot{\Lambda}. \tag{1148}$$

رابطه یِ (1145) شکلِ تعمیم-یافته یِ رابطه یِ (1138)، یا رابطه یِ (1148)، است. وقت ی (1145) برقرار است، میگویم تحتِ تبدیل-ِ-مسیرِ $\mathfrak{A}$، به مشتقِ کنش یک مشتقِ کامل اضافه میشود. البته منظور این است که مشتقِ کنشِ اولیه و کنشِ تبدیل-یافته نسبت به پارامتر ی یکسان (که تحتِ تبدیل-ِ-مسیر عوض نمیشود) حساب شده اند، و مشتق-ِ-کامل هم نسبت به هم ین پارامتر است. همچنین، رُشن است که برقراری یِ رابطه یِ (1145) در واقع برقراری یِ هم ان رابطه یِ (1139) است، یعنی این که تحتِ تبدیل-ِ-مسیر، به لَگرانژی یِ فضا-زمانی یک مشتقِ کامل (نسبت به پارامتر) اضافه میشود. به هم ین خاطر، وقت ی (1139) یا (1145) برقرار است، ضمنَن میگویم تبدیل-ِ-مسیرِ $\mathfrak{A}$ یک تقارنِ لَگرانژی-یِ-فضا-زمانی ست.

رابطه یِ (1136) یعنی

$$S[\mathfrak{A}(q)] = S(q) + \mathfrak{C}(q). \tag{1149}$$

از (1149) و (1137) نتیجه میشود

$$\{(\mathbf{D}\, S)[\mathfrak{A}(q)]\}\, [(\mathbf{D}\, \mathfrak{A})(q)]_{\rm in} = [(\mathbf{D}\, S)(q)]_{\rm in}. \tag{1150}$$

گیرم $\mathfrak{A}$ چنان است که نقاطِ مرزی یِ $\mathfrak{A}(q)$ به نقاطِ درونی یِ q بستگی ندارند:

$$[(\mathbf{D}\, \mathfrak{A})(q)]_{\rm in}^{\rm bo} = 0. \tag{1096}$$

در این صورت (1150) میشود

$$\{(\mathbf{D}\, S)[\mathfrak{A}(q)]\}_{\rm in}\, [(\mathbf{D}\, \mathfrak{A})(q)]_{\rm in}^{\rm in} = [(\mathbf{D}\, S)(q)]_{\rm in}. \tag{1151}$$

از (1151)، با فرضِ این که $(\mathbf{D}\, \mathfrak{A})_{\rm in}^{\rm in}$ وارون-پذیر است، دیده میشود صفر-بودنِ $\{(\mathbf{D}\, S)[\mathfrak{A}(q)]\}_{\rm in}$ با صفر-بودنِ $[(\mathbf{D}\, S)(q)]_{\rm in}$ همئرز است. یعنی

$$0 \stackrel{\rm ns}{=} \{(\mathbf{D}\, S)[\mathfrak{A}(q)]\}_{\rm in}, \tag{1152}$$

اگر و تنها اگر

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} [(\mathbf{D}\, S)(q)]_{\text{in}}. \tag{1153}$$

این هم یعنی $\mathfrak{A}$ تقارنِ معادله-یِ-حرکت است.

به این ترتیب، اگر تبدیل-ِ-مسیرِ $\mathfrak{A}$ تقارنِ کنش باشد، $(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})^{\text{in}}_{\text{in}}$ وارون-پذیر باشد، و نقاطِ مرزی یِ $\mathfrak{A}(q)$ به نقاطِ درونی یِ q بستگی نداشته باشند، آنگاه $\mathfrak{A}$ تقارنِ معادله-یِ-حرکت است.

دیده میشود اگر نقاطِ مرزی یِ $\mathfrak{A}(q)$ به نقاطِ درونی یِ q بستگی نداشته باشند، وارون-پذیر-بودنِ مشتقِ $\mathfrak{A}$ وارون-پذیر-بودنِ $(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})^{\text{in}}_{\text{in}}$ را نتیجه میدهد. به $(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})^{\text{in}}_{\text{in}}$ مشتقِ درونی یِ بخشِ درونی یِ $\mathfrak{A}$ میگوییم.

پس اگر تبدیل-ِ-مسیرِ $\mathfrak{A}$ تقارنِ کنش باشد، مشتقِ $\mathfrak{A}$ وارون-پذیر باشد، و و نقاطِ مرزی یِ $\mathfrak{A}(q)$ به نقاطِ درونی یِ q بستگی نداشته باشند، آنگاه $\mathfrak{A}$ تقارنِ معادله-یِ-حرکت است.

همچنین، معلوم شد اگر $\mathfrak{A}$ مُضعی باشد نقاطِ مرزی یِ $\mathfrak{A}(q)$ به نقاطِ درونی یِ q بستگی ندارند، یعنی (1096) برقرار است. پس اگر تبدیل-ِ-مسیرِ $\mathfrak{A}$ مُضعی و تقارنِ کنش باشد، و $(\mathbf{D}\,\mathfrak{A})^{\text{in}}_{\text{in}}$ وارون-پذیر باشد، آنگاه $\mathfrak{A}$ تقارنِ معادله-یِ-حرکت است. یا، اگر تبدیل-ِ-مسیرِ $\mathfrak{A}$ مُضعی و تقارنِ کنش باشد، و مشتقِ $\mathfrak{A}$ وارون-پذیر باشد، آنگاه $\mathfrak{A}$ تقارنِ معادله-یِ-حرکت است.

اینها را سادِتر چنین میگویند که تقارنِ کنش تقارنِ معادله-یِ-حرکت هم هست، که در آن ضمنی فرض شده تبدیل-ِ-مسیر چنان است که نقاطِ مرزی یِ مسیرِ تبدیل-یافته به نقاطِ درونی یِ مسیرِ اولیه بستگی ندارند، و مشتقِ درونی یِ بخشِ درونی یِ مسیرِ تبدیل-یافته وارون-پذیر است.

عکسِ گزاره یِ بالا لزومَن درست نیست. تبدیل-ِ-مسیرها یی هستند که تقارنِ معادله-یِ-حرکت هستند، اما تقارنِ کنش نیستند. یک مثالِ ساده با این لَگرانژی به دست میئاید.

$$L = \frac{m\,v^2}{2}. \tag{651}$$

که v سرعت است:

$$v = \dot{r}. \tag{652}$$

و m ثابت ی ناصفر است. معادله-یِ-حرکت میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} -m\,\ddot{r}. \tag{1154}$$

یا، همئرز با آن،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \ddot{r}. \tag{1155}$$

کنش میشود

$$S = \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\,t)\,\frac{m\,v^2(t)}{2}. \tag{1156}$$

اثرِ تبدیل-ِ-مسیرها یِ $\mathfrak{A}_1$ تا $\mathfrak{A}_6$ را بررسی میکنم:

$$\{[\mathfrak{A}_1(s)](r)\}(t) = r(t) + s. \tag{1098}$$

$$\{[\mathfrak{A}_2(s)](r)\}(t) = r(t - s). \tag{1099}$$

$$\{[\mathfrak{A}_3(s)](r)\}(t) = s\,r(t). \tag{1100}$$

$$\{[\mathfrak{A}_4(s)](r)\}(t) = r(s^{-1}\,t). \tag{1101}$$

$$\{[\mathfrak{A}_5(s)](r)\}(t) = r(t) + s\,t. \tag{1102}$$

$$\{[\mathfrak{A}_6(s)](r)\}(t) = r(t) + s\,t^2. \tag{1103}$$

این تبدیلها نقطِئی یَند و $\mathfrak{A}_{\mathfrak{c}}(s)$ متناظر با تابعِ $\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}}(s)$ از فضا-زمان به فضا-زمان است:

$$[\mathfrak{f}_1(s)](t, r) = (t, r + s). \tag{1104}$$

$$[\mathfrak{f}_2(s)](t, r) = (t + s, r). \tag{1105}$$

$$[\mathfrak{f}_3(s)](t, r) = (t, s\,r). \tag{1106}$$

$$[\mathfrak{f}_4(s)](t, r) = (s\,t, r). \tag{1107}$$

$$[\mathfrak{f}_5(s)](t, r) = (t, r + s\,t). \tag{1108}$$

$$[\mathfrak{f}_6(s)](t, r) = (t, r + s\,t^2). \tag{1109}$$

برا یِ تبدیل- ِ-مسیرها یِ $\mathfrak{A}_2$ و $\mathfrak{A}_4$، دامنه یِ مسیر هم تبدیل میشود:

$$\mathsf{dom}\{[\mathfrak{A}_2(s)](r)\} = \{t \mid (t-s) \in [\mathsf{dom}(r)]\}. \tag{1157}$$

یا

$$\mathsf{dom}\{[\mathfrak{A}_2(s)](r)\} = \{(t+s) \mid t \in [\mathsf{dom}(r)]\}. \tag{1158}$$

همچنین،

$$\mathsf{dom}\{[\mathfrak{A}_4(s)](r)\} = \{t \mid (s^{-1}\,t) \in [\mathsf{dom}(r)]\}. \tag{1159}$$

یا

$$\mathsf{dom}\{[\mathfrak{A}_4(s)](r)\} = \{(s\,t) \mid t \in [\mathsf{dom}(r)]\}. \tag{1160}$$

بسته یِ (1158) و (1160) میشود، به ترتیب،

$$\mathsf{dom}\{[\mathfrak{A}_2(s)](r)\} = [\mathsf{dom}(r)] + s. \tag{1161}$$

$$\mathsf{dom}\{[\mathfrak{A}_4(s)](r)\} = s\,[\mathsf{dom}(r)]. \tag{1162}$$

$[\mathfrak{A}_{\mathfrak{c}}(s)](r)$ را با $r_{\mathfrak{c}}$، و مشتق ِ $r_{\mathfrak{c}}$ نسبت به زمان را با $v_{\mathfrak{c}}$ نشان میدهم. همچنین، کنش ِ متناظر با $r_{\mathfrak{c}}$ را با $S_{\mathfrak{c}}$، و لَگرانژی یِ متناظر با $r_{\mathfrak{c}}$ را با $L_{\mathfrak{c}}$ نشان میدهم:

$$L_{\mathfrak{c}} = [(\mathfrak{A}_{\mathfrak{c}})(s)]^*\,L. \tag{1163}$$

$$S_{\mathfrak{c}} = [(\mathfrak{A}_{\mathfrak{c}})(s)]^*\,S. \tag{1164}$$

و البته،

$$S_{\mathfrak{c}} = \int_{t_{0\,\mathfrak{c}}}^{t_{\mathrm{f}\,\mathfrak{c}}} (\mathrm{d}\,t)\,L_{\mathfrak{c}}(t), \tag{1165}$$

که $t_{0\,\mathfrak{c}}$ و $t_{\mathrm{f}\,\mathfrak{c}}$ تبدیل-یافتِها یِ، به ترتیب، t_0 و t_{f} با $\mathfrak{f}_{\mathfrak{c}}$ اند:

$$t_{\mathrm{j}\,\mathfrak{c}} = t_{\mathrm{j}}, \quad \mathfrak{c} \in \{1,3,5,6\}. \tag{1166}$$

$$t_{\mathrm{j}\,2} = t_{\mathrm{j}} + s. \tag{1167}$$

$$t_{\mathrm{j}\,4} = s\, t_{\mathrm{j}}. \tag{1168}$$

که j برابر با 0 یا f است. پس،

$$S_{\mathfrak{c}} = \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\, t)\, L_{\mathfrak{c}}(t), \quad \mathfrak{c} \in \{1, 3, 5, 6\}. \tag{1169}$$

$$S_2 = \int_{t_0+s}^{t_{\mathrm{f}}+s} (\mathrm{d}\, t)\, L_{\mathfrak{c}}(t). \tag{1170}$$

$$S_4 = \int_{s\, t_0}^{s\, t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\, t)\, L_{\mathfrak{c}}(t). \tag{1171}$$

همچنین،

$$L_{\mathfrak{c}}(t) = \frac{m\, v_{\mathfrak{c}}^2(t)}{2}. \tag{1172}$$

و از آنجا،

$$L_1(t) = L(t). \tag{1173}$$

$$L_2(t) = L(t - s). \tag{1174}$$

$$L_3(t) = s^2\, L(t). \tag{1175}$$

$$L_4(t) = s^{-2}\, L(s^{-1}\, t). \tag{1176}$$

$$L_5(t) = L(t) + m\, s\, v(t) + \frac{m\, s^2}{2}. \tag{1177}$$

$$L_6(t) = L(t) + 2\, m\, s\, t\, v(t) + 2\, m\, s^2\, t^2. \tag{1178}$$

از اینها نتیجه میشود

$$S_1 = S. \tag{1179}$$

$$S_2 = S. \tag{1180}$$

$$S_3 = s^2\, S. \tag{1181}$$

$$S_4 = s^{-1}\, S. \tag{1182}$$

$$S_5 = S + m\,s\,[r(t_{\rm f}) - r(t_0)] + \frac{m\,s^2\,(t_{\rm f} - t_0)}{2}. \tag{1183}$$

$$S_6 = S + 2\,m\,s\int_{t_0}^{t_{\rm f}} {\rm d}\,t\,t\,v(t) + \frac{2\,m\,s^2\,(t_{\rm f}^3 - t_0^3)}{3}. \tag{1184}$$

به این ترتیب $\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_2(s)$ تقارنِ کنش َند. $(S_5 - S)$ هم به نقاطِ درونی یِ مسیر بستگی ندارد. پس $\mathfrak{A}_5(s)$ هم تقارنِ کنش است. $\mathfrak{A}_3(s)$ و $\mathfrak{A}_4(s)$ و $\mathfrak{A}_6(s)$ تقارنِ کنش نیستند.

اما $\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_2(s)$ و $\mathfrak{A}_3(s)$ و $\mathfrak{A}_4(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ تقارنِ معادله یِ-حرکت َند، چون معادله-یِ-حرکتِ (1155) هم ان معادله یِ-حرکتِ (1110) در حالتِ $(\mathfrak{a} = 0)$ است.

به این ترتیب، برا یِ کنشِ (1156) که معادله-یِ-حرکتِ متناظر با آن (1155) است، انتقالِ مکان و انتقالِ زمان و تبدیلِ گالیلیِٔ تقارنِ کنش و تقارنِ معادله-یِ-حرکت َند. مقیاس-کردنِ مکان و زمان تقارنِ کنش نیستند اما تقارنِ معادله-یِ-حرکت َند. $\mathfrak{A}_6(s)$ نَ تقارنِ کنش است و نَ تقارنِ معادله-یِ-حرکت.

از (1181) و (1182) معلوم میشود ترکیب ی از مقیاس-کردنِ مکان و مقیاس-کردنِ زمان هست که تقارنِ کنشِ (1156) است. تابعِ $\mathfrak{f}_7(s)$ از فضا-زمان به فضا-زمان را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathfrak{f}_7(s)](t, r) = (s^2\,t, s\,r). \tag{1185}$$

$\mathfrak{A}_7(s)$ را هم تبدیل-ِ-مسیرِ متناظر با $\mathfrak{f}_7(s)$ تعریف میکنم:

$$\{[\mathfrak{A}_7(s)](r)\}(t) = s\,r(s^{-2}\,t). \tag{1186}$$

دیده میشود

$$v_7(t) = s^{-1}\,v(s^{-2}\,t). \tag{1187}$$

$$t_{j\,7} = s^2\,t_j. \tag{1188}$$

$$L_7(t) = s^{-2}\,L(s^{-2}\,t). \tag{1189}$$

و از آنجا،

$$S_7 = S. \tag{1190}$$

پس تبدیل-ِ-مسیرِ $\mathfrak{A}_7(s)$ تقارنِ کنش است، و البته تقارنِ معادله-یِ-حرکت هم هست.

$\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_2(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ و $\mathfrak{A}_7(s)$ تقارنِ کنش َند. دیده میشود

$$L_1(t) = L(t) + \dot{\Lambda}_1(t). \tag{1191}$$

$$L_5(t) = L(t) + \dot{\Lambda}_5(t). \tag{1192}$$

که

$$\Lambda_1(t) = 0. \tag{1193}$$

$$\Lambda_5(t) = m\,s\,r(t) + \frac{m\,s^2\,t}{2}. \tag{1194}$$

پس L_1 و L_5 با L همئرز َند.

برا یِ $\mathfrak{A}_2(s)$، دیده میشود

$$L_2(t+s) = L(t). \tag{1195}$$

همچنین،

$$[\mathfrak{A}^0_{\tau\,2}(s)](\underset{\sim}{q}) = t + s. \tag{1196}$$

یا،

$$r^0_2 = r^0 + s. \tag{1197}$$

سادِتر،

$$t_2 = t + s. \tag{1198}$$

پس،

$$\frac{\mathrm{d}\,t_2}{\mathrm{d}\,t} = 1. \tag{1199}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,t_2}{\mathrm{d}\,t}\,L_2(t_2) = L(t) + \dot{\Lambda}_2. \tag{1200}$$

که،

$$\Lambda_2 = 0. \tag{1201}$$

این هم ان (1145)، یا حالت- ِ-خاص َ ش (1146)، است.

البته میشود یک $\tilde{\Lambda}_2$ ساخت که

$$L_2(t) = L(t) + \dot{\tilde{\Lambda}}_2(t). \tag{1202}$$

یک راه این است که فرض شود L تحلیلی ست. در این صورت،

$$L(t-s) - L(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-s)^i}{i!} \, (\mathbf{D}^i \, L)(t). \tag{1203}$$

که $\mathbf{D}$ مشتق ِ زمانی یِ کامل است. به این ترتیب،

$$L(t-s) - L(t) = \left\{ \mathbf{D} \, \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-s)^i}{i!} \, \mathbf{D}^{i-1} \, L \right] \right\} (t). \tag{1204}$$

پس میشود $\tilde{\Lambda}_2$ را چنین گرفت.

$$\tilde{\Lambda}_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-s)^i}{i!} \, (\mathbf{D}^{i-1} \, L)(t). \tag{1205}$$

یک راه ِ دیگر هم استفاده از این رابطه است.

$$L(t-s) - L(t) = \int_0^{-s} (\mathrm{d}\,\sigma) \, \dot{L}(t+\sigma). \tag{1206}$$

از این نتیجه میشود

$$L(t-s) - L(t) = \left\{ \mathbf{D} \, \left[\int_0^{-s} (\mathrm{d}\,\sigma) \, L(\centerdot + \sigma) \right] \right\} (t). \tag{1207}$$

پس میشود $\tilde{\Lambda}_2$ را چنین گرفت.

$$\tilde{\Lambda}_2(t) = \int_0^{-s} \mathrm{d}\,\sigma \, L(t+\sigma). \tag{1208}$$

البته اگر L تحلیلی باشد،

$$L(t+\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma^i}{i!}\,(\mathbf{D}^i\,L)(t). \tag{1209}$$

که نتیجه میدهد

$$\int_0^{-s} \mathrm{d}\,\sigma\,L(t+\sigma) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-s)^{i+1}}{(i+1)!}\,(\mathbf{D}^i\,L)(t). \tag{1210}$$

یا

$$\int_0^{-s} \mathrm{d}\,\sigma\,L(t+\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-s)^{i}}{i!}\,(\mathbf{D}^{i-1}\,L)(t). \tag{1211}$$

این تساوی نتیجه میدهد (1208) با (1205) سازگار است. البته رُشن است که $\tilde{\Lambda}_2$ یی که با (1205) یا (1208) به دست میئاید تابعِ فقط زمان و تعدادِ محدود ی از مشتقها یِ مکان نیست.

برا یِ $\mathfrak{A}_7(s)$، دیده میشود

$$L_7(s^2\,t) = L(t). \tag{1212}$$

همچنین،

$$[\mathfrak{A}^0_{\tau\,7}(s)](\underset{\sim}{q}) = s^2\,t. \tag{1213}$$

یا،

$$r^0_7 = s^2\,r^0. \tag{1214}$$

سادِتر،

$$t_7 = s^2\,t. \tag{1215}$$

پس،

$$\frac{\mathrm{d}\,t_7}{\mathrm{d}\,t} = s^2. \tag{1216}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,t_7}{\mathrm{d}\,t}\,L_7(t_7) = L(t) + \dot{\Lambda}_7. \tag{1217}$$

که،

$$\Lambda_7 = 0. \tag{1218}$$

این هم ان (1145) است. $(L_7 - L)$ مشتق ِ زمانی یِ کامل نیست.

پس با وجود ی که $\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_2(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ و $\mathfrak{A}_7(s)$ تقارن ِ کنش َند، فقط $(L_1 - L)$ و $(L_5 - L)$ اند که مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع از زمان و تعداد ِ محدود ی از مشتقها یِ مکان َند. و البته از $\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_2(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ و $\mathfrak{A}_7(s)$ هم فقط $\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ اند که دامنه یِ مسیر را عوض نمیکنند.

اثر ِ تبدیل- ِمسیرها بر لَگرانژی یِ فضا-زمانی را بررسی میکنم. وقت ی L به شکل ِ (651) است، L_τ چنین میشود

$$L_\tau = \acute{t}\,\frac{m\,\dot{r}^2}{2}. \tag{1219}$$

یا،

$$L_\tau = \frac{m\,\acute{r}^2}{2\,\acute{t}}. \tag{1220}$$

q را چنین تعریف میکنم.

$$q^0 = t. \tag{729}$$

$$q^1 = r. \tag{1221}$$

$L_\tau[q(\tau), \acute{q}(\tau)]$ را با $L_\tau(\tau)$ نشان میدهم. اثر ِ $\mathfrak{f}_\mathfrak{c}$ بر q را با $q_\mathfrak{c}$ نشان میدهم:

$$q_\mathfrak{c} = \mathfrak{f}_\mathfrak{c}(q). \tag{1222}$$

$L_\tau[q_\mathfrak{c}(\tau), \acute{q}_\mathfrak{c}(\tau)]$ را هم با $L_{\tau\,\mathfrak{c}}(\tau)$ نشان میدهم. دیده میشود

$$L_{\tau\,1}(\tau) = L_\tau(\tau). \tag{1223}$$

$$L_{\tau\,2}(\tau) = L_\tau(\tau). \tag{1224}$$

$$L_{\tau\,3}(\tau) = s^2\, L_\tau(\tau). \tag{1225}$$

$$L_{\tau\,4}(\tau) = s^{-1}\, L_\tau(\tau). \tag{1226}$$

$$L_{\tau\,5}(\tau) = L_\tau(\tau) + m\, s\, \acute{r} + \frac{m\, s^2\, \acute{t}}{2}. \tag{1227}$$

$$L_{\tau\,6}(\tau) = L_\tau(\tau) + 2\, m\, s\, t\, \acute{r} + 2\, m\, s^2\, t^2\, \acute{t}. \tag{1228}$$

$$L_{\tau\,7}(\tau) = L_\tau(\tau). \tag{1229}$$

به این ترتیب،

$$L_{\tau\,\mathfrak{c}}(\tau) = L_\tau(\tau) + \acute{\Lambda}_{\tau\,\mathfrak{c}}(\tau), \quad \mathfrak{c} \in \{1, 2, 5, 7\}. \tag{1230}$$

که

$$\Lambda_{\tau\,1}(\tau) = 0. \tag{1231}$$

$$\Lambda_{\tau\,2}(\tau) = 0. \tag{1232}$$

$$\Lambda_{\tau\,5}(\tau) = m\, s\, r + \frac{m\, s^2\, t}{2}. \tag{1233}$$

$$\Lambda_{\tau\,7}(\tau) = 0. \tag{1234}$$

$\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_2(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ و $\mathfrak{A}_7(s)$ تقارنِ کنش َند. و دیده میشود در اثرِ هر یک از این تبدیلها، به لَگرانژی یِ فضا-زمانی یک مشتقِ کامل نسبت به τ اضافه میشود.

از مقایسه یِ $\Lambda_{\tau\,\mathfrak{c}}$ ها با $\Lambda_{\mathfrak{c}}$ ها معلوم است که

$$\Lambda_{\tau\,\mathfrak{c}} = L_{\mathfrak{c}}, \quad \mathfrak{c} \in \{1, 2, 5, 7\}. \tag{1235}$$

$\mathfrak{A}_1(s)$ و $\mathfrak{A}_5(s)$ دامنه یِ مسیر را عوض نمیکنند، و $(L_1 - L)$ و $(L_5 - L)$ مشتقِ زمانی یِ کاملِ یک تابع َند. $\mathfrak{A}_2(s)$ دامنه یِ مسیر را عوض میکند، اما $(t_2 - t)$ ثابت است، پس مشتقِ t_2 نسبت به t یک است. $(L_2 - L)$ هم مشتقِ زمانی یِ کاملِ یک تابع $(\tilde{\Lambda}_2)$ است. اما

$$\Lambda_{\tau\,2} \neq \Lambda_2. \tag{1236}$$

$\Lambda_{\tau 2}$ صفر است. در حال ی که Λ_2 نَ-تنها صفر نیست، تابع ی از فقط تعداد ِ محدود ی از مشتقها یِ q نسبت به τ هم نیست.

$\mathfrak{A}_7(s)$ هم، هر چند تقارن ِ کنش است، دامنه یِ مسیر را عوض میکند، و $(t_7 - t)$ ثابت نیست. پس مشتق ِ t_7 نسبت به t هم یک نیست. $(L_7 - L)$ مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع نیست. اما $(L_{\tau 7} - L_\tau)$ مشتق ِ کامل ِ $\Lambda_{\tau 7}$ نسبت به τ است.

54 خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار

میگویم $\mathfrak{A}$ یک خانواده-یِ-تبدیل است، اگر

g1 $\mathfrak{A}$ یک تابع است که هر مقدار ِ آن یک تبدیل است، یعنی اگر s در دامنه یِ $\mathfrak{A}$ باشد، $\mathfrak{A}(s)$ یک تبدیل است.

g2 یک s_0 در دامنه یِ $\mathfrak{A}$ هست که $\mathfrak{A}(s_0)$ همانی ست.

میگویم $\mathfrak{A}$ یک خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار است، اگر

g3 $\mathfrak{A}$ یک خانواده-یِ-تبدیل است که نسبت به متغیر َش هموار است.

هموار-بودن ِ یک تابع مفهوم ی کلی ست، که با این خاص میشود که تابع چند بار مشتق-پذیر (یا مشتق- ِ-پیوسته-پذیر) است، یا احتمالَن تحلیلی ست (یعنی با سری-یِ-تِیلِر َش برابر است). چیز ی که اینجا به کار میرود مشتق-پذیر-بودن ِ $\mathfrak{A}$، و آن هم در فقط s_0، است.

برا یِ خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار ِ $\mathfrak{A}$، دامنه یِ $\mathfrak{A}$ را یک خمینه میگیرم، تا مشتق-پذیر-بودن ِ $\mathfrak{A}$ معنی داشته باشد. رُشن است که اگر شرط ِ هموار-بودن ِ $\mathfrak{A}$ نباشد، لزوم ی ندارد دامنه یِ $\mathfrak{A}$ خمینه باشد. ممکن است دامنه یِ $\mathfrak{A}$ گسسته هم باشد.

سرانجام، این که خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}$ مشتق-پذیر است یعنی اگر q در دامنه یِ $\mathfrak{A}(s)$ باشد، $[\mathfrak{A}(s)](\mathrm{q})$ نسبت به s مشتق-پذیر است. اینجا با تبدیلها یی کار میکنم که هر یک از اعضا یِ دامنه یِ شان یک مسیر است. مشتق-پذیری یِ $\mathfrak{A}$ در s_0، یعنی اگر مسیر ِ q به ازا یِ s در یک همسایگی از s_0 در

دامنه یِ $\mathfrak{A}(s)$ است، آنگاه یک $\mathcal{G}$ هست که

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}(t) = \{[\mathfrak{A}^i(s_0)](q)\}(t) + \{[\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}}(q)](t)\}\,(s^{\mathbf{a}} - s_0^{\mathbf{a}}) + o(s - s_0). \quad (1237)$$

$(s - s_0)$ را با h نشان میدهم:

$$s = s_0 + h. \quad (1238)$$

به این ترتیب،

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}(t) = \{[\mathfrak{A}^i(s_0)](q)\}(t) + \{[\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}}(q)](t)\}\,h^{\mathbf{a}} + o(h). \quad (1239)$$

$\mathfrak{A}(s_0)$ همانی ست:

$$[\mathfrak{A}(s_0)](q) = q. \quad (1240)$$

پس،

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}(t) = q^i(t) + \{[\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}}(q)](t)\}\,h^{\mathbf{a}} + o(h). \quad (1241)$$

به $\mathcal{G}$ مولد ِ خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}$، یا سادِتر مولد ِ (تبدیل ِ) $\mathfrak{A}$، میگویم. به s (یا h) هم پارامتر ِ خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}$، یا سادِتر پارامتر ِ (تبدیل ِ) $\mathfrak{A}$، میگویم.

مختصر-شده یِ رابطه یِ (1241) میشود

$$\{[\mathfrak{A}(s)](q)\}(t) = q(t) + [\mathcal{G}_{\mathbf{a}}(t)]\,h^{\mathbf{a}} + o(h), \quad (1242)$$

که در آن $[\mathcal{G}(q)](t)$ با $\mathcal{G}(t)$ نشان داده شده. از این هم مختصرتر،

$$[\mathfrak{A}(s)](q) = q + \mathcal{G}_{\mathbf{a}}\,h^{\mathbf{a}} + o(h). \quad (1243)$$

$$[\mathfrak{A}(s)](q) = q + \mathcal{G}\,h + o(h). \quad (1244)$$

مانسته یِ اینها را برا یِ تبدیل- ِ-مسیرها یِ فضا-زمانی چنین میشود.

$$\{[\mathfrak{A}^\alpha_\tau(s)](q)\}(\tau) = q^\alpha(\tau) + \{[\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}}(q)](\tau)\}\,h^{\mathbf{a}} + o(h). \quad (1245)$$

مختصرتر،

$$[\mathfrak{A}_\tau(s)](\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau\, h + o(h). \tag{1246}$$

متناظر با یک خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار برا یِ مسیرها یِ فضا-زمانی، میشود یک خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار برا یِ مسیرها یِ فضا یی به دست آورد. زمانها یِ متناظر با $\underset{\sim}{q}$ و $[\mathfrak{A}_\tau(s)](\underset{\sim}{q})$، با پارامتر ِ یکسان ِ τ، لزومَن یکسان نیستند. از (1245) دیده میشود

$$\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\}(\tau) = t + \{[\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}(\underset{\sim}{q})](\tau)\}\, h^{\mathbf{a}} + o(h), \tag{1247}$$

که

$$t = q^0(\tau). \tag{1248}$$

به این ترتیب،

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}\Big(t + \{[\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}(\underset{\sim}{q})](\tau)\}\, h^{\mathbf{a}}\Big) = q^i(t) + \{[\mathcal{G}^i_{\tau\,\mathbf{a}}(q)](\tau)\}\, h^{\mathbf{a}} + o(h), \tag{1249}$$

طرف ِ چپ ِ (1249) را نسبت به h بسط میدهم، و این را به کار میبَرم که $\mathfrak{A}(0)$ همانی ست:

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}\Big(t + \{[\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}(\underset{\sim}{q})](\tau)\}\, h^{\mathbf{a}}\Big) = \{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}(t) + [\dot{q}^i(t)]\, \{[\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}(\underset{\sim}{q})](\tau)\}\, h^{\mathbf{a}} + o(h). \tag{1250}$$

البته رابطه یِ (1249) را میشود چنین هم نوشت.

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}(t) = q^i\Big(t - \{[\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}(\underset{\sim}{q})](\tau)\}\, h^{\mathbf{a}}\Big) + \{[\mathcal{G}^i_{\tau\,\mathbf{a}}(q)](\tau)\}\, h^{\mathbf{a}} + o(h), \tag{1251}$$

به این ترتیب از روابط ِ (1249) و (1250)، یا همئرز با آن از بسط ِ طرف ِ راست ِ رابطه یِ (1251) نسبت به h، نتیجه میشود

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}(t) = q^i(t) + \{[\mathcal{G}^i_{\tau\,\mathbf{a}}(q)](\tau) - [\dot{q}^i(t)]\, [\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}(\underset{\sim}{q})](\tau)\}\, h^{\mathbf{a}} + o(h). \tag{1252}$$

بسته،

$$[\mathfrak{A}(s)](q) = q + (\mathcal{G}_{\tau\,\mathbf{a}} - \dot{q}\, \mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}})\, h^{\mathbf{a}} + o(h). \tag{1253}$$

$$[\mathfrak{A}(s)](q) = q + (\mathcal{G}_\tau - \dot{q}\,\mathcal{G}^0_\tau)\,h + o(h). \tag{1254}$$

از مقایسه یِ اینها با (1243) و (1244) هم دیده میشود

$$\mathcal{G}_{\mathbf{a}} = \mathcal{G}_{\tau\,\mathbf{a}} - \dot{q}\,\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1255}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_\tau - \dot{q}\,\mathcal{G}^0_\tau. \tag{1256}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{G}^i = \mathcal{G}^i_\tau - \dot{q}^i\,\mathcal{G}^0_\tau. \tag{1257}$$

$$\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}} = \mathcal{G}^i_{\tau\,\mathbf{a}} - \dot{q}^i\,\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1258}$$

و البته میشود $\mathcal{G}^0_{\mathbf{a}}$ را هم چنان تعریف کرد که (1255) چنین گسترش یابد.

$$\underset{\sim}{\mathcal{G}}_{\mathbf{a}} = \underset{\sim}{\mathcal{G}}_{\tau\,\mathbf{a}} - \underset{\sim}{\dot{q}}\,\mathcal{G}^0_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1259}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{G}} = \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \underset{\sim}{\dot{q}}\,\mathcal{G}^0_\tau. \tag{1260}$$

در این صورت،

$$\mathcal{G}^0_{\mathbf{a}} = 0. \tag{1261}$$

$$\mathcal{G}^0 = 0. \tag{1262}$$

به $\mathcal{G}$ مولد ِ فضایی یِ خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}_\tau$، یا سادتر مولد ِ فضایی یِ (تبدیل ِ) $\mathfrak{A}_\tau$، میگویم. رُشن است که پارامتر ِ تبدیل، برا یِ $\mathfrak{A}_\tau$ و $\mathfrak{A}$ (تبدیل- ِ-فضایی یِ متناظر با $\mathfrak{A}_\tau$) یکسان است.

اگر خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}(s)$ نقطِئی باشد، یک $\mathfrak{f}$ هست که

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}\{[\mathfrak{f}^0(s)][t,q(t)]\} = [\mathfrak{f}^i(s)][t,q(t)]. \tag{1263}$$

مشتق-پذیر-بودن ِ $\mathfrak{A}(s)$ نسبت به s، به معنی یِ مشتق-پذیر-بودن ِ $\mathfrak{f}(s)$ نسبت به s است. این که $\mathfrak{f}(s)$ در $s = s_0$ نسبت به s مشتق-پذیر است، یعنی یک $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}$ هست که

$$[\mathfrak{f}^\alpha(s)][t,q(t)] = [\mathfrak{f}^\alpha(s_0)][t,q(t)] + \{\mathfrak{g}^\alpha_{\mathbf{a}}[t,q(t)]\}\,h^{\mathbf{a}} + o(h). \tag{1264}$$

گیرم $\mathfrak{f}(s_0)$ همانی ست. نتیجه میشود

$$[\mathfrak{f}^\alpha(s)][t,q(t)] = q^\alpha(t) + \{\mathfrak{g}^\alpha_{\mathbf{a}}[t,q(t)]\}\, h^{\mathbf{a}} + o(h). \tag{1265}$$

پس رابطه یِ (1263) چنین میشود.

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}\Big(t + \{\mathfrak{g}^0_{\mathbf{a}}[t,q(t)]\}\, h^{\mathbf{a}}\Big) = q^i(t) + \{\mathfrak{g}^i_{\mathbf{a}}[t,q(t)]\}\, h^{\mathbf{a}} + o(h). \tag{1266}$$

یا،

$$\{[\mathfrak{A}^i(s)](q)\}(t) = q^i\Big(t - \{\mathfrak{g}^0_{\mathbf{a}}[t,q(t)]\}\, h^{\mathbf{a}}\Big) + \{\mathfrak{g}^i_{\mathbf{a}}[t,q(t)]\}\, h^{\mathbf{a}} + o(h). \tag{1267}$$

روابط ِ (1266) و (1267) هم ان روابط ِ (1249) و (1251) اند، با

$$\mathcal{G}_{\tau\,\mathbf{a}} = \mathfrak{g}_{\mathbf{a}}. \tag{1268}$$

به این ترتیب، حالت ِ خاص ِروابط ِ (1255) تا (1258) به دست میئاید:

$$\mathcal{G}_a = \mathfrak{g}_{\mathbf{a}} - \dot{q}\,\mathfrak{g}^0_{\mathbf{a}}. \tag{1269}$$

$$\mathcal{G} = \mathfrak{g} - \dot{q}\,\mathfrak{g}^0. \tag{1270}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{G}^i = \mathfrak{g}^i - \dot{q}^i\,\mathfrak{g}^0. \tag{1271}$$

$$\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}} = \mathfrak{g}^i_{\mathbf{a}} - \dot{q}^i\,\mathfrak{g}^0_{\mathbf{a}}. \tag{1272}$$

و البته میشود $\mathcal{G}^0_{\mathbf{a}}$ را هم، مثل ِ رابطه یِ (1261)، صفر تعریف کرد، که (1269) چنین گسترش یابد.

$$\underset{\sim}{\mathcal{G}}_{\mathbf{a}} = \underset{\sim}{\mathfrak{g}}_{\mathbf{a}} - \dot{\underset{\sim}{q}}\,\mathfrak{g}^0_{\mathbf{a}}. \tag{1273}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{G}} = \underset{\sim}{\mathfrak{g}} - \dot{\underset{\sim}{q}}\,\mathfrak{g}^0. \tag{1274}$$

55 تقارنِ نُتِری

میگویم $\mathfrak{A}$ یک تقارنِ نُتِری ست، اگر

h1 $\mathfrak{A}$ یک خانواده-یِ-تبدیلِ هموار است.

h2 هر مقدارِ $\mathfrak{A}$ یک تقارنِ لَگرانژی-یِ-فضا-زمانی ست. یعنی اگر s در دامنه یِ $\mathfrak{A}$ باشد، $\mathfrak{A}(s)$ یک تقارنِ لَگرانژی-یِ-فضا-زمانی ست.

اینجا هم، عملَن فقط کافی ست $\mathfrak{A}(s)$ برا یِ s در یک همسایگی از s_0 تقارنِ لَگرانژی-یِ-فضا-زمانی باشد، که s_0 عضو ی از دامنه یِ $\mathfrak{A}$ است که $\mathfrak{A}(s_0)$ همانی ست.

این که $\mathfrak{A}(s)$ یک تقارنِ لَگرانژی-یِ-فضا-زمانی ست، یعنی

$$[\mathfrak{A}_\tau(s)]^*\, L_\tau = L_\tau + \acute{\Lambda}_\tau. \tag{1275}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\}}{\mathrm{d}\,t}\,\{[(\mathfrak{A}(s)]^*\, L\}\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\} = L(t) + \dot{\Lambda}_\tau. \tag{1276}$$

این که $\mathfrak{A}_\tau$ در s_0 مشتق-پذیر است، و $\mathfrak{A}_\tau(s_0)$ همانی ست، یعنی یک $\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau$ هست که

$$[\mathfrak{A}_\tau(s)](\underset{\sim}{q}) = \underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau\, h + o(h). \tag{1246}$$

که،

$$s = s_0 + h. \tag{1238}$$

به این ترتیب،

$$[\mathfrak{A}_\tau(s)]^*\, L_\tau = L_\tau + \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau\, h + \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, \acute{q}^\alpha}\, \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^\alpha_\tau\, h)}{\mathrm{d}\,\tau} + o(h). \tag{1277}$$

یا،

$$[\mathfrak{A}_\tau(s)]^*\, L_\tau = L_\tau + (\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} + o(h). \tag{1278}$$

که $(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}}$ بخش ی از تغییر ِ L_τ به خاطر ِ $\mathfrak{A}_\tau(s)$ است، که نسبت به h خطی ست. دیده میشود

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}_\tau^\alpha\, h + \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, \dot{q}^\alpha}\, \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}_\tau^\alpha\, h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1279}$$

یا،

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} 1 = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}_\tau^\alpha\, h + p_\alpha\, \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}_\tau^\alpha\, h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1280}$$

Λ_τ در (1275) به s وابسته است:

$$\Lambda_\tau(s) = \Lambda_\tau(s_0) + \lambda_\tau\, h + o(h). \tag{1281}$$

یا،

$$\Lambda_\tau(s) - \Lambda_\tau(s_0) = \lambda_\tau\, h + o(h). \tag{1282}$$

$\mathfrak{A}(s_0)$ همانی ست. پس مشتق ِ کامل ِ $\Lambda(s_0)$ نسبت به τ صفر است. که نتیجه میدهد مشتق ِ کامل ِ $[\Lambda_\tau(s) - \Lambda_\tau(s_0)]$ نسبت به τ، با مشتق ِ کامل ِ $\Lambda_\tau(s)$ نسبت به τ برابر است. پس در (1275) میشود $[\Lambda_\tau - \Lambda_\tau(s_0)]$ را جایگزین ِ Λ کرد. از این پس $[\Lambda_\tau - \Lambda_\tau(s_0)]$ را با خُد ِ Λ_τ نشان میدهم. (1281) میشود

$$\Lambda_\tau(s) = \lambda_\tau\, h + o(h). \tag{1283}$$

مفصلتر،

$$\Lambda_\tau(s) = \lambda_{\tau\,\mathbf{a}}\, h^{\mathbf{a}} + o(h). \tag{1284}$$

به این ترتیب از رابطه ی ِ (1275) نتیجه میشود

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_\tau\, h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1285}$$

مفصلتر،

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_{\tau\,\mathbf{a}}\, h^{\mathbf{a}})}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1286}$$

از ترکیب ِ (1280) با رابطه یِ (1285) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,(\lambda_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\partial\,L_\tau}{\partial\,q^\alpha}\,\mathcal{G}^\alpha_\tau\,h + p_\alpha\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^\alpha_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1287}$$

پس،

$$0 = \frac{\partial\,L_\tau}{\partial\,q^\alpha}\,\mathcal{G}^\alpha_\tau\,h + p_\alpha\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^\alpha_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,\tau} - \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1288}$$

مفصلتر،

$$0 = \frac{\partial\,L_\tau}{\partial\,q^\alpha}\,\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathsf{a}}\,h^{\mathsf{a}} + p_\alpha\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathsf{a}}\,h^{\mathsf{a}})}{\mathrm{d}\,\tau} - \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_{\tau\,\mathsf{a}}\,h^{\mathsf{a}})}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1289}$$

رابطه یِ (1288) را میشود چنین نوشت.

$$0 = \left(\frac{\partial\,L_\tau}{\partial\,q^\alpha} - \acute{p}_\alpha\right)\,\mathcal{G}^\alpha_\tau\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(p_\alpha\,\mathcal{G}^\alpha_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1290}$$

یا،

$$0 = (\acute{\partial}_{\tau\,\alpha}\,L_\tau)\,\mathcal{G}^\alpha_\tau\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(p_\alpha\,\mathcal{G}^\alpha_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1291}$$

مفصلتر،

$$0 = (\acute{\partial}_{\tau\,\alpha}\,L_\tau)\,\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathsf{a}}\,h^{\mathsf{a}} + \frac{\mathrm{d}\,[(p_\alpha\,\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathsf{a}} - \lambda_{\tau\,\mathsf{a}})\,h^{\mathsf{a}}]}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1292}$$

بسته،

$$0 = (\acute{\underset{\sim}{\partial}}_\tau\,L_\tau)\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}} - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1293}$$

با استفاده از (1276) هم میشود رابطه ای مشابه، بر حسب ِ لَگرانژی یِ L به جا یِ لَگرانژی-یِ-فضا-زمانی یِ L_τ، به دست آورد. این که $\mathfrak{A}$ در s_0 مشتق-پذیر است، و $\mathfrak{A}(s_0)$ همانی ست، یعنی یک $\mathcal{G}$ هست که،

$$[\mathfrak{A}(s)](q) = q + \mathcal{G}\,h + o(h). \tag{1294}$$

به این ترتیب،

$$[\mathfrak{A}(s)]^*\,L = L + \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}\,\mathcal{G}^i\,h + \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}^i}\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i\,h)}{\mathrm{d}\,t} + o(h). \tag{1295}$$

یا،

$$[\mathfrak{A}(s)]^*\,L_\tau = L + (\delta\,L)_{\mathbf{=1}} + o(h). \tag{1296}$$

که $(\delta\,L)_{\mathbf{=1}}$ بخش ی از تغییر ِ L به خاطر ِ $\mathfrak{A}(s)$ است، که نسبت به h خطی ست. دیده میشود

$$(\delta\,L)_{\mathbf{=1}} = \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}\,\mathcal{G}^i\,h + \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}^i}\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i\,h)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1297}$$

یا،

$$(\delta\,L)_{\mathbf{=1}} = \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}\,\mathcal{G}^i\,h + p_i\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i\,h)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1298}$$

$\mathfrak{A}_\tau(s_0)$ همانی ست. پس،

$$[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q}) = t + \mathcal{G}^0_\tau\,h + o(h), \tag{1299}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\mathrm{d}\,\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\}}{\mathrm{d}\,t} = 1 + \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^0_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,t} + o(h). \tag{1300}$$

$$L\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\} = L(t) + \frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\,t}\,\mathcal{G}^0_\tau\,h + o(h). \tag{1301}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\,\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\}}{\mathrm{d}\,t}\,\{[(\mathfrak{A}(s)]^*\,L\}\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\} = \{[(\mathfrak{A}(s)]^*\,L\}(t) + \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^0_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,t}\,L + \frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\,t}\,\mathcal{G}^0_\tau\,h + o(h). \tag{1302}$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}\,\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\}}{\mathrm{d}\,t}\,\{[(\mathfrak{A}(s)]^*\,L\}\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\} = \{[(\mathfrak{A}(s)]^*\,L\}(t) + \frac{\mathrm{d}\,(L\,\mathcal{G}^0_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,t}\,L + o(h), \tag{1303}$$

که یعنی

$$\frac{\mathrm{d}\,\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\}}{\mathrm{d}\,t}\,\{[(\mathfrak{A}(s)]^*\,L\}\{[\mathfrak{A}^0_\tau(s)](\underset{\sim}{q})\} = L(t) + (\delta\,L)_{=\mathbf{1}} + \frac{\mathrm{d}\,(L\,\mathcal{G}^0_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,t} + o(h). \tag{1304}$$

از این و (1276)، همراه با (1283)، نتیجه میشود

$$(\delta\,L)_{=\mathbf{1}} + \frac{\mathrm{d}\,(L\,\mathcal{G}^0_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_\tau\,h)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1305}$$

λ را چنین تعریف میکنم.

$$\lambda = \lambda_\tau - L\,\mathcal{G}^0_\tau. \tag{1306}$$

رابطه یِ (1305) میشود

$$(\delta\,L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda\,h)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1307}$$

مفصلتر،

$$(\delta\,L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_a\,h^a)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1308}$$

رابطه یِ (1307) مانسته یِ (1285) است: تغییر ِ لَگرانژی هم، مثل ِ تغییر ِ لَگرانژی-یِ-فضا-زمانی، یک مشتق ِ کامل (اینجا نسبت به زمان) است.

از ترکیب ِ (1298) با رابطه یِ (1307) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,(\lambda\,h)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}\,\mathcal{G}^i\,h + p_i\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i\,h)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1309}$$

پس،

$$0 = \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}\,\mathcal{G}^i\,h + p_i\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i\,h)}{\mathrm{d}\,t} - \frac{\mathrm{d}\,(\lambda\,h)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1310}$$

مفصلتر،

$$0 = \frac{\partial\,L}{\partial\,q^i}\,\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}}\,h^{\mathbf{a}} + p_i\,\frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}}\,h^{\mathbf{a}})}{\mathrm{d}\,t} - \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_{\mathbf{a}}\,h^{\mathbf{a}})}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1311}$$

رابطه یِ (1310) را میشود چنین نوشت.

$$0 = \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{p}_i\right) \mathcal{G}^i\, h + \frac{\mathrm{d}\,[(p_i\, \mathcal{G}^i - \lambda)\, h]}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1312}$$

یا،

$$0 = (\text{ɛ}\partial_i\, L)\, \mathcal{G}^i\, h + \frac{\mathrm{d}\,[(p_i\, \mathcal{G}^i - \lambda)\, h]}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1313}$$

مفصلتر،

$$0 = (\text{ɛ}\partial_i\, L)\, \mathcal{G}^i_{\mathsf{a}}\, h^{\mathsf{a}} + \frac{\mathrm{d}\,[(p_i\, \mathcal{G}^i_{\mathsf{a}} - \lambda_{\mathsf{a}})\, h^{\mathsf{a}}]}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1314}$$

بسته،

$$0 = (\text{ɛ}\partial\, L)\, \mathcal{G}\, h + \frac{\mathrm{d}\,[(p\, \mathcal{G} - \lambda)\, h]}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1315}$$

روابط ِ (1313) تا (1315) مانستِها یِ روابط ِ (1291) تا (1293) اند.

رابطه یِ $\mathcal{G}$ با $\mathcal{G}_\tau$ چنین است.

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_\tau - \dot{q}\, \mathcal{G}^0_\tau. \tag{1256}$$

با استفاده از این، رابطه یِ (1315) میشود

$$0 = (\text{ɛ}\partial\, L)\, \mathcal{G}\, h + \frac{\mathrm{d}\,[(p\, \mathcal{G}_\tau - p\, \dot{q}\, \mathcal{G}^0_\tau - \lambda)\, h]}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1316}$$

این هم، با استفاده از (1306) میشود

$$0 = (\text{ɛ}\partial\, L)\, \mathcal{G}\, h + \frac{\mathrm{d}\,[(p\, \mathcal{G}_\tau + L\, \mathcal{G}^0_\tau - p\, \dot{q}\, \mathcal{G}^0_\tau - \lambda_\tau)\, h]}{\mathrm{d}\, t}, \tag{1317}$$

یا

$$0 = (\text{ɛ}\partial\, L)\, \mathcal{G}\, h + \frac{\mathrm{d}\,\{[p\, \mathcal{G}_\tau + (L - p\, \dot{q})\, \mathcal{G}^0_\tau - \lambda_\tau]\, h\}}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1318}$$

ضریب ِ $\mathcal{G}^0_\tau$ هم ان p_0 است:

$$p_0 = L - p\,\dot{q}. \tag{1048}$$

به این ترتیب،

$$0 = (\text{ɛ}\partial\, L)\,\mathcal{G}\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(p\,\mathcal{G}_\tau + p_0\,\mathcal{G}^0_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,t}, \tag{1319}$$

یا

$$0 = (\text{ɛ}\partial\, L)\,\mathcal{G}\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1320}$$

مفصلتر،

$$0 = (\text{ɛ}\partial\, L)\,\mathcal{G}_{\mathbf{a}}\,h^{\mathbf{a}} + \frac{\mathrm{d}\,[(\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_{\tau\,\mathbf{a}} - \lambda_{\tau\,\mathbf{a}})\,h^{\mathbf{a}}]}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1321}$$

$$0 = (\text{ɛ}\partial_i\, L)\,\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}}\,h^{\mathbf{a}} + \frac{\mathrm{d}\,[(p_\alpha\,\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} - \lambda_{\tau\,\mathbf{a}})\,h^{\mathbf{a}}]}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1322}$$

$\mathcal{G}$ در رابطه یِ (1320) را هم میشود، با استفاده از (1256)، بر حسب ِ $\mathcal{G}_\tau$ نوشت. در این صورت رابطه یِ (1320) میشود

$$0 = (\text{ɛ}\partial\, L)\,(\mathcal{G}_\tau - \dot{q}\,\mathcal{G}^0_\tau)\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,t}, \tag{1323}$$

یا

$$0 = (\text{ɛ}\partial_i\, L)\,(\mathcal{G}^i_\tau - \dot{q}^i\,\mathcal{G}^0_\tau)\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1324}$$

اما،

$$\text{ɛ}\partial_{\tau\,i}\,L_\tau = \acute{t}\,\text{ɛ}\partial_i\,L. \tag{1057}$$

$$\text{ɛ}\partial_{\tau\,0}\,L_\tau = -\acute{t}\,(\text{ɛ}\partial_i\,L)\,\dot{q}^i. \tag{1065}$$

و (1324) میشود

$$0 = (\acute{t})^{-1}\,[(\not{\partial}_{\tau\,i}\,L_\tau)\,\mathcal{G}^i_\tau + (\not{\partial}_{\tau\,0}\,L_\tau)\,\mathcal{G}^0_\tau]\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1325}$$

یا،

$$0 = (\acute{t})^{-1}\,(\not{\partial}_{\tau\,\alpha}\,L_\tau)\,\mathcal{G}^\alpha_\tau\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(p_\alpha\,\mathcal{G}^\alpha_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1326}$$

مفصلتر،

$$0 = (\acute{t})^{-1}\,(\not{\partial}_{\tau\,\alpha}\,L_\tau)\,\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}}\,h^{\mathbf{a}} + \frac{\mathrm{d}\,[(p_\alpha\,\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} - \lambda_{\tau\,\mathbf{a}})\,h^{\mathbf{a}}]}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1327}$$

بسته،

$$0 = (\acute{t})^{-1}\,(\underset{\sim}{\not{\partial}}_\tau\,L_\tau)\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1328}$$

البته (1326) را میشود چنین نوشت.

$$0 = (\acute{t})^{-1}\,\left\{(\not{\partial}_{\tau\,\alpha}\,L_\tau)\,\mathcal{G}^\alpha_\tau\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(p_\alpha\,\mathcal{G}^\alpha_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,\tau}\right\}. \tag{1329}$$

مفصلتر،

$$0 = (\acute{t})^{-1}\,\left\{(\not{\partial}_{\tau\,\alpha}\,L_\tau)\,\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}}\,h^{\mathbf{a}} + \frac{\mathrm{d}\,[(p_\alpha\,\mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} - \lambda_{\tau\,\mathbf{a}})\,h^{\mathbf{a}}]}{\mathrm{d}\,\tau}\right\}. \tag{1330}$$

بسته،

$$0 = (\acute{t})^{-1}\,\left\{(\underset{\sim}{\not{\partial}}_\tau\,L_\tau)\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau\,h + \frac{\mathrm{d}\,[(\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \lambda_\tau)\,h]}{\mathrm{d}\,\tau}\right\}. \tag{1331}$$

دیده میشود روابط ِ (1329) تا (1331) هم ان روابط ِ (1291) تا (1293) اند.

چیزها یی که برا یِ تقارن ِ نُتِری در باره یِ لَگرانژی یِ لَگرانژی یِ فضا-زمانی و لَگرانژی به دست آمد را میشود به شکل ی کلی نوشت. تعریف میکنم

$$L^{\backprime} = \begin{cases} L_\tau \\ L \end{cases}. \tag{1332}$$

$$t^{\text{۱}} = \begin{cases} \tau \\ t \end{cases} . \tag{1333}$$

$$\lambda^{\text{۱}} = \begin{cases} \lambda_\tau \\ \lambda \end{cases} . \tag{1334}$$

$$\text{ϵ}\partial^{\text{۱}} = \begin{cases} \underset{\sim}{\text{ϵ}\partial}_\tau \\ \text{ϵ}\partial \end{cases} . \tag{1335}$$

$$\mathcal{G}^{\text{۱}} = \begin{cases} \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau \\ \mathcal{G} \end{cases} . \tag{1336}$$

$$p^{\text{۱}} = \begin{cases} \underset{\sim}{p} \\ p \end{cases} . \tag{1337}$$

شکل ِ اول متناظر با لَگرانژی یِ فضا-زمانی، و شکل ِ دوم متناظر با لَگرانژی ست. با اینها، دُ رابطه که برا یِ لَگرانژی یِ فضا-زمانی و لَگرانژی به دست آمدند میشوند

$$(\delta\, L^{\text{۱}})_{\mathbf{=1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda^{\text{۱}}\, h)}{\mathrm{d}\, t^{\text{۱}}}. \tag{1338}$$

$$0 = (\text{ϵ}\partial^{\text{۱}}\, L^{\text{۱}})\, \mathcal{G}^{\text{۱}}\, h + \frac{\mathrm{d}[(p^{\text{۱}}\, \mathcal{G}^{\text{۱}} - \lambda^{\text{۱}})\, h]}{\mathrm{d}\, t^{\text{۱}}}. \tag{1339}$$

56 تبدیل ِ سراسری، قضیه یِ اول ِ نُتِر

میگویم خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار ِ $\mathfrak{A}$ (یا $\mathfrak{A}_\tau$ برا یِ تبدیلها یِ فضا-زمانی) سراسری ست، اگر پارامتر ِ تبدیل ثابت باشد، یعنی مستقل از زمان باشد.

تغییر ِ لَگرانژی یِ فضا-زمانی به خاطر ِ تبدیل ِ $\mathfrak{A}_\tau$ (با مولد ِ $\mathcal{G}_\tau$ و پارامتر ِ h) این را برمیئاورَد.

$$(\delta\, L_\tau)_{\mathbf{=1}} = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau\, h + p_\alpha\, \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^\alpha_\tau\, h)}{\mathrm{d}\, \tau}. \tag{1280}$$

و اگر h مستقل از زمان باشد،

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau + p_\alpha\, \acute{\mathcal{G}}^\alpha_\tau\right)\, h. \tag{1340}$$

اگر $\mathfrak{A}_\tau$ یک تقارن ِ نُتِری باشد، یک λ_τ هست که

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_\tau\, h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1285}$$

و اگر h مستقل از زمان باشد،

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \acute{\lambda}_\tau\, h. \tag{1341}$$

پس اگر $\mathfrak{A}_\tau$ یک تقارن ِ نُتِری یِ سراسری باشد،

$$0 = \left(\frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau + p_\alpha\, \acute{\mathcal{G}}^\alpha_\tau - \acute{\lambda}_\tau\right)\, h. \tag{1342}$$

این رابطه برا یِ همه یِ h ها درست است. پس،

$$0 = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau + p_\alpha\, \acute{\mathcal{G}}^\alpha_\tau - \acute{\lambda}_\tau. \tag{1343}$$

مفصلتر،

$$0 = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathsf{a}} + p_\alpha\, \acute{\mathcal{G}}^\alpha_{\tau\,\mathsf{a}} - \acute{\lambda}_{\mathsf{a}}. \tag{1344}$$

I_τ را چنین تعریف میکنم.

$$I_\tau = p_\alpha\, \mathcal{G}^\alpha_\tau - \lambda_\tau. \tag{1345}$$

مفصلتر،

$$I_{\tau\,\mathsf{a}} = p_\alpha\, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathsf{a}} - \lambda_{\tau\,\mathsf{a}}. \tag{1346}$$

بسته،

$$I_\tau = \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \lambda_\tau. \tag{1347}$$

رابطه یِ (1343) میشود

$$0 = \left(\frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha} - \acute{p}_\alpha\right)\, \mathcal{G}^\alpha_\tau + \acute{I}_\tau. \tag{1348}$$

یا،

$$0 = (\text{ϵ}\partial_{\tau\,\alpha}\, L_\tau)\, \mathcal{G}^\alpha_\tau + \acute{I}_\tau. \tag{1349}$$

مفصلتر،

$$0 = (\text{ϵ}\partial_{\tau\,\alpha}\, L_\tau)\, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} + \acute{I}_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1350}$$

بسته،

$$0 = (\underset{\sim}{\text{ϵ}\partial}_\tau\, L_\tau)\, \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau + \acute{I}_\tau. \tag{1351}$$

در نتیجه،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \acute{I}_\tau. \tag{1352}$$

مفصلتر،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \acute{I}_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1353}$$

مانسته یِ اینها با لَگرانژی (به جا یِ لَگرانژی یِ فضا-زمانی) چنین میشود. تغییر ِ لَگرانژی به خاطر ِ تبدیل ِ $\mathfrak{A}$ (با مولد ِ $\mathcal{G}$ و پارامتر ِ h) این را برمیئاورَد.

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i\, h + p_i\, \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i\, h)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1298}$$

و اگر h مستقل از زمان باشد،

$$(\delta\, L)_{\mathbf{=1}} = \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i\right)\, h. \tag{1354}$$

اگر $\mathfrak{A}$ یک تقارن ِ نُتِری باشد، یک λ هست که

$$(\delta\, L)_{\mathbf{=1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda\, h)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1307}$$

که

$$\lambda = \lambda_\tau - L\, \mathcal{G}^0_\tau. \tag{1306}$$

و اگر h مستقل از زمان باشد،

$$(\delta\, L)_{\mathbf{=1}} = \dot{\lambda}\, h. \tag{1355}$$

پس اگر $\mathfrak{A}$ یک تقارن ِ نُتِری یِ سراسری باشد،

$$0 = \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i - \dot{\lambda}\right)\, h. \tag{1356}$$

این رابطه برا یِ همه یِ h ها درست است. پس،

$$0 = \frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i - \dot{\lambda}. \tag{1357}$$

مفصلتر،

$$0 = \frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i_{\mathbf{a}} + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i_{\mathbf{a}} - \dot{\lambda}_{\mathbf{a}}. \tag{1358}$$

I را چنین تعریف میکنم.

$$I = p_i\, \mathcal{G}^i - \lambda. \tag{1359}$$

مفصلتر،

$$I_{\mathbf{a}} = p_i\,\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}} - \lambda_{\mathbf{a}}. \tag{1360}$$

بسته،

$$I = p\,\mathcal{G} - \lambda. \tag{1361}$$

رابطه یِ (1357) میشود

$$0 = \left(\frac{\partial\,L}{\partial\,q^i} - \dot{p}_i\right)\,\mathcal{G}^i + \dot{I}. \tag{1362}$$

یا،

$$0 = (\epsilon\partial_i\,L)\,\mathcal{G}^i + \dot{I}. \tag{1363}$$

مفصلتر،

$$0 = (\epsilon\partial_i\,L)\,\mathcal{G}^i_{\mathbf{a}} + \dot{I}_{\mathbf{a}}. \tag{1364}$$

بسته،

$$0 = (\epsilon\partial\,L)\,\mathcal{G} + \dot{I}. \tag{1365}$$

در نتیجه،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \dot{I}. \tag{1366}$$

مفصلتر،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \dot{I}_{\mathbf{a}}. \tag{1367}$$

رابطه یِ $\mathcal{G}$ با $\mathcal{G}_\tau$ چنین است.

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_\tau - \dot{q}\,\mathcal{G}_\tau^0. \tag{1256}$$

با استفاده از این و (1361)، دیده میشود

$$I = p\,(\mathcal{G}_\tau - \dot{q}\,\mathcal{G}_\tau^0) - \lambda. \tag{1368}$$

این هم، با استفاده از (1306) چنین میشود.

$$\begin{aligned} I &= p\,(\mathcal{G}_\tau - \dot{q}\,\mathcal{G}_\tau^0) - (\lambda_\tau - L\,\mathcal{G}_\tau^0), \\ &= p\,\mathcal{G}_\tau + (L - p\,\dot{q})\,\mathcal{G}_\tau^0 - \lambda_\tau. \end{aligned} \tag{1369}$$

سرانجام،

$$p_0 = L - p\,\dot{q}. \tag{1048}$$

پس،

$$\begin{aligned} I &= p\,\mathcal{G}_\tau + p_0\,\mathcal{G}_\tau^0 - \lambda, \\ &= \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\mathcal{G}} - \lambda_\tau. \end{aligned} \tag{1370}$$

که با استفاده از (1347) نتیجه میدهد

$$I = I_\tau. \tag{1371}$$

پس روابط ِ (1366) و (1367) هم ان روابط ِ (1352) و (1353) اند.

نتیجه این که I طی ِ حرکت ثابت میمانَد. به تابع ی از زمان و حالت که طی ِ حرکت ثابت میمانَد، ثابت ِ حرکت میگویند. پس I ثابت ِ حرکت است (یا I_{a} ها ثابت ِ حرکت َند). این نتیجه قضیه یِ اول ِ نُتِر است:

قضیه یِ اول ِ نُتِر: هر تقارن ِ نُتِری یِ سراسری به یک ثابت ِ حرکت مینجامد.

57 تبدیل ِ مُضعی (پیمانِئی)، قضیه یِ دوم ِ نُتِر

میگویم خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار ِ $\mathfrak{A}$ (یا $\mathfrak{A}_\tau$ برا یِ تبدیلها یِ فضا-زمانی) مُضعی ست، اگر پارامتر ِ تبدیل تابع (تابع ِ زمان برا یِ تبدیلها یِ فضایی، تابع ِ پارامتر- ِ-مسیر، برا یِ تبدیلها یِ فضا-زمانی) باشد.

تغییر ِ لَگرانژی یِ فضا-زمانی به خاطر ِ تبدیل ِ $\mathfrak{A}_\tau$ (با مولد ِ $\mathcal{G}_\tau$ و پارامتر ِ h) این را برمیئاورَد.

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}_\tau^\alpha\, h + p_\alpha\, \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}_\tau^\alpha\, h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1280}$$

و اگر h تابع ِ τ باشد،

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}_\tau^\alpha\, h + p_\alpha\, \acute{\mathcal{G}}_\tau^\alpha\right)\, h + p_\alpha\, \mathcal{G}_\tau^\alpha\, \acute{h}. \tag{1372}$$

اگر $\mathfrak{A}_\tau$ یک تقارن ِ نُتِری باشد، یک λ هست که

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda_\tau\, h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1285}$$

و اگر h تابع ِ τ باشد،

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \acute{\lambda}_\tau\, h + \lambda_\tau\, \acute{h}. \tag{1373}$$

پس اگر $\mathfrak{A}_\tau$ یک تقارن ِ نُتِری یِ مُضعی باشد،

$$0 = \left(\frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}_\tau^\alpha + p_\alpha\, \acute{\mathcal{G}}_\tau^\alpha - \acute{\lambda}_\tau\right)\, h + (p_\alpha\, \mathcal{G}_\tau^\alpha - \lambda_\tau)\, \acute{h}. \tag{1374}$$

$h(\tau)$ و $\acute{h}(\tau)$ در هر τ مستقل از هم َند. به این ترتیب، از این که رابطه یِ بالا در هر τ به ازا یِ هر $h(\tau)$ و $\acute{h}(\tau)$ برقرار است نتیجه میشود در هر τ ضریب ِ $h(\tau)$ و ضریب ِ $\acute{h}(\tau)$ باید صفر باشند. این که ضریب ِ h صفر باشد هم ان (1343) است:

$$0 = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}_\tau^\alpha + p_\alpha\, \acute{\mathcal{G}}_\tau^\alpha - \acute{\lambda}_\tau. \tag{1343}$$

مفصلتر،

$$0 = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} + p_\alpha\, \acute{\mathcal{G}}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} - \acute{\lambda}_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1344}$$

این که ضریب ِ $\acute{h}$ صفر باشد یعنی

$$0 = p_\alpha\, \mathcal{G}^\alpha_\tau - \lambda_\tau. \tag{1375}$$

مفصلتر،

$$0 = p_\alpha\, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} - \lambda_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1376}$$

اینجا هم I_τ را چنین تعریف میکنم.

$$I_\tau = p_\alpha\, \mathcal{G}^\alpha_\tau - \lambda_\tau. \tag{1345}$$

مفصلتر،

$$I_{\tau\,\mathbf{a}} = p_\alpha\, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} - \lambda_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1346}$$

بسته،

$$I_\tau = \underset{\sim}{p}\, \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau - \lambda_\tau. \tag{1347}$$

رابطه یِ (1343) میشود

$$0 = \left(\frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha} - \acute{p}_\alpha\right)\, \mathcal{G}^\alpha_\tau + \acute{I}_\tau. \tag{1348}$$

یا،

$$0 = (\partial_{\tau\,\alpha}\, L_\tau)\, \mathcal{G}^\alpha_\tau + \acute{I}_\tau. \tag{1349}$$

در نتیجه،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \acute{I}_\tau. \tag{1352}$$

مفصلتر،

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \acute{I}_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1353}$$

پس اینجا هم هم ان I_τ ثابت ِ حرکت است. اما اینجا از (1375) دیده میشود

$$I_\tau = 0. \tag{1377}$$

مفصلتر،

$$I_{\tau\,\mathbf{a}} = 0. \tag{1378}$$

چیز ی که قرار بود ثابت ِ حرکت باشد، صفر است.

این که I صفر است، نتیجه میدهد

$$0 = \acute{I}_\tau. \tag{1379}$$

مفصلتر،

$$0 = \acute{I}_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1380}$$

روابط ِ (1379) و (1380) هم ان روابط ِ (1352) و (1353) نیستند. (1379) و (1380) یعنی $\acute{I}_\tau$ بیرون- ِ-لاک صفر است (چون خُد ِ I_τ بیرون- ِ-لاک صفر است). در حال ی که (1352) و (1353) یعنی $\acute{I}_\tau$ بر-لاک صفر است. از (1349) و (1379) نتیجه میشود

$$0 = (\epsilon\partial_{\tau\,\alpha}\, L_\tau)\, \mathcal{G}^\alpha_\tau. \tag{1381}$$

مفصلتر،

$$0 = (\epsilon\partial_{\tau\,\alpha}\, L_\tau)\, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}}. \tag{1382}$$

بسته،

$$0 = (\underset{\sim}{\partial}_\tau\, L_\tau)\, \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau. \tag{1383}$$

این یعنی معادلات- ِ-حرکت مستقل-از-هم نیستند: (به ازا یِ هر شاخص ِ **a**) یک ترکیب ِ خطی از معادلات- ِ-حرکت بیرون- ِ-لاک صفر است.

$(\underset{\sim}{\partial}_\tau\, L_\tau)$ نسبت به مشتق ِ دوم ِ مکان دست- ِ-بالا خطی ست:

$$\partial_{\tau\,\alpha}\, L_\tau = \mathfrak{F}_{\tau\,\alpha} - \mathfrak{M}_{\tau\,\alpha\,\beta}\, \acute{\acute{q}}^\beta. \tag{1384}$$

که $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau$ و $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\tau$ مستقل از مشتق ِ دوم ِ مکان نسبت به زمان َند:

$$\mathfrak{F}_{\tau\,\alpha} = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha} - \frac{\partial^2\, L_\tau}{\partial\, \tau\, \partial\, \acute{q}^\alpha} - \frac{\partial^2\, L_\tau}{\partial\, q^\beta\, \partial\, \acute{q}^\alpha}\, \acute{q}^\beta. \tag{1385}$$

$$\mathfrak{M}_{\tau\,\alpha\,\beta} = \frac{\partial^2\, L_\tau}{\partial\, \acute{q}^\beta\, \partial\, \acute{q}^\alpha}. \tag{1386}$$

از جمله دیده میشود $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\tau$ متقارن است:

$$\mathfrak{M}_{\tau\,\beta\,\alpha} = \mathfrak{M}_{\tau\,\alpha\,\beta}. \tag{1387}$$

رابطه یِ (1381) میشود

$$0 = \mathfrak{F}_{\tau\,\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau - \mathfrak{M}_{\tau\,\alpha\,\beta}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau\, \acute{\acute{q}}^\beta. \tag{1388}$$

در هر τ، مئلفِها یِ q و مشتقها یِ این مئلفِها مستقل از هم َند. در رابطه یِ (1388) هم $\acute{\acute{q}}^\beta$ ها فقط در جمله یِ دوم ظاهر شده اند. پس (1388) همئرز َست با این دُ-رابطه.

$$0 = \mathfrak{F}_{\tau\,\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau. \tag{1389}$$

$$0 = \mathfrak{M}_{\tau\,\alpha\,\beta}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau. \tag{1390}$$

البته چون $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\tau$ متقارن است، رابطه یِ (1390) را چنین هم میشود نوشت.

$$0 = \mathfrak{M}_{\tau\,\beta\,\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha_\tau. \tag{1391}$$

بسته یِ اینها میشود

$$0 = \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau \, \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau . \tag{1392}$$

$$0 = \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau \, \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\tau . \tag{1393}$$

$$0 = \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\tau \, \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau . \tag{1394}$$

و مفصل،

$$0 = \mathfrak{F}_{\tau\,\alpha} \, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} . \tag{1395}$$

$$0 = \mathfrak{M}_{\tau\,\alpha\,\beta} \, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} . \tag{1396}$$

$$0 = \mathfrak{M}_{\tau\,\beta\,\alpha} \, \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathbf{a}} . \tag{1397}$$

یا،

$$0 = \underset{\sim}{\mathfrak{F}}_\tau \, \underset{\sim}{\mathcal{G}}_{\tau\,\mathbf{a}} . \tag{1398}$$

$$0 = \underset{\sim}{\mathcal{G}}_{\tau\,\mathbf{a}} \, \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\tau . \tag{1399}$$

$$0 = \underset{\sim}{\mathfrak{M}}_\tau \, \underset{\sim}{\mathcal{G}}_{\tau\,\mathbf{a}} . \tag{1400}$$

این که معادلات- ِ-حرکت مستقل از هم نیستند، از جمله نشان میدهد جواب ِ معادلات- ِ-حرکت با شرط ِ اولیه یکتا نیست: گیرم $\underset{\sim}{q}$ معادلات- ِ-حرکت را برمیئاورَد و

$$\underset{\sim}{q}(\tau_0) = \underset{\sim}{\mathfrak{a}} . \tag{1401}$$

$$\acute{\underset{\sim}{q}}(\tau_0) = \underset{\sim}{\mathfrak{b}} . \tag{1402}$$

روابط ِ (1401) و (1402) شرایط ِ اولیه اند. h را تابع ی دلبخاه از τ میگیرم که در τ_0 خُد َش و مشتق ِ اول َش صفر َند:

$$h(\tau_0) = 0 . \tag{1403}$$

$$\acute{h}(\tau_0) = 0 . \tag{1404}$$

مفصلتر،

$$h^{\mathsf{a}}(\tau_0) = 0. \tag{1405}$$

$$\acute{h}^{\mathsf{a}}(\tau_0) = 0. \tag{1406}$$

تبدیل-یافته یِ $\underset{\sim}{q}$ با مولد ِ $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ و پارامتر- ِ-تبدیل ِ h را با $\underset{\sim}{\tilde{q}}$ نشان میدهم:

$$\underset{\sim}{\tilde{q}} = \underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{\mathcal{G}}_\tau\, h + o(h). \tag{1407}$$

مفصلتر،

$$\underset{\sim}{\tilde{q}} = \underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{\mathcal{G}}_{\tau\,\mathsf{a}}\, h^{\mathsf{a}} + o(h). \tag{1408}$$

$$\tilde{q}^\alpha = q^\alpha + \mathcal{G}^\alpha_\tau\, h + o(h). \tag{1409}$$

$$\tilde{q}^\alpha = q^\alpha + \mathcal{G}^\alpha_{\tau\,\mathsf{a}}\, h^{\mathsf{a}} + o(h). \tag{1410}$$

این که در τ_0 خُد ِ h و مشتق ِ اول َ ش صفر َند، نتیجه میدهد

$$\underset{\sim}{\tilde{q}}(\tau_0) = \underset{\sim}{\mathfrak{a}} + o(h). \tag{1411}$$

$$\acute{\underset{\sim}{\tilde{q}}}(\tau_0) = \underset{\sim}{\mathfrak{b}} + o(h). \tag{1412}$$

پس تا مرتبه یِ یک نسبت به h، شرایط- ِ-اولیه برا یِ $\underset{\sim}{\tilde{q}}$ هم ان شرایط- ِ-اولیه برا یِ $\underset{\sim}{q}$ است. همچنین،

$$\acute{\acute{\underset{\sim}{\tilde{q}}}}(\tau_0) = \acute{\acute{\underset{\sim}{q}}}(\tau_0) + \underset{\sim}{\mathcal{G}}\, \acute{\acute{h}}(\tau_0) + o(h), \tag{1413}$$

که نشان میدهد

$$(\mathfrak{M}\, \acute{\acute{\underset{\sim}{\tilde{q}}}})(\tau_0) = (\mathfrak{M}\, \acute{\acute{\underset{\sim}{q}}})(\tau_0) + o(h). \tag{1414}$$

به این ترتیب، تا مرتبه یِ یک نسبت به h و در τ_0، در اثر ِ تبدیل مقدار ِ $\underset{\sim}{q}$ و مشتق ِ اول ِ آن تغییر نمیکنند، اما مشتق ِ دوم تغییر میکند. اما تغییر ِ مشتق- ِ-دوم چنان است که اثر ِ حاصل از تغییر ِ مشتق- ِ-دوم، در معادله-یِ-حرکت ظاهر نمیشود. پس اگر $\underset{\sim}{q}$ معادله-یِ-حرکت با شرایط- ِ-اولیه،

روابطِ (1401) و (1402)، را براورَد، $\tilde{q}$ هم هم ان معادلات-ِ-حرکت را برمیئاورَد، با هم ان شرایط-ِ-اولیه (تا مرتبه یِ یک نسبت به h)، هر چند مشتقِ دوم $\tilde{q}$ در τ_0 با مشتقِ دوم q در τ_0 فرق دارد: از معادله-یِ-حرکت و شرایط-ِ-اولیه، مشتقِ دوم q را فقط تا حدِ یک ترکیب-ِ-خطی یِ جمعی از $\mathcal{G}$ میشود به دست آورد.

تبدیلِ وابرریختی-یِ-پارامتر متناظر با s را با $\mathfrak{D}_\tau(s)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathfrak{D}_\tau(s)]\{q[s(\tau)]\} = q(\tau), \tag{1415}$$

که s یک وابرریختی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است. با تعریفِ h به شکلِ

$$s(\tau) = \tau + h(\tau), \tag{1416}$$

دیده میشود

$$[\mathfrak{D}_\tau(s)](q) = q - \acute{q}\, h + o(h). \tag{1417}$$

این یعنی $\mathcal{G}_\tau$، مولدِ تبدیلِ $\mathfrak{D}_\tau$، چنین است.

$$\mathcal{G}_\tau = -\acute{q}. \tag{1418}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{G}^\alpha = -\acute{q}^\alpha. \tag{1419}$$

به این ترتیب اثرِ $\mathfrak{D}_\tau(s)$ بر لَگرانژی یِ فضا-زمانی، تا مرتبه یِ یک نسبت به h چنین میشود.

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\,(-\acute{q}^\alpha\, h) + \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, \acute{q}^\alpha}\,\frac{\mathrm{d}\,(-\acute{q}^\alpha\, h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1420}$$

بستگی یِ L_τ به τ، فقط از طریقِ q و مشتقِ آن است. پس،

$$\acute{L}_\tau = \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, q^\alpha}\,\acute{q}^\alpha + \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, \acute{q}^\alpha}\,\acute{\acute{q}}^\alpha. \tag{1421}$$

به این ترتیب،

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = -\acute{L}_\tau\, h - \frac{\partial\, L_\tau}{\partial\, \acute{q}^\alpha}\, \acute{q}^\alpha\, \acute{h}, \tag{1422}$$

یا

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = -\acute{L}_\tau\, h - p_\alpha\, \acute{q}^\alpha\, \acute{h}. \tag{1423}$$

اما

$$L_\tau = p_\alpha\, \acute{q}^\alpha. \tag{1052}$$

پس،

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = -\acute{L}_\tau\, h - L_\tau\, \acute{h}, \tag{1424}$$

که یعنی

$$(\delta\, L_\tau)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(-L_\tau\, h)}{\mathrm{d}\,\tau}. \tag{1425}$$

پس تغییر ِ L_τ تا مرتبه ی ِ یک نسبت به h مشتق ِ کامل ِ یک تابع نسبت به τ است. این تابع با h متناسب است. ضریب ِ تناسب را، مثل ِ معمول، با λ_τ نشان میدهم:

$$\lambda_\tau = -L_\tau. \tag{1426}$$

از این و (1418)هم دیده میشود

$$I_\tau = -\underset{\sim}{p}\, \underset{\sim}{\acute{q}} + L_\tau. \tag{1427}$$

مفصلتر،

$$I_\tau = -p_\alpha\, \acute{q}^\alpha + L_\tau. \tag{1428}$$

اما از (1052) دیده میشود I_τ صفر است، که این هم ان (1377) است.

پس تبدیل ِ وابرریختی-یِ-پارامتر همیشه یک تقارن ِ مُضعی ست. و مثل ِ همه یِ چنین-تبدیلها یی، ثابت- ِ-حرکت ِ متناظر با آن صفر است. البته به خاطر ِ این تقارن، معادلات- ِ-حرکت ِ متناظر با پارامتر ِ τ مستقل-از-هم نیستند. اینجا نتیجه یِ این مستقل-نبودن این است که در هر جواب ِ معادلات- ِ-حرکت، میشود پارامتر ِ τ را آزادانه عوض کرد و مسیر- ِ-فضا-زمانی یِ حاصل همچنان یک جواب ِ معادلات- ِ-حرکت است. این را میشود چنین گفت که از معادلات- ِ-حرکت نمیشود بستگی یِ مختصات ِ فضا-زمان τ را به دست آورد. و البته این هم از پیش قابل- ِ-انتظار بود: معادلات- ِ-حرکت ِ حاصل از لَگرانژی یِ فضا-زمانی با معادلات- ِ-حرکت ِ حاصل از لَگرانژی یِ متناظر همئرز َند، و از معادلات ِ اخیر فقط بستگی یِ مختصات ِ فضا به زمان به دست میئاید.

نتایج ِ تقارن ِ مُضعی را میشود با لَگرانژی (به جا یِ لَگرانژی یِ فضا-زمانی) هم به دست آورد. تغییر ِ لَگرانژی به خاطر ِ تبدیل ِ $\mathfrak{A}$ (با مولد ِ $\mathcal{G}$ و پارامتر ِ h) این را برمیئاورَد.

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i\, h + p_i\, \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i\, h)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1298}$$

و اگر $\mathfrak{A}$ یک تقارن ِ نُتِری باشد، یک λ هست که

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda\, h)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1307}$$

که

$$\lambda = \lambda_\tau - L\, \mathcal{G}^0_\tau. \tag{1306}$$

اینجا هم I را چنین تعریف میکنم.

$$I = p_i\, \mathcal{G}^i - \lambda. \tag{1359}$$

و البته اینجا هم

$$I = I_\tau. \tag{1371}$$

و دیده میشود اگر h تابع ِ زمان باشد،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{I}. \tag{1366}$$

و

$$I = 0. \tag{1429}$$

پس با لَگرانژی هم هم ان نتیجه یِ حاصل از لَگرانژی-یِ-فضا-زمانی به دست میئاید. از جمله، چیز ی که قرار بود ثابت ِ حرکت باشد صفر است.

این که I صفر است، نتیجه میدهد

$$0 = \dot{I}. \tag{1430}$$

رابطه یِ (1430) هم ان رابطه یِ (1366) نیست. (1430) یعنی $\dot{I}$ بیرون- ِ-لاک صفر است (چون خُد ِ I بیرون- ِ-لاک صفر است). در حال ی که (1366) یعنی $\dot{I}$ بر-لاک صفر است. اینجا هم نتیجه میشود

$$0 = (\text{ð}_i\, L)\, \mathcal{G}^i. \tag{1431}$$

این یعنی معادلات- ِ-حرکت مستقل-از-هم نیستند: (به ازا یِ هر شاخص ِ **a**) یک ترکیب ِ خطی از معادلات- ِ-حرکت بیرون- ِ-لاک صفر است.

$(\text{ð}\, L)$ نسبت به مشتق ِ دوم ِ مکان دست- ِ-بالا خطی ست:

$$\text{ð}\, i\, L = \mathfrak{F}_i - \mathfrak{M}_{i\,j}\, \ddot{q}^j, \tag{1432}$$

که $\mathfrak{F}$ و $\mathfrak{M}$ مستقل از مشتق ِ دوم ِ مکان نسبت به زمان َند:

$$\mathfrak{F}_i = \frac{\partial\, L}{\partial\, q^i} - \frac{\partial^2\, L}{\partial\, t\, \partial\, \dot{q}^i} - \frac{\partial^2\, L}{\partial\, q^j\, \partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^j. \tag{1433}$$

$$\mathfrak{M}_{i\,j} = \frac{\partial^2\, L}{\partial\, \dot{q}^j\, \partial\, \dot{q}^i}. \tag{626}$$

از جمله دیده میشود $\mathfrak{M}$ متقارن است:

$$\mathfrak{M}_{j\,i} = \mathfrak{M}_{i\,j}. \tag{1434}$$

اینجا هم نتیجه میشود

$$0 = \mathfrak{F}_i\,\mathcal{G}^i. \tag{1435}$$

$$0 = \mathfrak{M}_{i\,j}\,\mathcal{G}^i. \tag{1436}$$

و چون $\mathfrak{M}$ متقارن است،

$$0 = \mathfrak{M}_{j\,i}\,\mathcal{G}^i. \tag{1437}$$

رابطه یِ مستقل-نبودنِ معادلات-ِ-حرکت و یکتا-نبودنِ جواب را هم میشود تکرار کرد. این که معادلات-ِ-حرکت مستقل از هم نیستند، از جمله نشان میدهد جوابِ معادلات-ِ-حرکت با شرطِ اولیه یکتا نیست: گیرم q معادلات-ِ-حرکت را برمیئاورَد و

$$q(t_0) = \mathfrak{a}. \tag{1438}$$

$$\dot{q}(t_0) = \mathfrak{c}. \tag{1439}$$

روابطِ (1438) و (1439) شرایطِ اولیه اند. h را تابع ی دلبخاه از t میگیرم که در t_0 خُد َش و مشتقِ اول َش صفر َند:

$$h(\tau_0) = 0. \tag{1440}$$

$$\dot{h}(t_0) = 0. \tag{1441}$$

تبدیل-یافته یِ q با مولدِ $\mathcal{G}$ و پارامتر-ِ-تبدیلِ h را با $\tilde{q}$ نشان میدهم:

$$\tilde{q} = q + \mathcal{G}\,h + o(h). \tag{1442}$$

این که در t_0 خُد ِ h و مشتق ِ اول َش صفر َند، نتیجه میدهد

$$\tilde{q}(t_0) = \mathfrak{a} + o(h). \tag{1443}$$

$$\dot{\tilde{q}}(t_0) = \mathfrak{c} + o(h). \tag{1444}$$

پس تا مرتبه یِ یک نسبت به h، شرایط- ِ-اولیه برا یِ $\tilde{q}$ هم ان شرایط- ِ-اولیه برا یِ q است. همچنین،

$$\ddot{\tilde{q}}(t_0) = \ddot{q}(t_0) + \mathcal{G}\,\ddot{h}(t_0) + o(h), \tag{1445}$$

که نشان میدهد

$$(\mathfrak{M}\,\ddot{\tilde{q}})(t_0) = (\mathfrak{M}\,\ddot{q})(t_0) + o(h). \tag{1446}$$

به این ترتیب، تا مرتبه یِ یک نسبت به h و در t_0، در اثر ِ تبدیل مقدار ِ q و مشتق ِ اول ِ آن تغییر نمیکنند، اما مشتق ِ دوم تغییر میکند. اما تغییر ِ مشتق- ِ-دوم چنان است که اثر ِ حاصل از تغییر ِ مشتق- ِ-دوم، در معادله-یِ-حرکت ظاهر نمیشود. پس اگر q معادله-یِ-حرکت با شرایط- ِ-اولیه، روابط ِ (1438) و (1439)، را براورَد، $\tilde{q}$ هم هم ان معادلات- ِ-حرکت را برمیئاورَد، با هم ان شرایط- ِ-اولیه (تا مرتبه یِ یک نسبت به h)، هر چند مشتق ِ دوم ِ $\tilde{q}$ در t_0 با مشتق ِ دوم ِ q در t_0 فرق دارد: از معادله-یِ-حرکت و شرایط- ِ-اولیه، مشتق ِ دوم ِ q را فقط تا حد ِ یک ترکیب- ِ-خطی یِ جمعی از $\mathcal{G}$ میشود به دست آورد.

نتیجه این که ثابت-ماندن ِ I طی ِ حرکت بدیهی ست، چون I صفر است. اما معادلات- ِ-حرکت خطی-وابسته میشوند، چنان که از معادلات- ِ-حرکت شتاب را فقط تا حد ِ یک ترکیب- ِ-خطی یِ جمعی از مولدها میشود به دست آورد. این نتیجه قضیه یِ دوم ِ نُتِر است:

قضیه یِ دوم ِ نُتِر: هر تقارن ِ نُتِری یِ مُضعی به یک اتحاد ِ خطی بین ِ معادلات- ِ-حرکت مینجامد. همچنین، ثابت- ِ-حرکت ِ متناظر با هر تقارن ِ نُتِری یِ مُضعی بدیهی (صفر) است.

به تبدیل (تقارن ِ نُتِری) ِ مُضعی تبدیل (تقارن ِ نُتِری) ِ پیمانِئی هم میگویند.

58 عکس ِ قضیه ی ِ اول ِ نُتِر

قضیه ی ِ اول ِ نُتِر میگوید هر تقارن ِ نُتِری ی ِ سراسری به یک ثابت- ِ-حرکت مینجامد. برا ی ِ ساختن ِ این ثابت- ِ-حرکت هم دستور ِ ساده ای هست. در واقع اثبات ِ قضیه بر اساس ِ ساختن ِ ثابت- ِ-حرکت است. میخاهم نشان بدهم عکس ِ قضیه ی ِ اول ِ نُتِر هم درست است. یعنی اگر I تابع ی از دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت باشد که طی ِ حرکت ثابت میمانَد، یک تقارن ِ نُتِری ی ِ سراسری هست که ثابت- ِ-حرکت ِ متناظر با آن است.

مشتق ِ کامل ِ I (که تابع ِ دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت است) نسبت به زمان چنین میشود.

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i. \tag{1447}$$

مشتق ِ دوم ِ لَگرانژی نسبت به سرعت ماتریس ِ $\mathfrak{M}$ است:

$$\mathfrak{M}_{i\,j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\,\partial \dot{q}^i}. \tag{626}$$

از تعریف ِ تکانه دیده میشود

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \mathfrak{M}_{i\,j}. \tag{1448}$$

پس این که مشتق ِ تکانه نسبت به سرعت وارون-پذیر باشد، یعنی این که $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر است. گیرم چنین است. در این صورت یک $\mathcal{G}$ (تابع ِ دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت) هست که

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{q}} = \mathfrak{M}\,\mathcal{G}. \tag{1449}$$

مفصلتر،

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i} = \mathfrak{M}_{i\,j}\,\mathcal{G}^j. \tag{1450}$$

پس (1447) چنین میشود.

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \mathfrak{M}_{i\,j}\,\mathcal{G}^j\,\ddot{q}^i. \tag{1451}$$

یا، چون $\mathfrak{M}$ متقارن است،

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + (\mathfrak{M}_{j\,i}\,\ddot{q}^i)\,\mathcal{G}^j. \tag{1452}$$

همچنین،

$$\dot{p}_j = \frac{\partial p_j}{\partial t} + \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \mathfrak{M}_{j\,i}\,\ddot{q}^i. \tag{1453}$$

پس (1452) چنین میشود

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \left(\dot{p}_j - \frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\,\dot{q}^i\right)\,\mathcal{G}^j. \tag{1454}$$

یا

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial q^\alpha}\,\dot{q}^\alpha + \left(\dot{p}_j - \frac{\partial p_j}{\partial q^\alpha}\,\dot{q}^\alpha\right)\,\mathcal{G}^j. \tag{1455}$$

رابطه یِ (1455) را میشود چنین نوشت.

$$\dot{I} = \mathfrak{I}_\alpha\,\dot{q}^\alpha + \dot{p}_i\,\mathcal{G}^i. \tag{1456}$$

که

$$\mathfrak{I}_\alpha = \frac{\partial I}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial q^\alpha}\,\mathcal{G}^i. \tag{1457}$$

$\underset{\sim}{\mathfrak{I}}$ و $\mathcal{G}$ هم تابع ِ زمان و مکان و سرعت َند، و دیده میشود $\underset{\sim}{\mathfrak{I}}$ مشتق ِ پارِئی یِ I نسبت به $\underset{\sim}{q}$ در p یِ ثابت، و $\mathcal{G}$ مشتق ِ پارِئی یِ I نسبت به p در $\underset{\sim}{q}$ یِ ثابت است:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{I}} = \left(\frac{\partial I}{\partial \underset{\sim}{q}}\right)_p. \tag{1458}$$

$$\mathcal{G} = \left(\frac{\partial I}{\partial p}\right)_{\underset{\sim}{q}}. \tag{1459}$$

این یعنی (مُضعَن) یک $\mathcal{I}$ هست که تابع ِ زمان و مکان و تکانه است، چنان که

$$\mathcal{I}(\underset{\sim}{q}, p) = I(\underset{\sim}{q}, \dot{q}). \tag{1460}$$

و

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \underset{\sim}{q}}. \tag{1461}$$

$$\mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial p}. \tag{1462}$$

رابطه یِ (1456) را میشود چنین نوشت.

$$\dot{I} = \mathfrak{J}_\alpha \, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^i} \, \mathcal{G}^i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{p}_i \right) \, \mathcal{G}^i. \tag{1463}$$

جمله یِ آخر بر-لاک صفر است. پس شرط ِ لازم و کافی برا یِ آن که I یک ثابت ِ حرکت باشد این است که

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{J}_\alpha \, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^i} \, \mathcal{G}^i. \tag{1464}$$

همه یِ کمیتها یی که در طرف ِ راست ظاهر شده اند تابع ِ دست- ِ-بالا زمان، مکان، و سرعت َند. پس طرف ِ راست، اگر بر-لاک صفر باشد بیرون- ِ-لاک هم صفر است. به این ترتیب، شرط ِ لازم و کافی برا یِ آن که I یک ثابت ِ حرکت باشد میشود

$$0 = \mathfrak{J}_\alpha \, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^i} \, \mathcal{G}^i. \tag{1465}$$

گیرم I یک ثابت ِ حرکت است. خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathfrak{A}^i(h)](q) = q^i + \mathcal{G}^i \, h + o(h). \tag{1466}$$

که h ثابت (مستقل از زمان) است. در واقع این تعریف ِ بخش ِ خطی-نسبت-به-پارامتر ِ تبدیل-یافته یِ مسیر است:

$$(\delta \, q^i)_{=\mathbf{1}} = \mathcal{G}^i \, h. \tag{1467}$$

با این، بخش ِ خطی-نسبت-به-پارامتر ِ تبدیل-یافته یِ لَگرانژی چنین میشود.

$$(\delta \, L)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \, \mathcal{G}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \, \dot{\mathcal{G}}^i \right) \, h. \tag{1468}$$

یا،

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i\right)\, h. \tag{1469}$$

این هم، با استفاده از (1465) میشود

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = (-\mathfrak{I}_\alpha\, \dot{q}^\alpha + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i)\, h. \tag{1470}$$

که با استفاده از (1456) میشود

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = (-\dot{I} + \dot{p}_i\, \mathcal{G}^i + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i)\, h. \tag{1471}$$

یا

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda\, h)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1472}$$

که

$$\lambda = -I + p_i\, \mathcal{G}^i. \tag{1473}$$

و این را هم میشود، با استفاده از (1459)، چنین نوشت.

$$\lambda = -I + \frac{\partial\, I}{\partial\, p_i}\, p_i. \tag{1474}$$

همچنین، از (1473) رُشن است که

$$I = p_i\, \mathcal{G}^i - \lambda. \tag{1475}$$

رابطه یِ (1472) نشان میدهد خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}$، که با (1466) یا (1467) تعریف میشود، یک تقارن ِ نُتِری ست. رابطه یِ (1475) هم نشان میدهد ثابت- ِ-حرکت ِ I هم ان ثابت- ِ-حرکت ِ متناظر با تقارن- ِ-نُتِری یِ $\mathfrak{A}$ است، که مولد َ ش $\mathcal{G}$ است.

آن چه تا اینجا به دست آمد بر این اساس بود که $\mathfrak{M}$ ورارون-پذیر است. میخاهم ساختار ِ بالا را به حالت ِ کلی گسترش دهم، که $\mathfrak{M}$ لزومَن وارون-پذیر نیست. گیرم I یک ثابت ِ حرکت است. از (1447) نتیجه میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i. \tag{1476}$$

معادله یِ حرکت این است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{F}_i - \mathfrak{M}_{i\,j}\,\ddot{q}^j. \tag{1477}$$

این که I یک ثابت ِ حرکت است، یعنی اگر $[t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)]$ معادله یِ (1477) در زمان ِ t را براورَد، آنگاه $[t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)]$ معادله یِ (1476) در زمان ِ t را هم برمیئاورَد.

گیرم $\mathfrak{w}$ در هسته یِ $\mathfrak{M}$ در زمان ِ t است:

$$0 = \mathfrak{M}_{i\,j}\,\mathfrak{w}^j. \tag{1478}$$

$\mathfrak{F}$ و $\mathfrak{M}$ تابع ِ دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت َند. پس اگر $[t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)]$ معادله یِ (1477) در زمان ِ t را براورَد، آنگاه $[t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t) + \mathfrak{w}]$ هم معادله یِ (1477) در زمان ِ t را برمیئاورَد. یعنی در زمان ِ t

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{F}_i - \mathfrak{M}_{i\,j}\,(\ddot{q}^j + \mathfrak{w}^j). \tag{1479}$$

پس در زمان ِ t،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i}\,(\ddot{q}^i + \mathfrak{w}^i). \tag{1480}$$

که همراه با (1476) نتیجه میدهد در زمان ِ t،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i}\,\mathfrak{w}^i. \tag{1481}$$

$\mathfrak{w}$ به دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت بستگی دارد. پس طرف ِ راست ِ (1481) به دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت بستگی دارد. که یعنی طرف ِ راست ِ (1481)، اگر بر-لاک صفر باشد بیرون- ِ-لاک هم صفر است. به این ترتیب در زمان ِ t،

$$0 = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i}\, \mathfrak{w}^i. \tag{1482}$$

این رابطه برا یِ هر زمان درست است. پس میشود قید ِ زمان را حذف کرد. نتیجه این است که هر بردار که در هسته یِ $\mathfrak{M}$ به ازا یِ $[t, q(t), \dot{q}(t)]$ باشد، در هسته یِ مشتق ِ I نسبت به $\dot{q}$ به ازا یِ $[t, q(t), \dot{q}(t)]$ هم هست:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{w} \in \ker(\mathfrak{M}). \quad \Rightarrow \\ &\mathfrak{w} \in \ker\left(\frac{\partial I}{\partial \dot{q}}\right). \end{aligned} \tag{1483}$$

این هم یعنی مشتق ِ I نسبت به $\dot{q}$ یک ترکیب ِ خطی از سطرها یِ $\mathfrak{M}$ است. یعنی یک $\mathcal{G}$ هست که

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i} = \mathcal{G}^j\, \mathfrak{M}_{j\,i}. \tag{1484}$$

چون $\mathfrak{M}$ متقارن است، رابطه یِ (1484) هم ان رابطه یِ (1450) است.

بقیه یِ بحث، از رابطه یِ (1451) تا رابطه یِ (1475) تغییر ی نمیکند، جز این که $\mathfrak{J}$ و $\mathcal{G}$ لزومَن مشتقها یِ پارِئی یِ I نسبت به q و p نیستند. یعنی ممکن است (1458) و (1459)، یا همئرز با آنها (1461) و (1462)، و (1474) درست نباشند. همچنین، اگر $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر نباشد $\mathcal{G}$ در رابطه یِ (1484) یکتا نیست، که یعنی خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}$ یکتا نیست.

نتیجه این که اگر I یک ثابت ِ حرکت باشد، ثابت- ِ-حرکت ِ متناظر با تقارن ِ نُتِری یِ سراسری یی که مولد َ ش $\mathcal{G}$ است، هم ان I است. این نتیجه عکس ِ قضیه یِ اول ِ نُتِر است:

عکس ِ قضیه یِ اول ِ نُتِر: هر ثابت ِ حرکت به یک تقارن ِ نُتِری یِ سراسری مینجامد.

اثر ِ $\mathfrak{A}$ بر تکانه را بررسی میکنم. دیده میشود

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \frac{\partial\, p_i}{\partial\, \dot{q}^j}\, \dot{\mathcal{G}}^j\right) h. \tag{1485}$$

یا،

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \mathfrak{M}_{i\,j}\, \dot{\mathcal{G}}^j\right)\, h. \tag{1486}$$

و چون $\mathfrak{M}$ متقارن است،

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \mathfrak{M}_{j\,i}\, \dot{\mathcal{G}}^j\right)\, h. \tag{1487}$$

$\mathcal{G}$ تابع ِ دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت است. پس،

$$\dot{\mathcal{G}}^j = \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^k}\, \ddot{q}^k. \tag{1488}$$

اگر $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر باشد،

$$\mathcal{G}^j = \frac{\partial\, \mathcal{I}}{\partial\, p_j}. \tag{1489}$$

و (1488) را میشود چنین نوشت.

$$\dot{\mathcal{G}}^j = \frac{\partial^2\, \mathcal{I}}{\partial\, q^\alpha\, \partial\, p_j}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial^2\, \mathcal{I}}{\partial\, p_k\, \partial\, p_j}\, \dot{p}_k. \tag{1490}$$

به این ترتیب،

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left[\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \frac{\partial\, p_j}{\partial\, \dot{q}^i}\, \left(\frac{\partial^2\, \mathcal{I}}{\partial\, q^\alpha\, \partial\, p_j}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial^2\, \mathcal{I}}{\partial\, p_k\, \partial\, p_j}\, \dot{p}_k\right)\right]\, h. \tag{1491}$$

یا،

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left[\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \frac{\partial\, p_j}{\partial\, \dot{q}^i}\, \left(\frac{\partial^2\, \mathcal{I}}{\partial\, p_j\, \partial\, q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial^2\, \mathcal{I}}{\partial\, p_j\, \partial\, p_k}\, \dot{p}_k\right)\right]\, h. \tag{1492}$$

که میشود

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \frac{\partial\, \mathfrak{I}_\alpha}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial\, \mathcal{G}^k}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{p}_k\right)\, h. \tag{1493}$$

یا،

$$(\delta\, p_i)_{\mathbf{=1}} = \left[\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \frac{\partial\, \mathfrak{I}_\alpha}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial\, L}{\partial\, q^k}\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^k}{\partial\, \dot{q}^i} - (\mathscr{d}_k\, L)\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^k}{\partial\, \dot{q}^i}\right]\, h. \tag{1494}$$

این هم، با استفاده از تعریف ِ تکانه، میشود

$$(\delta\, p_i)_{\mathbf{=1}} = \left[\frac{\partial^2\, L}{\partial\, q^j\, \partial\, \dot{q}^i}\, \mathcal{G}^j + \frac{\partial\, \mathfrak{I}_\alpha}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial\, L}{\partial\, q^k}\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^k}{\partial\, \dot{q}^i} - (\mathscr{d}_k\, L)\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^k}{\partial\, \dot{q}^i}\right]\, h. \tag{1495}$$

یا،

$$(\delta\, p_i)_{\mathbf{=1}} = \left[\frac{\partial\, \mathfrak{I}_\alpha}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial}{\partial\, \dot{q}^i}\, \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j\right) - (\mathscr{d}_j\, L)\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i}\right]\, h. \tag{1496}$$

که میشود

$$(\delta\, p_i)_{\mathbf{=1}} = \left[\frac{\partial}{\partial\, \dot{q}^i}\, \left(\mathfrak{I}_\alpha\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial\, L}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j\right) - \mathfrak{I}_\alpha\, \frac{\partial\, \dot{q}^\alpha}{\partial\, \dot{q}^i} - (\mathscr{d}_j\, L)\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i}\right]\, h. \tag{1497}$$

از (1465) دیده میشود پرانتز ِ اول در کروشه یِ طرف ِ راست صفر است. همچنین،

$$\frac{\partial\, \dot{q}^\alpha}{\partial\, \dot{q}^i} = \delta_i^\alpha. \tag{1498}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathfrak{I}_\alpha\, \frac{\partial\, \dot{q}^\alpha}{\partial\, \dot{q}^i} = \mathfrak{I}_i. \tag{1499}$$

پس،

$$(\delta\, p_i)_{\mathbf{=1}} = -\mathfrak{I}_i\, h - (\mathscr{d}_j\, L)\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i}\, h. \tag{1500}$$

از جمله،

$$(\delta\, p_i)_{\mathbf{=1}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\, \mathfrak{I}_i\, h. \tag{1501}$$

در حالت ِ کلی که $\mathfrak{M}$ لزومَن وارون-پذیر نیست، (1487) و (1488) همچنان درست َند. از اینها نتیجه میشود

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left[\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \mathfrak{M}_{j\,i}\, \left(\frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha + \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^k}\, \ddot{q}^k\right)\right]\, h. \tag{1502}$$

از رابطه یِ (1484) دیده میشود

$$\frac{\partial^2\, I}{\partial\, \dot{q}^k\, \partial\, \dot{q}^i} = \frac{\partial\, \mathfrak{M}_{j\,i}}{\partial\, \dot{q}^k}\, \mathcal{G}^j + \mathfrak{M}_{j\,i}\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^k}. \tag{1503}$$

$\mathfrak{M}$ مشتق ِ دوم ِ لَگرانژی نسبت به سرعت است. پس،

$$\frac{\partial\, \mathfrak{M}_{j\,i}}{\partial\, \dot{q}^k} = \frac{\partial^3\, L}{\partial\, \dot{q}^k\, \dot{q}^j\, \dot{q}^i}. \tag{1504}$$

این نشان میدهد جمله یِ اول در طرف ِ راست ِ (1503)، نسبت به i و k متقارن است. رُشن است که طرف ِ چپ ِ (1503) هم نسبت به i و k متقارن است. پس جمله یِ دوم در طرف ِ راست ِ (1503) هم نسبت به i و k متقارن است:

$$\mathfrak{M}_{j\,i}\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^k} = \mathfrak{M}_{j\,k}\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i}. \tag{1505}$$

به این ترتیب (1502) چنین میشود.

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \mathfrak{M}_{j\,i}\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha + \mathfrak{M}_{j\,k}\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i}\, \ddot{q}^k\right)\, h. \tag{1506}$$

از رابطه یِ (1448) نتیجه میشود

$$\mathfrak{M}_{j\,k}\, \ddot{q}^k = \dot{p}_j - \frac{\partial\, p_j}{\partial\, q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha. \tag{1507}$$

با استفاده از (1448) و (1507)، رابطه یِ (1506) میشود

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left[\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \frac{\partial\, p_j}{\partial\, \dot{q}^i}\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha + \left(\dot{p}_j - \frac{\partial\, p_j}{\partial\, q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha\right)\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i}\right]\, h. \tag{1508}$$

یا،

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left\{ \frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \left[\frac{\partial}{\partial\, q^\alpha}\, \left(\frac{\partial\, p_j}{\partial\, \dot{q}^i}\, \mathcal{G}^j \right) - \frac{\partial}{\partial\, \dot{q}^i}\, \left(\frac{\partial\, p_j}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^j \right) \right] \dot{q}^\alpha \right.$$
$$\left. + \dot{p}_j\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i} \right\} h. \tag{1509}$$

و با استفاده از (1450)،

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left\{ \frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \left[\frac{\partial}{\partial\, q^\alpha}\, \left(\frac{\partial\, I}{\partial\, \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial}{\partial\, \dot{q}^i}\, \left(\frac{\partial\, p_j}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^j \right) \right] \dot{q}^\alpha \right.$$
$$\left. + \dot{p}_j\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i} \right\} h. \tag{1510}$$

یا،

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left\{ \frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \left[\frac{\partial}{\partial\, \dot{q}^i}\, \left(\frac{\partial\, I}{\partial\, q^\alpha} - \frac{\partial\, p_j}{\partial\, q^\alpha}\, \mathcal{G}^\alpha \right) \right] \dot{q}^\alpha + \dot{p}_j\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i} \right\} h. \tag{1511}$$

که با استفاده از (1457) میشود

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, p_i}{\partial\, q^j}\, \mathcal{G}^j + \frac{\partial\, \mathfrak{I}_\alpha}{\partial\, \dot{q}^i}\, \dot{q}^\alpha + \dot{p}_j\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i} \right) h. \tag{1512}$$

این هم ان رابطه یِ (1493) است. بقیه یِ بحث هم ان است که برا یِ حالت ی به کار رفت که $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر است. نتیجه یِ نهایی هم ان روابط ِ (1500) و (1501) است. البته اگر $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر نباشد $\mathcal{G}$ یکتا نیست، و در نتیجه $\mathfrak{I}$ در رابطه یِ (1457) یکتا نیست. این هم یعنی تبدیل-پافته یِ p یکتا نیست، شبیه ِ چیز ی که برا یِ q به دست آمد. اگر $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر نباشد خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{A}$ یکتا نیست.

روابط ِ (1500) و (1501) شبیه ِ (1467) اند. و البته اگر $\mathfrak{M}$ وارون-پذیر باشد، (1467) و (1500) و (1501) چنین میشوند.

$$(\delta\, q^i)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, I}{\partial\, p_i} \right)_{\underset{\sim}{q}} h. \tag{1513}$$

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} = -\left(\frac{\partial\, I}{\partial\, q^i} \right)_p h - (\mathscr{a}\partial_j\, L)\, \frac{\partial\, \mathcal{G}^j}{\partial\, \dot{q}^i}\, h. \tag{1514}$$

$$(\delta\, p_i)_{=\mathbf{1}} \overset{\text{ns}}{=} -\left(\frac{\partial\, I}{\partial\, q^i} \right)_p h. \tag{1515}$$

59 عکس ِ قضیه ی ِ دوم ِ نُتِر

قضیه ی ِ دوم ِ نُتِر میگوید هر تقارن ِ نُتِری ی ِ مُضعی به یک اتحاد ِ خطی بین ِ معادلات- ِ-حرکت مینجامد. میخاهم نشان بدهم عکس ِ قضیه ی ِ دوم ِ نُتِر هم درست است. یعنی اگر یک $\mathcal{G}$ باشد که تابع ی از دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت است و ترکیب ِ خطی ی ِ معادلات- ِ-حرکت با ضریب ِ $\mathcal{G}$ صفر است، آنگاه خانواده-ی ِ-تبدیل ی که مولد َ ش $\mathcal{G}$ است یک تقارن ِ نُتِری ی ِ مُضعی ست.

گیرم $\mathcal{G}$ تابع ی از دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت است و ترکیب ِ خطی ی ِ معادلات- ِ-حرکت با ضریب ِ $\mathcal{G}$ صفر است. بخش ِ خطی-نسبت-به-پارامتر ِ تبدیل-یافته ی ِ مسیر را مثل ِ (1467) تعریف میکنم:

$$(\delta\, q^i)_{=\mathbf{1}} = \mathcal{G}^i\, h. \tag{1467}$$

و پارامتر- ِ-تبدیل ِ h تابع ِ زمان است. تغییر ِ لَگرانژی به خاطر ِ تبدیل ِ (1467) این را برمیئاورَد.

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i\, h + p_i\, \frac{\mathrm{d}\,(\mathcal{G}^i\, h)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1298}$$

و چون h تابع ِ زمان است،

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i\, h + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i\right)\, h + p_i\, \mathcal{G}^i\, \dot{h}. \tag{1516}$$

ترکیب ِ خطی ی ِ معادلات- ِ-حرکت با ضریب ِ $\mathcal{G}$ صفر است، یعنی

$$0 = (\epsilon\partial_i\, L)\, \mathcal{G}^i. \tag{1431}$$

یا

$$\frac{\partial\, L}{\partial\, q^i}\, \mathcal{G}^i = \dot{p}_i\, \mathcal{G}^i. \tag{1517}$$

به این ترتیب (1516) میشود

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = (\dot{p}_i\, \mathcal{G}^i\, h + p_i\, \dot{\mathcal{G}}^i)\, h + p_i\, \mathcal{G}^i\, \dot{h}. \tag{1518}$$

یا،

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(p_i\, \mathcal{G}^i\, h)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1519}$$

پس،

$$(\delta\, L)_{=\mathbf{1}} = \frac{\mathrm{d}\,(\lambda\, h)}{\mathrm{d}\, t}. \tag{1307}$$

که،

$$\lambda = p_i\, \mathcal{G}^i. \tag{1520}$$

پس بخش ِ خطی-نسبت-به-پارامتر ِ تغییر ِ لَگرانژی به خاطر ِ تبدیل ِ (1467) مشتق ِ کامل ِ یک تابع نسبت به زمان است.

نتیجه این که اگر $\mathcal{G}$ تابع ی از دست- ِ-بالا زمان و مکان و سرعت باشد که ترکیب ِ خطی ی ِ معادلات- ِ-حرکت با ضریب ِ $\mathcal{G}$ صفر است، بخش ِ خطی-نسبت-به-پارامتر ِ تغییر ِ لَگرانژی به خاطر ِ تبدیل- ِ- مسیر ی که مولد َ ش $\mathcal{G}$ است و پارامتر َ ش تابع ِ زمان است مشتق ِ کامل ِ یک تابع نسبت به زمان است، یعنی تبدیل- ِ- مسیر ی که مولد َ ش $\mathcal{G}$ است و پارامتر َ ش تابع ِ زمان است، یک تقارن ِ نُتِری ی ِ مُضعی ست. این نتیجه عکس ِ قضیه ی ِ دوم ِ نُتِر است:

عکس ِ قضیه ی ِ دوم ِ نُتِر: هر اتحاد ِ خطی بین ِ معادلات- ِ-حرکت به یک تقارن ِ نُتِری ی ِ مُضعی مینجامد.

7

فرمول- بندی یِ هَمیلتِن

60 تبدیل ِ لُژاندر

$\mathfrak{L}$ یک تابعی ست که دامنه اَ ش فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است. مشتق ِ $\mathfrak{L}$ را با $\mathfrak{p}$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{p} = \mathbf{D}\,\mathfrak{L}. \tag{1521}$$

مفصلتر،

$$\mathfrak{p}_i = \mathbf{D}_i\,\mathfrak{L}. \tag{1522}$$

دیده میشود $\mathfrak{p}$ در $\mathbb{V}^*$ (دُگان ِ $\mathbb{V}$) است. تابعی یِ $\mathcal{N}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{N}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}) - [\mathfrak{p}_i(\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}^i. \tag{1523}$$

یک نتیجه یِ رابطه یِ بالا این است.

$$\mathbf{d}\,\mathcal{N} = \mathbf{d}\,\mathfrak{L} - \mathfrak{p}_i\,\mathbf{d}\,\mathfrak{v}^i - (\mathbf{d}\,\mathfrak{p}_i)\,\mathfrak{v}^i. \tag{1524}$$

یا،

$$\mathbf{d}\,\mathcal{N} = (\mathbf{D}_i\,\mathfrak{L})\,\mathbf{d}\,\mathfrak{v}^i - \mathfrak{p}_i\,\mathbf{d}\,\mathfrak{v}^i - (\mathbf{d}\,\mathfrak{p}_i)\,\mathfrak{v}^i. \tag{1525}$$

که با استفاده از (1522) میشود

$$\mathbf{d}\,\mathcal{N} = -(\mathbf{d}\,\mathfrak{p}_i)\,\mathfrak{v}^i. \tag{1526}$$

اگر بستگی یِ $\mathfrak{p}$ به $\mathfrak{v}$ (مُضعَن) وارون-پذیر باشد، میشود بستگی به $\mathfrak{v}$ را (مُضعَن) بر حسب ِ بستگی به $\mathfrak{p}$ نوشت. $\mathfrak{N}$ را یک تابعی تعریف میکنم که دامنه اَ ش $\mathbb{V}^*$ است، و مقدار َ ش (به ازا یِ متغیرها یِ متناظر) با مقدار ِ $\mathcal{N}$ برابر است:

$$\mathfrak{N}[\mathfrak{p}(\mathfrak{v})] = \mathcal{N}(\mathfrak{v}). \tag{1527}$$

از (1526) معلوم میشود اگر بستگی یِ $\mathfrak{p}$ به $\mathfrak{v}$ وارون-پذیر نباشد هم، $\mathcal{N}$ (مُضعَن) تابع ِ $\mathfrak{p}$ است. پس تعریف ِ (1527) برا یِ $\mathfrak{N}$ همچنان کار میکند. البته در این حالت دامنه یِ $\mathfrak{N}$ همه یِ $\mathbb{V}^*$ نیست بل که $\mathsf{img}(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})$ است.

بر حسب ِ $\mathfrak{N}$، رابطه یِ (1523) چنین میشود.

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}) - \mathfrak{p}_i\,\mathfrak{v}^i. \tag{1528}$$

رابطه یِ (1526) نشان میدهد متغیر ِ *طبیعی* یِ $\mathcal{N}$ هم $\mathfrak{p}$ است. از این پس $\mathcal{N}$ را هم با هم ان $\mathfrak{N}$ نشان میدهم.

به $\mathfrak{N}$ لُژاندر-مبدَل ِ $\mathfrak{L}$ میگویم. دقیقتر، تبدیل ِ لُژاندر برا یِ تابعیها یِ با دامنه یِ $\mathbb{V}$ را با $\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})] = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}) - [(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}. \tag{1529}$$

مفصلتر،

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})] = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}) - [(\mathbf{D}_i\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}^i. \tag{1530}$$

وقت ی $\mathbb{V}$ معلوم است، $\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}$ را سادِتر با Le نشان میدهم:

$$(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})] = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}) - [(\mathbf{D}_i\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}^i. \tag{1531}$$

یا،

$$(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}) - \mathfrak{p}_i\,\mathfrak{v}^i. \tag{1532}$$

که $\mathfrak{p}$ از (1521) به دست میئاید.

گیرم مشتق ِ $\mathfrak{p}$ نسبت به $\mathfrak{v}$ وارون-پذیر است. در این صورت از (1526) نتیجه میشود

$$[\mathbf{D}^i\,(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})](\mathfrak{p}) = -\mathfrak{v}^i. \tag{1533}$$

یا،

$$[\mathbf{D}^i\,(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})][(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})] = -\mathfrak{v}^i. \tag{1534}$$

بسته،

$$[\mathbf{D}\,(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})](\mathfrak{p}) = -\mathfrak{v}. \tag{1535}$$

یا،

$$[\mathbf{D}\,(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})][(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})] = -\mathfrak{v}. \tag{1536}$$

و اگر $(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})$ با $\mathfrak{N}$ نشان داده شود،

$$(\mathbf{D}^i\,\mathfrak{N})(\mathfrak{p}) = -\mathfrak{v}^i. \tag{1537}$$

یا،

$$(\mathbf{D}^i\,\mathfrak{N})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})] = -\mathfrak{v}^i. \tag{1538}$$

بسته،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{N})(\mathfrak{p}) = -\mathfrak{v}. \tag{1539}$$

یا،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{N})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v})] = -\mathfrak{v}. \tag{1540}$$

رابطه یِ (1521) یعنی

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v}) = \mathfrak{p}. \tag{1541}$$

این رابطه بستگی یِ $\mathfrak{p}$ به $\mathfrak{v}$ را میدهد. رابطه یِ (1539) وارون ِ رابطه یِ (1541) است، و بستگی یِ $\mathfrak{v}$ به $\mathfrak{p}$ را میدهد.

رابطه یِ (1530) را برا یِ $\mathfrak{N}$، که هم ان $(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L})$ است، به جا یِ $\mathfrak{L}$ مینویسم:

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,\mathfrak{N})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{N})(\mathfrak{p})] = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) - [(\mathbf{D}^i\,\mathfrak{N})(\mathfrak{p})]\,\mathfrak{p}_i. \tag{1542}$$

که با استفاده از (1537) میشود

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,\mathfrak{N})(-\mathfrak{v}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) + \mathfrak{v}^i\,\mathfrak{p}_i. \tag{1543}$$

این هم، با استفاده از (1528) میشود

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,\mathfrak{N})(-\mathfrak{v}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}). \tag{1544}$$

اما

$$\mathfrak{N} = \mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L}. \tag{1545}$$

پس،

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L})(-\mathfrak{v}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}). \tag{1546}$$

یا،

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v}) = \mathfrak{L}(-\mathfrak{v}). \tag{1547}$$

رابطه یِ (1546) را میشود چنین هم نوشت.

$$[(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}})^{-1}\,\mathfrak{N}](\mathfrak{v}) = (\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,\mathfrak{N})(-\mathfrak{v}). \tag{1548}$$

همچنین، $\tilde{\mathfrak{L}}$ و $\tilde{\mathfrak{N}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{L}(-\mathfrak{v}). \tag{1549}$$

$$\tilde{\mathfrak{N}} = \mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\tilde{\mathfrak{L}}. \tag{1550}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{D}\,\tilde{\mathfrak{L}})(\mathfrak{v}) = -(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(-\mathfrak{v}). \tag{1551}$$

و،

$$\tilde{\mathfrak{N}}[(\mathbf{D}\,\tilde{\mathfrak{L}})(\mathfrak{v})] = \tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{v}) - [(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})\tilde{}(\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}. \tag{1552}$$

که میشود

$$\tilde{\mathfrak{N}}[-(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(-\mathfrak{v})] = \mathfrak{L}(-\mathfrak{v}) - [(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(-\mathfrak{v})]\,(-\mathfrak{v}). \tag{1553}$$

یعنی

$$\tilde{\mathfrak{N}}[-(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(-\mathfrak{v})] = \mathfrak{N}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(-\mathfrak{v})]. \tag{1554}$$

یا،

$$\tilde{\mathfrak{N}}(\tilde{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{N}(-\tilde{\mathfrak{p}}). \tag{1555}$$

تبدیل ِ وارونی-یِ-فضا با دامنه یِ $\mathbb{V}$ را با $\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{v} = -\mathfrak{v}. \tag{1556}$$

رُشن است که

$$(\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^2 = \mathbf{1}_{\mathbb{V}}. \tag{1557}$$

یا،

$$(\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^{-1} = \mathsf{Pa}_{\mathbb{V}}. \tag{1558}$$

وقت ی $\mathbb{V}$ معلوم است، $\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}}$ را سادِتر با Pa نشان میدهم:

$$\mathsf{Pa}\,\mathfrak{v} = -\mathfrak{v}. \tag{1559}$$

$$\mathsf{Pa}^2 = \mathbf{1}. \tag{1560}$$

$$\mathsf{Pa}^{-1} = \mathsf{Pa}. \tag{1561}$$

از (1558) ضمنَن نتیجه میشود

$$[(\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^*]^{-1} = (\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^*. \tag{1562}$$

که $\mathfrak{X}^*$ پسار ِ $\mathfrak{X}$ است. شکل ِ ساده یِ (1562) هم میشود

$$(\mathsf{Pa}^*)^{-1} = \mathsf{Pa}^*. \tag{1563}$$

که همئرز است با

$$(\mathsf{Pa}^*)^2 = \mathbf{1}. \tag{1564}$$

با استفاده از Pa، رابطه یِ (1547) را میشود چنین نوشت.

$$\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\circ\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}}. \tag{1565}$$

یا،

$$\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,\mathsf{Le}_{\mathbb{V}} = (\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^*. \tag{1566}$$

پس،

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}})^{-1} = [(\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^*]^{-1}\,\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}. \tag{1567}$$

یا،

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}})^{-1} = (\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^*\,\mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}. \tag{1568}$$

سادِتر،

$$\mathsf{Le}^2 = \mathsf{Pa}^*. \tag{1569}$$

$$\mathsf{Le}^{-1} = (\mathsf{Pa}^*)^{-1}\,\mathsf{Le}. \tag{1570}$$

$$\mathsf{Le}^{-1} = \mathsf{Pa}^*\,\mathsf{Le}. \tag{1571}$$

روابط ِ (1549) و (1550) و (1555) هم چنین میشوند.

$$\tilde{\mathfrak{L}} = (\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^*\,\mathfrak{L}. \tag{1572}$$

$$\tilde{\mathfrak{N}} = \mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\tilde{\mathfrak{L}}. \tag{1573}$$

$$\tilde{\mathfrak{N}} = (\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}^*})^*\,\mathfrak{N}. \tag{1574}$$

به این ترتیب،

$$(\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}^*})^*\,\mathsf{Le}_{\mathbb{V}} = \mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,(\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}})^*. \tag{1575}$$

سادِتر،

$$\mathsf{Le}\,\mathsf{Pa}^* = \mathsf{Pa}^*\,\mathsf{Le}. \tag{1576}$$

با استفاده از اینها، وارون ِ تبدیل- ِ-لُژاندر را چنین هم میشود نوشت.

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}})^{-1} = \mathsf{Le}_{\mathbb{V}^*}\,(\mathsf{Pa}_{\mathbb{V}^*})^*. \tag{1577}$$

سادِتر ِ

$$\mathsf{Le}^{-1} = \mathsf{Le}\,\mathsf{Pa}^*. \tag{1578}$$

رُشن است که تعریف ِ تبدیل- ِ-لُژاندر را میشود به حالت ی گسترش داد که دامنه یِ تابع $\mathbb{M}\times\mathbb{V}$ است، که $\mathbb{M}$ یک خمینه است و $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی ست. در این حالت متناظر با تابعی یِ $\mathfrak{L}$ با دامنه یِ $\mathbb{M}\times\mathbb{V}$تابع ِ $\mathfrak{p}$ با دامنه یِ $\mathbb{M}\times\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{V}^*$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{p} = \overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{L}. \tag{1579}$$

مفصلتر،

$$\mathfrak{p}_i = \overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)\,i}\,\mathfrak{L}. \tag{1580}$$

مبدَل- ِ-لُژاندر ِ $\mathfrak{L}$ را با $\mathfrak{N}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{q},\mathfrak{p}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{q},\mathfrak{v}) - \mathfrak{p}_i\,\mathfrak{v}^i. \tag{1581}$$

و با نماد ِ Le،

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{q},\mathfrak{p}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{q},\mathfrak{v}) - \mathfrak{p}_i\,\mathfrak{v}^i. \tag{1582}$$

یا،

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L})[\mathfrak{q},(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{q},\mathfrak{v})] = \mathfrak{L}(\mathfrak{q},\mathfrak{v}) - [(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)\,i}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{q},\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}^i. \tag{1583}$$

بسته،

$$(\mathsf{Le}_{\mathbb{V}}\,\mathfrak{L})[\mathfrak{q},(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{q},\mathfrak{v})] = \mathfrak{L}(\mathfrak{q},\mathfrak{v}) - [(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{q},\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}. \tag{1584}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,\mathfrak{N} = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,\alpha}\,\mathfrak{L})\,\mathbf{d}\,\mathfrak{q}^\alpha + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,i}\,\mathfrak{L})\,\mathbf{d}\,\mathfrak{v}^i - \mathfrak{p}_i\,\mathbf{d}\,\mathfrak{v}^i - \mathfrak{v}^i\,\mathbf{d}\,\mathfrak{p}_i. \tag{1585}$$

یا،

$$\mathbf{d}\,\mathfrak{N} = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,\alpha}\,\mathfrak{L})\,\mathbf{d}\,\mathfrak{q}^\alpha - \mathfrak{v}^i\,\mathbf{d}\,\mathfrak{p}_i. \tag{1586}$$

که نشان میدهد

$$\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,\alpha}\,\mathfrak{N} = \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,\alpha}\,\mathfrak{L}. \tag{1587}$$

$$\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{N} = -\mathfrak{v}. \tag{1588}$$

البته اثر ِ $\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}$ بر $\mathfrak{N}$ در $\mathfrak{p}$ یِ ثابت است، در حال ی که اثر ِ $\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}$ بر $\mathfrak{L}$ در $\mathfrak{v}$ یِ ثابت است. روابط ِ بالا را میشود چنین نوشت.

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{N}}{\partial\,\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{v}}. \tag{1589}$$

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{N}}{\partial\,\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{q}} = -\mathfrak{v}. \tag{1590}$$

و البته

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{v}}\right)_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}. \tag{1591}$$

مفصلتر،

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{N}}{\partial\,\mathfrak{q}^\alpha}\right)_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{q}^\alpha}\right)_{\mathfrak{v}}. \tag{1592}$$

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{N}}{\partial\,\mathfrak{p}_i}\right)_{\mathfrak{q}} = -\mathfrak{v}^i. \tag{1593}$$

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\mathfrak{v}^i}\right)_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_i. \tag{1594}$$

در واقع برا یِ تعریف ِ تبدیل- ِ-لُژاندر برا یِ تابعیها یی با دامنه یِ $\mathbb{M}\times\mathbb{V}$، کافی ست $\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی باشد، لازم نیست $\mathbb{M}$ خمینه باشد. به سادِگی دیده میشود در این صورت همچنان روابط ِ (1579)

و (1588)، یا همئرز با آنها (1591) و (1590)، یا (1594) و (1593)، کار میکنند. برا یِ روابط ی که شامل ِ مشتق نسبت به متغیر ِ صفرُم ($\mathfrak{q}$) اند، لازم است $\mathbb{M}$ خمینه باشد.

سرانجام، تعریف ِ تبدیل- ِ-لُژاندر را میشود به حالت ی گسترش داد که دامنه یِ تابع یک کلاف ِ برداری ست. گیرم دامنه یِ تابعی یِ $\mathfrak{L}$ کلاف ِ برداری یِ $\mathbb{E}$ است، که خمینه-یِ-پایه یِ آن $\mathbb{M}$ و تار-نُعی-یِ آن $\mathbb{V}$ است. اگر ϕ_a یک نقشه یِ $\mathbb{M}$ باشد، و U_a بدیهیگر ِ متناظر با این نقشه باشد، هر نقطه یِ $\mathfrak{x}$ در $\mathbb{E}$ به این شکل متناظر با یک نقطه یِ $(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)$ در $[\mathsf{dom}(\phi_a)] \times \mathbb{V}$ است.

$$\mathfrak{x} = U_a(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a). \tag{1595}$$

که $\mathfrak{q}$ مبنا یِ $\mathfrak{x}$ است:

$$\mathfrak{q} = \boldsymbol{\pi}(\mathfrak{x}). \tag{1596}$$

و $\boldsymbol{\pi}$ افکنش ِ $\mathbb{E}$ است. $(\mathfrak{L} \circ U_a)$ یک تابعی یِ برداری ست که دامنه اَ ش $[\mathsf{dom}(\phi_a)] \times \mathbb{V}$ است. $(\mathfrak{L} \circ U_a)$ را با $\mathfrak{L}_a$ نشان میدهم. $\mathfrak{p}_a$ را مثل ِ (1579) ، با $\mathfrak{L}_a$ به جا یِ $\mathfrak{L}$ تعریف میکنم:

$$\mathfrak{p}_a = \overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{L}_a. \tag{1597}$$

رُشن است که

$$\mathfrak{L}_b = \mathfrak{L}_a \circ U_{a\,b}, \tag{1598}$$

که $U_{a\,b}$ تابع- ِ-گذار است:

$$U_{a\,b} = U_a^{-1} \circ U_b. \tag{1599}$$

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a) = U_{a\,b}(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b). \tag{1600}$$

و چون کلاف برداری ست، بستگی یِ $\mathfrak{v}_a$ به $\mathfrak{v}_b$ خطی ست:

$$\mathfrak{v}_a = [\check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q})]\, \mathfrak{v}_b. \tag{1601}$$

که

$$\check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q}) = U_{a\,b}(\mathfrak{q}, \mathbf{.}). \tag{1602}$$

یا،

$$\check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q}) = [\check{U}_a(\mathfrak{q})]^{-1}\,[\check{U}_b(\mathfrak{q})]. \tag{1603}$$

که،

$$\check{U}_a(\mathfrak{q}) = U_a(\mathfrak{q}, \mathbf{.}). \tag{1604}$$

از جمله،

$$(\mathbf{D}\,U_{a\,b})(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ (\mathbf{D}\,\check{U}_{a\,b})(\mathfrak{q}) & \check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q}) \end{pmatrix}. \tag{1605}$$

پس،

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b})(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b) = \begin{pmatrix} 0 \\ \check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q}) \end{pmatrix}. \tag{1606}$$

تعریف ِ $\mathfrak{p}$ بر اساس ِ دُ نقشه را با هم مقایسه میکنم:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_b(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b) &= (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{L}_b)(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b), \\
&= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,(\mathfrak{L}_a \circ U_{a\,b})](\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b), \\
&= \{(\mathbf{D}\,\mathfrak{L}_a)[U_{a\,b}(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b)]\}\,[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b})(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b)], \\
&= [(\mathbf{D}\,\mathfrak{L}_a)(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)]\,\begin{pmatrix} 0 \\ \check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q}) \end{pmatrix}, \\
&= [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{L}_a)(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)]\,[\check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q})].
\end{aligned} \tag{1607}$$

یعنی

$$\mathfrak{p}_b(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_b)=[\mathfrak{p}_a(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_a)]\,[\check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q})]. \tag{1608}$$

پس،

$$[\mathfrak{p}_b(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_b)]\,[\check{U}_b(\mathfrak{q})]^{-1}=[\mathfrak{p}_a(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_a)]\,[\check{U}_a(\mathfrak{q})]^{-1}. \tag{1609}$$

از (1608) ضمنَن نتیجه میشود

$$\mathfrak{p}_b(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_b)=[\check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q})]^*\,[\mathfrak{p}_a(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_a)]. \tag{1610}$$

یا،

$$\mathfrak{p}_b(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_b)=[\check{U}^*_{b\,a}(\mathfrak{q})]\,[\mathfrak{p}_a(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_a)]. \tag{1611}$$

که،

$$\check{U}^*_{b\,a}(\mathfrak{q})=[\check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q})]^*. \tag{1612}$$

رُشن است که

$$[\check{U}_{a\,b}(\mathfrak{q})]^*=[\check{U}_b(\mathfrak{q})]^*\,\{[\check{U}_a(\mathfrak{q})]^*\}^{-1}. \tag{1613}$$

پس،

$$[\check{U}^*_{c\,a}(\mathfrak{q})]=[\check{U}^*_{c\,b}(\mathfrak{q})]\,[\check{U}^*_{b\,a}(\mathfrak{q})]. \tag{1614}$$

رابطه یِ (1611) یعنی

$$[\mathfrak{q},\mathfrak{p}_b(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_b)]=U^*_{b\,a}[\mathfrak{q},\mathfrak{p}_a(\mathfrak{q},\mathfrak{v}_a)]. \tag{1615}$$

همچنین، بر اساس ِ (1609) تابع ِ $\check{U}^*_a$ را چنین تعریف میکنم.

$$\check{U}^*_a(\mathfrak{q})=\{[\check{U}_a(\mathfrak{q})]^*\}^{-1}. \tag{1616}$$

از (1612) و (1613) دیده میشود

$$\check{U}^*_{b\,a}(\mathfrak{q}) = [\check{U}^*_b(\mathfrak{q})]^{-1}\,[\check{U}^*_a(\mathfrak{q})]. \tag{1617}$$

پس U^* را میشود بدیهیگر ِ $\mathbb{E}^*$ (کلاف ِ دُگان ِ $\mathbb{E}$) گرفت:

$$U^*_a(\mathfrak{q}, \cdot) = \check{U}^*_a(\mathfrak{q}). \tag{1618}$$

رابطه یِ (1609) هم میشود

$$[\check{U}^*_b(\mathfrak{q})]\,[\mathfrak{p}_b(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b)] = [\check{U}^*_a(\mathfrak{q})]\,[\mathfrak{p}_a(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)]. \tag{1619}$$

یا،

$$U^*_b[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_b(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b)] = U^*_a[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_a(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)]. \tag{1620}$$

رابطه یِ (1620) را میشود چنین نوشت.

$$U^*_b \circ (\boldsymbol{\pi}, \mathfrak{p}_b \circ U_b^{-1}) = U^*_a \circ (\boldsymbol{\pi}, \mathfrak{p}_a \circ U_a^{-1}). \tag{1621}$$

$U^*_a \circ (\boldsymbol{\pi}, \mathfrak{p}_a \circ U_a^{-1})$ را با $\mathfrak{z}_a$ نشان میدهم. $\mathfrak{z}_a$ یک تابع با دامنه یِ $\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]$ است، که در $\mathbb{E}^*$ مقدار میگیرد. دیده میشود

$$\mathfrak{z} \in \boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]. \quad \Rightarrow$$
$$\mathfrak{z}_a(\mathfrak{x}) = U^*_a[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_a(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)]. \tag{1622}$$

یا،

$$\mathfrak{z} \in \boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]. \quad \Rightarrow$$
$$\mathfrak{z}_a(\mathfrak{x}) = U^*_a\{\boldsymbol{\pi}(\mathfrak{x}), \mathfrak{p}_a[U_a^{-1}(\mathfrak{x})]\}. \tag{1623}$$

بسته،

$$\mathfrak{z} \in \boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]. \quad \Rightarrow$$
$$\mathfrak{z}_a = U_a^* \circ (\boldsymbol{\pi}, \mathfrak{p}_a \circ U_a^{-1}). \tag{1624}$$

از (1621) دیده میشود اگر $\mathfrak{x}$ در $\{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\} \cap \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_b)]\}$ باشد، طرف ِ راست ِ (1624) به ازا یِ a و b یکسان است:

$$\mathfrak{x} \in \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\} \cap \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_b)]\}. \quad \Rightarrow$$
$$[U_b^* \circ (\boldsymbol{\pi}, \mathfrak{p}_b \circ U_b^{-1})](\mathfrak{x}) = [U_a^* \circ (\boldsymbol{\pi}, \mathfrak{p}_a \circ U_a^{-1})](\mathfrak{x}). \tag{1625}$$

پس،

$$\mathfrak{x} \in \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\} \cap \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_b)]\}. \quad \Rightarrow$$
$$\mathfrak{z}_b(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}_a(\mathfrak{x}). \tag{1626}$$

$\mathfrak{z}_a$ و $\mathfrak{z}_b$ در اشتراک ِ دامنِها یِ شان با هم برابر َند. پس میشود یک $\mathfrak{z}$ تعریف کرد که دامنه اَ ش $\mathbb{E}$ است، در $\mathbb{E}^*$ مقدار میگیرد، و

$$\mathsf{res}\{\mathfrak{z}; \boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\} = \mathfrak{z}_a. \tag{1627}$$

از (1626) دیده میشود اگر $\mathfrak{x}$ در $\{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\} \cap \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_b)]\}$ باشد، طرف ِ راست ِ (1627) به ازا یِ a و b یکسان است. پس تعریف ِ $\mathfrak{z}$ مستقل از نقشه است، که یعنی $\mathfrak{z}$ خُش-تعریف است.

$\mathfrak{N}_a$ را مثل ِ (1581) ، با $\mathfrak{L}_a$ به جا یِ $\mathfrak{L}$ تعریف میکنم:

$$\mathfrak{N}_a(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_a) = \mathfrak{L}_a(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a) - (\mathfrak{p}_a)_i\,(\mathfrak{v}_a)^i. \tag{1628}$$

یا،

$$[\mathfrak{N}_a \circ (U_a^*)^{-1}][\mathfrak{z}(\mathfrak{x})] = \mathfrak{L}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{p}_a\,\mathfrak{v}_a. \tag{1629}$$

از (1601) و (1608) دیده میشود

$$\mathfrak{x} \in \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\} \cap \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_b)]\}. \quad \Rightarrow$$

$$[\mathfrak{p}_b(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_b)]\, \mathfrak{v}_b = [\mathfrak{p}_a(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)]\, \mathfrak{v}_a. \tag{1630}$$

در واقع،

$$[\mathfrak{p}_a(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)]\, \mathfrak{v}_a = \mathsf{res}\{\mathfrak{z}\, \mathfrak{x}; \boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\}. \tag{1631}$$

پس طرف ِ راست ِ (1629) مستقل از a است. $\mathfrak{N}$ را یک تابعی با دامنه یِ $\mathbb{E}^*$ تعریف میکنم، چنان که

$$\mathsf{res}\{\mathfrak{N} \circ \mathfrak{z}; \boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\} = [\mathfrak{N}_a \circ (U_a^*)^{-1}] \circ \mathfrak{z}. \tag{1632}$$

دیده میشود اگر $\mathfrak{x}$ در $\{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_a)]\} \cap \{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\mathsf{dom}(\phi_b)]\}$ باشد، طرف ِ راست ِ (1632) به ازا یِ a و b یکسان است. پس تعریف ِ $\mathfrak{N}$ مستقل از نقشه است، که یعنی $\mathfrak{N}$ خُش-تعریف است.

بر اساس ِ استقلال-از-نقشِها یِ بالا، میشود روابط (1597) و (1628) را به شکل ِ مستقل-از-نقشه نوشت:

$$\mathfrak{z} = \overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{L}. \tag{1633}$$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{z}\, \mathfrak{x}. \tag{1634}$$

مانستِها یِ (1587) و (1588) هم میشوند

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mathfrak{N} = \overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mathfrak{L}. \tag{1635}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{N} = -\mathfrak{x}. \tag{1636}$$

عملَن هم میشود یک نقشه یِ ϕ_a گرفت و با $(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)$ و $(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_a)$ و $\mathfrak{L}_a$ و $\mathfrak{N}_a$ به جا یِ، به ترتیب، $\mathfrak{x}$ و $\mathfrak{z}$ و $\mathfrak{L}$ و $\mathfrak{N}$ کار کرد. جا یی که ابهام پیش نیاید، میشود شاخص- ِ-نقشه یِ a را هم حذف کرد و به جا یِ $(\mathfrak{q}, \mathfrak{v}_a)$ و $(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_a)$ و $\mathfrak{L}_a$ و $\mathfrak{N}_a$، به ترتیب، خُد ِ $(\mathfrak{q}, \mathfrak{v})$ و $(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ و $\mathfrak{L}$ و $\mathfrak{N}$ را به کار برد. به این ترتیب ساختار ِ تبدیل- ِ-لُژاندر بر یک کلاف ِ برداری عملَن هم ان ساختار ِ تبدیل- ِ-لُژاندر بر حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ یک خمینه در یک فضا یِ خطی میشود.

61 هندسه یِ تبدیل ِ لُژاندر

$\mathfrak{L}$ یک تابعی ست که دامنه اَ ش فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ است. مبدَل- ِ-لُژاندر ِ $\mathfrak{L}$ را با $\mathfrak{N}$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{p} = \mathbf{D}\,\mathfrak{L}. \tag{1521}$$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}) - \mathfrak{p}\,\mathfrak{v}. \tag{1637}$$

اینها را برا یِ یک نقطه یِ خاص (که با پریم مشخص میشود) مینویسم:

$$\mathfrak{p}' = (\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v}'). \tag{1638}$$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}') - \mathfrak{p}'\,\mathfrak{v}'. \tag{1639}$$

تابعی یِ Ta را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \mathfrak{v}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}') + \mathfrak{p}'\,(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}'). \tag{1640}$$

دیده میشود $\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)$ دست- ِ-بالا-خطی ست. همچنین،

$$[\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)](\mathfrak{v}') = \mathfrak{L}(\mathfrak{v}'). \tag{1641}$$

$$\{\mathbf{D}\,[\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)]\}(\mathfrak{v}') = \mathfrak{p}'. \tag{1642}$$

که یعنی،

$$\{\mathbf{D}\,[\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)]\}(\mathfrak{v}') = (\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{v}'). \tag{1643}$$

مشتق ِ $\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)$ ثابت است. پس $\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)$ یک فُق- ِ-صفحه است. رابطه یِ (1641) یعنی در $\mathfrak{v}'$، مقدار ِ $\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)$ با مقدار ِ $\mathfrak{L}$ برابر است. رابطه یِ (1643) هم یعنی در $\mathfrak{v}'$، مشتق ِ $\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)$ با مشتق ِ $\mathfrak{L}$ برابر است. پس $\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)$ فُق- ِ-صفحه یِ مماس بر $\mathfrak{L}$ در نقطه یِ $[\mathfrak{v}', \mathfrak{L}(\mathfrak{v}')]$ است.

رابطه یِ (1640) را میشود چنین نوشت.

$$\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \mathfrak{v}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}') + \mathfrak{p}'\,\mathfrak{v}. \tag{1644}$$

یا،

$$[\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)](\mathfrak{v}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}') + \mathfrak{p}'\,\mathfrak{v}. \tag{1645}$$

پس،

$$[\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)](0) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}'). \tag{1646}$$

این یعنی $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}')$ عرض-از-مبدئ ِ $\mathsf{Ta}(\mathfrak{v}', \cdot)$ است.

پس رابطه یِ $(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})$ با $\mathfrak{L}$ چنین است. متغیر ِ $\mathfrak{L}$ را با $\mathfrak{v}$، و متغیر ِ $(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})$ را با $\mathfrak{p}$ نشان میدهم. به ازا یِ هر مقدار ِ $\mathfrak{v}$، مقدار ِ $\mathfrak{p}$ رابر با مشتق ِ $\mathfrak{L}$ در نقطه یِ $\mathfrak{v}$ است. $\mathfrak{v}$ و $\mathfrak{p}$ فُق- ِ-صفحه یِ مماس بر $\mathfrak{L}$ در نقطه یِ $[\mathfrak{v}, \mathfrak{L}(\mathfrak{v})]$ را مشخص میکنند. $(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})(\mathfrak{p})$ عرض-از-مبدئ ِ این فُق- ِ-صفحه است.

این یعنی روش ِ ساختن ِ $\mathsf{Le}(\mathfrak{L})$ چنین است. به ازا یِ هر نقطه یِ $\mathfrak{p}$، نقطه یِ $\mathfrak{v}$ چنان یافته میشود که مشتق ِ $\mathfrak{L}$ در نقطه یِ $\mathfrak{v}$ برابر با $\mathfrak{p}$ باشد. مقدار ِ $(\mathsf{Le}\,\mathfrak{L})$ در نقطه یِ $\mathfrak{p}$، عرض-از-مبدئ ِ فُق- ِ-صفحه یِ مماس بر $\mathfrak{L}$ در نقطه یِ $[\mathfrak{v}, \mathfrak{L}(\mathfrak{v})]$ است.

بر عکس، با استفاده از $\mathfrak{N}$ میشود $(\mathsf{Le}^{-1}\,\mathfrak{N})$ را ساخت. متناظر با هر $\mathfrak{p}$ (متغیر ِ $\mathfrak{N}$)، یک فُق- ِ-صفحه هست که مشتق َش $\mathfrak{p}$ است و عرض-از-مبدئ َش مقدار ِ $\mathfrak{N}$ در نقطه یِ $\mathfrak{p}$ است. هر یک از این فُق- ِ-صفحِها بر $(\mathsf{Le}^{-1}\,\mathfrak{N})$ مماس است. پس $(\mathsf{Le}^{-1}\,\mathfrak{N})$ پوش ِ این خانواده یِ فُق- ِ-صفحِها ست. در واقع $(\mathsf{Le}^{-1}\,\mathfrak{N})$ جواب ِ تکین ِ این معادله یِ کْلِرو برا یِ $\mathfrak{X}$ است.

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{v}) = [(\mathbf{D}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v} + \mathfrak{N}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]. \tag{1647}$$

مفصلتر،

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{v}) = [(\mathbf{D}_i\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}^i + \mathfrak{N}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]. \tag{1648}$$

از این معادله نسبت به $\mathfrak{v}$ مشتق میگیرم:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_i\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v}) &= [(\mathbf{D}_i\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})] + [(\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_j\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]\,\mathfrak{v}^j \\ &\quad + \{(\mathbf{D}^j\,\mathfrak{N})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]\}\,[(\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_j\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})].\end{aligned} \tag{1649}$$

پس،

$$0 = [(\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_j\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]\,\{\mathfrak{v}^j + (\mathbf{D}^j\,\mathfrak{N})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]\}. \tag{1650}$$

جواب ِ عمومی یِ این معادله از این به دست میئاید که مشتق ِ دوم ِ $\mathfrak{X}$ صفر باشد:

$$0 = \mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_j\,\mathfrak{X}. \tag{1651}$$

این یعنی مشتق ِ اول ِ $\mathfrak{X}$ ثابت است. این مقدار ِ ثابت را با $\mathfrak{c}$ نشان میدهم و آن را در (1647) میگذارم:

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{c}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{N}(\mathfrak{c}). \tag{1652}$$

مفصلتر،

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{c}_i\,\mathfrak{v}^i + \mathfrak{N}(\mathfrak{c}). \tag{1653}$$

این جواب، به ازا یِ هر $\mathfrak{c}$ یک فُق- ِ-صفحه است، که مشتق َش $\mathfrak{c}$ و عرض-از-مبدئ َش $\mathfrak{N}(\mathfrak{c})$ است.

جواب ِ تکین ِ معادله یِ (1647)، یا (1648)، از این به دست میئاید که آکلاد در طرف ِ راست ِ (1650) صفر است:

$$0 = \mathfrak{v}^j + (\mathbf{D}^j\,\mathfrak{N})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]. \tag{1654}$$

بسته،

$$0 = \mathfrak{v} + (\mathbf{D}\,\mathfrak{N})[(\mathbf{D}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})]. \tag{1655}$$

$(\mathbf{D}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{v})$ را با $\mathfrak{p}$ نشان میدهم. (1655) میشود

$$0 = \mathfrak{v} + (\mathbf{D}\,\mathfrak{N})(\mathfrak{p}). \tag{1656}$$

رابطه یِ (1647) هم میشود

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{p}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{N}(\mathfrak{p}). \tag{1657}$$

روابط ِ (1656) و (1657) معادلات ِ پارامتری برا یِ $\mathfrak{X}$ بر حسب ِ $\mathfrak{v}$ اند. دیده میشود $\mathfrak{X}$ هم ان روابط ی را برمیئاورَد که $\mathfrak{L}$ برمیئاورَد، وقتی $\mathsf{Le}(\mathfrak{L})$ هم ان $\mathfrak{N}$ باشد: رابطه یِ (1656)، همراه با

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{p}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{N}(\mathfrak{p}). \tag{1658}$$

62 هَمیلتِنی

لَگرانژی تابع ِ زمان، مکان، و سرعت است. به این ترتیب لَگرانژی یک تابعی با دامنه یِ $\mathbb{T} \times (\mathrm{T}\mathbb{M})$ است، که $\mathbb{T}$ محور ِ زمان (مجموعه یِ زمانها) است، $\mathbb{M}$ قضا یِ پیکربندی ست، و $\mathrm{T}\mathbb{M}$ فضا یِ مماس (بر فضا یِ پیکربندی) است. $\mathrm{T}\mathbb{M}$ (کلاف ِ مماس) یک کلاف ِ برداری ست. پس برا یِ لَگرانژی میشود مبدَل- ِ-لُژاندر (متناظر با کلاف ِ مماس) تعریف کرد. مبدَل- ِ-لژاندر ِ لَگرانژی یک تابعی با دامنه یِ $\mathbb{T} \times (\mathrm{T}^*\mathbb{M})$ است، که $\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ فضا یِ هممماس (دُگان ِ کلاف- ِ-مماس ِ $\mathrm{T}\mathbb{M}$) است.

از تعریف ِ تبدیل- ِ-لُژاندر دیده میشود

$$(\mathsf{Le}\,L)(t,z) = L(t,x) - z\,x. \tag{1659}$$

$$z = \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,[L(t,\cdot)]. \tag{1660}$$

با نماد-گذاری یِ سادِتر، با $(q,\dot{q})$ به جا یِ x و (q,p) به جا یِ z،

$$(\mathsf{Le}\,L)(t,q,p) = L(t,q,\dot{q}) - p\,q. \tag{1661}$$

مفصلتر،

$$(\mathsf{Le}\,L)(t,q,p) = L(t,q,\dot{q}) - p_i\,q^i. \tag{1662}$$

که

$$p_i = \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}^i}. \tag{641}$$

طرف ِ راست ِ (1662) تعریف ِ p_0 است:

$$p_0 = L - p_i\,\dot{q}^i. \tag{1047}$$

پس،

$$\mathsf{Le}(L) = p_0. \tag{1663}$$

البته p_0 تابع ی از زمان و مکان و سرعت (یعنی تابع ی از زمان و کلاف ِ مماس) تعریف شده بود. $(\mathsf{Le}\,L)$ تابع ی از زمان و مکان و تکانه (یعنی تابع ی از زمان و کلاف ِ هممماس) تعریف میشود. رابطه یِ (1663) در واقع یعنی

$$(\mathsf{Le}\,L)[t, q, p(t, q, \dot{q})] = p_0(t, q, \dot{q}). \tag{1664}$$

همچنین، از روابط ی که برا یِ تبدیل ِ لُژاندر به دست آمد دیده میشود

$$\frac{\partial\,(\mathsf{Le}\,L)}{\partial\,q^\alpha} = \frac{\partial\,L}{\partial\,q^\alpha}. \tag{1665}$$

$$\frac{\partial\,(\mathsf{Le}\,L)}{\partial\,p_i} = -\dot{q}^i. \tag{1666}$$

در مکانیک سنتَن به جا یِ $(\mathsf{Le}\,L)$ با قرینه یِ $(\mathsf{Le}\,L)$ کار میکنند. این علامت ِ منفی واقعَن هیچ اهمیت ی ندارد و فقط تاریخی ست. به قرینه یِ $(\mathsf{Le}\,L)$ هَمیلتِنی میگویند. هَمیلتِنی را با H نشان میدهم. به این ترتیب،

$$H(t, q, p) = p\,\dot{q} - L(t, q, \dot{q}). \tag{1667}$$

مفصلتر،

$$H(t, q, p) = p_i\,\dot{q}^i - L(t, q, \dot{q}). \tag{1668}$$

از جمله،

$$H[t, q, p(t, q, \dot{q})] = -p_0(t, q, \dot{q}). \tag{1669}$$

روابط ِ (1665) و (1666) هم میشوند

$$\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}. \tag{1670}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i. \tag{1671}$$

63 فضا یِ فاز و معادلات ِ حرکت

$\mathbb{M}$ فضا یِ پیکربندی ست. به $\mathrm{T}^*\mathbb{M}$، فضا یِ هممماس ِ فضا یِ پیکربندی، فضا یِ فاز میگویند. معادلات ِ حرکت در فضا یِ پیکربندی اینها یَند.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right). \tag{1672}$$

یا،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t\,\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\,\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\,\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^j. \tag{1673}$$

L و مشتقات ِ پارِئی یِ آن تابع ِ $(t, q, \dot{q})$ اند. به این ترتیب معادلات ِ حرکت در فضا یِ پیکربندی از مرتبه یِ دُ اند.

با افزایش ِ تعداد ِ متغیرها، میشود مرتبه یِ معادلات- ِ-حرکت کم کرد. یک دستگاه ِ معادلات- ِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-دُ چنین است.

$$\ddot{\mathfrak{q}}^i \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{f}^i(t, \mathfrak{q}, \dot{\mathfrak{q}}). \tag{1674}$$

یک راه ِ ساده برا یِ کاهش ِ مرتبه یِ معادلات این است. $(\mathfrak{q}, \mathfrak{v})$ را متغیر میگیرند و به جا یِ (1674) این معادلات را مینویسند.

$$\dot{\mathfrak{q}}^i \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{v}^i. \tag{1675}$$

$$\dot{\mathfrak{v}}^i \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{f}^i(t, \mathfrak{q}, \mathfrak{v}). \tag{1676}$$

رُشن است که با حذف ِ v بین ِ معادلات ِ (1675) و (1676) هم ان (1674) نتیجه میشود: (1675) و (1676)، با (1674) همئرز َند.

برا یِ معادلات ِ حرکت در فضا یِ پیکربندی هم میشود هم ین روش را به کار برد. در این روش، معادلات- ِ-حرکت برا یِ $\mathbb{TM}$، فضا یِ مماس بر فضا یِ پیکربندی، نوشته میشوند: به جا یِ زُج ِ $(q,\dot{q})$ زُج ِ (q,v) به کار میرود و معادلات میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{q}^i - v^i. \tag{1677}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t\,\partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\,\partial v^i}\,v^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j\,\partial v^i}\,\dot{v}^j. \tag{1678}$$

اینجا L و مشتقات ِ پارِئی یِ آن تابع ِ (t,q,v) اند.

برا یِ کاهش ِ مرتبه یِ معادلات باید تعداد ِ متغیرها را زیاد کرد. اما لازم نیست این افزایش- ِ-تعداد- ِ-متغیرها به شکل ِ ساده یِ بالا باشد. یک روش ِ رایج در مکانیک، استفاده از متغیرها یِ فضا یِ فاز است. در این روش، معادلات ِ حرکت مشتق ِ زمانی یِ (q,p)، مکان و تکانه، را بر حسب زمان و مکان و تکانه میدهند. از رابطه یِ (1671) مشتق ِ زمانی یِ q به دست میئاید:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{q}^i. \tag{1671}$$

معادله یِ حرکت در فضا یِ پیکربندی هم مشتق ِ زمانی یِ تکانه را میدهد:

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{p}_i. \tag{1679}$$

مشتق ِ لَگرانژی نسبت به مکان، تابع ی از زمان و مکان و سرعت است. رابطه یِ (1670) مشتق ِ لَگرانژی نسبت به مکان را به مشتق ِ هَمیلتِنی نسبت به مکان مربوط میکند:

$$\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}. \tag{1670}$$

به این ترتیب معادله یِ (1679) میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \dot{p}_i. \tag{1680}$$

مشتق ِ هَمیلتِنی نسبت به مکان، تابع ی از زمان و مکان و تکانه است. به این ترتیب معادلات- ِ-حرکت میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{1681}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1682}$$

یا،

$$\dot{q}^i \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{1683}$$

$$\dot{p}_i \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1684}$$

رابطه یِ (1683)، که هم ان (1681) است، در فرمول-بندی یِ لَگرانژ تعریف ِ تکانه است: در فرمول-بندی یِ لَگرانژ تکانه مشتق ِ لَگرانژی نسبت به سرعت است، که در نتیجه تکانه تابع یِ از زمان و مکان و سرعت است. (1683) وارون ِ این تابعیت است: این رابطه سرعت (مشتق ِ زمانی یِ مکان) را بر حسب ِ زمان و مکان و تکانه میدهد. رابطه یِ (1684) هم، که هم ان (1682) است، معادله-یِ-حرکت در فرمول-بندی یِ لَگرانژ است، که مشتق ِ زمانی یِ تکانه را میدهد. البته در فرمول-بندی یِ لَگرانژ، مشتق ِ زمانی یِ تکانه به شکل ِ تابع ی از زمان و مکان و سرعت داده میشود. اینجا، معادله یِ (1684) مشتق ِ زمانی یِ تکانه را، با استفاده از رابطه یِ (1670)، به شکل ِ تابع ی از زمان و مکان و تکانه میدهد.

به (1681) و (1682)، یا (1683) و (1684)، معادلات ِ هَمیلتِن میگویند.

64 کنش در فضا یِ فاز

معادله یِ حرکت در فضا یِ پیکربندی این است که مشتق ِ درونی یِ کنش نسبت به مسیر صفر است. کنش انتگرال ِ لَگرانژی بر زمان است، و لَگرانژی تابع ِ زمان و مکان و سرعت است. لَگرانژی را میشود چنین نوشت.

$$L(t, q, \dot{q}) = p\,\dot{q} - H(t, q, p). \tag{1685}$$

مفصلتر،

$$L(t,q,\dot{q}) = p_i\,\dot{q}^i - H(t,q,p). \tag{1686}$$

به این ترتیب کنش میشود

$$S = \int (\mathrm{d}\,t)\,[p\,\dot{q} - H(t,q,p)]. \tag{1687}$$

تفاوت ِ این با آن چه در فرمول-بندی یِ لَگرانژ به کار رفت این است که اینجا کنش به شکل ِ تابع ی از مسیر در فضا یِ فاز نوشته شده. در حال ی که در فرمول-بندی یِ لَگرانژ، کنش تابع ی از فضا یِ پیکربندی ست. جا یی که میخاهم بر این تفاوت تئکید کنم، این کنش را با S_ϕ نشان میدهم:

$$S_\phi = \int (\mathrm{d}\,t)\,[p\,\dot{q} - H(t,q,p)]. \tag{1688}$$

مفصلتر،

$$S_\phi = \int_{t_0}^{t_\mathrm{f}} (\mathrm{d}\,t)\,[p_i\,\dot{q}^i - H(t,q,p)]. \tag{1689}$$

به S_ϕ کنش ِ فضا-یِ-فاز میگویم.

تغییر ِ کنش ِ فضا-یِ-فاز به خاطر ِ تغییر ِ مسیر در فضا-یِ-فاز را بررسی میکنم. دیده میشود

$$(\delta\,S_\phi)_{=\mathbf{1}} = \int (\mathrm{d}\,t)\,\left[p\,(\delta\,\dot{q}) - \left(\frac{\partial\,H}{\partial q}\right)\,(\delta q) + (\delta\,p)\,\dot{q} - (\delta p)\,\left(\frac{\partial\,H}{\partial p}\right)\right]. \tag{1690}$$

و با انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزی از جمله یِ اول،

$$\begin{aligned}(\delta\,S_\phi)_{=\mathbf{1}} = \int (\mathrm{d}\,t)\,&\left[\left(-\dot{p} - \frac{\partial\,H}{\partial q}\right)\,(\delta q) + (\delta\,p)\,\left(\dot{q} - \frac{\partial\,H}{\partial p}\right)\right]\\ &+ [p\,(\delta\,q)](t_\mathrm{f}) - [p\,(\delta\,q)](t_0).\end{aligned} \tag{1691}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$(\delta\,S_\phi)_{=\mathbf{1}} = (\delta\,S_\phi)_{=\mathbf{1}\,\mathrm{in}} + (\delta\,S_\phi)_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}}. \tag{1692}$$

که،

$$(\delta\, S_\phi)_{=\mathbf{1}\,\mathrm{in}} = \int (\mathrm{d}\, t)\, [(\mathbf{D}_{(1)}\, S_\phi)_{\mathrm{in}}\, (\delta\, q) + (\delta\, p)\, (\mathbf{D}_{(2)}\, S_\phi)_{\mathrm{in}}]. \tag{1693}$$

$$(\delta\, S_\phi)_{=\mathbf{1}\,\mathrm{bo}} = [p\, (\delta\, q)](t_{\mathrm{f}}) - [p\, (\delta\, q)](t_0). \tag{1694}$$

و البته،

$$(\mathbf{D}_{(1)}\, S_\phi)_{\mathrm{in}} = -\dot{p} - \frac{\partial\, H}{\partial q}. \tag{1695}$$

$$(\mathbf{D}_{(2)}\, S_\phi)_{\mathrm{in}} = \dot{q} - \frac{\partial\, H}{\partial p}. \tag{1696}$$

مفصلتر،

$$(\delta\, S_\phi)_{=\mathbf{1}\ \mathrm{in}} = \int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} (\mathrm{d}\, t)\, [(\mathbf{D}_{(1)\, i}\, S_\phi)_{\mathrm{in}}\, (\delta\, q^i) + (\delta\, p_i)\, (\mathbf{D}_{(2)}{}^i\, S_\phi)_{\mathrm{in}}](t). \tag{1697}$$

$$(\delta\, S_\phi)_{=\mathbf{1}\ \mathrm{bo}} = [p_i\, (\delta\, q^i)](t_{\mathrm{f}}) - [p_i\, (\delta\, q^i)](t_0). \tag{1698}$$

و البته،

$$(\mathbf{D}_{(1)\, i}\, S_\phi)_{\mathrm{in}} = -\dot{p}_i - \frac{\partial\, H}{\partial q^i}. \tag{1699}$$

$$(\mathbf{D}_{(2)}{}^i\, S_\phi)_{\mathrm{in}} = \dot{q}^i - \frac{\partial\, H}{\partial p_i}. \tag{1700}$$

این روابط را چنین هم مینویسند.

$$\left[\frac{\delta\, S_\phi}{(\delta\, q^i)(t)}\right]_{\mathrm{in}} = -\dot{p}_i(t) - \frac{\partial\, H}{\partial\, [q^i(t)]}. \tag{1701}$$

$$\left[\frac{\delta\, S_\phi}{(\delta\, p_i)(t)}\right]_{\mathrm{in}} = \dot{q}^i(t) - \frac{\partial\, H}{\partial\, [p_i(t)]}. \tag{1702}$$

پس معادلات ِ حرکت در فرمول-بندی یِ هَمیلتِن را میشود چنین نوشت.

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} (\mathbf{D}\, S_\phi)_{\mathrm{in}}. \tag{1703}$$

مفصلتر،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}_{(1)\,i}\, S_\phi)_{\text{in}}. \tag{1704}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}_{(2)}{}^{i}\, S_\phi)_{\text{in}}. \tag{1705}$$

اینها مانستِها یِ روابط ِ مشابه در فرمول-بندی یِ لَگرانژ َند. شباهت را کاملتر کنم. L_ϕ را چنین تعریف میکنم.

$$L_\phi(t, q, \dot{q}, p, \dot{p}) = p\,\dot{q} - H(t, q, p). \tag{1706}$$

به L_ϕ لَگرانژی یِ فضا-یِ-فاز میگویم. دیده میشود مقدار ِ L_ϕ هم ان مقدار ِ L است. همچنین،

$$S_\phi = \int (\mathrm{d}\,t)\, L_\phi(t, q, \dot{q}, p, \dot{p}). \tag{1707}$$

مفصلتر،

$$S_\phi = \int_{t_0}^{t_{\text{f}}} (\mathrm{d}\,t)\, L_\phi(t, q, \dot{q}, p, \dot{p}). \tag{1708}$$

همچنین،

$$(\mathbf{D}\, S_\phi)_{\text{in}} = \text{ϵ}\partial\, L_\phi, \tag{1709}$$

که

$$\text{ϵ}\partial_{(1)\,i}\, L_\phi = \frac{\partial\, L_\phi}{\partial\, q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\, L_\phi}{\partial\, \dot{q}^i}\right). \tag{1710}$$

$$\text{ϵ}\partial_{(2)}{}^{i}\, L_\phi = \frac{\partial\, L_\phi}{\partial\, p_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial\, L_\phi}{\partial\, \dot{p}_i}\right). \tag{1711}$$

یعنی،

$$\text{ϵ}\partial_{(1)\,i}\, L_\phi = -\frac{\partial\, H}{\partial\, q^i} - \dot{p}_i. \tag{1712}$$

$$\text{ϵ}\partial_{(2)}{}^{i}\, L_\phi = \dot{q}^i - \frac{\partial\, H}{\partial\, p_i}. \tag{1713}$$

معادلات ِ حرکت در فرمول-بندی یِ هَمیلتِن هم میشوند

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \epsilon\partial_{(2)}{}^{i}\, L_{\phi}. \tag{1714}$$

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \epsilon\partial_{(1)\,i}\, L_{\phi}. \tag{1715}$$

بسته،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \epsilon\partial\, L_{\phi}. \tag{1716}$$

65 فضا یِ فاز و فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته

فضا یِ فاز از رو یِ فضا یِ پیکربندی تعریف شد. اما در آن چه نهایتَن به دست آمد، معادلات- ِ-حرکت بر اساس ِ هَمیلتِنی، این که فضا یِ هممماس ِ فضا یِ پیکربندی باشد لازم نیست، جز برا یِ این که معادلات- ِ-حرکت با فرمول-بندی یِ هَمیلتِن با معادلات- ِ-حرکت با فرمول-بندی یِ لَگرانژ همئرز باشند. وقت ی فرمول-بندی یِ هَمیلتِن مستقلَن بررسی شود، رابطه یِ فضا یِ فاز با فضا یِ پیکربندی مهم نیست.

فضا یِ فاز را با $\mathbb{P}$ نشان میدهم. وقت ی فضا یِ فاز از رو یِ فضا یِ پیکربندی ($\mathbb{M}$) ساخته شود، تعداد ِ مئلفِها برا یِ q و p یکسان است. این را از رو یِ معادلات ِ حرکت برا یِ q و p هم میشود دید. پس بُعد ِ فضا یِ فاز زُج است. وقت ی فضا یِ فاز از رو یِ فضا یِ پیکربندی ساخته شود، p بردار (در واقع همبردار) است، اما q لازم نیست بردار باشد. اما این تفاوت بین ِ q و p، در معادلات- ِ-حرکت ظاهر نمیشود: معادلات- ِ-حرکت برا یِ q و p بسیار شبیه به هم َند. وقت ی فضا یِ فاز را مستقل از فضا یِ پیکربندی بررسی میکنم، این فرض که p بردار باشد را کنار میگذارم. به این ترتیب q و p شبیه ِ هم میشوند. اینها را با یک نماد ِ مشترک (x) نشان میدهم:

$$x^a = q^a, \qquad a \leq \mathfrak{m}. \tag{1717}$$

$$x^a = p_{a-\mathfrak{m}}, \quad a > \mathfrak{m}. \tag{1718}$$

$\mathfrak{m}$ بُعد ِ فضا یِ پیکربندی ست، و شاخص ِ a از یک تا $(2\,\mathfrak{m})$ مقدار میگیرد: وقت ی بُعد ِ فضا یِ پیکربندی $\mathfrak{m}$ است، بُعد ِ فضا یِ فاز $(2\,\mathfrak{m})$ است. شاخصها یِ متناظر با فضا-یِ-فاز را، که از 1 تا $(2\,\mathfrak{m})$ مقدار میگیرند، با حرفها یِ ابتدایی یِ لاتین نشان میدهم.

به حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ $\mathbb{T}$ (محور ِ زمان) در $\mathbb{P}$ (فضا یِ فاز) فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته میگویم و آن را با $\mathbb{P}_{\mathsf{ext}}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{P}_{\mathsf{ext}} = \mathbb{T} \times \mathbb{P}. \tag{1719}$$

برا یِ $\underset{\sim}{x}$ (یک عضو ِ این فضا)،

$$\underset{\sim}{x} = (t, x). \tag{1720}$$

اینجا هم t را مئلفه یِ صفر ِ $\underset{\sim}{x}$ تعریف میکنم:

$$x^0 = t. \tag{1721}$$

اینجا هم قرارداد میکنم هر شاخص ِ یونانی هم صفر (زمان) و هم مقدارها یِ ناصفر (فضایی) را میگیرد، و هر شاخص ِ لاتین فقط مقدارها یِ فضایی را میگیرد.

معادلات ِ حرکت اینها یَند.

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{1681}$$

$$0 \overset{\text{ns}}{=} -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1682}$$

اینها را میشود چنین نوشت.

$$0 \overset{\text{ns}}{=} -J(\dot{x}) - \frac{\partial H}{\partial x}. \tag{1722}$$

و دیده میشود J خطی ست:

$$0 \overset{\text{ns}}{=} -J\,\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial x}. \tag{1723}$$

مفصلتر،

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} -J_{a\,b}\,\dot{x}^b - \frac{\partial H}{\partial x^a}. \tag{1724}$$

که ماتریس ِ J (با شاخصها یِ پایین) چنین است.

$$J_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}} & \mathbf{1}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}} \\ -\mathbf{1}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}} & \mathbf{0}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}} \end{pmatrix}. \tag{1725}$$

یا،

$$J_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} J_{q\,q} & J_{q\,p} \\ J_{p,q} & J_{p,p} \end{pmatrix}. \tag{1726}$$

که،

$$J_{q\,q} = \mathbf{0}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}. \tag{1727}$$

$$J_{q\,p} = \mathbf{1}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}. \tag{1728}$$

$$J_{p\,q} = -\mathbf{1}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}. \tag{1729}$$

$$J_{p\,p} = \mathbf{0}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}. \tag{1730}$$

به J، ماتریس ِ همتافته میگویند.

با J، شاخصها را پایین-ُ-بالا میبَرم. این، از جمله یعنی

$$J_{a\,c}\,J_{b\,d}\,J^{c\,d} = J_{a\,b}. \tag{1731}$$

که همئرز است با

$$J_{b\,d}\,J^{c\,d} = \delta^c_b. \tag{1732}$$

یا،

$$J^{c\,d} = (J^{-1})^{d\,c}. \tag{1733}$$

ماتریس ِ J در طرف ِ راست، ماتریس ِ J با شاخص ِ پایین است، که وارون َ ش یک ماتریس با شاخص ِ بالا ست. به این ترتیب J با شاخص ِ بالا وارون ِ J^* با شاخص ِ پایین است. رابطه یِ (1733) را میشود چنین نوشت.

$$J^{c\,d} = [(J^*)^{-1}]^{c\,d}. \tag{1734}$$

یا،

$$J^{c\,d} = (J^{\mathrm{t}})^{d\,c}. \tag{1735}$$

که $\mathfrak{X}^{\mathrm{t}}$ ترانهاده یِ $\mathfrak{X}$ است. اینها را، سادِتر، چنین هم مینویسم.

$$J = [(J^*)^{-1}]. \tag{1736}$$

یا،

$$J = -J^{\mathrm{t}}. \tag{1737}$$

ماتریس ِ J با شاخص ِ بالا چنین میشود.

$$J^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}} & \mathbf{1}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}} \\ -\mathbf{1}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}} & \mathbf{0}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}} \end{pmatrix}. \tag{1738}$$

یا،

$$J^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} J^{q\,q} & J^{q\,p} \\ J^{p\,q} & J^{p\,p} \end{pmatrix}. \tag{1739}$$

که،

$$J^{q\,q} = \mathbf{0}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}. \tag{1740}$$

$$J^{q\,p} = \mathbf{1}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}. \tag{1741}$$

$$J^{p\,q} = -\mathbf{1}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}. \tag{1742}$$

$$J^{p\,p} = \mathbf{0}_{\mathrm{m}\times\mathrm{m}}. \tag{1743}$$

رُشن است که J پادمتقارن است:

$$J_{b\,a} = -J_{a\,b}. \tag{1744}$$

$$J^{b\,a} = -J^{a\,b}. \tag{1745}$$

معادله یِ حرکت، معادله یِ (1724)، را در J با شاخص ِ بالا ضرب میکنم:

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} -J^{c\,a}\,J_{a\,b}\,\dot{x}^b - J^{c\,a}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^a}. \tag{1746}$$

با استفاده از پادتقارن ِ J، و با استفاده از (1732)، نتیجه میشود

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \dot{x}^c - J^{c\,a}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^a}. \tag{1747}$$

بسته،

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \dot{x} - J\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x}. \tag{1748}$$

معادله یِ (1723) یا (1724)، یا (1747) یا (1748)، هم ان معادلات ِ (1681) و (1682) است. به اینها هم معادلات ِ هَمیلتِن میگویند.

معادلات- ِ-حرکت برا یِ q و p شبیه ِ هم َند. اما در لَگرانژی یِ فضا-یِ-فاز، نقش ِ q و p مشابه نیست:

$$L_\phi(t,q,p,\dot{q},\dot{p}) = p_i\,\dot{q}^i - H(t,q,p). \tag{1749}$$

جمله یِ اول را میشود بر حسب ِ (بخش ی از) ماتریس ِ همتافته نوشت:

$$L_\phi(t,q,p,\dot{q},\dot{p}) = (J_{q\,p})^i{}_j\,p_i\,\dot{q}^j - H(t,q,p). \tag{1750}$$

یا،

$$L_\phi(t,q,p,\dot q,\dot p) = -(J_{p\,q})^i{}_j\, p_i\, \dot q^j - H(t,q,p). \tag{1751}$$

یا،

$$L_\phi(t,q,p,\dot q,\dot p) = \frac{1}{2}\,(J_{q\,p} - J_{p\,q})^i{}_j\, p_i\, \dot q^j - H(t,q,p). \tag{1752}$$

اما همچنان در جمله یِ اول نقش ِ q و p مشابه نیست: این جمله شامل ِ مشتق ِ q و خُد ِ p است. میشود یک لَگرانژی یِ دیگر ($\tilde L_\phi$) تعریف کرد که با L_ϕ همئرز است، ولی در آن نقش ِ q و p مشابه است:

$$\tilde L_\phi = L_\phi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,\left(\frac{p_i\, q^i}{2}\right). \tag{1753}$$

به این ترتیب،

$$\tilde L_\phi(t,q,p,\dot q,\dot p) = \frac{1}{2}\,(p_i\, \dot q^i - \dot p_i\, q^i) - H(t,q,p). \tag{1754}$$

این را میشود بر حسب ِ ماتریس ِ همتافته نوشت:

$$\tilde L_\phi(t,q,p,\dot q,\dot p) = -\frac{1}{2}\, J_{a\,b}\, x^a\, \dot x^b - H(t,q,p). \tag{1755}$$

یا،

$$\tilde L_\phi(t,x,\dot x) = -\frac{1}{2}\, J_{a\,b}\, x^a\, \dot x^b - H(t,x). \tag{1756}$$

دیده میشود

$$\text{ɛ}\partial_c\, \tilde L_\phi = -J_{c\,b}\, \dot x^b - \frac{\partial\, H}{\partial\, x^c}. \tag{1757}$$

بسته،

$$\text{ɛ}\partial\, \tilde L_\phi = -J\, \dot x - \frac{\partial\, H}{\partial\, x}. \tag{1758}$$

و البته رُشن است که

$$\text{ϵ}\partial\, L_\phi = \text{ϵ}\partial\, \tilde{L}_\phi. \tag{1759}$$

و معادله یِ حرکت میشود

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial\, \tilde{L}_\phi. \tag{1760}$$

که با (1716) همئرز است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \text{ϵ}\partial\, L_\phi. \tag{1716}$$

با $\tilde{L}_\phi$ هم میشود کنش ساخت. کنش ِ متناظر را با $\tilde{S}_\phi$ نشان میدهم:

$$\tilde{S}_\phi = \int (\mathrm{d}\, t)\, \tilde{L}_\phi(t, x, \dot{x}). \tag{1761}$$

معادله-یِ-حرکت را میشود بر حسب ِ $\tilde{S}_\phi$ نوشت:

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\, \tilde{S}_\phi)_{\text{in}}. \tag{1762}$$

رُشن است که $\tilde{S}_\phi$ با S_ϕ همئرز است، و معادله یِ (1762) هم با معادله یِ (1703) همئرز است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\, S_\phi)_{\text{in}}. \tag{1703}$$

66 کروشه یِ پُؤَسُن

$\mathfrak{A}$ یک تابعی از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته است. مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ آن چنین میشود.

$$\dot{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\, \mathfrak{A}}{\partial\, t} + \frac{\partial\, \mathfrak{A}}{\partial\, x}\, \dot{x}. \tag{1763}$$

مفصلتر،

$$\dot{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,t} + \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^a}\,\dot{x}^a. \tag{1764}$$

این هم، با استفاده از معادله-یِ-حرکت، چنین میشود.

$$\dot{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,t} + J^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^b}. \tag{1765}$$

کروشه یِ پُؤَسُن ِ تابعی یِ $\mathfrak{A}$ با تابعی یِ $\mathfrak{B}$ (که دامنه یِ هر-دُ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته است) را با $\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = J^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,x^b}. \tag{1766}$$

بسته،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = J(\mathbf{d}\,\mathfrak{A},\mathbf{d}\,\mathfrak{B}). \tag{1767}$$

یا،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = \frac{1}{2}\,J[(\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\wedge(\mathbf{d}\,\mathfrak{B})]. \tag{1768}$$

که البته $J^{0\,\alpha}$ و $J^{\alpha\,0}$ صفر تعریف شده:

$$J^{0\,\alpha} = 0. \tag{1769}$$

$$J^{\alpha\,0} = 0. \tag{1770}$$

بر حسب ِ کروشه-یِ-پُؤَسُن، معادله یِ (1765) چنین میشود.

$$\dot{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,t} + \{\mathfrak{A},H\}. \tag{1771}$$

کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ x^a ها با یک تابعی یِ $\mathfrak{A}$ چنین میشود.

$$\begin{aligned}\{x^a,\mathfrak{A}\} &= J^{b\,c}\,\frac{\partial\,x^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^c},\\ &= J^{b\,c}\,\delta^a_b\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^c}.\end{aligned} \tag{1772}$$

به این ترتیب،

$$\{x^a, \mathfrak{A}\} = J^{a\,c}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^c}. \tag{1773}$$

از جمله،

$$\begin{aligned}\{x^a, x^b\} &= J^{a\,c}\,\frac{\partial\,x^b}{\partial\,x^c},\\ &= J^{a\,c}\,\delta^b_c.\end{aligned} \tag{1774}$$

که نتیجه میدهد

$$\{x^a, x^b\} = J^{a\,b}. \tag{1775}$$

همچنین، مانسته یِ (1773) برا یِ H به جا یِ $\mathfrak{A}$ میشود

$$\{x^a, H\} = J^{a\,b}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^b}. \tag{1776}$$

که از آن دیده میشود معادله-یِ-تحول برا یِ خُد ِ x^a ها را هم میشود چنین نوشت.

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x^a, H\}. \tag{1777}$$

یا،

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} J^{a\,b}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^b}. \tag{1778}$$

رابطه یِ (1777) هم ان (1771) با x^a به جا یِ $\mathfrak{A}$ است، که البته مشتق ِ پارِئی یِ x^a نسبت به زمان صفر است.

رابطه یِ تعریف-کننده یِ کروشه-یِ-پُؤَسُن (1766) است. این را میشود بر حسب ِ q و p، به جا یِ x، نوشت:

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,q^i}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,p_i} - \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,p_i}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,q^i}. \tag{1779}$$

از جمله،

$$\{q^i, \mathfrak{A}\} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial p_i}. \tag{1780}$$

$$\{p_i, \mathfrak{A}\} = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial q^i}. \tag{1781}$$

همچنین،

$$\{q^i, q^j\} = 0. \tag{1782}$$

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j. \tag{1783}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0. \tag{1784}$$

67 ویژگیها یِ کروشه یِ پُوَسُن

از این که J پادمتقارن است، دیده میشود

$$\{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\} = -\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}. \tag{1785}$$

از خطی-بودن ِ مشتق-گیری دیده میشود اگر $\mathfrak{b}$ و $\mathfrak{c}$ عدد باشند،

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\,\mathfrak{B} + \mathfrak{c}\,\mathfrak{C}\} = \mathfrak{b}\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} + \mathfrak{c}\{\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\}. \tag{1786}$$

و البته مانسته یِ آن، اگر $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ عدد باشند،

$$\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\} = \mathfrak{a}\{\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\} + \mathfrak{b}\{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}. \tag{1787}$$

از قاعده یِ زنجیرِئی برا یِ مشتق-گیری نتیجه میشود

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}(\mathfrak{C}_1, \dots)\} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mathfrak{C}_\mathfrak{a}}\,\{\mathfrak{A}, \mathfrak{C}_\mathfrak{a}\}. \tag{1788}$$

و البته مانسته یِ آن،

$$\{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}_1, \dots), \mathfrak{B}\} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \mathfrak{C}_\mathfrak{a}}\,\{\mathfrak{C}_\mathfrak{a}, \mathfrak{B}\}. \tag{1789}$$

یک حالت ِ خاص ِ اینها میشود

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\} = \mathfrak{C}\,\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} + \mathfrak{B}\,\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}. \tag{1790}$$

و

$$\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B},\mathfrak{C}\} = \mathfrak{A}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\} + \mathfrak{B}\,\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}. \tag{1791}$$

سرانجام،

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\} &= J^{a\,b}\,(\partial_a\,\mathfrak{A})\,\partial_b\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\},\\ &= J^{a\,b}\,(\partial_a\,\mathfrak{A})\,\partial_b\,[J^{c\,d}\,(\partial_c\,\mathfrak{B})\,(\partial_d\,\mathfrak{C})],\\ &= \mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}) + \mathsf{PB}_3(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}),\end{aligned} \tag{1792}$$

که

$$\mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}) = J^{a\,b}\,J^{c\,d}\,(\partial_a\,\mathfrak{A})\,(\partial_b\,\partial_c\,\mathfrak{B})\,(\partial_d\,\mathfrak{C}). \tag{1793}$$

$$\mathsf{PB}_3(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}) = J^{a\,b}\,J^{c\,d}\,(\partial_a\,\mathfrak{A})\,(\partial_c\,\mathfrak{B})\,(\partial_b\,\partial_d\,\mathfrak{C}). \tag{1794}$$

$[\mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})]$ نسبت به مشتق ِ اول ِ $\mathfrak{A}$، مشتق ِ دوم ِ $\mathfrak{B}$، و مشتق ِ اول ِ $\mathfrak{C}$ خطی ست. $[\mathsf{PB}_3(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})]$ هم نسبت به مشتق ِ اول ِ $\mathfrak{A}$، مشتق ِ اول ِ $\mathfrak{B}$، و مشتق ِ دوم ِ $\mathfrak{C}$ خطی ست. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathsf{PB}_3(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}) &= J^{a\,b}\,J^{d\,c}\,(\partial_a\,\mathfrak{A})\,(\partial_d\,\mathfrak{B})\,(\partial_b\,\partial_c\,\mathfrak{C}),\\ &= -J^{a\,b}\,J^{c\,d}\,(\partial_a\,\mathfrak{A})\,(\partial_d\,\mathfrak{B})\,(\partial_b\,\partial_c\,\mathfrak{C}),\end{aligned} \tag{1795}$$

که نشان میدهد

$$\mathsf{PB}_3(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}) = -\mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{C},\mathfrak{B}). \tag{1796}$$

البته این را از اینجا هم میشد دید که $\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}$ نسبت به $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ پادمتقارن است. به این ترتیب،

$$\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\} = \mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}) - \mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{C},\mathfrak{B}). \tag{1797}$$

همچنین، دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathsf{PB}_2(\mathfrak{C},\mathfrak{B},\mathfrak{A}) &= J^{a\,b}\,J^{c\,d}\,(\partial_a\,\mathfrak{C})\,(\partial_b\,\partial_c\,\mathfrak{B})\,(\partial_d\,\mathfrak{A}),\\ &= J^{d\,c}\,J^{b\,a}\,(\partial_d\,\mathfrak{C})\,(\partial_c\,\partial_b\,\mathfrak{B})\,(\partial_a\,\mathfrak{A}),\\ &= J^{a\,b}\,J^{c\,d}\,(\partial_a\,\mathfrak{A})\,(\partial_b\,\partial_c\,\mathfrak{B})\,(\partial_d\,\mathfrak{C}),\end{aligned} \tag{1798}$$

که نشان میدهد

$$\mathsf{PB}_2(\mathfrak{C},\mathfrak{B},\mathfrak{A}) = \mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}). \tag{1799}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\{\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\},\mathfrak{C}\} &= -\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}\},\\ &= -\mathsf{PB}_2(\mathfrak{C},\mathfrak{A},\mathfrak{B}) + \mathsf{PB}_2(\mathfrak{C},\mathfrak{B},\mathfrak{A}).\end{aligned} \tag{1800}$$

یا،

$$\{\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\},\mathfrak{C}\} = \mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}) - \mathsf{PB}_2(\mathfrak{B},\mathfrak{A},\mathfrak{C}). \tag{1801}$$

همچنین،

$$\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}\} = \mathsf{PB}_2(\mathfrak{B},\mathfrak{A},\mathfrak{C}) - \mathsf{PB}_2(\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{A}). \tag{1802}$$

یا،

$$\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}\} = \mathsf{PB}_2(\mathfrak{B},\mathfrak{A},\mathfrak{C}) - \mathsf{PB}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{C},\mathfrak{B}). \tag{1803}$$

از روابطِ (1797) و (1801) و (1803) دیده میشود

$$\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\} = \{\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\},\mathfrak{C}\} + \{\mathfrak{B},\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}\}. \tag{1804}$$

به شکل ی مشابه، نتیجه میشود

$$\{\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\},\mathfrak{C}\}=\{\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\},\mathfrak{B}\}+\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}. \tag{1805}$$

رابطه یِ (1804) را میشود چنین نوشت.

$$0=\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}+\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}\}-\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}\}. \tag{1806}$$

یا،

$$0=\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}+\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}\}+\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}\}. \tag{1807}$$

شکل ِ اخیر، نسبت به $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ متقارنتر است.

روابط ِ (1785) ، (1786) و (1787) ، (1788) و (1789) ، (1790) و (1791) ، (1804) و (1805) ، و (1807) ویژگیها یِ کروشه-یِ-پوؤَسُن َند. اینها را، به ترتیب، چنین بیان میکنند.

کروشه یِ پُؤَسُن

i1 پادمتقارن است.

i2 (نسبت به هر یک از تابعیها) خطی ست.

i3 (نسبت به هر یک از تابعیها) زنجیرئی ست.

i4 (نسبت به هر یک از تابعیها) لَیبنیتسی ست.

i5 (نسبت به هر یک از تابعیها)، با کروشه-یِ-پُؤَسُن (به جا یِ ضرب) لَیبنیتسی ست.

i6 یاکُبی ست (اتحاد ِ یاکُبی را برمیئاورَد).

68 فضا-زمان ِ فاز

در فرمول-بندی یِ هَمیلتِن هم میشود زمان را یک متغیر و پارامتر ِ تحول را چیز ی دیگر (τ) گرفت. یک راه برا یِ این کار آن است که از L_τ (لَگرانژی یِ فضا-زمانی) شروع شود و هَمیلتِنی یِ متناظر با

آن ساخته شود:

$$L_\tau(\underset{\sim}{q}, \acute{\underset{\sim}{q}}) = \acute{t}\, L(t, q, \dot{q}). \tag{1029}$$

هَمیلتِنی یِ متناظر، قرینه یِ مبدَل- ِ-لُژاندر ِ L_τ است. مبدَل- ِ-لُژاندر ِ L_τ هم چنین میشود.

$$[\mathsf{Le}(L_\tau)] = L_\tau - p_\alpha\, \acute{q}^\alpha. \tag{1808}$$

اما

$$L_\tau = p_\alpha\, \acute{q}^\alpha. \tag{1052}$$

پس،

$$[\mathsf{Le}(L_\tau)] = 0. \tag{1809}$$

به این ترتیب با این روش نمیشود به هَمیلتِنی رسید. البته اگر میشد هم، چیز ی که به دست میئامد وابسته به وجود ِ فضا-یِ-پیکربندی و لَگرانژی یِ متناظر با آن میبود، با وجود ی که فرمول-بندی یِ هَمیلتِنی و فضا-یِ-فاز، در حالت ِ کلی مستقل از لَگرانژی و فضا-یِ-پیکربندی است.

پس راه ی مستقل از لَگرانژی را دنبال میکنم. هَمیلتنی یِ متناظر با این که زمان هم یک متغیر باشد را با H_τ نشان میدهم، و به آن هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی میگویم. میخاهم H_τ را چنان بسازم که معادلات- ِ-حرکت ِ متناظر با آن هم ان معادلات- ِ-حرکت ِ متناظر با H را بدهند.

فضا یِ فاز زُج-بُعدی ست. پس فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته فرد-بُعدی میشود. اما هَمیلتِنی بر فضا یی زُج-بُعدی فرمول-بندی میشود. برا یِ فرمول-بندی یِ هَمیلتِن، اگر زمان به فضا-یِ-فاز افزوده شود باید تکانه یِ متناظر با زمان را هم به این فضا افزود. تکانه یِ متناظر با زمان را با p_0 نشان میدهم. با افزودن ِ زمان و تکانه یِ متناظر با آن به فضا-یِ-فاز ِ $(2\,\mathfrak{m})$ بُعدی، یک فضا یِ $(2\,\mathfrak{m}+2)$ بُعدی به دست میئاید که آن را با $\mathbb{P}_\tau$ نشان میدهم و به آن فضا-زمان ِ فاز میگویم:

$$\mathbb{P}_\tau = \mathbb{T} \times \mathbb{P} \times \mathbb{A}. \tag{1810}$$

یا،

$$\mathbb{P}_\tau = \mathbb{P}_{\mathsf{ext}} \times \mathbb{A}. \tag{1811}$$

که $\mathbb{A}$ مجموعه یِ تکانه-یِ-متناظر-با-زمانها ست. برا یِ یک عضو ِ $\underset{\sim}{x}$ از فضا-زمان ِ فاز،

$$\underset{\sim}{x} = (t, x, p_0). \tag{1812}$$

قبلَن x^0 برابر با زمان تعریف شده بود:

$$x^0 = t. \tag{1721}$$

حالا مختصه یِ آخر ِ $\underset{\sim}{x}$ را هم برابر با p_0 تعریف میکنم:

$$x^{2\,\mathrm{m}+1} = p_0. \tag{1813}$$

معادلات- ِ-حرکت ِ حاصل از H_τ میشوند

$$\acute{t} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, p_0}. \tag{1814}$$

$$\acute{x} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} J\, \frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, x}. \tag{1815}$$

$$\acute{p}_0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} -\, \frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, t}. \tag{1816}$$

معادلات- ِ-حرکت ِ حاصل از H هم میشوند

$$\dot{x} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} J\, \frac{\partial\, H}{\partial\, x}. \tag{1817}$$

با فرض ِ این که $\acute{t}$ صفر نیست،

$$\dot{x} = (\acute{t})^{-1}\, \acute{x}. \tag{1818}$$

در این صورت معادلات ِ (1814) و (1815) نتیجه میدهند

$$\dot{x} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, p_0}\right)^{-1} \left(J\, \frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, x}\right). \tag{1819}$$

دیده میشود این هم ان معادله یِ (1817) است، اگر و تنها اگر

$$J\,\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,x}=J\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x}\,\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0}. \tag{1820}$$

یا،

$$\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,x}=\frac{\partial\,H}{\partial\,x}\,\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0}. \tag{1821}$$

تغییر- ِ-متغیر ِ p_0 به (p_0+H) را به کار میبرم:

$$\mathsf{p}=p_0+H(t,x). \tag{1822}$$

$$H_\tau(t,x,p_0)=\mathfrak{H}(t,x,\mathsf{p}). \tag{1823}$$

که یعنی،

$$H_\tau(t,x,p_0)=\mathfrak{H}[t,x,p_0+H(t,x)]. \tag{1824}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,x}=\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,\mathsf{p}}\,\frac{\partial\,\mathsf{p}}{\partial\,x}. \tag{1825}$$

پس،

$$\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,x}=\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,\mathsf{p}}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x}. \tag{1826}$$

همچنین،

$$\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0}=\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,\mathsf{p}}\,\frac{\partial\,\mathsf{p}}{\partial\,p_0}. \tag{1827}$$

پس،

$$\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0}=\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,\mathsf{p}}. \tag{1828}$$

به این ترتیب (1821) میشود

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\,\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}\,\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}. \tag{1829}$$

این همئرز است با

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = 0. \tag{1830}$$

پس (1821) همئرز است با

$$H_\tau(t, x, p_0) = \mathfrak{H}(t, \mathsf{p}). \tag{1831}$$

که یعنی،

$$H_\tau(t, x, p_0) = \mathfrak{H}[t, p_0 + H(t, x)]. \tag{1832}$$

$\mathfrak{H}$ تابع ی دلبخاه از t و p است، با این شرط که مشتق ِ $\mathfrak{H}$ نسبت به p صفر نیست:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}} \neq 0. \tag{1833}$$

بر حسب ِ $\mathfrak{H}$، معادلات- ِ-حرکت میشوند

$$\acute{t} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}. \tag{1834}$$

$$\acute{x} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\,\left(J\,\frac{\partial H}{\partial x}\right). \tag{1835}$$

$$\acute{p}_0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\,\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1836}$$

از حذف ِ τ بین ِ معادلات ِ (1834) و (1835)، چنان که انتظار میرود معادله ی ِ (1817) به دست میئاید. همچنین،

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x^a}\,\dot{x}^a, \tag{1837}$$

که با استفاده از معادله-یِ-حرکت برا یِ x میشود

$$\dot{H} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x^a}\, J^{a\,b}\, \frac{\partial H}{\partial x^b}. \tag{1838}$$

جمله یِ دوم صفر است، چون J پادمتقارن است. پس،

$$\dot{H} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1839}$$

به این ترتیب (1836) چنین میشود.

$$\acute{p}_0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\, \dot{H}. \tag{1840}$$

این هم، با استفاده از (1834) میشود

$$\acute{p}_0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \acute{H}. \tag{1841}$$

یا،

$$\acute{\mathsf{p}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{1842}$$

که میشود آن را، با استفاده از (1834)، چنین نوشت.

$$\dot{\mathsf{p}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{1843}$$

در فرمول-بندی یِ لَگرانژ، وارد-کردن ِ پارامتر- ِ-تحول ِ τ رابطه یِ متغیرها یِ فضا-یِ-پیکربندی با زمان در معادلات- ِ-حرکت را تغییر نمیدهد، فقط یک رابطه یِ جدید بین ِ زمان و τ میدهد، که آن هم دلبخاه است. در فرمول-بندی یِ هَمیلتِن هم، وارد-کردن ِ پارامتر- ِ-تحول ِ τ رابطه یِ متغیرها یِ فضا-یِ-فاز با زمان در معادلات- ِ-حرکت را تغییر نمیدهد. اینجا هم یک تابع ِ آزاد، $\mathfrak{H}$ هست، که بستگی یِ زمان و تکانه یِ متناظر با آن به τ را میدهد.

$\mathfrak{H}$ یک تابع ِ دُ-متغیری ست. معادلات ِ (1834) و (1842) تحول ِ متغیرها یِ آن، t و p، را میدهند. این معادلات شبیه ِ معادلات ِ تحول در یک فضا-یِ-فاز ِ دُ-بُعدی، با مختصات ِ (t, p)،

با هَمیلتِنی یِ $\mathfrak{H}$ اند. دیده میشود

$$\acute{\mathfrak{H}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\,\acute{t} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\,\acute{\mathsf{p}}, \tag{1844}$$

که با استفاده از معادلات- ِ-حرکت ِ (1834) و (1842) میشود

$$\acute{\mathfrak{H}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\,\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\,\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{1845}$$

پس،

$$\acute{\mathfrak{H}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{1846}$$

یا،

$$\dot{\mathfrak{H}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{1847}$$

یک حالت ِ خاص این است که $\mathfrak{H}$ به t وابسته نباشد (مشتق ِ پارِئی یِ $\mathfrak{H}$ نسبت به t صفر باشد):

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0. \tag{1848}$$

در این صورت $\mathfrak{H}(\mathsf{p})$ بر-لاک ثابت است، که یعنی p بر-لاک ثابت است. البته این که p بر-لاک ثابت است، از (1842) هم مستقیمَن دیده میشود.

یک انتخاب ِ ساده برا یِ $\mathfrak{H}$ چنین است.

$$\mathfrak{H}(t, \mathsf{p}) = \mathsf{p}. \tag{1849}$$

این یعنی

$$H_\tau(t, x, p_0) = p_0 + H(t, x). \tag{1850}$$

با این انتخاب، معادلات- ِ-حرکت میشوند

$$\acute{t} \stackrel{\text{ns}}{=} 1. \tag{1851}$$

$$\acute{x} \stackrel{\text{ns}}{=} J\,\frac{\partial\,H}{\partial x}. \tag{1852}$$

$$\acute{p}_0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\frac{\partial\,H}{\partial\,t}. \tag{1853}$$

معادله یِ (1851) همئرز است با

$$t \stackrel{\text{ns}}{=} \tau + \mathfrak{a}, \tag{1854}$$

که $\mathfrak{a}$ یک ثابت است. با استفاده از (1854)، یا هم ان (1851)، معادله یِ (1852) هم ان (1817) میشود، چنان که انتظار میرود. معادله یِ (1853) هم میشود

$$\dot{p}_0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\frac{\partial\,H}{\partial\,t}. \tag{1855}$$

این را هم، با استفاده از معادله یِ (1839)، میشود چنین نوشت.

$$\dot{p}_0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\dot{H}. \tag{1856}$$

و این معادله همئرز است با

$$p_0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\,H + \mathfrak{b}, \tag{1857}$$

که $\mathfrak{b}$ یک ثابت است.

پس انتخابِ (1849)، یا همئرز با آن (1850)، یعنی پارامتر-ِ-تحولِ τ عملَن هم ان زمان است (ثابتِ $\mathfrak{a}$ هر چه باشد در گذرِ زمان اثر ی ندارد، و البته میشود $\mathfrak{a}$ را صفر گرفت)، و p_0 عملَن قرینه یِ هَمیلتِنی ست (کاستنِ ثابتِ $\mathfrak{b}$ از هَمیلتِنی، بر معادلات-ِ-حرکت اثر ی ندارد، و البته میشود $\mathfrak{b}$ را صفر گرفت). با صفر-گرفتنِ $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$، معادلاتِ (1854) و (1857)، به ترتیب، میشوند

$$t \stackrel{\text{ns}}{=} \tau. \tag{1858}$$

$$p_0 \stackrel{\text{ns}}{=} -\,H. \tag{1859}$$

وقت ی کمیتها یِ اضافی (τ و p_0) حذف شوند هم هم ان معادلاتِ (1817) (معادلات-ِ-حرکت بر حسبِ t) به دست میئایند. البته این کلی ست و به انتخابِ (1849) بستگی ندارد.

لَگرانژی یِ فضا-یِ-فاز را هم میشود به شکل ِ یک تابع از متغیرها یِ فضا-زمان ِ فاز و مشتق ِ این متغیرها نوشت. $L_\phi^{\backslash}$ را چنین تعریف میکنم.

$$L_\phi^{\backslash}(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p},\dot{q},\underset{\sim}{\dot{p}}) = L_\phi(t,q,p,\dot{q},\dot{p}). \tag{1860}$$

که یعنی

$$L_\phi^{\backslash}(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p},\dot{q},\underset{\sim}{\dot{p}}) = p\,\dot{q} - H(t,q,p). \tag{1861}$$

دیده میشود

$$\partial\!\!\!/_{(1)\,i}\, L_\phi^{\backslash} = \partial\!\!\!/_{(1)\,i}\, L_\phi. \tag{1862}$$

$$\partial\!\!\!/_{(2)}{}^{i}\, L_\phi^{\backslash} = \partial\!\!\!/_{(2)}{}^{i}\, L_\phi. \tag{1863}$$

پس معادلات- ِ-حرکت ِ فضا-یِ-فاز که با $L_\phi^{\backslash}$ به دست میئایند، هم انها یَند که با L_ϕ به دست میئایند. اما $L_\phi^{\backslash}$ به p_0 و $\dot{p}_0$ بستگی ندارد:

$$\frac{\partial\, L_\phi^{\backslash}}{\partial\, p_0} = 0. \tag{1864}$$

$$\frac{\partial\, L_\phi^{\backslash}}{\partial\, \dot{p}_0} = 0. \tag{1865}$$

به این ترتیب،

$$\partial\!\!\!/_{(2)}{}^{0}\, L_\phi^{\backslash} = 0. \tag{1866}$$

همچنین،

$$\dot{t} = 1. \tag{1867}$$

و بستگی یِ $L_\phi^{\backslash}$ به $\dot{t}$ مشخص نیست. این یعنی $[\partial\!\!\!/_{(1)\,0}\, L_\phi^{\backslash}]$ خُش-تعریف نیست.

رابطه یِ (1866) یعنی یک ی از معادلات- ِ-حرکت (معادله ای که قرار بود $\dot{t}$ را بدهد) اتحاد است. این که $[\partial\!\!\!/_{(1)\,0}\, L_\phi^{\backslash}]$ خُش-تعریف نیست، یعنی معادله ای که قرار بود $\dot{p}_0$ را بدهد خُش-تعریف

نیست. پس با استفاده از $L_\phi^{\backslash}$ به جا یِ L_ϕ دقیقَن هم ان معادله-یِ-حرکت ِ قبلی به دست میئاید، نَ کمتر و نَ بیشتر. البته $\dot{t}$ یک است، اما این از تعریف نتیجه میشود نَ از معادله-یِ-حرکت. $\dot{p}_0$ هم به دست نمیئاید، اما این هم بر معادلات- ِ-حرکت ِ متغیرها یِ دیگر اثر ی ندارد، چون p_0 جا یی ظاهر نمیشود.

میشود t را یک متغیر ِ دینامیکی، و پارامتر- ِ-تحول را چیز ی غیر از t گرفت. با τ به عنوان ِ پارامتر- ِ-تحول، $L_\phi^{\backslash\backslash}$ را یک شکل ِ دیگر ِ لَگرانژی یِ فضا-یِ-فاز تعریف میکنم، که

$$\int (\mathrm{d}\,\tau)\, L_\phi^{\backslash\backslash} = \int (\mathrm{d}\,t)\, L_\phi^{\backslash}. \tag{1868}$$

پس،

$$L_\phi^{\backslash\backslash}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}', \underset{\sim}{p}') = t'\, L_\phi^{\backslash}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \dot{q}, \dot{p}). \tag{1869}$$

و بر حسب ِ خُد ِ L_ϕ،

$$L_\phi^{\backslash\backslash}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}', \underset{\sim}{p}') = t'\, L_\phi(t, q, p, \dot{q}, \dot{p}). \tag{1870}$$

که یعنی،

$$L_\phi^{\backslash\backslash}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}', \underset{\sim}{p}') = t'\, [p\, \dot{q} - H(t, q, p)]. \tag{1871}$$

یا،

$$L_\phi^{\backslash\backslash}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}', \underset{\sim}{p}') = p\, q' - H(t, q, p)\, t'. \tag{1872}$$

دیده میشود

$$\text{ɘ}\partial_{(1)\,0}\, L_\phi^{\backslash\backslash} = -\frac{\partial\, H}{\partial\, t}\, t' + H'. \tag{1873}$$

$$\text{ɘ}\partial_{(1)\,i}\, L_\phi^{\backslash\backslash} = -p_i' - \frac{\partial\, H}{\partial\, q^i}\, t'. \tag{1874}$$

$$\text{ɘ}\partial_{(2)}{}^{i}\, L_\phi^{\backslash\backslash} = q^{i\prime} - \frac{\partial\, H}{\partial\, p_i}\, t'. \tag{1875}$$

یا،

$$\text{ɵ}\partial_{(1)\,0}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi} = \acute{t}\,\left(-\frac{\partial\,H}{\partial\,t} + \dot{H}\right). \tag{1876}$$

$$\text{ɵ}\partial_{(1)\,i}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi} = \acute{t}\,\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial\,H}{\partial\,q^i}\right). \tag{1877}$$

$$\text{ɵ}\partial_{(2)}{}^{i}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi} = \acute{t}\,\left(-\dot{q}^i - \frac{\partial\,H}{\partial\,p_i}\right). \tag{1878}$$

پس،

$$\text{ɵ}\partial_{(1)\,i}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi} = \acute{t}\,\text{ɵ}\partial_{(1)\,i}\,L_{\phi}. \tag{1879}$$

$$\text{ɵ}\partial_{(2)}{}^{i}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi} = \acute{t}\,\text{ɵ}\partial_{(2)}{}^{i}\,L_{\phi}. \tag{1880}$$

اینها یعنی معادلات- ِ-حرکت ی که از $L^{\backprime\backprime}_{\phi}$ برا یِ q و p به دست میئایند، با معادلات- ِ-حرکت ی که از L_{ϕ} برا یِ q و p به دست میئایند همئرز َند. به این ترتیب، از (1876) و (1839) هم دیده میشود

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \text{ɵ}\partial_{(1)\,0}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi}. \tag{1881}$$

که یعنی اگر $\text{ɵ}\partial_{(1)\,i}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi}$ و $\text{ɵ}\partial_{(2)}{}^{i}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi}$ صفر باشند، $\text{ɵ}\partial_{(1)\,0}\,L^{\backprime\backprime}_{\phi}$ هم صفر میشود. پس معادلات- ِ-حرکت ی که از $L^{\backprime\backprime}_{\phi}$ به دست میئایند، با معادلات- ِ-حرکت ی که از L_{ϕ} به دست میئایند همئرز َند. همه یِ اینها فقط بستگی یِ q و p به t را میدهند. بستگی یِ q و p و t به τ به دست نمیئاید. البته اینها شبیه ِ هم ان َند که در فرمول-بندی یِ لَگرانژ به دست آمد.

برا یِ این که بستِگی یِ متغیرها به τ به دست آید، باید لَگرانژی به p_0 وابسته باشد. رُشن است که

$$L^{\backprime\backprime}_{\phi} = p\,\acute{q} + p_0\,\acute{t} - (p_0 + H)\,\acute{t}. \tag{1882}$$

اما طرف ِ راست هنوز مستقل از p_0 است. این که بستِگی یِ متغیرها به τ از معادلات- ِ-حرکت ِ اولیه (آنها که از L_{ϕ} به دست میئایند) نتیجه نمیشود، یعنی در بستِگی یِ متغیرها به τ آزادی هست: مثلَن میشود بستگی یِ t به τ را انتخاب کرد. یک انتخاب ِ ساده این است که $\acute{t}$ یک گرفته شود. $L^{\backprime\backprime\backprime}_{\phi}$ را هم ان $L^{\backprime\backprime}_{\phi}$ در (1882) تعریف میکنم، که در جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست به جا یِ $\acute{t}$ یک گذاشته شده:

$$L^{\backprime\backprime\backprime}_{\phi} = p\,\acute{q} + p_0\,\acute{t} - (p_0 + H). \tag{1883}$$

یعنی،

$$L_{\phi}^{\prime\prime\prime} = \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\acute{q}} - \mathsf{p}. \tag{1884}$$

$L_{\phi}^{\prime\prime\prime}$ یک شکلِ خاص از لَگرانژی یِ فضا-زمان-ِ-فاز است. یک شکلِ کلیتر، که آن را با $L_{\phi\,\tau}$ نشان میدهم، چنین به دست میئاید که به جا یِ جمله یِ دومِ طرفِ راستِ (1882) یک تابعِ دلبخاه بگذارم:

$$L_{\phi\,\tau} = p\,\acute{q} + p_0\,\acute{t} - \mathfrak{A}. \tag{1885}$$

از مقایسه یِ این با لَگرانژی یِ فضا-یِ-فاز دیده میشود $\mathfrak{A}$ هم ان H_τ (هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی) است:

$$\mathfrak{A} = H_\tau. \tag{1886}$$

به این ترتیب،

$$L_{\phi\,\tau} = \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\acute{q}} - H_\tau. \tag{1887}$$

قبلَن دیده شد معادلات-ِ-حرکتِ حاصل از H_τ برا یِ متغیرها یِ فضا-یِ-فاز با معادلات-ِ-حرکتِ حاصل از H همئرز َند، اگر و تنها اگر H_τ به شکلِ (1831)، یعنی به شکلِ (1832)، باشد. به این ترتیب،

$$L_{\phi\,\tau} = \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\acute{q}} - \mathfrak{H}(t, \mathsf{p}). \tag{1888}$$

مفصلتر،

$$L_{\phi\,\tau}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{\acute{q}}, \underset{\sim}{\acute{p}}) = \underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\acute{q}} - \mathfrak{H}[t, p_0 + H(\underset{\sim}{q}, p)]. \tag{1889}$$

یا،

$$L_{\phi\,\tau}(t, q, p, p_0, \acute{t}, \acute{q}, \acute{p}, \acute{p}_0) = p_0\,\acute{t} + p_i\,\acute{q}^i - \mathfrak{H}[t, p_0 + H(t, q, p)]. \tag{1890}$$

تعریف ِ کروشه-یِ-پُؤَسُن را هم میشود به فضا-زمان ِ فاز گسترش داد. وقت ی $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ تابعیها یی از فضا-زمان ِ فاز َند، $\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_\tau$ را چنین تعریف میکنم.

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_\tau = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,q^\alpha}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,p_\alpha} - \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,p_\alpha}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,q^\alpha}. \tag{1891}$$

دیده میشود

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_\tau = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,q^0}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,p_0} - \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,p_0}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,q^0} + \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,q^i}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,p_i} - \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,p_i}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,q^i}. \tag{1892}$$

که یعنی،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_\tau = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,p_0} - \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,p_0}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,t} + \{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}. \tag{1893}$$

به $\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_\tau$ کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{B}$ میگویم.

متناظر با کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته، ماتریس- ِ-همتافته یِ گسترش-یافته را با $\mathcal{J}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\{x^{\mathsf{a}},x^{\mathsf{b}}\}_\tau = \mathcal{J}^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}. \tag{1894}$$

قرارداد کرده ام که شاخصها یِ ماشین-تحریری یِ لاتین، برا یِ فضا-زمان- ِ-فاز ِ $(2\,m+2)$ بُعدی مقدارها یِ صفر تا $(2\,m+1)$ را میگیرند. مئلفِها یِ $\mathcal{J}$ چنین میشوند.

$$\mathcal{J}^{0\,\mathsf{b}} = \delta^{\mathsf{b}}_{2\,m+1}. \tag{1895}$$

$$\mathcal{J}^{a\,0} = 0. \tag{1896}$$

$$\mathcal{J}^{a\,b} = J^{a\,b}. \tag{1897}$$

$$\mathcal{J}^{a\,(2\,m+1)} = 0. \tag{1898}$$

$$\mathcal{J}^{(2\,m+1)\,\mathsf{b}} = -\delta^{\mathsf{b}}_0. \tag{1899}$$

کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ مئلفِها یِ q و p چنین است.

$$\{q^i,q^j\} = 0. \tag{1782}$$

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j. \tag{1783}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0. \tag{1784}$$

کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ مئلفِها یِ $\underset{\sim}{q}$ و $\underset{\sim}{p}$ چنین میشود.

$$\{q^\alpha, q^\beta\}_\tau = 0. \tag{1900}$$

$$\{q^\alpha, p_\beta\}_\tau = \delta^\alpha_\beta. \tag{1901}$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\}_\tau = 0. \tag{1902}$$

از این پس مئلفِها یِ $\underset{\sim}{J}$ را با خُد ِ J نشان میدهم. پس رابطه یِ (1894) میشود

$$\{x^{\mathtt{a}}, x^{\mathtt{b}}\}_\tau = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{1903}$$

تعریف میکنم

رُشن است که اگر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ هر-دُ مستقل از p_0 باشند، کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{B}$ هم ان کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{B}$ است:

$$\left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,p_0} = 0\right) \wedge \left(\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,p_0} = 0\right)\right]. \quad \Rightarrow$$

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_\tau = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}. \tag{1904}$$

اگر $\mathfrak{A}$ مستقل از p_0 باشد، یک ی از جملات ِ اضافی در کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{B}$ صفر میشود:

$$\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,p_0} = 0. \quad \Rightarrow$$

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_\tau = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,p_0} + \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}. \tag{1905}$$

یک مُرِد- ِ-خاص ِ مهم ِ حالت ِ بالا (که $\mathfrak{A}$ مستقل از p_0 است)، کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ $\mathfrak{A}$ (یک تابعی از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته) با هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی ست:

$$\{\mathfrak{A}, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0} + \{\mathfrak{A}, H_\tau\}. \tag{1906}$$

این هم، با استفاده از (1831) میشود

$$\{\mathfrak{A}, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\frac{\partial \mathsf{p}}{\partial p_0} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial p_0}\right) + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\{\mathfrak{A}, \mathsf{p}\} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{t}}\{\mathfrak{A}, \mathsf{t}\}. \quad (1907)$$

مشتق ِ t نسبت به p_0 صفر است:

$$\frac{\partial t}{\partial p_0} = 0. \quad (1908)$$

مشتق ِ t نسبت به x هم صفر است:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0. \quad (1909)$$

پس کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ هر تابعی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته با t صفر است:

$$\{\mathfrak{A}, t\} = 0. \quad (1910)$$

به این ترتیب،

$$\{\mathfrak{A}, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\frac{\partial \mathsf{p}}{\partial p_0} + \{\mathfrak{A}, \mathsf{p}\}\right). \quad (1911)$$

از تعریف ِ p، رابطه یِ (1822)، دیده میشود

$$\frac{\partial \mathsf{p}}{\partial p_0} = 1. \quad (1912)$$

$$\{\mathfrak{A}, \mathsf{p}\} = \{\mathfrak{A}, p_0\} + \{\mathfrak{A}, H\}. \quad (1913)$$

مشتق ِ p_0 نسبت به x صفر است:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0. \quad (1914)$$

پس کروشه- یِ-پُؤَسُن ِ هر تابعی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته با p_0 صفر است:

$$\{\mathfrak{A}, p_0\} = 0. \quad (1915)$$

به این ترتیب،

$$\{\mathfrak{A}, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \{\mathfrak{A}, H\} \right). \tag{1916}$$

تحول ِ زمانی یِ تابعی یِ $\mathfrak{A}$ از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته با (1771) داده میشود:

$$\dot{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \{\mathfrak{A}, H\}. \tag{1771}$$

به شکل ی مشابه، تحول ِ تابعی یِ $\mathfrak{A}$ از فضا-زمان ِ فاز چنین میشود.

$$\acute{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \{\mathfrak{A}, H_\tau\}_\tau. \tag{1917}$$

اینجا مانسته یِ جمله یِ اول در طرف ِ راست ِ (1771) ظاهر نمیشود، چون $\mathfrak{A}$ صریحَن به τ وابسته نیست. اگر $\mathfrak{A}$ به p_0 وابسته نباشد (دامنه یِ $\mathfrak{A}$ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته باشد)، طرف ِ راست ِ (1917) از رابطه یِ (1916) به دست میئاید. در این صورت،

$$\acute{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \{\mathfrak{A}, H\} \right). \tag{1918}$$

و با استفاده از (1834)،

$$\acute{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \acute{t} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \{\mathfrak{A}, H\} \right). \tag{1919}$$

رُشن است که

$$\acute{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \acute{t}\, \dot{\mathfrak{A}}. \tag{1920}$$

پس (1919) هم ان (1771) است.

یک حالت ِ خاصتر این است که $\mathfrak{H}$ به شکل ِ (1849) انتخاب شود. در این صورت $\acute{t}$ بر-لاک یک میشود. پس،

$$\acute{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \{\mathfrak{A}, H\}. \tag{1921}$$

و البته،

$$\acute{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{\mathfrak{A}}. \tag{1922}$$

پس (1921) هم ان (1771) است.

69 مختصات ِ کانُنیک

شکل ِ معادله-یِ-حرکت ِ حاصل از لَگرانژی (معادله یِ اُیلِر-لَگرانژ) با عوض-کردن ِ مختصات تغییر نمیکند. میخاهم اثر ِ تغییر- ِ-مختصات بر معادله یِ هَمیلتِن را بررسی کنم. مختصات ِ جدید را با پریم نشان میدهم. اول حالت ی را بررسی میکنم که مختصات ِ جدید تابع ِ فقط مختصات ِ فضا-یِ-فاز َند، یعنی به زمان وابسته نیستند:

$$\frac{\partial x'^a}{\partial t} = 0. \tag{1923}$$

معادله یِ تحول برا یِ مختصات ِ پریم-دار میشود

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x'^a, H\}. \tag{1924}$$

یعنی

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} J^{b\,c}\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,\frac{\partial H}{\partial x^c}. \tag{1925}$$

یا،

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} J^{b\,c}\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,\frac{\partial H}{\partial x'^d}\,\frac{\partial x'^d}{\partial x^c}. \tag{1926}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} J^{a'\,d'}\,\frac{\partial H}{\partial x'^d}. \tag{1927}$$

که،

$$J^{a'\,d'} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,\frac{\partial x'^d}{\partial x^c}\,J^{b\,c}. \tag{1928}$$

شکل ِ معادلات- ِ-تحول برا یِ مختصات ِ پریم-دار هم ان شکل ِ معادلات- ِ-تحول برا یِ مختصات ِ بدون- ِ-پریم است (مستقل از این که هَمیلتِنی چه باشد)، اگر و تنها اگر

$$J^{a'\,b'} = J^{a\,b}. \tag{1929}$$

این شرط را میشود چنین نوشت.

$$\{x'^a, x'^b\} = J^{a\,b}. \tag{1930}$$

این را میشد مستقیمَن هم از معادله یِ (1924) دید. معادله یِ (1924) میشود

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x'^a, x'^b\}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x'^b}. \tag{1931}$$

اما

$$\{x'^a, x'^b\} = J^{c\,d}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}. \tag{1932}$$

پس معادله یِ (1931) هم ان معادله یِ (1927) است. و شرط ِ این که شکل ِ معادلات- ِ-تحول برا یِ مختصات ِ پریم-دار هم ان شکل ِ معادلات- ِ-تحول برا یِ مختصات ِ بدون- ِ-پریم باشد هم ان (1930) است، که میشود آن را چنین نوشت.

$$\{x'^a, x'^b\} = \{x^a, x^b\}. \tag{1933}$$

میگویند مختصات ِ پریم-دار کانُنیک َند، وقت ی (1930) براورده شود، که یعنی

$$J^{a\,b} = \frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,J^{c\,d}. \tag{1934}$$

پس مختصات ِ کانُنینک آنهایی یَند که مئلفِها یِ ماتریس ِ همتافته در پایه یِ متناظر با آنها به هم ان شکل ِ معمول (کانُنیک) است. با تغییر- ِ-مختصات به مختصات ِ کانُنیک است که شکل ِ معادله یِ هَمیلتِن عوض نمیشود.

رابطه یِ (1934) را بر حسب ِ مئلفِها یِ J با شاخص ِ پایین هم میشود نوشت. رابطه یِ (1934) همئرز است با

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,x^e}{\partial\,x'^a} = J^{c\,d}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x^e}{\partial\,x'^a}. \tag{1935}$$

یا،

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,x^e}{\partial\,x'^a} = J^{e\,d}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}. \tag{1936}$$

این هم همئرز است با

$$J_{f\,b}\,J_{e\,g}\,J^{a\,b}\,\frac{\partial\,x^e}{\partial\,x'^a}=J_{f\,b}\,J_{e\,g}\,J^{e\,d}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}. \tag{1937}$$

یا،

$$J_{e\,g}\,\frac{\partial\,x^e}{\partial\,x'^f}=J_{f\,b}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^g}. \tag{1938}$$

و این همئرز است با

$$J_{e\,g}\,\frac{\partial\,x^e}{\partial\,x'^f}\,\frac{\partial\,x'^f}{\partial\,x^a}=J_{f\,b}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^g}\,\frac{\partial\,x'^f}{\partial\,x^a}. \tag{1939}$$

یا،

$$J_{a\,g}=J_{f\,b}\,\frac{\partial\,x'^f}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^g}. \tag{1940}$$

اگر تبدیل- ِ-مختصات وابسته به زمان باشد، یعنی مختصات ِ جدید تابع ِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته باشند، معادله یِ تحول برا یِ مختصات ِ پریم-دار چنین میشود.

$$\dot{x}'^a\stackrel{\text{ns}}{=}\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}+\{x'^a,H\}. \tag{1941}$$

گیرم مختصات ِ پریم-دار کانُنیک َند. در این صورت معادله یِ (1941) میشود

$$\dot{x}'^a\stackrel{\text{ns}}{=}\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}+J^{a\,b}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x'^b}. \tag{1942}$$

این معادله به شکل ِ معادله یِ هَمیلتِن با هَمیلتِنی یِ H نیست. اما ممکن است به به شکل ِ معادله یِ هَمیلتِن با هَمیلتِنی یِ H' باشد:

$$\dot{x}'^a\stackrel{\text{ns}}{=}J^{a\,b}\,\frac{\partial\,H'}{\partial\,x'^b}. \tag{1943}$$

شرط ِ این که چنین باشد این است که

$$\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}=J^{a\,b}\,\frac{\partial\,(H'-H)}{\partial\,x'^b}. \tag{1944}$$

یا،

$$\frac{\partial\,(H'-H)}{\partial\,x'^c}=J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}. \tag{1945}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\frac{\partial\,(H'-H)}{\partial\,x^b}=J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}. \tag{1946}$$

این یک معادله برا یِ $(H'-H)$ است. این معادله (مُضعَن) جواب دارد، اگر و تنها اگر مشتق ِ طرف ِ راست نسبت به x متقارن باشد:

$$0=\frac{\partial}{\partial\,x^b}\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}\right)-\frac{\partial}{\partial\,x^d}\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}\right). \tag{1947}$$

رابطه یِ (1947) همئرز است با

$$\begin{aligned}0=&\,J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\left(\frac{\partial^2\,x'^c}{\partial\,x^b\,\partial\,x^d}-\frac{\partial^2\,x'^c}{\partial\,x^d\,\partial\,x^b}\right)\\&+J_{a\,c}\,\left(\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,t\,\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}-\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,t\,\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}\right).\end{aligned} \tag{1948}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست صفر است، چون مشتق ِ دوم نسبت به x متقارن است. در جمله یِ دوم، این را به کار میبَرم که J پادمتقارن است. پس،

$$J_{a\,c}\,\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,t\,\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}=-J_{a\,c}\,\frac{\partial^2\,x'^c}{\partial\,t\,\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}. \tag{1949}$$

به این ترتیب رابطه یِ (1948) همئرز است با

$$0=J_{a\,c}\,\left(\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,t\,\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}+\frac{\partial^2\,x'^c}{\partial\,t\,\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\right). \tag{1950}$$

یا،

$$0=\frac{\partial}{\partial\,t}\,\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}\right). \tag{1951}$$

از این که مختصات ِ پریم-دار کانُنیک َند، رابطه یِ (1940)، نتیجه میشود

$$J_{b\,d} = J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}. \tag{1952}$$

پس رابطه یِ (1951) همئرز است با

$$0 = \frac{\partial\,J_{b\,d}}{\partial\,t}. \tag{1953}$$

این رابطه درست است، چون مئلفِها یِ J ثابت َند. پس رابطه یِ (1947) درست است، که یعنی معادله یِ (1946) (مُضعَن) برا یِ $(H' - H)$ جواب دارد.

به این ترتیب، اگر x'^a ها مختصات ی کانُنیک باشند، معادله یِ حرکت برا یِ آنها معادله یِ هَمیلتِن است. بر عکس چه؟ یعنی اگر معادله یِ حرکت برا یِ x'^a ها معادله یِ هَمیلتِن (با یک هَمیلتنی، که لزومَن H نیست) باشد، x'^a ها حتمَن مختصات ی کانُنیک َند؟ اول حالت ی را بررسی میکنم که رابطه یِ مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز با مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز مستقل از زمان باشد. گیرم معادله یِ حرکت برا یِ x'^a ها معادله یِ هَمیلتِن با هَمیلتِنی یِ H' است، یعنی معادله یِ حرکت برا یِ x'^a ها معادله یِ (1943) است. البته معادله یِ حرکت برا یِ x'^a ها را به شکل ِ (1925) هم میشود نوشت. پس،

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,H'}{\partial\,x'^b} = J^{b\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^c}. \tag{1954}$$

این همئرز است با

$$J_{a\,d}\,J^{a\,b}\,\frac{\partial\,H'}{\partial\,x'^b} = J_{a\,d}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^c}. \tag{1955}$$

یعنی،

$$\frac{\partial\,H'}{\partial\,x'^d} = J_{a\,d}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^c}. \tag{1956}$$

این هم همئرز است با

$$\frac{\partial\,H'}{\partial\,x'^d}\,\frac{\partial\,x'^d}{\partial\,x^e} = J_{a\,d}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^d}{\partial\,x^e}. \tag{1957}$$

یعنی،

$$\frac{\partial H'}{\partial x^e} = \left(J_{a\,d}\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,\frac{\partial x'^d}{\partial x^e}\right)\,J^{b\,c}\,\frac{\partial H}{\partial x^c}. \tag{1958}$$

$\tilde{J}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{J}_{a\,b} = J_{c\,d}\,\frac{\partial x'^c}{\partial x^a}\,\frac{\partial x'^d}{\partial x^b}. \tag{1959}$$

به این ترتیب (1958) چنین میشود.

$$\frac{\partial H'}{\partial x^e} = \tilde{J}_{b\,e}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial H}{\partial x^c}. \tag{1960}$$

فرض این است که رابطه یِ مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز با مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز مستقل از H (یا H') است، و به ازا یِ هر H، یک H' هست که این رابطه برقرار باشد. از جمله، H را x^a میگیرم:

$$H = x^a. \tag{1961}$$

H' ِ متناظر را با H_1^a نشان میدهم:

$$\frac{\partial H_1^a}{\partial x^e} = \tilde{J}_{b\,e}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial x^a}{\partial x^c}. \tag{1962}$$

یعنی،

$$\frac{\partial H_1^a}{\partial x^e} = \tilde{J}_{b\,e}\,J^{b\,a}. \tag{1963}$$

یا،

$$\frac{\partial H_1^a}{\partial x^e}\,J_{c\,a} = \tilde{J}_{b\,e}\,J^{b\,a}\,J_{c\,a}. \tag{1964}$$

که میشود

$$\frac{\partial\,(J_{c\,a}\,H_1^a)}{\partial x^e} = \tilde{J}_{c\,e}. \tag{1965}$$

به این ترتیب،

$$0 = \frac{\partial\,\tilde{J}_{c\,e}}{\partial\,x^d} - \frac{\partial\,\tilde{J}_{c\,d}}{\partial\,x^e}. \tag{1966}$$

یعنی،

$$0 = \frac{\partial}{\partial\,x^d}\,\left(J_{a\,b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^e}\right) - \frac{\partial}{\partial\,x^e}\,\left(J_{a\,b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\right). \tag{1967}$$

مشتقِ دوم نسبت به x متقارن است. پس رابطه یِ بالا میشود

$$0 = J_{a\,b}\,\left(\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,x^d\,\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^e} - \frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,x^e\,\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\right). \tag{1968}$$

و چون J پادمتقارن است،

$$0 = J_{a\,b}\,\left(\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,x^d\,\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^e} + \frac{\partial^2\,x'^b}{\partial\,x^d\,\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^e}\right). \tag{1969}$$

یا،

$$0 = \frac{\partial}{\partial\,x^c}\,\left(J_{a\,b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^e}\right). \tag{1970}$$

یعنی،

$$0 = \frac{\partial\,\tilde{J}_{d\,e}}{\partial\,x^c}. \tag{1971}$$

رابطه یِ (1971) یعنی مئلفِها یِ $\tilde{J}$ (بر فضا-یِ-فاز) ثابت َند. این که مئلفِها یِ $\tilde{J}$ ثابت َند، با یک انتخابِ خاص برا یِ H در رابطه یِ (1960) به دست آمد. اما این که مئلفِها یِ $\tilde{J}$ ثابت َند مستقل از H است. چون $\tilde{J}$ به فقط رابطه یِ مختصاتِ پریم-دار با مختصاتِ بی-پریم بستگی دارد، و مستقل از H است.

رابطه یِ (1960) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\partial\,H'}{\partial\,x^e} = \tilde{J}^c{}_e\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^c}. \tag{1972}$$

که،

$$\tilde{J}^c{}_e = \tilde{J}_{b\,e}\, J^{b\,c}. \tag{1973}$$

H هرچه باشد طرف ِ راست ِ (1960)، یا (1972)، مشتق ِ یک تابع نسبت به x^e است. از جمله، H را $(x^a\, x^b)$ میگیرم:

$$H = x^a\, x^b. \tag{1974}$$

H' ِ متناظر را با $H_2^{a\,b}$ نشان میدهم:

$$\frac{\partial\, H_2^{a\,b}}{\partial\, x^e} = \tilde{J}^c{}_e\, \frac{\partial\,(x^a\, x^b)}{\partial\, x^c}. \tag{1975}$$

یعنی،

$$\frac{\partial\, H_2^{a\,b}}{\partial\, x^e} = \tilde{J}^c{}_e\,(\delta_c^a\, x^b + \delta_c^b\, x^a). \tag{1976}$$

از این نتیجه میشود

$$0 = \frac{\partial\,[\tilde{J}^c{}_e\,(\delta_c^a\, x^b + \delta_c^b\, x^a)]}{\partial\, x^d} - \frac{\partial\,[\tilde{J}^c{}_d\,(\delta_c^a\, x^b + \delta_c^b\, x^a)]}{\partial\, x^e}. \tag{1977}$$

یا، با توجه به این که مئلفِها یِ $\tilde{J}$ با شاخصها یِ پایین و در نتیجه مئلفِها یِ $\tilde{J}$ با یک شاخص ِ بالا و یک شاخص ِ پایین ثابت َند،

$$0 = \tilde{J}^c{}_e\,(\delta_c^a\, \delta_d^b + \delta_c^b\, \delta_d^a) - \tilde{J}^c{}_d\,(\delta_c^a\, \delta_e^b + \delta_c^a\, \delta_e^b). \tag{1978}$$

که میشود

$$0 = \tilde{J}^a{}_e\, \delta_d^b + \tilde{J}^b{}_e\, \delta_d^a - \tilde{J}^a{}_d\, \delta_e^b - \tilde{J}^b{}_d\, \delta_e^a. \tag{1979}$$

این هم، با ادغام ِ b با e میشود

$$0 = \tilde{J}^a{}_d + \tilde{J}^b{}_b\, \delta_d^a - \tilde{J}^a{}_d\, \delta_b^b - \tilde{J}^a{}_d. \tag{1980}$$

پس،

$$\tilde{J}^a{}_d = \mathfrak{c}\,\delta^a_d. \tag{1981}$$

که

$$\mathfrak{c} = \frac{\tilde{J}^b{}_b}{\delta^c_c}. \tag{1982}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{J}_{b\,c}\,J^{b\,e} = \mathfrak{c}\,\delta^e_c. \tag{1983}$$

که یعنی

$$\tilde{J}_{b\,c} = \mathfrak{c}\,J_{b\,c}. \tag{1984}$$

با (1981)، رابطه یِ (1972) میشود

$$\frac{\partial\,H'}{\partial\,x^e} = \mathfrak{c}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^e}. \tag{1985}$$

$\mathfrak{c}$ ثابت است. پس H هر چه باشد رابطه یِ (1985) برا یِ H' جواب دارد. از جمله میشود جواب را چنین گرفت.

$$H' = \mathfrak{c}\,H. \tag{1986}$$

به این ترتیب شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که معادله یِ حرکت برا یِ x'^a ها معادله یِ هَمیلتِن باشد این است که

$$J_{a\,b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d} = \mathfrak{c}\,J_{c\,d}. \tag{1987}$$

که $\mathfrak{c}$ (بر فضا-یِ-فاز) ثابت است. این رابطه همئرز است با

$$J_{a\,b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x^c}{\partial\,x'^e} = \mathfrak{c}\,J_{c\,d}\,\frac{\partial\,x^c}{\partial\,x'^e}. \tag{1988}$$

که میشود

$$J_{e\,b}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}=\mathfrak{c}\,J_{c\,d}\,\frac{\partial\,x^c}{\partial\,x'^e}. \tag{1989}$$

این هم همئرز است با

$$J^{e\,a}\,J_{e\,b}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}=\mathfrak{c}\,J^{e\,a}\,J_{c\,d}\,\frac{\partial\,x^c}{\partial\,x'^e}. \tag{1990}$$

که میشود

$$\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^d}=\mathfrak{c}\,J^{e\,a}\,J_{c\,d}\,\frac{\partial\,x^c}{\partial\,x'^e}. \tag{1991}$$

و این همئرز است با

$$J^{b\,d}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^d}=\mathfrak{c}\,J^{b\,d}\,J^{e\,a}\,J_{c\,d}\,\frac{\partial\,x^c}{\partial\,x'^e}. \tag{1992}$$

که میشود

$$J^{b\,d}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^d}=\mathfrak{c}\,J^{e\,a}\,\frac{\partial\,x^b}{\partial\,x'^e}. \tag{1993}$$

سرانجام، این همئرز است با،

$$J^{b\,d}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^d}=\mathfrak{c}\,J^{e\,a}\,\frac{\partial\,x^b}{\partial\,x'^e}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}. \tag{1994}$$

که به این رابطه ساده میشود.

$$J^{b\,d}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^d}=\mathfrak{c}\,J^{c\,a}. \tag{1995}$$

یا،

$$\{x'^a,x'^b\}=\mathfrak{c}\,J^{a\,b}. \tag{1996}$$

رابطه یِ (1996) شرط ِ لازم و کافی برا یِ این است که معادله یِ حرکت برا یِ x'^a ها معادله یِ هَمیلتِن باشد. در این رابطه $\mathfrak{c}$ ثابت است؛ و مختصات ِ پریم-دار کانُنیک َند، اگر و تنها اگر $\mathfrak{c}$ یک باشد.

هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی به پارامتر- ِ-تحول ِ τ بستگی ندارد. تبدیل- ِمختصات در فضا-زمان- ِ-فاز هم به پارامتر- ِ-تحول بستگی ندارد. به هم ین خاطر بحث ِ تبدیلها یِ وابسته-به-زمان، بر حسب ِ فضا-زمان ِ فاز مختصرتر میشود، و مشابه با بحث ِ تبدیل- ِ-مختصات ِ مستقل-از-زمان در فضا-یِ-فاز است. شرط ِ این که معادله-یِ-حرکت برا یِ مختصات ِ پریم-دار معادله یِ هَمیلتِن با هم ان هَمیلتنی-یِ-فضا-زمانی یِ H_τ باشد این است که مختصات ِ پریم-دار کانُنیک باشند، یعنی این عبارتها یِ همئرز با هم:

$$\{x'^{\mathtt{a}}, x'^{\mathtt{b}}\}_\tau = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{1997}$$

$$\{x'^{\mathtt{a}}, x'^{\mathtt{b}}\}_\tau = \{x^{\mathtt{a}}, x^{\mathtt{b}}\}_\tau. \tag{1998}$$

$$J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} = \frac{\partial\, x'^{\mathtt{a}}}{\partial\, x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\, x'^{\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}. \tag{1999}$$

روابط ِ (1997) تا (1999) مانستِها یِ، به ترتیب، روابط ِ (1930) و (1933) و (1934) اند. تبدیل- ِ-مختصاتها یِ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته آنها یی یَند که t' هم ان t است، و x'^a ها هم تابع ِ فقط x^α ها یَند، یعنی به p_0 بستِگی ندارند. به این ترتیب کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته برا یِ مختصات ِ (پریم-دار یا بی-پریم ِ) فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته هم ان کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ معمول میشود:

$$\{x'^\alpha, x'^\beta\}_\tau = \{x'^\alpha, x'^\beta\}. \tag{2000}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_\tau = \{x^\alpha, x^\beta\}. \tag{2001}$$

پس (1998) رابطه یِ (1933) را نتیجه میدهد. از (1998) ضمنَن نتیجه میشود

$$\{t, x'^\beta\} = 0. \tag{2002}$$

که چون x'^β ها به p_0 بستگی ندارند برقرار است. از (1998) همچنین نتیجه میشود

$$\{t, p'_0\}_\tau = 1. \tag{2003}$$

$$\{x'^a, p'_0\}_\tau = 0. \tag{2004}$$

رابطه یِ (2003) همئرز است با

$$\{t, (p'_0 - p_0)\}_\tau = 0. \tag{2005}$$

این هم یعنی

$$\frac{\partial\,(p_0' - p_0)}{\partial\,p_0} = 0. \tag{2006}$$

یعنی $(p_0' - p_0)$ تابعِ فقط مختصاتِ فضا-یِ-فازِ گسترش-یافته است:

$$p_0 - p_0' = \mathcal{F}(t, x). \tag{2007}$$

هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی عوض نشده:

$$H_\tau' = H_\tau. \tag{2008}$$

و البته،

$$H_\tau(t, x, p_0) = \mathfrak{H}[t, p_0 + H(t, x)]. \tag{1832}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{H}[t, p_0 + H(t, x)] = \mathfrak{H}\{t, p_0' + [H(t, x) + p_0 - p_0']\}. \tag{2009}$$

یعنی

$$\mathfrak{H}[t, p_0 + H(t, x)] = \mathfrak{H}[t, p_0' + H'(t, x)]. \tag{2010}$$

که،

$$H'(t, x) = H(t, x) + \mathcal{F}(t, x). \tag{2011}$$

به این ترتیب معادله یِ حرکت برا یِ مئلفِها یِ x' معادله یِ هَمیلتِن با هَمیلتِنی یِ H' است. چیز ی که مانده رابطه یِ (2004) است، که میشود آن را چنین نوشت.

$$\{x'^a, \mathcal{F}\}_\tau = \{x'^a, p_0\}_\tau. \tag{2012}$$

چون x'^a ها و $\mathcal{F}$، هیچ کدام به p_0 وابسته نیستند، کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ طرف ِ چپ کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ معمول ست. به این ترتیب (2012) میشود

$$\{x'^a, \mathcal{F}\} = \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}. \tag{2013}$$

یعنی

$$J^{b\,c}\,\frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^b}\,\frac{\partial\, \mathcal{F}}{\partial\, x^c} = \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}. \tag{2014}$$

این همئرز است با

$$J^{b\,c}\,\frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^b}\,\frac{\partial\, \mathcal{F}}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\, x^d}{\partial\, x'^a} = \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}\,\frac{\partial\, x^d}{\partial\, x'^a}. \tag{2015}$$

که میشود

$$J^{d\,c}\,\frac{\partial\, \mathcal{F}}{\partial\, x^c} = \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}\,\frac{\partial\, x^d}{\partial\, x'^a}. \tag{2016}$$

این هم همئرز است با

$$J_{d\,b}\,J^{d\,c}\,\frac{\partial\, \mathcal{F}}{\partial\, x^c} = J_{d\,b}\,\frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}\,\frac{\partial\, x^d}{\partial\, x'^a}. \tag{2017}$$

که میشود

$$\frac{\partial\, \mathcal{F}}{\partial\, x^b} = J_{d\,b}\,\frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}\,\frac{\partial\, x^d}{\partial\, x'^a}. \tag{2018}$$

گیرم (1933) برقرار است. از (1933) رابطه یِ (1938) نتیجه میشود، یعنی

$$J_{d\,b}\,\frac{\partial\, x^d}{\partial\, x'^a} = J_{a\,c}\,\frac{\partial\, x'^c}{\partial\, x^b}. \tag{2019}$$

پس (2018) همئرز است با

$$\frac{\partial\, \mathcal{F}}{\partial\, x^b} = J_{a\,c}\,\frac{\partial\, x'^c}{\partial\, x^b}\,\frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}. \tag{2020}$$

این یک معادله برا یِ $\mathcal{F}$ است. این معادله (مُضعَن) جواب دارد، اگر و تنها اگر مشتق ِ طرف ِ راست نسبت به x متقارن باشد:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^b}\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial x'^c}{\partial x^d}\,\frac{\partial x'^a}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x^d}\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial x'^c}{\partial x^b}\,\frac{\partial x'^a}{\partial t}\right). \tag{2021}$$

مشتق ِ دوم نسبت به x متقارن است. پس رابطه یِ (2021) همئرز است با

$$0 = J_{a\,c}\left(\frac{\partial x'^c}{\partial x^d}\,\frac{\partial^2 x'^a}{\partial t\,\partial x^b} - \frac{\partial x'^c}{\partial x^b}\,\frac{\partial^2 x'^a}{\partial t\,\partial x^d}\right). \tag{2022}$$

J پادمتقارن است. پس رابطه یِ بالا همئرز است با

$$0 = J_{a\,c}\left(\frac{\partial x'^c}{\partial x^d}\,\frac{\partial^2 x'^a}{\partial t\,\partial x^b} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,\frac{\partial^2 x'^c}{\partial t\,\partial x^d}\right). \tag{2023}$$

یا،

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,\frac{\partial x'^c}{\partial x^d}\right). \tag{2024}$$

از (1933) نتیجه میشود پرانتز با $J_{b\,d}$ برابر است. پس رابطه یِ بالا همئرز است با

$$0 = \frac{\partial J_{b\,d}}{\partial t}. \tag{2025}$$

که برقرار است. نتیجه این که شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-زمان- ِ-فاز کانُنیک باشند، مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز مستقل از p_0 باشند، و t' هم ان t باشد، این است که کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز با کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ مختصات ِ بی-پریم ِ متناظر برابر باشد و (2007) برقرار باشد، که $\mathcal{F}$ جواب ِ معادلات ِ (2020) است. در این حالت هَمیلتِنی یِ پریم-دار از (2011) به دست میئاید.

همچنین، مشابه با آن چه در مُرِد ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته به دست آمد، شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که معادله یِ حرکت برا یِ $x'^{\mathtt{a}}$ ها معادله یِ هَمیلتِن باشد این است که

$$\{x'^{\mathtt{a}}, x'^{\mathtt{b}}\}_\tau = \mathfrak{c}\,J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{2026}$$

که $\mathfrak{c}$ (بر فضا-زمان- ِ-فاز) ثابت است. این مانسته یِ رابطه یِ (1996) است. در این حالت معادله یِ حرکت برا یِ x'^{a} ها معادله یِ هَمیلتِن با هَمیلتِنی-یِ-فضا-زمانی یِ H'_τ است، که مانسته یِ (1985) را برمیئاورَد:

$$\frac{\partial H'_\tau}{\partial x^{\mathsf{a}}} = \mathfrak{c}\,\frac{\partial H_\tau}{\partial x^{\mathsf{a}}}. \tag{2027}$$

(معادله یِ حرکت برا یِ x^{a} ها معادله یِ هَمیلتِن با هَمیلتِنی-یِ-فضا-زمانی یِ H_τ است.) از جمله میشود H'_τ را چنین گرفت.

$$H'_\tau = \mathfrak{c}\,H_\tau. \tag{2028}$$

رُشن است که اینجا هم مختصات ِ پریم-دار کانُنینک َند، اگر و تنها اگر $\mathfrak{c}$ یک باشد.

مختصات ی که رابطه یِ (2026) را براورند را به سادگی میشود به مختصات ی کانُنیک تبدیل کرد. (1985) را چنین مینویسم.

$$\{q'^\alpha, q'^\beta\}_\tau = 0. \tag{2029}$$

$$\{q'^\alpha, p'_\beta\}_\tau = \mathfrak{c}\,\delta^\alpha_\beta. \tag{2030}$$

$$\{p'_\alpha, p'_\beta\}_\tau = 0. \tag{2031}$$

مختصات ِ زگُند-دار را چنین تعریف میکنم.

$$q''^\alpha = q'^\alpha. \tag{2032}$$

$$\mathfrak{c}\,p''_\alpha = p'_\alpha. \tag{2033}$$

دیده میشود

$$\{q''^\alpha, q''^\beta\}_\tau = 0. \tag{2034}$$

$$\{q''^\alpha, p''_\beta\}_\tau = \delta^\alpha_\beta. \tag{2035}$$

$$\{p''_\alpha, p''_\beta\}_\tau = 0. \tag{2036}$$

که یعنی

$$\{x''^{\mathsf{a}}, x''^{\mathsf{b}}\}_\tau = J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}. \tag{2037}$$

پس مختصات ِ زگُند-دار کانُنیک َند. و رُشن است که هم ین برا یِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته (به جا یِ فضا-زمان- ِ-فاز) هم کار میکند.

شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که معادله یِ حرکت برا یِ x'^α ها (مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته) معادله یِ هَمیلتِن باشد را هم میشود از شرط ِ متناظر برا یِ فضا-زمان- -فاز به دست آورد. اینجا در حالت ِ کلی ممکن است زمان هم عوض شود، اما به هر حال مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته تابع ِ فقط مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند (به p_0 وابسته نیستند).

شرط ِ (2026) برا یِ کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته میشود رابطه یِ (1996)، همراه با

$$\{t', x'^\alpha\}_\tau = 0. \tag{2038}$$

$$\{t', p'_0\}_\tau = \mathfrak{c}. \tag{2039}$$

$$\{x'^a, p'_0\}_\tau = 0. \tag{2040}$$

x'^α ها، از جمله t'، به p_0 وابسته نیستند. پس رابطه یِ (2038) میشود

$$\{t', x'^\alpha\} = 0. \tag{2041}$$

رابطه یِ مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته با مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته مستقل از p_0 است. از جمله مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته تابع ِ فقط مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند. پس،

$$\{t', x^\alpha\} = \frac{\partial\, x^\alpha}{\partial\, x'^\beta}\, \{t', x'^\beta\}. \tag{2042}$$

که، با استفاده از (2041)، نتیجه میدهد

$$\{t', x^\alpha\} = 0. \tag{2043}$$

از جمله،

$$\{t', x^a\} = 0. \tag{2044}$$

که یعنی،

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,t'}{\partial\,x^b} = 0. \tag{2045}$$

J وارون-پذیر است. پس (2045) نتیجه میدهد

$$\frac{\partial\,t'}{\partial\,x^a} = 0. \tag{2046}$$

به این ترتیب، t' به x^a ها وابسته نیست. یعنی t' تابع ِ فقط t است. پس (2039) چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial\,p'_0}{\partial\,p_0} = \mathfrak{c}. \tag{2047}$$

که نتیجه میدهد

$$p'_0 = \mathfrak{c}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[p_0 - \mathcal{F}(t,x)]. \tag{2048}$$

با این، رابطه یِ (2040) میشود

$$\{x'^a, p_0 - \mathcal{F}\}_\tau = 0. \tag{2049}$$

یا،

$$\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t} - \{x'^a, \mathcal{F}\} = 0. \tag{2050}$$

این هم ان رابطه یِ (2013) است. دیده شد شرط ِ کافی برا یِ این که (2013) برا یِ $\mathcal{F}$ جواب داشته باشد رابطه یِ (1933) است، این که x'^a ها کانُنیک باشند. x'^a ها لزومَن کانُنیک نیستند. اما x''^a ها کانُنیک هستند. رابطه یِ (2050) را بر حسب ِ x''^a ها مینویسم. مفصلتر ِ رابطه یِ (2050) چنین است.

$$\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t} - \{q'^i, \mathcal{F}\} = 0. \tag{2051}$$

$$\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t} - \{p'_i, \mathcal{F}\} = 0. \tag{2052}$$

با استفاده از (2032)، رابطه یِ (2051) چنین میشود.

$$\frac{\partial\, q''^i}{\partial\, t} - \{q''^i, \mathcal{F}\} = 0. \tag{2053}$$

با استفاده از (2033)، رابطه یِ (2052) چنین میشود.

$$\frac{\partial\, p''_i}{\partial\, t} - \{p''_i, \mathcal{F}\} = 0. \tag{2054}$$

ترکیب ِ (2053) و (2054) این است.

$$\frac{\partial\, x''^a}{\partial\, t} - \{x''^a, \mathcal{F}\} = 0. \tag{2055}$$

x''^a ها کانُنیک َند. پس (2055) برا یِ $\mathcal{F}$ جواب دارد.

سرانجام، رابطه یِ (2028) میشود

$$\mathfrak{H}'(t', p'_0 + H') = \mathfrak{c}\,\mathfrak{H}(t, p_0 + H). \tag{2056}$$

این هم، با استفاده از (2048)، میشود

$$\mathfrak{H}'\left[t', \mathfrak{c}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,(p_0 - \mathcal{F}) + H'\right] = \mathfrak{c}\,\mathfrak{H}(t, p_0 + H). \tag{2057}$$

یا،

$$\mathfrak{H}'\left[t', \mathfrak{c}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\left(p_0 - \mathcal{F} + \frac{1}{\mathfrak{c}}\,\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,H'\right)\right] = \mathfrak{c}\,\mathfrak{H}(t, p_0 + H). \tag{2058}$$

متغیر ِ درون ِ پرانتز ِ طرف- ِ-چپ را بر حسب ِ بقیه یِ متغیرها به دست میاورم. t' تابع ِ فقط t است. پس یک تابع ِ $\mathfrak{A}$ هست که

$$p_0 - \mathcal{F} + \frac{1}{\mathfrak{c}}\,\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,H' = \mathfrak{A}(t, \mathsf{p}). \tag{2059}$$

که،

$$\mathsf{p} = p_0 + H(t, x). \tag{1822}$$

مشتق ِ طرف ِ چپ ِ (2059) نسبت به p_0 (در x^α ها یِ ثابت) یک است. پس مشتق ِ طرف ِ راست هم چنین است:

$$\left\{\frac{\partial\,[\mathfrak{A}(t,p_0+H)]}{\partial\,p_0}\right\}_{\underset{\sim}{x}}=1. \tag{2060}$$

اما،

$$\left\{\frac{\partial\,[\mathfrak{A}(t,p_0+H)]}{\partial\,p_0}\right\}_{\underset{\sim}{x}}=\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,\mathsf{p}}. \tag{2061}$$

پس،

$$\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,\mathsf{p}}=1. \tag{2062}$$

که نتیجه میدهد یک $\mathfrak{h}$ هست که،

$$\mathfrak{A}(t,\mathsf{p})=\mathsf{p}+\mathfrak{h}(t). \tag{2063}$$

این هم یعنی

$$H'(t,x)=\mathfrak{c}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[H(t,x)+\mathcal{F}(t,x)+\mathfrak{h}(t)]. \tag{2064}$$

$\mathfrak{h}$ بر معادله-یِ-حرکت ِ x'^α ها اثر ی ندارد و میشود آن را صفر گذاشت:

$$H'(t,x)=\mathfrak{c}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[H(t,x)+\mathcal{F}(t,x)]. \tag{2065}$$

یک حالت ِ خاص این است که t' هم ان t باشد. در این صورت،

$$\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}=1. \tag{2066}$$

و (2065) میشود

$$H'(t,x)=\mathfrak{c}\,[H(t,x)+\mathcal{F}(t,x)]. \tag{2067}$$

در واقع برا یِ رسیدن به (2067) کافی ست $\dot{t}'$ یک باشد، یعنی (2066) برقرار باشد. اگر $\dot{t}'$ ثابت (ولی نَ لزومَن یک) باشد هم،

$$H'(t,x) = \tilde{\mathfrak{c}}\,[H(t,x) + \mathcal{F}(t,x)]. \tag{2068}$$

که $\tilde{\mathfrak{c}}$ یک ثابت است:

$$\tilde{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{2069}$$

اگر $\dot{t}'$ یک باشد، و $\mathfrak{c}$ هم یک باشد، یعنی x'^a ها کانُنیک باشند، رابطه یِ (2067) هم ان رابطه یِ (2011) میشود. رُشن است که برا یِ رسیدن به (2011) هم لازم نیست $\dot{t}'$ و $\mathfrak{c}$ هر-دُ یک باشند. کافی ست $\tilde{\mathfrak{c}}$ یک باشد.

یک حالت ِ خاص ِ دیگر این است که x'^a ها مستقل از زمان باشند. در این حالت میشود $\mathcal{F}$ را صفر گرفت و (2065) میشود

$$H'(t,x) = \mathfrak{c}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,H(t,x). \tag{2070}$$

اگر علاوه بر این مشتق ِ $\dot{t}'$ هم ثابت باشد،

$$H'(t,x) = \tilde{\mathfrak{c}}\,H(t,x). \tag{2071}$$

اگر علاوه بر اینها $\dot{t}'$ یک باشد و $\mathfrak{c}$ هم یک باشد (x'^a ها کانُنینک باشند)،

$$H' = H. \tag{2072}$$

اینجا هم رُشن است که برا یِ رسیدن به (2072)، لازم نیست $\dot{t}'$ و $\mathfrak{c}$ هر-دُ یک باشند. کافی ست $\tilde{\mathfrak{c}}$ یک باشد.

70 دُ-فرم ِ همتافته

معادله-یِ-حرکت ِ هَمیلتِن چنین است.

$$\dot{x} \overset{\text{ns}}{=} J\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x}. \tag{1817}$$

مفصلتر،

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} J^{a\,b}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,x^b}. \tag{1778}$$

اینها را میشود چنین نوشت.

$$\dot{x} \stackrel{\text{ns}}{=} J_H. \tag{2073}$$

یا، مفصلتر،

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} J_H^a. \tag{2074}$$

که $J_{\mathfrak{A}}$ برا یِ تابعی یِ $\mathfrak{A}$ از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته چنین تعریف میشود.

$$J_{\mathfrak{A}}^a = J^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^b}. \tag{2075}$$

یعنی،

$$J_{\mathfrak{A}} = J\,\mathbf{d}\,\mathfrak{A}. \tag{2076}$$

دیده میشود اگر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ تابعیها یی از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته باشند،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^a}\,J_{\mathfrak{B}}^a. \tag{2077}$$

بسته،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = (\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\,J_{\mathfrak{B}}. \tag{2078}$$

و البته این را میشود چنین نوشت.

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = \mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2079}$$

همچنین، اگر σ یک یک-فرم باشد،

$$\sigma\, J_{\mathfrak{A}} = J(\sigma, \mathbf{d}\,\mathfrak{A}). \tag{2080}$$

یا،

$$\sigma\, J_{\mathfrak{A}} = -J(\mathbf{d}\,\mathfrak{A}, \sigma). \tag{2081}$$

که یعنی،

$$\sigma\, J_{\mathfrak{A}} = -(\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\,(J\,\sigma). \tag{2082}$$

یا،

$$\sigma\, J_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{L}_{J\,\sigma}\,\mathfrak{A}. \tag{2083}$$

ار رابطه یِ (2075)، میشود مشتق ِ پارئی یِ $\mathfrak{A}$ را بر حسب ِ $J_{\mathfrak{A}}$ به دست آورد:

$$J_{a\,c}\,J^{a}_{\mathfrak{A}} = J_{a\,c}\,J^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^{b}}. \tag{2084}$$

که یعنی

$$\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^{c}} = J_{a\,c}\,J^{a}_{\mathfrak{A}}. \tag{2085}$$

J، دُ-فرم ِ همتافته، را با مئلفِها یِ J با شاخص ِ پایین تعریف میکنم:

$$J = \frac{1}{2}\,J_{a\,b}\,(\mathbf{d}\,x^{a}) \wedge (\mathbf{d}\,x^{b}). \tag{2086}$$

یا،

$$J = (\mathbf{d}\,q^{i}) \wedge (\mathbf{d}\,p_{i}). \tag{2087}$$

به این ترتیب (2085) را میشود چنین نوشت.

$$\mathbf{d}\,\mathfrak{A} = \mathbf{i}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J. \tag{2088}$$

با نشاندن ِ این در (2078) دیده میشود

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = (\mathbf{i}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J)\,(J_{\mathfrak{B}}). \tag{2089}$$

یعنی،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = J(J_{\mathfrak{A}},J_{\mathfrak{B}}). \tag{2090}$$

یا،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\} = \frac{1}{2}\,J(J_{\mathfrak{A}}\wedge J_{\mathfrak{B}}). \tag{2091}$$

از تعریف ِ J رُشن است که

$$\mathbf{d}\,J = 0. \tag{2092}$$

از (2088) هم دیده میشود

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J) = 0. \tag{2093}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J) + \mathbf{i}_{J_{\mathfrak{A}}}\,(\mathbf{d}\,J) = 0. \tag{2094}$$

برا یِ هر میدان- ِ-برداری یِ $\mathfrak{u}$ و هر میدان- ِ-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ،

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\,\sigma) + \mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\,(\mathbf{d}\,\sigma) = \mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,\sigma. \tag{2095}$$

پس (2094) نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J = 0. \tag{2096}$$

مشتق ِ لی نسبت به ادغام لَیبنیتسی ست. از جمله،

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,[J(J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}})] = (\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J)(J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}}) + J(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}}) + J(J_{\mathfrak{B}},\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J_{\mathfrak{C}}). \tag{2097}$$

از (2096) دیده میشود جمله یِ اول ِ طرف ِ راست صفر است. پس،

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,[J(J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}})] = J(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}}) + J(J_{\mathfrak{B}},\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J_{\mathfrak{C}}). \tag{2098}$$

یا،

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,[J(J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}})] = -(\mathbf{i}_{J_{\mathfrak{C}}}\,J)(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J_{\mathfrak{B}}) + (\mathbf{i}_{J_{\mathfrak{B}}}\,J)(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J_{\mathfrak{C}}). \tag{2099}$$

که، با استفاده از (2088)، میشود

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,[J(J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}})] = -(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J_{\mathfrak{B}}) + (\mathbf{d}\,\mathfrak{B})(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J_{\mathfrak{C}}). \tag{2100}$$

برا یِ هر میدان- ِ-برداری یِ $\mathfrak{u}$ و هر میدان- ِ-برداری یِ $\mathfrak{v}$،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{v} = -\mathbf{L}_{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{u}. \tag{2101}$$

پس (2100) میشود

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,[J(J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}})] = (\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,J_{\mathfrak{A}}) - (\mathbf{d}\,\mathfrak{B})(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}}\,J_{\mathfrak{A}}). \tag{2102}$$

این که مشتق ِ لی لَیبنیتسی ست، نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,[(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,J_{\mathfrak{A}}] = [\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,J_{\mathfrak{A}} + (\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,J_{\mathfrak{A}}). \tag{2103}$$

پس،

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,J_{\mathfrak{A}}) = \mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,[(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,J_{\mathfrak{A}}] - [\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,J_{\mathfrak{A}}. \tag{2104}$$

با استفاده از (2078)،

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,J_{\mathfrak{A}} &= \{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\},\\ &= -\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}.\end{aligned} \tag{2105}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,J_{\mathfrak{A}} = -(\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\,J_{\mathfrak{C}}. \tag{2106}$$

یا،

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,J_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2107}$$

پس،

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,[(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,J_{\mathfrak{A}}] = -\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}). \tag{2108}$$

مشتق ِ لی با مشتق ِ برونی جا-به-جا میشود. از جمله،

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{d} = \mathbf{d}\,\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}. \tag{2109}$$

پس،

$$[\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,J_{\mathfrak{A}} = [\mathbf{d}\,(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{C})]\,J_{\mathfrak{A}}. \tag{2110}$$

که، با استفاده از (2078)، میشود

$$[\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,J_{\mathfrak{A}} = \{\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}. \tag{2111}$$

یا، با استفاده از (2079)،

$$[\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,J_{\mathfrak{A}} = \{\{\mathfrak{C},\mathfrak{B}\},\mathfrak{A}\}. \tag{2112}$$

به این ترتیب،

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,J_{\mathfrak{A}}) = -\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}) - \{\{\mathfrak{C},\mathfrak{B}\},\mathfrak{A}\}. \tag{2113}$$

پس (2102) میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,[J(J_{\mathfrak{B}},J_{\mathfrak{C}})] &= -\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}) - \{\{\mathfrak{C},\mathfrak{B}\},\mathfrak{A}\}\\ &\quad + \mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}}\,(\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A}) + \{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\},\mathfrak{A}\}.\end{aligned} \tag{2114}$$

یا،

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\} = [\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}]\,\mathfrak{A} + 2\,\{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\},\mathfrak{A}\}. \tag{2115}$$

از (2079) دیده میشود

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\} = \{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\},\mathfrak{A}\}. \tag{2116}$$

و البته،

$$\{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\},\mathfrak{A}\} = -\mathbf{L}_{J_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2117}$$

پس (2115) چنین میشود.

$$\mathbf{L}_{J_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}}}\,\mathfrak{A} = [\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}]\,\mathfrak{A}. \tag{2118}$$

این رابطه برا یِ هر $\mathfrak{A}$ درست است. پس،

$$\mathbf{L}_{J_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}}} = [\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}]. \tag{2119}$$

جا-به-جاگر ِ مشتق- ِ-لیها هم چنین میشود.

$$[\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{B}}}] = \mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}}\,\diamond\,J_{\mathfrak{B}}}. \tag{2120}$$

پس،

$$\mathbf{L}_{J_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}}} = \mathbf{L}_{J_{\mathfrak{C}} \diamond J_{\mathfrak{B}}}. \tag{2121}$$

که نتیجه میدهد

$$J_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}} = J_{\mathfrak{C}} \diamond J_{\mathfrak{B}}. \tag{2122}$$

این رابطه، از جمله یک راه ِ دیگر برا یِ اثبات ِ اتحاد ِ یاکُبی برا یِ کروشه-یِ-پُؤَسُن میدهد:

$$\begin{aligned} J_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}} &= J_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}} \diamond J_{\mathfrak{A}}, \\ &= (J_{\mathfrak{C}} \diamond J_{\mathfrak{B}}) \diamond J_{\mathfrak{A}}. \end{aligned} \tag{2123}$$

یا،

$$J_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}} = J_{\mathfrak{A}} \diamond (J_{\mathfrak{B}} \diamond J_{\mathfrak{C}}). \tag{2124}$$

جا-به-جاگر ِ میدانها یِ برداری اتحاد ِ یاکُبی را برمیئاورَد:

$$0 = J_{\mathfrak{A}} \diamond (J_{\mathfrak{B}} \diamond J_{\mathfrak{C}}) + J_{\mathfrak{C}} \diamond (J_{\mathfrak{A}} \diamond J_{\mathfrak{B}}) + J_{\mathfrak{B}} \diamond (J_{\mathfrak{C}} \diamond J_{\mathfrak{A}}). \tag{2125}$$

پس،

$$0 = J_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}} + J_{\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}\}} + J_{\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}\}}. \tag{2126}$$

و چون $J_{\mathfrak{X}}$ نسبت به $\mathfrak{X}$ (با ضریبها یِ عددی) خطی ست،

$$0 = J_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\}+\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}\}+\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}\}}. \tag{2127}$$

از این، همراه با (2076)، نتیجه میشود

$$0 = \mathbf{d}\Big(\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}\} + \{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}\} + \{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}\}\Big). \tag{2128}$$

این هنوز اتحادِ یاکُبی نیست. رابطه یِ (2128) یعنی یک ثابتِ $\mathfrak{D}$ هست که

$$\mathfrak{D} = \{\mathfrak{A}, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\} + \{\mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}\} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\}\}. \tag{2129}$$

$\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ هر چه باشند، طرفِ راستِ (2129) یک ثابت است، که البته به $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ بستگی دارد. برقرار-بودنِ اتحادِ یاکُبی یعنی این ثابت صفر است. از (2129) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= (\partial_a \mathfrak{A})\,\{x^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\}\\ &\quad + \{\mathfrak{C}, (\partial_a \mathfrak{A})\,\{x^a, \mathfrak{B}\}\} + \{\mathfrak{B}, (\partial_a \mathfrak{A})\,\{\mathfrak{C}, x^a\}\}.\end{aligned} \tag{2130}$$

یا،

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= (\partial_a \mathfrak{A})\,(\{x^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\} + \{\mathfrak{C}, \{x^a, \mathfrak{B}\}\} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, x^a\}\})\\ &\quad + \{\mathfrak{C}, \partial_a \mathfrak{A}\}\,\{x^a, \mathfrak{B}\} + \{\mathfrak{B}, \partial_a \mathfrak{A}\}\,\{\mathfrak{C}, x^a\}.\end{aligned} \tag{2131}$$

که میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= (\partial_a \mathfrak{A})\,(\{x^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\} + \{\mathfrak{C}, \{x^a, \mathfrak{B}\}\} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, x^a\}\})\\ &\quad + (\partial_d\,\partial_a \mathfrak{A})\,(\{\mathfrak{C}, x^d\}\,\{x^a, \mathfrak{B}\} + \{\mathfrak{B}, x^d\}\,\{\mathfrak{C}, x^a\}).\end{aligned} \tag{2132}$$

یا،

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= (\partial_a \mathfrak{A})\,(\{x^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, x^a\}\} + \{\mathfrak{C}, \{x^a, \mathfrak{B}\}\})\\ &\quad + (\partial_d\,\partial_a \mathfrak{A})\,(\{\mathfrak{B}, x^d\}\,\{\mathfrak{C}, x^a\} - \{\mathfrak{B}, x^a\}\,\{\mathfrak{C}, x^d\}).\end{aligned} \tag{2133}$$

در جمله یِ دوم، ضریبِ پرانتز نسبت به a و d متقارن و خُدِ پرانتز نسبت به a و d پادمتقارن است. پس جمله یِ دوم صفر است:

$$0 = (\partial_d\,\partial_a \mathfrak{A})\,(\{\mathfrak{B}, x^d\}\,\{\mathfrak{C}, x^a\} - \{\mathfrak{B}, x^a\}\,\{\mathfrak{C}, x^d\}). \tag{2134}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{D} = (\partial_a \mathfrak{A})\,(\{x^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\} + \{\mathfrak{C}, \{x^a, \mathfrak{B}\}\} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, x^a\}\}). \tag{2135}$$

از این که طرف ِ راست ِ (2129) برا یِ هر سه-تابعی یِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ ثابت است، نتیجه میشود ثابتها یِ $\mathfrak{D}_1^a$ ی هستند که

$$\mathfrak{D}_1^a = \{x^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\} + \{\mathfrak{C}, \{x^a, \mathfrak{B}\}\} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, x^a\}\}. \tag{2136}$$

پس،

$$\mathfrak{D} = (\partial_a \mathfrak{A})\, \mathfrak{D}_1^a. \tag{2137}$$

که نتیجه میدهد

$$0 = (\partial_d\, \partial_a \mathfrak{A})\, \mathfrak{D}_1^a. \tag{2138}$$

$\mathfrak{D}_1^a$ ها به $\mathfrak{A}$ وابسته نیستند، و رابطه یِ بالا برا یِ هر $\mathfrak{A}$ درست است. از جمله به ازا یِ

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\, (\sigma_b\, x^b)\, (\sigma_c\, x^c). \tag{2139}$$

که σ_a ها ثابت َند. با این $\mathfrak{A}$،

$$\partial_d\, \partial_a \mathfrak{A} = \sigma_d\, \sigma_a. \tag{2140}$$

و رابطه یِ (2138) میشود

$$0 = \sigma_d\, (\sigma_a\, \mathfrak{D}_1^a). \tag{2141}$$

اگر دست- ِ-کم یک ی از σ_d ها ناصفر باشد، از رابطه یِ بالا نتیجه میشود

$$0 = \sigma_a\, \mathfrak{D}_1^a. \tag{2142}$$

اگر همه یِ σ_d ها صفر باشند هم که رابطه یِ (2142) بدیهی ست. پس σ ها هر چه باشند (2142) برقرار است. از این نتیجه میشود $\mathfrak{D}_1^a$ ها صفر َند:

$$0 = \mathfrak{D}_1^a. \tag{2143}$$

به این ترتیب،

$$0 = \mathfrak{D}. \tag{2144}$$

که این هم یعنی اتحاد ِ یاکُبی برقرار است:

$$0 = \{\mathfrak{A}, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}\} + \{\mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}\} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\}\}. \tag{1807}$$

رُشن است که تعریف ِ دُ-فرم- ِ-همتافته را میشود به فضا-زمان- ِ-فاز هم گسترش داد. دُ-فرم- ِ-همتافته یِ گسترش-یافته یِ $\mathcal{J}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\, J_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, (\mathbf{d}\, x^{\mathtt{a}}) \wedge (\mathbf{d}\, x^{\mathtt{b}}). \tag{2145}$$

یا،

$$\mathcal{J} = (\mathbf{d}\, q^{\alpha}) \wedge (\mathbf{d}\, p_{\alpha}). \tag{2146}$$

پس،

$$\mathcal{J} = (\mathbf{d}\, t) \wedge (\mathbf{d}\, p_0) + (\mathbf{d}\, q^{i}) \wedge (\mathbf{d}\, p_{i}). \tag{2147}$$

که یعنی،

$$\mathcal{J} = (\mathbf{d}\, t) \wedge (\mathbf{d}\, p_0) + J. \tag{2148}$$

و رُشن است که مانستِها یِ نتایج ی که برا یِ J به دست آمدند، برا یِ $\mathcal{J}$ هم برقرار َند.

71 دُ-فرم ِ همتافته و مختصات ِ کانُنیک

کنش ِ فضا-یِ-فاز و لَگرانژی یِ فضا-یِ-فاز چنین َند.

$$S_{\phi} = \int (\mathrm{d}\, t)\, L_{\phi}(t, x, \dot{x}). \tag{1707}$$

$$L_\phi(t,x,\dot{x}) = p_i\,\dot{q}^i - H(t,x). \tag{1749}$$

رابطه یِ (1707) را میشود چنین نوشت.

$$S_\phi = \int \Sigma. \tag{2149}$$

که Σ یک فرم- ِ-دیفرانسیل است:

$$\Sigma = \Xi - H\,\mathbf{d}\,t. \tag{2150}$$

Ξ هم یک فرم- ِ-دیفرانسیل است:

$$\Xi = p_i\,\mathbf{d}\,q^i. \tag{2151}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,\Xi = (\mathbf{d}\,p_i)\wedge(\mathbf{d}\,q^i). \tag{2152}$$

که یعنی

$$\mathbf{d}\,\Xi = -J. \tag{2153}$$

در فرمول-بندی یِ لَگرانژ دیده شد شرط ِ این که دِ لَگرانژی یِ L و L' همئرز باشند این است که اختلاف ِ آنها مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ یک تابع باشد. یعنی یک Λ باشد که،

$$\dot{\Lambda} = L' - L. \tag{2154}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\mathbf{d}\,\Lambda = (L'\,\mathbf{d}\,t) - (L\,\mathbf{d}\,t). \tag{2155}$$

برا یِ لَگرانژی یِ فضا-یِ-فاز،

$$L_\phi\,\mathbf{d}\,t = \Sigma. \tag{2156}$$

یعنی،

$$L_\phi\,\mathbf{d}\,t = \Xi - H\,\mathbf{d}\,t. \tag{2157}$$

و مانسته یِ (2155) میشود

$$\mathbf{d}\,\Lambda_\phi = \Sigma' - \Sigma. \tag{2158}$$

یا،

$$\mathbf{d}\,\Lambda_\phi = (\Xi' - H'\,\mathbf{d}\,t) - (\Xi - H\,\mathbf{d}\,t). \tag{2159}$$

که،

$$\Xi' = p'_i\,\mathbf{d}\,q'^i. \tag{2160}$$

رابطه یِ (2159) (مُضعَن) همئرز است با این که مشتق ِ برونی یِ طرف ِ راست صفر است:

$$0 = [\mathbf{d}\,\Xi' - (\mathbf{d}\,H')\wedge(\mathbf{d}\,t)] - [\mathbf{d}\,\Xi - (\mathbf{d}\,H)\wedge(\mathbf{d}\,t)]. \tag{2161}$$

که، با استفاده از (2153)، میشود

$$0 = [-J' - (\mathbf{d}\,H')\wedge(\mathbf{d}\,t)] - [-J - (\mathbf{d}\,H)\wedge(\mathbf{d}\,t)]. \tag{2162}$$

که،

$$J' = (\mathbf{d}\,q'^i)\wedge(\mathbf{d}\,p'_i). \tag{2163}$$

یا،

$$J' = \frac{1}{2}\,J_{a\,b}\,(\mathbf{d}\,x'^a)\wedge(\mathbf{d}\,x'^b). \tag{2164}$$

و بر حسبِ مختصاتِ بدون-ِ-پریم،

$$J' = \frac{1}{2}\, J_{a\,b} \left[\frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\, \frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}\, (\mathbf{d}\, x^c) \wedge (\mathbf{d}\, x^d) + \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\, \frac{\partial\, x'^b}{\partial\, t}\, (\mathbf{d}\, x^c) \wedge (\mathbf{d}\, t) + \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}\, \frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^c}\, (\mathbf{d}\, t) \wedge (\mathbf{d}\, x^c) \right]. \tag{2165}$$

متناظر با فرم-ِ-دیفرانسیلِ $\mathfrak{X}$، تحدیدِ $\mathfrak{X}$ بر زیرخمینه یِ $\mathbb{S}$ را با $\mathfrak{X}_{|\,\mathbb{S}}$ نشان میدهم. وقت یِ $\mathbb{S}$ زیرخمینه یِ $\mathfrak{Q}$-ثابت باشد هم $\mathfrak{X}_{|\,\mathbb{S}}$ را با $\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Q}}$ نشان میدهم. به این ترتیب رابطه یِ (2165) را میشود چنین نوشت.

$$J' = (\mathbf{d}\, t) \wedge J'_0 + J'_{|\,t}. \tag{2166}$$

که

$$J'_0 = J'_{0\,c}\, \mathbf{d}\, x^c. \tag{2167}$$

$$J'_{|\,t} = \frac{1}{2}\, J'_{c\,d}\, (\mathbf{d}\, x^c) \wedge (\mathbf{d}\, x^d). \tag{2168}$$

و،

$$J'_{0\,c} = J_{a\,b}\, \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}\, \frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^c}. \tag{2169}$$

$$J'_{c\,d} = J_{a\,b}\, \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\, \frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}. \tag{2170}$$

رابطه یِ (2162) میشود

$$J' - J = (\mathbf{d}\, t) \wedge [\mathbf{d}\, (H' - H)]. \tag{2171}$$

رُشن است که

$$(\mathbf{d}\, t) \wedge [\mathbf{d}\, (H' - H)] = (\mathbf{d}\, t) \wedge [\mathbf{d}\, (H' - H)]_{|\,t}. \tag{2172}$$

پس (2171) میشود

$$J'_0 + (J' - J)_{|\,t} = (\mathbf{d}\, t) \wedge [\mathbf{d}\, (H' - H)]_{|\,t}. \tag{2173}$$

از این رابطه نتیجه میشود

$$J'_0 = (\mathbf{d}\,t) \wedge [\mathbf{d}\,(H' - H)]_{|\,t}. \tag{2174}$$

$$(J' - J)_{|\,t} = 0. \tag{2175}$$

مفصلتر،

$$J'_{0\,a} = \partial_a\,(H' - H). \tag{2176}$$

$$J'_{a\,b} = J_{a\,b}. \tag{2177}$$

رابطه یِ (2177) شرط ِ این است که مختصات ِ پریم-دار کانُنیک باشند:

$$J_{b\,d} = J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}. \tag{1952}$$

رابطه یِ (2176) هم شرط ِ اضافه (بر کانُنیک-بودن ِ مختصات ِ پریم-دار) است، برا یِ این که معادلات- ِ-حرکت برا یِ مختصات ِ پریم-دار با هَمیلتِنی یِ H' هم ان معادلات- ِ-حرکت برا یِ مختصات ِ بی-پریم با هَمیلتِنی یِ H باشند. این رابطه یعنی یک $\mathcal{F}$ هست که

$$H'(t,x) = H(t,x) + \mathcal{F}(t,x). \tag{2011}$$

$$\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,x^b} = J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}. \tag{2020}$$

که دیده شد وقت ی مختصات ِ پریم-دار کانُنیک باشند، (2020) برا یِ $\mathcal{F}$ جواب دارد.

به این ترتیب شرط ِ این که لَگرانژیها یِ L'_ϕ و L_ϕ همئرز باشند این است که مختصات ِ پریم-دار کانُنیک باشند، و H' چنان باشد که معادلات- ِ-حرکت برا یِ مختصات ِ پریم-دار با هَمیلتِنی یِ H' هم ان معادلات- ِ-حرکت برا یِ مختصات ِ بی-پریم با هَمیلتِنی یِ H باشند.

در بحث ِ بالا زمان عوض نشد، یعنی t' هم ان t بود. حالت ِ کلیتر برا یِ بررسی یِ همئرزی یِ کنش - ِ فضا-یِ-فازها یِ S'_ϕ و S_ϕ این است که t هم به t' تبدیل شود، که t' تابع ی از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته است. شرط ِ همئرزی یِ S'_ϕ و S_ϕ این است که $(S'_\phi - S_\phi)$ به نقاط ِ درونی یِ مسیر بستگی نداشته باشد، یعنی تابع ِ فقط نقاط ِ مرزی باشد. این هم یعنی $(\Sigma' - \Sigma)$ مشتق ِ (برونی یِ)

یک تابع باشد. یعنی یک Λ_ϕ باشد که (2158) برقرار باشد، که اینجا ممکن است t' با t متفاوت یاشد:

$$\mathbf{d}\,\Lambda_\phi = (\Xi' - H'\,\mathbf{d}\,t') - (\Xi - H\,\mathbf{d}\,t). \tag{2178}$$

این هم (مُضعَن) همئرز است با

$$0 = [\mathbf{d}\,\Xi' - (\mathbf{d}\,H')\wedge(\mathbf{d}\,t')] - [\mathbf{d}\,\Xi - (\mathbf{d}\,H)\wedge(\mathbf{d}\,t)]. \tag{2179}$$

یا،

$$0 = [-J' - (\mathbf{d}\,H')\wedge(\mathbf{d}\,t')] - [-J - (\mathbf{d}\,H)\wedge(\mathbf{d}\,t)]. \tag{2180}$$

دنبالِ روابط ی بینِ x'^α ها و x^α ها یَم، که (2180) به ازا یِ هر H برا یِ H' جواب داشته باشد، یا به ازا یِ هر H' برا یِ H جواب داشته باشد. این یعنی رابطه یِ مختصاتِ پریم-دارِ فضا-یِ-فاز-ِ-گسترش-یافته با مختصاتِ بی-پریمِ فضا-یِ-فاز-ِ-گسترش-یافته مستقل از H (یا H') باشد.

از جمله x'^α ها باید چنان باشند که اگر H' صفر باشد برا یِ H جواب وجود داشته باشد. H متناظر با وقت ی H' صفر است را با H'' نشان میدهم. رابطه یِ (2180) چنین میشود.

$$J' - J = -(\mathbf{d}\,t)\wedge(\mathbf{d}\,H''). \tag{2181}$$

این هم ان رابطه یِ (2171)، با H'' به جا یِ $(H - H')$، است. پس (2177) نتیجه میشود، همراه با

$$J'_{0\,a} = -\partial_a\,H''. \tag{2182}$$

رابطه یِ (2182) مانسته یِ (2176) است، و با شاخصها میشود

$$-\frac{\partial\,H''}{\partial\,x^b} = J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}. \tag{2183}$$

که مانسته یِ (2020)، با $(-H'')$ به جا یِ $\mathcal{F}$، است.

به این ترتیب، مثلِ حالت ی که t' هم ان t باشد، شرطِ (2177) به دست میئاید، که هم ان (1952) است، شرطِ این که x'^a ها کانُنیک باشند:

$$J_{b\,d} = J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}. \tag{1952}$$

اینجا هم علاوه بر این که x'^aباید کانُنیک باشند، یک شرط ِ دیگر هم به دست میئاید: (2183) باید برا یِ H'' جواب داشته باشد. و این هم ان است که (1952) برا یِ $\mathcal{F}$ جواب داشته باشد، که دیده شد وقت یِ x'^a ها کانُنیک باشند براورده میشود.

در حالت ِ کلی که H' صفر نیست، رابطه یِ (2180) را میشود چنین نوشت.

$$(J' - J) + (\mathbf{d}\,t) \wedge (\mathbf{d}\,H'') = -(\mathbf{d}\,t) \wedge [\mathbf{d}\,(H - H'')] + (\mathbf{d}\,t') \wedge (\mathbf{d}\,H'). \quad (2184)$$

این که رابطه یِ مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته با مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته مستقل از H (یا H') است، یعنی شرط ِ (2181) همچنان برقرار است. از (2184) و (2181) نتیجه میشود

$$(\mathbf{d}\,t) \wedge [\mathbf{d}\,(H - H'')] = (\mathbf{d}\,t') \wedge (\mathbf{d}\,H'). \quad (2185)$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,t' = (\mathbf{d}\,t')_0 + (\mathbf{d}\,t')_{|\,t}. \quad (2186)$$

که،

$$(\mathbf{d}\,t')_0 = \frac{\partial\,t'}{\partial\,t}\,\mathbf{d}\,t. \quad (2187)$$

قرار است بستگی یِ t' به مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته مستقل از H (یا H') باشد. پس رابطه یِ بالا، از جمله اگر H' تابع ِ فقط x^a ها باشد (مستقل از t باشد) برقرار است. در این حالت،

$$\mathbf{d}\,H' = (\mathbf{d}\,H')_{|\,t}. \quad (2188)$$

و (2185) چنین میشود.

$$(\mathbf{d}\,t) \wedge [\mathbf{d}\,(H - H'')] = (\mathbf{d}\,t') \wedge (\mathbf{d}\,H')_{|\,t}. \quad (2189)$$

یا،

$$(\mathbf{d}\,t)\wedge[\mathbf{d}\,(H-H'')]=(\mathbf{d}\,t')_0\wedge(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}+(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}\wedge(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}. \qquad (2190)$$

رُشن است که

$$(\mathbf{d}\,t)\wedge[\mathbf{d}\,(H-H'')]=(\mathbf{d}\,t)\wedge[\mathbf{d}\,(H-H'')]_{|\,t}. \qquad (2191)$$

به این ترتیب (2190) میشود

$$(\mathbf{d}\,t)\wedge[\mathbf{d}\,(H-H'')]_{|\,t}=(\mathbf{d}\,t')_0\wedge(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}+(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}\wedge(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}. \qquad (2192)$$

که همئرز است با،

$$(\mathbf{d}\,t)\wedge[\mathbf{d}\,(H-H'')]_{|\,t}=(\mathbf{d}\,t')_0\wedge(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}. \qquad (2193)$$

$$(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}\wedge(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}=0. \qquad (2194)$$

رابطه یِ (2194) همئرز است با این که $(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}$ و $(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}$ با هم موازی یَند. یعنی اگر در یک نقطه یِ x یک-فرم ِ $(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}$ صفر نباشد، یک $\mathfrak{c}$ هست که

$$(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}(x)=\mathfrak{c}\,(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}(x). \qquad (2195)$$

قرار است بستگی یِ t' به مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته مستقل از H (یا H') باشد. پس راستا یِ $(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}(x)$، مستقل از H (یا H') مشخص است. به این ترتیب، رابطه یِ (2195) یعنی راستا یِ $(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}(x)$ مشخص است. بُعد ِ فضا یی که $(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}(x)$ در آن است، دست- ِ-کم 2 است. پس این فضا یک عضو دارد که در این راستا یِ خاص نیست، یعنی با $(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}(x)$ موازی نیست. میشود H' را چنان گرفت که $(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}(x)$ برابر با آن عضو باشد. با این انتخاب برا یِ H'، رابطه یِ (2195) برقرار نمیشود. نتیجه این که اگر $(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}(x)$ ناصفر باشد، H' ی هست که با آن رابطه یِ (2194) برقرار نمیشود. پس یک شرط ِ لازم برا یِ برقراری یِ (2194) این است که

$$(\mathbf{d}\,t')_{|\,t}(x)=0. \qquad (2196)$$

این برا یِ همه یِ x ها درست است. پس یک شرط ِ لازم برا یِ برقراری یِ (2194) این است که

$$(\mathbf{d}\,t')_{|\,t} = 0. \tag{2197}$$

این یعنی t' مستقل از x است: تابع ِ فقط t است. پس،

$$\frac{\partial\,t'}{\partial\,t} = \dot{t}'. \tag{2198}$$

رابطه یِ (2193) میشود

$$[\mathbf{d}\,(H - H'')]_{|\,t} = \frac{\partial\,t'}{\partial\,t}\,(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}. \tag{2199}$$

مفصلتر،

$$\frac{\partial\,(H - H'')}{\partial\,x^a} = \frac{\partial\,t'}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,H'}{\partial\,x^a}. \tag{2200}$$

اینها هم، با استفاده از (2198)، میشوند

$$[\mathbf{d}\,(H - H'')]_{|\,t} = \dot{t}'\,(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}. \tag{2201}$$

یا، مفصلتر،

$$\frac{\partial\,(H - H'')}{\partial\,x^a} = \dot{t}'\,\frac{\partial\,H'}{\partial\,x^a}. \tag{2202}$$

t' مستقل از x است. پس $\dot{t}'$ هم مستقل از x است. به این ترتیب، (2201) میشود

$$[\mathbf{d}\,(H - H'')]_{|\,t} = \mathbf{d}\,(\dot{t}'\,H')_{|\,t}. \tag{2203}$$

این هم یعنی یک $\mathfrak{C}$ هست که تابع ِ فقط t است و

$$H = \dot{t}'\,H' + H'' + \mathfrak{C}. \tag{2204}$$

پس اگر t' هم ان t نباشد، شرط ِ این که S'_ϕ و S_ϕ همئرز باشند (و رابطه یِ مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته با مختصات ِ بی-پریم ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته مستقل از H

یا H' باشد) این است که t' تابع ِ فقط t باشد، مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز کانُنیک باشند، و بین ِ H' و H رابطه یِ معین ی برقرار باشد، که معلوم شد که اگر t' تابع ِ فقط t باشد و مختصات ِ پریم-دار ِ فضا-یِ-فاز کانُنیک باشند، این رابطه به ازا یِ هر H' برا یِ H جواب دارد. در واقع وقت ی t' تابع ِ فقط t باشد، مسئله را میشود به حالت ی تبدیل کرد که t' هم ان t است. اگر t' تابع ِ فقط t باشد،

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,H')\wedge(\mathbf{d}\,t') &= \dot{t}'\,(\mathbf{d}\,H')\wedge(\mathbf{d}\,t),\\ &= \dot{t}'\,(\mathbf{d}\,H')_{|\,t}\wedge(\mathbf{d}\,t),\\ &= [\mathbf{d}\,(\dot{t}'\,H')]_{|\,t}\wedge(\mathbf{d}\,t).\end{aligned}\tag{2205}$$

پس،

$$(\mathbf{d}\,H')\wedge(\mathbf{d}\,t') = [\mathbf{d}\,(\dot{t}'\,H')]\wedge(\mathbf{d}\,t).\tag{2206}$$

$\tilde{H}'$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{H}' = \dot{t}'\,H'.\tag{2207}$$

به این ترتیب،

$$(\mathbf{d}\,H')\wedge(\mathbf{d}\,t') = (\mathbf{d}\,\tilde{H}')\wedge(\mathbf{d}\,t).\tag{2208}$$

و رابطه یِ (2180) میشود

$$0 = [-J' - (\mathbf{d}\,\tilde{H}')\wedge(\mathbf{d}\,t)] - [-J - (\mathbf{d}\,H)\wedge(\mathbf{d}\,t)].\tag{2209}$$

این هم ان رابطه یِ (2162)، با $\tilde{H}'$ به جا یِ H'، است.

بحث ِ مشابه در فضا-زمان- ِ-فاز چنین میشود.

$$S_{\phi\,\tau} = \int(\mathrm{d}\,\tau)\,L_{\phi\,\tau}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\acute{x}}).\tag{2210}$$

که،

$$L_{\phi\,\tau}(\underset{\sim}{x},\acute{\underset{\sim}{x}}) = p_\alpha\,\acute{q}^\alpha - H_\tau(\underset{\sim}{x}). \tag{2211}$$

و،

$$H_\tau(\underset{\sim}{x}) = \mathfrak{H}(t,\mathsf{p}). \tag{2212}$$

$$\mathsf{p} = p_0 + H(t,x). \tag{1822}$$

رابطه یِ (2210) را میشود چنین نوشت.

$$S_{\phi\,\tau} = \int \Sigma_\tau. \tag{2213}$$

که Σ_τ یک فرم- ِ-دیفرانسیل است:

$$\Sigma_\tau = \Xi_\tau - H_\tau\,\mathbf{d}\,\tau. \tag{2214}$$

Ξ_τ هم یک فرم- ِ-دیفرانسیل است:

$$\Xi_\tau = p_\alpha\,\mathbf{d}\,q^\alpha. \tag{2215}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,\Xi_\tau = (\mathbf{d}\,p_\alpha)\wedge(\mathbf{d}\,q^\alpha). \tag{2216}$$

که یعنی

$$\mathbf{d}\,\Xi_\tau = -\underset{\sim}{J}. \tag{2217}$$

شرط ِ این که دِ لَگرانژی یِ $L_{\phi,\tau}$ و $L'_{\phi,\tau}$ همئرز باشند این است که اختلاف ِ آنها مشتق ِ کامل ِ یک تابع نسبت به τ باشد. یعنی یک $\Lambda_{\phi\,\tau}$ باشد که،

$$\acute{\Lambda}_{\phi\,\tau} = L'_{\phi\,\tau} - L_{\phi\,\tau}. \tag{2218}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\mathbf{d}\,\Lambda_{\phi\,\tau} = (L'_{\phi\,\tau}\,\mathbf{d}\,\tau) - (L_{\phi\,\tau}\,\mathbf{d}\,\tau). \tag{2219}$$

یا،

$$\mathbf{d}\,\Lambda_{\phi\,\tau} = \Sigma'_\tau - \Sigma_\tau. \tag{2220}$$

این هم میشود

$$\mathbf{d}\,\Lambda_{\phi\,\tau} = (\Xi'_\tau - H'_\tau\,\mathbf{d}\,\tau) - (\Xi_\tau - H_\tau\,\mathbf{d}\,\tau). \tag{2221}$$

که،

$$\Xi'_\tau = p'_\alpha\,\mathbf{d}\,q'^\alpha. \tag{2222}$$

رابطه یِ (2221) (مُضعَن) همئرز است با این که مشتقِ برونی یِ طرفِ راست صفر است:

$$0 = [\mathbf{d}\,\Xi'_\tau - (\mathbf{d}\,H'_\tau)\wedge(\mathbf{d}\,\tau)] - [\mathbf{d}\,\Xi_\tau - (\mathbf{d}\,H_\tau)\wedge(\mathbf{d}\,\tau)]. \tag{2223}$$

که، با استفاده از (2217)، میشود

$$0 = [-\mathcal{J}' - (\mathbf{d}\,H'_\tau)\wedge(\mathbf{d}\,\tau)] - [-\mathcal{J} - (\mathbf{d}\,H_\tau)\wedge(\mathbf{d}\,\tau)]. \tag{2224}$$

که،

$$\mathcal{J}' = (\mathbf{d}\,q'^\alpha)\wedge(\mathbf{d}\,p'_\alpha). \tag{2225}$$

یا،

$$\mathcal{J}' = \frac{1}{2}\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,(\mathbf{d}\,x'^{\mathtt{a}})\wedge(\mathbf{d}\,x'^{\mathtt{b}}). \tag{2226}$$

و بر حسبِ مختصاتِ بدون-ِ-پریم،

$$\underset{\smile}{J}' = \frac{1}{2}\, J_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, \frac{\partial\, x'^{\mathtt{a}}}{\partial\, x^{\mathtt{c}}}\, \frac{\partial\, x'^{\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{d}}}\, (\mathbf{d}\, x^{\mathtt{c}}) \wedge (\mathbf{d}\, x^{\mathtt{d}}). \tag{2227}$$

رابطه یِ (2224) میشود

$$\underset{\smile}{J}' - \underset{\smile}{J} = (\mathbf{d}\, \tau) \wedge [\mathbf{d}\, (H'_\tau - H_\tau)]. \tag{2228}$$

از این، همراه با (2227)، نتیجه میشود دُ-طرفِ (2228) صفر َند:

$$\underset{\smile}{J}' - \underset{\smile}{J} = 0. \tag{2229}$$

$$(\mathbf{d}\, \tau) \wedge [\mathbf{d}\, (H'_\tau - H_\tau)] = 0. \tag{2230}$$

رابطه یِ (2229) یعنی

$$J'_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} = J_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{2231}$$

و این شرطِ آن است که مختصاتِ پریم-دار (ِ فضا-زمان-ِ-فاز) کانُنیک باشند:

$$J_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} = J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}\, \frac{\partial\, x'^{\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}\, \frac{\partial\, x'^{\mathtt{d}}}{\partial\, x^{\mathtt{b}}}. \tag{2232}$$

رُشن است که

$$(\mathbf{d}\, \tau) \wedge \mathbf{d}\, (H'_\tau - H_\tau) = (\mathbf{d}\, \tau) \wedge [\mathbf{d}\, (H'_\tau - H_\tau)]_{|\,\tau}. \tag{2233}$$

پس رابطه یِ (2230) نتیجه میدهد

$$(\mathbf{d}\, \tau) \wedge [\mathbf{d}\, (H'_\tau - H_\tau)]_{|\,\tau} = 0. \tag{2234}$$

که این هم نتیجه میدهد

$$[\mathbf{d}\, (H'_\tau - H_\tau)]_{|\,\tau} = 0. \tag{2235}$$

همچنین،

$$[\mathbf{d}\,(H'_\tau - H_\tau)]_{|\,\tau} = \mathbf{d}\,(H'_\tau - H_\tau). \tag{2236}$$

چون H_τ و H'_τ مستقل از τ هستند. پس (2235) نتیجه میدهد

$$\mathbf{d}\,(H'_\tau - H_\tau) = 0. \tag{2237}$$

این یعنی $(H'_\tau - H_\tau)$ (بر فضا-زمان-ِ-فاز) ثابت است. از جمله میشود این ثابت را صفر گرفت:

$$H'_\tau = H_\tau. \tag{2008}$$

به این ترتیب شرطِ این که لَگرانژیها یِ $L'_{\phi\,\tau}$ و $L_{\phi\,\tau}$ همئرز باشند این است که مختصاتِ پریم-دار کانُنیک باشند، و H'_τ هم ان H_τ باشد. و رُشن است که در این حالت معادلات-ِ-حرکت برا یِ مختصاتِ پریم-دار هم ان معادلات-ِ-حرکتِ هَمیلتِنی (با هم ان H_τ) میشوند.

72 دُ-فرمِ همتافته و مختصاتِ دلبخاه

متناظر با ماتریسِ پادمتقارن و وارون-پذیرِ $\mathfrak{J}$، دُ-فرمِ $\mathfrak{J}$ چنین تعریف میشود.

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{J}_{a\,b}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{x}^a) \wedge (\mathbf{d}\,\mathfrak{x}^b). \tag{2238}$$

که $\mathfrak{x}^a$ ها مختصاتِ فضا-یِ-فاز َند (که لزومَن کانُنیک نیستند). شاخصها را با $\mathfrak{J}$ پایین-ُ-بالا میبرم. پس،

$$\mathfrak{J}^{a\,c}\,\mathfrak{J}_{b\,c} = \delta^a_b. \tag{2239}$$

اثرِ $\mathfrak{J}$ بر تابعِ $\mathfrak{A}$ را هم با $\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{J}^a_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{J}^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,\mathfrak{x}^b}. \tag{2240}$$

یعنی،

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{J}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{A}. \tag{2241}$$

یا،

$$\mathbf{d}\,\mathfrak{A} = \mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}. \tag{2242}$$

همچنین، اگر σ یک یک-فرم باشد،

$$\sigma\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{J}(\sigma, \mathbf{d}\,\mathfrak{A}). \tag{2243}$$

یا،

$$\sigma\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = -\mathfrak{J}(\mathbf{d}\,\mathfrak{A}, \sigma). \tag{2244}$$

که یعنی،

$$\sigma\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = -(\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\,(\mathfrak{J}\,\sigma). \tag{2245}$$

یا،

$$\sigma\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{L}_{\mathfrak{J}\,\sigma}\,\mathfrak{A}. \tag{2246}$$

$\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را با $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}$ نشان میدهم، و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,\mathfrak{x}^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,\mathfrak{x}^b}. \tag{2247}$$

دیده میشود

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,\mathfrak{x}^a}\,\mathfrak{J}^a_{\mathfrak{B}}. \tag{2248}$$

بسته،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = (\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}. \tag{2249}$$

و البته این را میشود چنین نوشت.

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2250}$$

از روابط ِ (2242) و (2249)هم دیده میشود

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = (\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J})\,(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}). \tag{2251}$$

یعنی،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}). \tag{2252}$$

یا،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}\wedge\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}). \tag{2253}$$

مانسته ی ِ ویژگیها ی ِ کروشه-ی ِ-پُوَسُن برا ی ِ $\mathfrak{J}$-کروشه-ی ِ-پُوَسُن اینها یَند. $\mathfrak{J}$-کروشه-ی ِ-پُوَسُن

j1 پادمتقارن است.

j2 (نسبت به هر یک از تابعیها) خطی ست.

j3 (نسبت به هر یک از تابعیها) زنجیرئی ست.

j4 (نسبت به هر یک از تابعیها) لَیبنیتسی ست.

j5 (نسبت به هر یک از تابعیها)، با $\mathfrak{J}$-کروشه-ی ِ-پُوَسُن (به جا ی ِ ضرب) لَیبنیتسی ست.

j6 یاکُبی ست (اتحاد ِ یاکُبی را برمیئاورَد).

به سادگی دیده میشود $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ویژگیها یِ **j1** تا **j4** را برمیئاورَد. تنها-ویژِگیها یی که میمانند **j5** و **j6** اند، که رُشن است با یکدیگر همئرز َند. اینها را بررسی میکنم.

از (2242) دیده میشود

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}) = 0. \tag{2254}$$

برا یِ هر میدان-ِ-برداری یِ $\mathfrak{u}$ و هر میدان-ِ-فرم-ِ-دیفرانسیل ِ σ،

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\,\sigma) + \mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\,(\mathbf{d}\,\sigma) = \mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,\sigma. \tag{2095}$$

پس،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J} = \mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J}. \tag{2255}$$

مشتق ِ لی نسبت به ادغام لَیبنیتسی ست. از جمله،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,[\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})] &= (\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})\\ &\quad + \mathfrak{J}(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) + \mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}).\end{aligned} \tag{2256}$$

که، با استفاده از (2255)، میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,[\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})] &= (\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})\\ &\quad + \mathfrak{J}(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) + \mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}).\end{aligned} \tag{2257}$$

یا،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,[\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})] &= (\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})\\ &\quad - (\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{J})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}) + (\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{J})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}).\end{aligned} \tag{2258}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,[\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})] &= (\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})\\ &\quad - (\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{J})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}) + (\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{J})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}).\end{aligned} \tag{2259}$$

که، با استفاده از (2242)، میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,[\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})] = (\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) - (\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}) + (\mathbf{d}\,\mathfrak{B})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}). \tag{2260}$$

برا یِ هر میدان- ِ-برداری یِ $\mathfrak{u}$ و هر میدان- ِ-برداری یِ $\mathfrak{v}$،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{v} = -\mathbf{L}_{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{u}. \tag{2101}$$

پس (2100) میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,[\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})] = (\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) + (\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}) - (\mathbf{d}\,\mathfrak{B})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}). \tag{2261}$$

این که مشتق ِ لی لَیبنیتسی ست، نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,[(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}] = [\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} + (\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}). \tag{2262}$$

پس،

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}) = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,[(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}] - [\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}. \tag{2263}$$

با استفاده از (2249)،

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} &= \{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}},\\ &= -\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}.\end{aligned} \tag{2264}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = -(\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}, \tag{2265}$$

یا،

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2266}$$

پس،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,[(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}] = -\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}). \tag{2267}$$

مشتق ِلی با مشتق ِبرونی جا-به-جا میشود. از جمله،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{d} = \mathbf{d}\,\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}. \tag{2268}$$

پس،

$$[\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = [\mathbf{d}\,(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{C})]\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}. \tag{2269}$$

که، با استفاده از (2249)، میشود

$$[\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = \{\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2270}$$

یا، با استفاده از (2250)،

$$[\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})]\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = \{\{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\}, \mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2271}$$

به این ترتیب،

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{C})(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}) = -\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}) - \{\{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\}, \mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2272}$$

پس (2261) میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,[\mathfrak{J}(\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}})] = (\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) - \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}) - \{\{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}, \mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}} \\ + \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,(\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A}) + \{\{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}, \mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}.\end{aligned} \tag{2273}$$

یا،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}} = (\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) + [\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}]\,\mathfrak{A} + 2\,\{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2274}$$

از (2250) دیده میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}}\,\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}} = \{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2275}$$

و البته،

$$\{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}} = -\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2276}$$

پس (2274) چنین میشود.

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}}\,\mathfrak{A} = (\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) + [\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}]\,\mathfrak{A}. \tag{2277}$$

جا-به-جاگر ِ مشتق- ِ-لیها هم چنین میشود.

$$[\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}] = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\,\diamond\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}. \tag{2278}$$

پس (2277) میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}}\,\mathfrak{A} = (\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) + \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\,\diamond\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2279}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) = -(\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}). \tag{2280}$$

یا، با استفاده از (2246)،

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}},\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J}}\,\mathfrak{A}. \tag{2281}$$

پس (2279) چنین میشود.

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}\,\mathfrak{A} = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{A} + \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\diamond\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2282}$$

این رابطه برا یِ هر $\mathfrak{A}$ درست است. پس،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}} = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J} + \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\diamond\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}} \tag{2283}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathfrak{J}\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J} + \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\diamond\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}. \tag{2284}$$

با J به جا یِ $\mathfrak{J}$،

$$J\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\} = J_{\mathfrak{C}}\diamond J_{\mathfrak{B}}. \tag{2122}$$

دیده میشود (2284) هم ان (2122) میشود (با $\mathfrak{J}$ به جا یِ J)، اگر و تنها اگر

$$\mathfrak{J}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J} = 0. \tag{2285}$$

این هم، چون $\mathfrak{J}$ وارون-پذیر است، همئرز است با

$$\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{i}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{J} = 0. \tag{2286}$$

و این رابطه برا یِ هر $\mathfrak{B}$ و هر $\mathfrak{C}$ برقرار است، اگر و تنها اگر

$$\mathbf{d}\,\mathfrak{J} = 0. \tag{2287}$$

پس $\mathfrak{J}$ مانسته یِ (2122) را برمیئاورَد:

$$\mathfrak{J}\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\diamond\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}, \tag{2288}$$

اگر و تنها اگر (2287) براورده شود، یعنی $\mathfrak{J}$ بسته باشد.

گیرم (2288) برقرار است. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}} &= \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}} \diamond \mathfrak{J}_{\mathfrak{A}},\\ &= (\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} \diamond \mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}) \diamond \mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}. \end{aligned} \tag{2289}$$

یا،

$$\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} \diamond (\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}} \diamond \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}). \tag{2290}$$

جا-به-جاگر ِ میدانها ی ِ برداری اتحاد ِ یاکُبی را برمیئاورَد:

$$0 = \mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} \diamond (\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}} \diamond \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}) + \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} \diamond (\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} \diamond \mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}) + \mathfrak{J}_{\mathfrak{B}} \diamond (\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} \diamond \mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}). \tag{2291}$$

پس،

$$0 = \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}} + \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}} + \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}}. \tag{2292}$$

یا،

$$0 = \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}} + \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}} + \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}}. \tag{2293}$$

و چون $\mathfrak{J}_{\mathfrak{X}}$ نسبت به $\mathfrak{X}$ (با ضریبها ی ِ عددی) خطی ست،

$$0 = \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}+\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}+\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}}. \tag{2294}$$

از این، همراه با (2241)، نتیجه میشود

$$0 = \mathbf{d}\Big(\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}\Big). \tag{2295}$$

این هنوز اتحاد ِ یاکُبی (برا ی ِ $\mathfrak{J}$-کروشه-ی-پُؤَسُن) نیست. رابطه ی ِ (2295) یعنی یک ثابت ِ $\mathfrak{D}$ هست که

$$\mathfrak{D} = \{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2296}$$

$\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ هر چه باشند، طرف ِ راست ِ (2296) یک ثابت است، که البته به $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ بستگی دارد. برقرار- بودن ِ اتحاد ِ یاکُبی یعنی این ثابت صفر است. از (2296)، همراه با این که $\mathfrak{J}$- کروشه- یِ- پُؤَسُن نسبت به هر یک از تابعیها زنجیرئی ست، نتیجه میشود

$$\mathfrak{D} = (\partial_a \mathfrak{A}) \{\mathfrak{x}^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C}, (\partial_a \mathfrak{A}) \{\mathfrak{x}^a, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, (\partial_a \mathfrak{A}) \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2297}$$

یا،

$$\mathfrak{D} = (\partial_a \mathfrak{A}) (\{\mathfrak{x}^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C}, \{\mathfrak{x}^a, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}) + \{\mathfrak{C}, \partial_a \mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}} \{\mathfrak{x}^a, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, \partial_a \mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}} \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2298}$$

که میشود

$$\mathfrak{D} = (\partial_a \mathfrak{A}) (\{\mathfrak{x}^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C}, \{\mathfrak{x}^a, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}) + (\partial_d \partial_a \mathfrak{A}) (\{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^d\}_{\mathfrak{J}} \{\mathfrak{x}^a, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, \mathfrak{x}^d\}_{\mathfrak{J}} \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}}). \tag{2299}$$

یا،

$$\mathfrak{D} = (\partial_a \mathfrak{A}) (\{\mathfrak{x}^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C}, \{\mathfrak{x}^a, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}) + (\partial_d \partial_a \mathfrak{A}) (\{\mathfrak{B}, \mathfrak{x}^d\}_{\mathfrak{J}} \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}} - \{\mathfrak{B}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}} \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^d\}_{\mathfrak{J}}). \tag{2300}$$

در جمله یِ دوم، ضریب ِ پرانتز نسبت به a و d متقارن و خُد ِ پرانتز نسبت به a و d پادمتقارن است. پس جمله یِ دوم صفر است:

$$0 = (\partial_d \partial_a \mathfrak{A}) (\{\mathfrak{B}, \mathfrak{x}^d\}_{\mathfrak{J}} \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}} - \{\mathfrak{B}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}} \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^d\}_{\mathfrak{J}}). \tag{2301}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{D} = (\partial_a \mathfrak{A}) (\{\mathfrak{x}^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C}, \{\mathfrak{x}^a, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}). \tag{2302}$$

از این که طرف ِ راست ِ (2296) برا یِ هر سه-تابعی یِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ ثابت است، نتیجه میشود ثابتها یِ $\mathfrak{D}_1^a$ ی هستند که

$$\mathfrak{D}_1^a = \{\mathfrak{x}^a, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C}, \{\mathfrak{x}^a, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, \mathfrak{x}^a\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2303}$$

پس،

$$\mathfrak{D} = (\partial_a \mathfrak{A})\, \mathfrak{D}_1^a. \tag{2304}$$

که نتیجه میدهد

$$0 = (\partial_d\, \partial_a \mathfrak{A})\, \mathfrak{D}_1^a. \tag{2305}$$

$\mathfrak{D}_1^a$ ها به $\mathfrak{A}$ وابسته نیستند، و رابطه یِ بالا برا یِ هر $\mathfrak{A}$ درست است. از جمله به ازا یِ

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\, (\sigma_b\, \mathfrak{x}^b)\, (\sigma_c\, \mathfrak{x}^c). \tag{2306}$$

که σ_a ها ثابت َند. با این $\mathfrak{A}$،

$$\partial_d\, \partial_a \mathfrak{A} = \sigma_d\, \sigma_a. \tag{2307}$$

و رابطه یِ (2305) میشود

$$0 = \sigma_d\, (\sigma_a\, \mathfrak{D}_1^a). \tag{2308}$$

اگر دست- ِ-کم یک ی از σ_d ها ناصفر باشد، از رابطه یِ بالا نتیجه میشود

$$0 = \sigma_a\, \mathfrak{D}_1^a. \tag{2309}$$

اگر همه یِ σ_d ها صفر باشند هم که رابطه یِ (2309) بدیهی ست. پس σ ها هر چه باشند (2309) برقرار است. از این نتیجه میشود $\mathfrak{D}_1^a$ ها صفر َند:

$$0 = \mathfrak{D}_1^a. \tag{2310}$$

به این ترتیب،

$$0 = \mathfrak{D}. \tag{2311}$$

که این هم یعنی اتحادِ یاکُبی برقرار است:

$$0 = \{\mathfrak{A}, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{C}, \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} + \{\mathfrak{B}, \{\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2312}$$

پس اگر (2288) برقرار باشد، $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکُبی ست.

برعکس، گیرم $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکُبی ست. در این صورت،

$$\{\mathfrak{A}, \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}} = \{\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}} - \{\{\mathfrak{A}, \mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2313}$$

که، با استفاده از (2250)، میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}}\,\mathfrak{A} = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A} - \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2314}$$

یعنی،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}}\,\mathfrak{A} = [\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}, \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}]\,\mathfrak{A}. \tag{2315}$$

این برا یِ هر $\mathfrak{A}$ درست است. پس،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}} = [\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}, \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}]. \tag{2316}$$

که با استفاده از (2278)، رابطه یِ جا-به-جاگرِ مشتق-ِ-لیها، میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}} = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} \diamond \mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}. \tag{2317}$$

این هم با (2288) همئرز است. پس اگر $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکُبی باشد، (2288) برقرار است.

نتیجه این که برقرار-بودنِ (2288) با این که $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکُبی باشد همئرز است. قبلَن دیده شد برقرار-بودنِ (2288) با این که $\mathfrak{J}$ بسته باشد همئرز است. پس این سه-گزاره: (2288) برقرار

است، $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکُبی ست، همئرز َند. از جمله شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ویژگیها یِ همئرز ِ **j5** و **j6** را داشته باشد این است که $\mathfrak{J}$ بسته باشد.

نتیجه این که اگر $\mathfrak{J}$ پادمتقارن و واورن-پذیر باشد؛ وقت ی $\mathfrak{J}$ بسته باشد، یا همئرز با آن $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکبی باشد؛ دُ-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ $\mathfrak{J}$ همه یِ ویژگیها یِ دُ-فرم ِ همتافته را دارد و $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن هم همه یِ ویژگیها یِ کروشه-یِ-پُؤَسُن را دارد. البته مئلفیها یِ $\mathfrak{J}$ لزومَن با مئلفِها یِ J یکسان نیستند. شاید علت این باشد که مئلفِها یِ $\mathfrak{J}$ در پایه ای (مختصات ی) دلبخاه (نَ لزومَن کانُنیک) نوشته شده اند. آیا مختصات ی هستند که با آنها مئلفیها یِ $\mathfrak{J}$ با مئلفِها یِ J یکسان باشد؟ جواب ِ مثبت به این پرسش، یعنی مختصات ی، x^a ها، هستند که

$$J_{a\,b} = \frac{\partial\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b}\,\mathfrak{J}_{d\,e}. \tag{2318}$$

در این صورت، چون مشتق ِ طرف ِ چپ صفر است، مشتق ِ طرف ِ راست هم باید صفر باشد:

$$0 = \left(\frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^c\,\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b} + \frac{\partial\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^c\,\partial\,x^b}\right)\mathfrak{J}_{d\,e} + \frac{\partial\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{d\,e}}{\partial\,x^c}. \tag{2319}$$

در واقع برا یِ رسیدن به (2319) لازم نیست طرف ِ چپ ِ (2318) برابر با $J_{a\,b}$ باشد. کافی ست مشتق ِ طرف ِ چپ ِ (2318) صفر باشد. و اگر مشتق ِ طرف ِ چپ ِ (2318) در یک نقطه صفر باشد هم، (2319) در هم ان نقطه برقرار است. درطرف ِ راست ِ (2319)، مشتق-گیری از مئلفِها یِ $\mathfrak{J}$ را بر حسب ِ مشتق-گیری نسبت به $\mathfrak{x}$ مینویسم، و در جمله یِ اول هم این را به کار میبَرم که $\mathfrak{J}$ پادمتقارن است. (2319) چنین میشود

$$0 = \left(\frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^c\,\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b} - \frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^c\,\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^a}\right)\mathfrak{J}_{d\,e} + \frac{\partial\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^f}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{d\,e}}{\partial\,\mathfrak{x}^f}. \tag{2320}$$

مجموع ِ پرانتز و دُ جمله یِ حاصل از تبدیل ِ دُری یِ شاخصها یِ a و b و c در آن صفر است:

$$\begin{aligned} 0 = &+\left(\frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^c\,\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b} - \frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^c\,\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^a}\right)\\ &+\left(\frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^a\,\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^c} - \frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^a\,\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b}\right)\\ &+\left(\frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^b\,\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^a} - \frac{\partial^2\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^b\,\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^c}\right). \end{aligned} \tag{2321}$$

پس مجموع ِ جمله یِ دوم و دُ جمله یِ حاصل از تبدیل ِ دُری یِ شاخصها یِ a و b و c در آن هم صفر است:

$$0=\left(\frac{\partial\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^f}{\partial\,x^c}+\frac{\partial\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^f}{\partial\,x^a}+\frac{\partial\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^f}{\partial\,x^b}\right)\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{d\,e}}{\partial\,\mathfrak{x}^f}. \qquad (2322)$$

که، با عضو-کردن ِ اسم ِ شاخصها، میشود

$$0=\frac{\partial\,\mathfrak{x}^d}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^e}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{x}^f}{\partial\,x^c}\,\left(\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{d\,e}}{\partial\,\mathfrak{x}^f}+\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{e\,f}}{\partial\,\mathfrak{x}^d}+\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{f\,d}}{\partial\,\mathfrak{x}^e}\right). \qquad (2323)$$

مشتق ِ $\mathfrak{x}$ نسبت به x وارون-پذیر است. پس (2323) چنین میشود.

$$0=\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{d\,e}}{\partial\,\mathfrak{x}^f}+\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{e\,f}}{\partial\,\mathfrak{x}^d}+\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{f\,d}}{\partial\,\mathfrak{x}^e}. \qquad (2324)$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,\mathfrak{J}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{d\,e}}{\partial\,\mathfrak{x}^f}\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{x}^f)\wedge(\mathbf{d}\,\mathfrak{x}^d)\wedge(\mathbf{d}\,\mathfrak{x}^e). \qquad (2325)$$

یا،

$$\mathbf{d}\,\mathfrak{J}=\frac{1}{6}\,\left(\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{d\,e}}{\partial\,\mathfrak{x}^f}+\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{e\,f}}{\partial\,\mathfrak{x}^d}+\frac{\partial\,\mathfrak{J}_{f\,d}}{\partial\,\mathfrak{x}^e}\right)\,(\mathbf{d}\,\mathfrak{x}^f)\wedge(\mathbf{d}\,\mathfrak{x}^d)\wedge(\mathbf{d}\,\mathfrak{x}^e). \qquad (2326)$$

که، با استفاده از (2324)، به هم ان (2287) مینجامد: به این که $\mathfrak{J}$ بسته است. این یعنی شرط ِ لازم برا یِ این که مختصات ی چنان باشد که در یک نقطه مشتق ِ مئلفِها یِ $\mathfrak{J}$ صفر شود، این است که مشتق ِ برونی یِ $\mathfrak{J}$ در آن نقطه صفر شود.

لزوم ِ این شرط، به این مربوط است که $\mathfrak{J}$ متقارن نیست: برا یِ هر دُ-فرم ِ متقارن و به ازا یِ هر نقطه، همیشه مختصات ی هست که مشتق ِ مئلفِها یِ آن دُ-فرم را در آن نقطه صفر کند. البته با انتخاب ِ مختصات، لزومَن نمیشود مشتق ِ مئلفِها یِ آن دُ-فرم را همه-جا، یا دست- ِ-کم مُضعَن، در یک همسایگی، صفر کرد. برا یِ این که این کار شدنی باشد، یک شرط ِ اضافی لازم است. این شرط ِ اضافی، وقت یِ آن دُ-فرم وارون-پذیر است، این است که هموستار- ِ-لوی-چیویتا یِ متناظر تخت باشد.

اما برا یِ یک دُ-فرم ِ که متقارن نباشد، با انتخاب ِ مختصات، لزومَن نمیشود مشتق ِ مئلفِها یِ آن دُ-فرم را حتا در یک نقطه صفر کرد. از جمله، برا یِ یک دُ-فرم ِ پادمتقارن (یک دُ-فرم ِ دیفرانسیل) و به ازا یِ یک نقطه، مختصات ی هست که مشتق ِ مئلفِها یِ آن دُ-فرم را در آن نقطه صفر کند، به شرط ی که مشتق ِ برونی یِ آن دُ-فرم در آن نقطه صفر باشد.

یک پرسش این است که اگر یک دُ-فرم- ِ-دیفرانسیل بسته باشد، آیا مختصات ی هستند که با آنها مئلفِها یِ دُ-فرم ثابت شوند (نَ فقط در یک نقطه، بل که همه-جا، یا دست- ِ-کم مُضعَن، در یک همسایگی)؟

جواب، چنان که در بخشها یِ بعد دیده خاهد شد، مثبت است. در واقع بیش از آن، با انتخاب ِ مختصات میشود مئلفِها را به شکل ی خاص هم دراورد.

73 قضیه یِ دَربو، حالت ِ خاص

مختصات ی که با آنها مئلفیِها یِ $\mathfrak{J}$ با مئلفِها یِ J یکسان َند را $\mathfrak{J}$-کانُنیک مینامم. رُشن است که

$$\{x^a, x^b\}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}^{a\,b}. \tag{2327}$$

پس مختصات، x^a ها، $\mathfrak{J}$-کانُنیک َند، وقت ی

$$\{x^a, x^b\}_{\mathfrak{J}} = J^{a\,b}. \tag{2328}$$

قضیه یِ دربُ (حالت ِ خاص) میگوید پاسخ به این پرسش ِ بخش ِ پیش «آیا مختصات ی هستند که مئلفیِها یِ $\mathfrak{J}$ با آنها، با مئلفِها یِ J یکسان باشد؟» مثبت است:

قضیه یِ دربُ (حالت ِ خاص): گیرم $\mathfrak{J}$ یک ماتریس ِ پادمتقارن و واورن-پذیر است؛ و دُ-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ $\mathfrak{J}$ بسته است، یا همئرز با آن $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکبی ست. در این صورت (مُضعَن) مختصات ی هستند که $\mathfrak{J}$-کانُنیک َند.

برا یِ اثبات، مختصات ِ $\mathfrak{J}$-کانُنیک را میسازم. گیرم $\mathfrak{J}$ فرضها یِ قضیه یِ دَربو را برمیئاورَد. $\mathfrak{J}$ پادمتقارن و وارون-پذیر است، پس دامنه اَ ش زُج-بُعدی ست. این بُعد را با $(2\,\mathfrak{m})$ نشان میدهم. به این ترتیب بُعد ِ $\mathbb{P}$ (خمینه ای که $\mathfrak{J}$ بر آن تعریف شده) برابر با $(2\,\mathfrak{m})$ است. برا یِ ساختن ِ مختصات ِ

$\mathfrak{J}$-کانُنیک (اثباتِ قضیه) استقرا به کار میبَرم:

حکمِ $\mathbf{A}_n$: برا یِ n با $(n \leq \mathfrak{m})$ مختصات ی، $(y^1_{(n)}, \ldots, y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})$، هست، چنان که

$$y^a_{(n)}(x_0) = 0. \tag{2329}$$

$$\{y^a_{n)}, y^b_{(n)}\}_{\mathfrak{J}} = \grave{J}^{a\,b}, \qquad \{[a \leq (2\,n)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2330}$$

$$\{y^a_{(n)}, y^b_{(n)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad \{[a > (2\,n)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2331}$$

$$y^a_{(n)} = y^a_{(n-1)}, \qquad a \leq (2\,n-2). \tag{2332}$$

که $\grave{J}$ یک باز-آراسته یِ J است:

$$\grave{J}^{\bullet\bullet} = \mathbf{1} \otimes J_{2\times 2}. \tag{2333}$$

$$J_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2334}$$

دیده میشود

$$J^{\bullet\bullet} = J_{2\times 2} \otimes \mathbf{1}. \tag{2335}$$

حکمِ قضیه یِ دَربو، از $\mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$ نتیجه میشود. میخاهم $\mathbf{A}_n$ را با استقرا بر n ثابت کنم. $\mathbf{A}_0$ بدیهی ست. $\mathbf{A}_n$ را فرض میکنم و میکوشم $\mathbf{A}_{n+1}$ را ثابت کنم. رُشن است که این اثبات برا یِ $(n < \mathfrak{m})$ انجام میشود، تا $(n+1)$ هم نابزرگتر از $\mathfrak{m}$ باشد.

برا یِ مئلفِها مختصاتِ $(y^1_{(n)}, \ldots, y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})$ را به کار میبَرم. تابعی یِ $\mathfrak{p}$ و میدانِ برداری یِ $\mathfrak{v}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{p} = y^{2\,n+2}_{(n)}. \tag{2336}$$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{J}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{p}. \tag{2337}$$

و البته (2337) را میشود چنین نوشت.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}. \tag{2338}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}^a &= (\mathbf{d}\, y^a_{(n)})\, \mathfrak{v},\\ &= \mathfrak{J}(\mathbf{d}\, y^a_{(n)}, \mathbf{d}\, y^{2\,n+2}_{(n)}).\end{aligned} \tag{2339}$$

که یعنی،

$$\mathfrak{v}^a = \mathfrak{J}^{a\,(2\,n+2)}. \tag{2340}$$

از جمله،

$$\mathfrak{v}^{2\,n+2} = 0. \tag{2341}$$

$(\mathbf{d}\, y^{2\,n+2}_{(n)})$ صفر نیست، چون $y^{2\,n+2}_{(n)}$ یک ی از مختصات است. چون $(\mathbf{d}\, y^{2\,n+2}_{(n)})$ صفر نیست و $\mathfrak{J}$ وارون-پذیر است، $\mathfrak{v}$ صفر نیست. پس دست- ِ-کم یک ی از مئلفِها یِ $\mathfrak{v}$ ناصفر است. همچنین،

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}^a &= (\mathbf{d}\, y^a_{(n)})\, \mathfrak{v},\\ &= \{y^a_{(n)}, y^{2\,n+2}_{(n)}\}_{\mathfrak{J}}.\end{aligned} \tag{2342}$$

پس رابطه یِ (2331)، که بر اساس ِ فرض ِ استقرا به ازا یِ n درست است، نشان میدهد

$$\mathfrak{v}^a = 0, \quad a \leq (2\,n). \tag{2343}$$

این، همراه با (2341)، نتیجه میدهد بین ِ $\mathfrak{v}^{2\,n+1}$، و $\mathfrak{v}^{2\,n+3}$ تا $\mathfrak{v}^{2\,\mathfrak{m}}$، دست- ِ-کم یک ی ناصفر است. بدون ِ کاستن از کلیت میشود $\mathfrak{v}^{2\,n+1}$ را ناصفر گرفت (در صورت ِ لزوم شاخصها یِ $y^a_{(n)}$ ها، جز شاخصها یِ 1 تا $(2\,n)$ و شاخص ِ $(2\,n+2)$ را جا-به-جا میکنم):

$$\mathfrak{v}^{2\,n+1} \neq 0. \tag{2344}$$

در واقع میشود $\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)$ را ناصفر کرد:

$$\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0) \neq 0. \tag{2345}$$

و این، به خاطر ِ پیوستگی، نتیجه میدهد (2344) در یک همسایگی از x_0 برقرار است. تابعی یِ $\mathfrak{A}$ با دامنه یِ $(\mathbb{R}\times\mathbb{P})$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t},x)=y_{(n)}^{2\,n+1}\{[\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)\}. \tag{2346}$$

این رابطه را میشود چنین نوشت.

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t},x)=\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]_*\,y_{(n)}^{2\,n+1}\}(x). \tag{2347}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{A}(0,x)=y_{(n)}^{2\,n+1}(x). \tag{2348}$$

از جمله،

$$\mathfrak{A}(0,x_0)=0. \tag{2349}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{A})(\mathfrak{t},x)=&-\Big((\mathbf{D}\,y_{(n)}^{2\,n+1})\{[\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)\}\Big)\\&\Big(\mathfrak{v}\{[\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)\}\Big).\end{aligned} \tag{2350}$$

یا،

$$(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{A})(\mathfrak{t},x)=-\mathfrak{v}^{2\,n+1}\{[\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)\}. \tag{2351}$$

از جمله،

$$(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{A})(0,x)=-\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x). \tag{2352}$$

از (2344) و (2351) دیده میشود

$$(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{A})(\mathfrak{t},x)\neq 0. \tag{2353}$$

از این، همراه با قضیه یِ تابع- ِ-ضمنی، دیده میشود معادله یِ زیر برا یِ $\mathfrak{t}$ جواب دارد، و جواب نسبت به x هموار است.

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \mathfrak{A}(\mathfrak{t}, x). \tag{2354}$$

تابعی یِ $\mathfrak{q}$ را با این رابطه تعریف میکنم.

$$0 = \mathfrak{A}[\mathfrak{q}(x), x]. \tag{2355}$$

از جمله دیده میشود

$$\mathfrak{q}(x_0) = 0. \tag{2356}$$

از (2355) نسبت به مختصات مشتق میگیرم:

$$0 = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mathfrak{A})\, \frac{\partial\, \mathfrak{q}}{\partial\, y^a_{(n)}} + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{A})\, \mathfrak{e}_{(n)\, a}. \tag{2357}$$

که $\mathfrak{e}_{(n)}$ میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصات ِ $(y^1_{(n)}, \ldots, y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})$ است. از (2353) دیده میشود ضریب ِ مشتق ِ $\mathfrak{q}$ نسبت به $y^a_{(n)}$ صفر نیست. به این ترتیب،

$$\frac{\partial\, \mathfrak{q}}{\partial\, y^a_{(n)}} = -\frac{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{A})\, \mathfrak{e}_{(n)\, a}}{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mathfrak{A}}. \tag{2358}$$

این رابطه را در x_0 مینویسم. از (2356) دیده میشود

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{A})[\mathfrak{q}(x_0), x_0] = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{A})(0, x_0). \tag{2359}$$

از (2348) هم دیده میشود

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{A})(0, x) = (\mathbf{D}\, y^{2\,n+1}_{(n)})(x_0). \tag{2360}$$

به این ترتیب،

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \mathfrak{A})[\mathfrak{q}(x_0), x_0] = (\mathbf{D}\, y^{2\,n+1}_{(n)})(x_0). \tag{2361}$$

و (2358) در نقطه یِ x_0 چنین میشود.

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{q}}{\partial\,y^a_{(n)}}\right)(x_0)=\frac{\delta^{2\,n+1}_a}{\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)}. \tag{2362}$$

تابعیها یِ $\tilde{y}'^1$ تا $\tilde{y}'^{2\,\mathfrak{m}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{y}'^a=y^a_{(n)},\qquad a\leq(2\,n). \tag{2363}$$

$$\tilde{y}'^{2\,n+1}=\mathfrak{q}. \tag{2364}$$

$$\tilde{y}'^{2\,n+2}=\mathfrak{p}. \tag{2365}$$

$$\tilde{y}'^a=y^a_{(n)},\qquad a>(2\,n+2). \tag{2366}$$

از اینها، و با استفاده از (2362)، دیده میشود

$$\left(\frac{\partial\,\tilde{y}'^a}{\partial\,y^b_{(n)}}\right)(x_0)=\mathfrak{d}^a\,\delta^a_b. \tag{2367}$$

که

$$\mathfrak{d}^{2\,n+1}=\frac{1}{\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)}. \tag{2368}$$

$$\mathfrak{d}^a=1,\qquad a\neq(2\,n+1). \tag{2369}$$

به شکل ِ ماتریسی،

$$\frac{\partial\,(\tilde{y}'^1,\ldots,\tilde{y}'^{2\,\mathfrak{m}})}{\partial\,(y^1_{(n)},\ldots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})}(x_0)$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{(2\,n)\times(2\,n)} & \mathbf{0}_{(2\,n)\times1} & \mathbf{0}_{(2\,n)\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)}\\ \mathbf{0}_{1\times(2\,n)} & [\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)]^{-1} & \mathbf{0}_{1\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)}\\ \mathbf{0}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)\times(2\,n)} & \mathbf{0}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)\times1} & \mathbf{1}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)}\end{pmatrix}. \tag{2370}$$

به این ترتیب ماتریس ِ مشتق ِ $(\tilde{y}'^1,\ldots,\tilde{y}'^{2\,\mathfrak{m}})$ نسبت به $(y^1_{(n)},\ldots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})$، در x_0 وارون- پذیر است؛ پس (با استفاده از پیوستگی) در یک همسایگی از x_0 هم وارون- پذیر است. این یعنی $(\tilde{y}'^1,\ldots,\tilde{y}'^{2\,\mathfrak{m}})$ را میشود مختصات گرفت.

دیده میشود

$$\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v}) = \{\mathsf{fl}[-(\mathfrak{t}+\mathfrak{s})\,\mathfrak{v}]\} \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{v})]. \tag{2371}$$

پس،

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{t}, x) = \mathfrak{A}\{\mathfrak{t}+\mathfrak{s}, [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{v})](x)\}. \tag{2372}$$

به این ترتیب (2355) نتیجه میدهد

$$0 = \mathfrak{A}\{\mathsf{q}(x)+\mathfrak{s}, [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{v})](x)\}. \tag{2373}$$

همچنین،

$$0 = \mathfrak{A}\Big(\mathsf{q}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{v})](x)\}, [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{v})](x)\Big). \tag{2374}$$

از (2373) و (2374) نتیجه میشود

$$\mathsf{q}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{v})](x)\} = \mathsf{q}(x)+\mathfrak{s}. \tag{2375}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{D}\Big(\mathsf{q}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,\mathfrak{v})](x)\}\Big) = 1. \tag{2376}$$

از جمله،

$$\Big[\mathbf{D}\Big(\mathsf{q}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,\mathfrak{v})](x)\}\Big)\Big](0) = 1. \tag{2377}$$

این هم یعنی

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{v}}\,\mathsf{q} = 1. \tag{2378}$$

یا،

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{v} = 1. \tag{2379}$$

که، با استفاده از (2337)، میشود

$$\mathfrak{J}(\mathbf{d}\,\mathfrak{q}, \mathbf{d}\,\mathfrak{p}) = 1. \tag{2380}$$

یا،

$$\{\mathfrak{q}, \mathfrak{p}\}_{\mathfrak{J}} = 1. \tag{2381}$$

میدان ِ برداری یِ $\mathfrak{u}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{J}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{q}. \tag{2382}$$

یا،

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{q}}. \tag{2383}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{p})\,\mathfrak{u} = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2384}$$

که، با استفاده از (2381)، میشود

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{p})\,\mathfrak{u} = -1. \tag{2385}$$

یا،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{p} = -1. \tag{2386}$$

این هم یعنی

$$\mathfrak{p}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u})](x)\} = \mathfrak{p}(x) - \mathfrak{s}. \tag{2387}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{q} &= (\mathbf{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{u},\\ &= \{\mathfrak{q},\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{J}}.\end{aligned} \tag{2388}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{q} = 0. \tag{2389}$$

یا،

$$\mathfrak{q}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u})](x)\} = \mathfrak{q}(x). \tag{2390}$$

و مشابه با آن،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{p} &= (\mathbf{d}\,\mathfrak{p})\,\mathfrak{v},\\ &= \{\mathfrak{p},\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{J}}.\end{aligned} \tag{2391}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{p} = 0. \tag{2392}$$

یا،

$$\mathfrak{p}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)\} = \mathfrak{p}(x). \tag{2393}$$

سرانجام،

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}\diamond\mathfrak{v} &= \mathfrak{J}_{\mathfrak{q}}\diamond\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}},\\ &= \mathfrak{J}_{\{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{J}}}.\end{aligned} \tag{2394}$$

اما،

$$\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{J}}} = \mathfrak{J}\,\mathbf{d}\,\{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2395}$$

از (2381) دیده میشود

$$\{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{J}} = -1. \tag{2396}$$

پس،

$$\mathbf{d}\,\{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{J}} = 0. \tag{2397}$$

و

$$\mathfrak{u} \diamond \mathfrak{v} = 0. \tag{2398}$$

از این نتیجه میشود

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})] = \mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{t}\,\mathfrak{v}). \tag{2399}$$

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u})] = \mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{t}\,\mathfrak{v}). \tag{2400}$$

با استفاده از اینها و (2375) و (2387) و (2390) و (2393) و (2398)، دیده میشود

$$\mathfrak{q}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)\} = \mathfrak{q}(x) + \mathfrak{t}. \tag{2401}$$

$$\mathfrak{p}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)\} = \mathfrak{p}(x) - \mathfrak{s}. \tag{2402}$$

که میشود آنها را چنین نوشت.

$$\mathfrak{q}\Big(\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]\}(x)\Big) = \mathfrak{q}(x) + \mathfrak{t}. \tag{2403}$$

$$\mathfrak{p}\Big(\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]\}(x)\Big) = \mathfrak{p}(x) - \mathfrak{s}. \tag{2404}$$

یا،

$$\mathfrak{q}\Big(\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u})]\}(x)\Big)=\mathfrak{q}(x)+\mathfrak{t}. \tag{2405}$$

$$\mathfrak{p}\Big(\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u})]\}(x)\Big)=\mathfrak{p}(x)-\mathfrak{s}. \tag{2406}$$

تابع ِ $\mathfrak{B}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{B}(x)=\Big(\mathsf{fl}\{[\mathfrak{p}(x)]\,\mathfrak{u}-[\mathfrak{q}(x)]\,\mathfrak{v}\}\Big)(x). \tag{2407}$$

از جمله دیده میشود

$$\mathfrak{B}(x_0)=x_0. \tag{2408}$$

ترکیب ِ $\mathfrak{B}$ با $\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}+\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})$ را بررسی میکنم. برا یِ مختصر-نوشتن، $[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}+\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)$ را با $\mathfrak{x}'$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{x}'=[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}+\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x). \tag{2409}$$

روابط ِ (2401) و (2402) میشوند

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{x}')=\mathfrak{q}(x)+\mathfrak{t}. \tag{2410}$$

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{x}')=\mathfrak{p}(x)-\mathfrak{s}. \tag{2411}$$

پس،

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}')=\Big(\mathsf{fl}\{[\mathfrak{p}(x)-\mathfrak{s}]\,\mathfrak{u}-[\mathfrak{q}(x)+\mathfrak{t}]\,\mathfrak{v}\}\Big)(\mathfrak{x}'). \tag{2412}$$

یا،

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}')=\Big[\Big(\mathsf{fl}\{[\mathfrak{p}(x)]\,\mathfrak{u}-[\mathfrak{q}(x)]\,\mathfrak{v}\}\Big)\circ[\mathsf{fl}(-\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]\Big](\mathfrak{x}'). \tag{2413}$$

که میشود

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}')=\Big(\mathsf{fl}\{[\mathfrak{p}(x)]\,\mathfrak{u}-[\mathfrak{q}(x)]\,\mathfrak{v}\}\Big)\{[\mathsf{fl}(-\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](\mathfrak{x}')\}. \tag{2414}$$

یعنی،

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}') = \mathfrak{B}(x). \tag{2415}$$

در روابط ِ بالا این به کار رفته که $\mathfrak{u}$ و $\mathfrak{v}$ با هم جا-به-جا میشوند. نتیجه یِ آخر را میشود چنین نوشت.

$$\mathfrak{B} \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{t}\,\mathfrak{v})] = \mathfrak{B}. \tag{2416}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]^* \mathfrak{B} = \mathfrak{B}. \tag{2417}$$

و از این هم نتیجه میشود

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]_* \mathfrak{B} = \mathfrak{B}. \tag{2418}$$

از تعریف ِ $\mathfrak{B}$، رابطه یِ (2407)، همراه با این که $\mathfrak{q}(x_0)$ و $\mathfrak{p}(x_0)$ صفر َند، دیده میشود وقت یِ x نزدیک ِ x_0 است،

$$y^a_{(n)}[\mathfrak{B}(x)] = y^a_{(n)}(x) + [\mathfrak{p}(x)]\,\mathfrak{u}^a(x_0) - [\mathfrak{q}(x)]\,\mathfrak{v}^a(x_0) + o(\mathfrak{h}). \tag{2419}$$

که،

$$\mathfrak{h}^a = y^a_{(n)}(x) - y^a_{(n)}(x_0). \tag{2420}$$

$\mathfrak{p}$ هم ان $y^{2\,n+2}_{(n)}$ است. از (2356) و (2362) هم دیده میشود

$$\mathfrak{q}(x) = \frac{y^{2\,n+1}_{(n)}(x)}{\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)} + o(\mathfrak{h}). \tag{2421}$$

پس،

$$y^a_{(n)}[\mathfrak{B}(x)] = y^a_{(n)}(x) + [y^{2\,n+2}(x)]\,\mathfrak{u}^a(x_0) - [y^{2\,n+1}(x)]\,\frac{\mathfrak{v}^a(x_0)}{\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)} + o(\mathfrak{h}). \tag{2422}$$

از (2362) همچنین نتیجه میشود

$$(\mathbf{d}\,\mathfrak{q})(x_0)=\frac{(\mathbf{d}\,y^{2\,n+1}_{(n)})(x_0)}{\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)}. \tag{2423}$$

این، همراه با (2381)، نتیجه میدهد

$$\mathfrak{u}^a(x_0)=\frac{\mathfrak{J}^{a\,(2\,n+1)}(x_0)}{\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)}. \tag{2424}$$

به شکل ی مشابه، از (2337)نتیجه میشود

$$\mathfrak{v}^a(x_0)=\mathfrak{J}^{a\,(2\,n+2)}(x_0). \tag{2425}$$

به این ترتیب، رابطه یِ (2422) چنین میشود.

$$y^a_{(n)}[\mathfrak{B}(x)]=y^a_{(n)}(x)+\frac{[\mathfrak{J}^{a\,2\,n+1}(x_0)]\,y^{2\,n+2}_{(n)}(x)-[\mathfrak{J}^{a\,(2\,n+2)}(x_0)]\,y^{2\,n+1}(x)}{\mathfrak{J}^{(2\,n+1)\,(2\,n+2)}(x_0)}$$
$$+\,o(\mathfrak{h}). \tag{2426}$$

از اینجا، و با توجه به این که $\mathfrak{J}$ پادمتقارن است، دیده میشود

$$\frac{\partial\,(y^a_{(n)}\circ\mathfrak{B})}{\partial\,y^b_{(n)}}=\delta^a_b,\quad a\leq(2\,n). \tag{2427}$$

$$\frac{\partial\,(y^{2\,n+1}_{(n)}\circ\mathfrak{B})}{\partial\,y^b_{(n)}}=0. \tag{2428}$$

$$\frac{\partial\,(y^{2\,n+2}_{(n)}\circ\mathfrak{B})}{\partial\,y^b_{(n)}}=0. \tag{2429}$$

$$\frac{\partial\,(y^a_{(n)}\circ\mathfrak{B})}{\partial\,y^b_{(n)}}=\delta^a_b,\quad a>(2\,n+2). \tag{2430}$$

به شکل ِ ماتریسی،

$$\frac{\partial\,[(y^1_{(n)}\circ\mathfrak{B}),\ldots,(y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)}\circ\mathfrak{B})]}{\partial\,(y^1_{(n)},\ldots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})}(x_0)$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{(2\,n)\times(2\,n)} & \mathbf{0}_{(2\,n)\times 2} & \mathbf{0}_{(2\,n)\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-2)}\\ \mathbf{0}_{2\times(2\,n)} & \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-2)}\\ \mathbf{0}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-2)\times(2\,n)} & \mathbf{0}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-2)\times 2} & \mathbf{1}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-2)\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-2)}\end{pmatrix}. \tag{2431}$$

تابعیها یِ $y^1_{(n+1)}$ تا $y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n+1)}$ را چنین تعریف میکنم.

$$y^a_{(n+1)}(x) = y^a_{(n)}, \qquad a \leq (2\,n). \tag{2432}$$

$$y^{2\,n+1}_{(n+1)}(x) = \mathfrak{q}(x). \tag{2433}$$

$$y^{2\,n+2}_{(n+1)}(x) = \mathfrak{p}(x). \tag{2434}$$

$$y^a_{(n+1)}(x) = y^a_{(n)}[\mathfrak{B}(x)], \quad a > (2\,n+2). \tag{2435}$$

رُشن است که

$$y^a_{(n+1)}(x_0) = 0. \tag{2436}$$

از (2362) دیده میشود

$$\left(\frac{\partial\, y^{2\,n+1}_{(n+1)}}{\partial\, y^a_{(n)}}\right)(x_0) = \frac{\delta^{2\,n+1}_a}{\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)}. \tag{2437}$$

از تعریف ِ $y^{2+2}_{(n+1)}$ و $\mathfrak{p}$ هم رُشن است که

$$\left(\frac{\partial\, y^{2\,n+2}_{(n+1)}}{\partial\, y^a_{(n)}}\right)(x_0) = \delta^{2\,n+2}_a. \tag{2438}$$

به این ترتیب،

$$\left(\frac{\partial\, y^a_{(n+1)}}{\partial\, y^b_{(n)}}\right)(x_0) = \mathfrak{d}^a\,\delta^a_b. \tag{2439}$$

که $\mathfrak{d}$ هم ان است که با روابط ِ (2368) و (2369) تعریف شده. به شکل ِ ماتریسی،

$$\frac{\partial\,(y^1_{(n+1)},\ldots,\tilde{y}^{2\,\mathfrak{m}}_{(n+1)})}{\partial\,(y^1_{(n)},\ldots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})}(x_0)$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{(2\,n)\times(2\,n)} & \mathbf{0}_{(2\,n)\times 1} & \mathbf{0}_{(2\,n)\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)} \\ \mathbf{0}_{1\times(2\,n)} & [\mathfrak{v}^{2\,n+1}(x_0)]^{-1} & \mathbf{0}_{1\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)} \\ \mathbf{0}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)\times(2\,n)} & \mathbf{0}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)\times 1} & \mathbf{1}_{(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)\times(2\,\mathfrak{m}-2\,n-1)} \end{pmatrix}. \tag{2440}$$

در واقع دیده میشود

$$\frac{\partial\,(y^1_{(n+1)},\dots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n+1)})}{\partial\,(y^1_{(n)},\dots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})}(x_0)=\frac{\partial\,(\tilde{y}'^1,\dots,\tilde{y}'^{2\,\mathfrak{m}})}{\partial\,(y^1_{(n)},\dots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})}(x_0). \tag{2441}$$

یا،

$$\frac{\partial\,(y^1_{(n+1)},\dots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n+1)})}{\partial\,(\tilde{y}'^1,\dots,\tilde{y}'^{2\,\mathfrak{m}})}=\mathbf{1}_{(2\,\mathfrak{m})\times(2\,\mathfrak{m})}. \tag{2442}$$

به این ترتیب ماتریس ِ مشتق ِ $(y^1_{(n+1)},\dots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n+1)})$ نسبت به $(y^1_{(n)},\dots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n)})$، در x_0 وارون-پذیر است؛ پس (با استفاده از پیوستگی) در یک همسایگی از x_0 هم وارون-پذیر است. این یعنی $(y^1_{(n+1)},\dots,y^{2\,\mathfrak{m}}_{(n+1)})$ را میشود مختصات گرفت.

از (2416) و (2435) دیده میشود

$$y^a_{(n+1)}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}+\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})](x)\}=y^a_{(n+1)}(x),\quad a>(2\,n+2). \tag{2443}$$

این هم یعنی،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,y^a_{(n+1)}=0,\qquad a>(2\,n+2). \tag{2444}$$

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{v}}\,y^a_{(n+1)}=0,\qquad a>(2\,n+2). \tag{2445}$$

یا،

$$(\mathbf{d}\,y^a_{(n+1)})\,\mathfrak{u}=0,\qquad a>(2\,n+2). \tag{2446}$$

$$(\mathbf{d}\,y^a_{(n+1)})\,\mathfrak{v}=0,\qquad a>(2\,n+2). \tag{2447}$$

که، با استفاده از تعریف ِ $\mathfrak{u}$ و $\mathfrak{v}$، میشوند

$$\{y^a_{(n+1)},\mathfrak{q}\}_{\mathfrak{J}}=0,\qquad a>(2\,n+2). \tag{2448}$$

$$\{y^a_{(n+1)},\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{J}}=0,\qquad a>(2\,n+2). \tag{2449}$$

رابطه یِ (2381) را میشود چنین نوشت.

$$\{y^{2\,n+1}_{(n+1)},y^{2\,n+2}_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}}=1. \tag{2450}$$

روابط ِ (2448) و (2449) هم چنین میشوند.

$$\{y^{a}_{(n+1)}, y^{2\,n+1}_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad a > (2\,n+2). \tag{2451}$$

$$\{y^{a}_{(n+1)}, y^{2\,n+2}_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad a > (2\,n+2). \tag{2452}$$

از (2336) و (2434) دیده میشود

$$y^{2\,n+2}_{(n+1)} = y^{2\,n+2}_{(n)}. \tag{2453}$$

از این و (2432)، همراه با فرض ِ استقرا، دیده میشود

$$\{y^{2\,n+2}_{(n+1)}, y^{b}_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2454}$$

$\mathfrak{w}^b$ را، برا یِ b ها یِ نابزرگتر از $(2\,n)$، چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{w}^b = \mathfrak{J}_{y^{b}_{(n+1)}}, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2455}$$

یا،

$$\mathfrak{w}^b = \mathfrak{J}\,(\mathbf{d}\,y^{b}_{(n+1)}), \quad b \leq (2\,n). \tag{2456}$$

رُشن است که اینها را میشود چنین نوشت.

$$\mathfrak{w}^b = \mathfrak{J}_{y^{b}_{(n)}}, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2457}$$

یا،

$$\mathfrak{w}^b = \mathfrak{J}\,(\mathbf{d}\,y^{b}_{(n)}), \qquad b \leq (2\,n). \tag{2458}$$

از این تعریف، همراه با رابطه یِ (2454) و تعریف ِ $\mathfrak{v}$، نتیجه میشود

$$\mathfrak{w}^b \diamond \mathfrak{v} = 0, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2459}$$

از تعریف ِ $\mathfrak{w}^b$، رابطه یِ (2457) یا (2458)، همراه با فرض ِ استقرا، همچنین دیده میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{w}^b}\, y_{(n)}^{2\,n+1} = 0, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2460}$$

ترکیب ِ $\mathfrak{A}$ با $\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)$ را، برا یِ b ها یِ نابزرگتر از $(2\,n)$، بررسی میکنم:

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{t}, [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\} = y_{(n)}^{2\,n+1}\Big([\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\}\Big). \tag{2461}$$

یا،

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{t}, [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\} = \{y_{(n)}^{2\,n+1} \circ [\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\}(x). \tag{2462}$$

رابطه یِ (2459) نتیجه میدهد

$$[\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] = [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] \circ [\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})], \qquad b \leq (2\,n). \tag{2463}$$

رابطه یِ (2460) هم نتیجه میدهد

$$y_{(n)}^{2\,n+1} \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] = y_{(n)}^{2\,n+1}, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2464}$$

پس،

$$y_{(n)}^{2\,n+1} \circ [\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] = y_{(n)}^{2\,n+1} \circ [\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})], \qquad b \leq (2\,n). \tag{2465}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{t}, [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\} = \{y_{(n)}^{2\,n+1} \circ [\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{v})]\}(x), \quad b \leq (2\,n). \tag{2466}$$

یا،

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{t}, [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\} = \mathfrak{A}(\mathfrak{t}, x), \qquad b \leq (2\,n). \tag{2467}$$

از جمله،

$$\mathfrak{A}\{\mathsf{q}(x), [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\} = \mathfrak{A}[\mathsf{q}(x), x], \qquad b \leq (2\,n). \tag{2468}$$

نتیجه این که

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{q}(x), [\mathfrak{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\} = 0, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2469}$$

که یعنی،

$$\mathfrak{q}\{[\mathfrak{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\} = \mathfrak{q}(x), \quad b \leq (2\,n). \tag{2470}$$

این هم یعنی

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{w}^b}\,\mathfrak{q} = 0, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2471}$$

به این ترتیب،

$$\{y^{2\,n+1}_{(n+1)}, y^b_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2472}$$

که همئرز است با

$$\mathfrak{w}^b \diamond \mathfrak{u} = 0, \qquad b \leq (2\,n). \tag{2473}$$

معلوم شد

$$\{\mathfrak{q}, y^b_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \quad b \leq (2\,n). \tag{2474}$$

$$\{\mathfrak{p}, y^b_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \quad b \leq (2\,n). \tag{2475}$$

یا،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{w}^b}\,\mathfrak{q} = 0, \quad b \leq (2\,n). \tag{2476}$$

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{w}^b}\,\mathfrak{p} = 0, \quad b \leq (2\,n). \tag{2477}$$

ترکیب ِ $\mathfrak{B}$ با $\mathfrak{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)$ را، برا یِ b ها یِ نابزرگتر از $(2\,n)$، بررسی میکنم:

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{B} \circ [\mathfrak{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\}(x) = \Big\{\mathfrak{fl}\Big[\Big(\mathfrak{p}\{[\mathfrak{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\}\Big)\,\mathfrak{u} \\ - \Big(\mathfrak{q}\{[\mathfrak{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\}\Big)\,\mathfrak{v}\Big]\Big\}\{[\mathfrak{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)](x)\}.\end{aligned} \tag{2478}$$

یا،

$$\{\mathfrak{B}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\}(x)=\Bigg(\Big\{\mathsf{fl}\Big[\Big(\{\mathfrak{p}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\}(x)\Big)\,\mathfrak{u}\\ -\Big(\{\mathfrak{q}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\}(x)\Big)\,\mathfrak{v}\Big]\Big\}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\Bigg)(x). \tag{2479}$$

از (2476) و (2477) نتیجه میشود

$$\mathfrak{q}\circ\,[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]=\mathfrak{q},\quad b\leq(2\,n). \tag{2480}$$

$$\mathfrak{p}\circ\,[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]=\mathfrak{p},\quad b\leq(2\,n). \tag{2481}$$

پس،

$$\{\mathfrak{B}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\}(x)=\Big[\Big(\mathsf{fl}\{[\mathfrak{p}(x)]\,\mathfrak{u}-[\mathfrak{q}(x)]\,\mathfrak{v}\}\Big)\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\Big](x),\\ b\leq(2\,n). \tag{2482}$$

و چون؛ اگر b نابزرگتر از $(2\,n)$ باشد، $\mathfrak{w}^b$ با $\mathfrak{v}$ و $\mathfrak{u}$ جا-به-جا میشود؛ روابط ِ (2459) و (2473)،

$$\{\mathfrak{B}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\}(x)=\Big[[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\circ\Big(\mathsf{fl}\{[\mathfrak{p}(x)]\,\mathfrak{u}-[q'(x)]\,\mathfrak{v}\}\Big)\Big](x),\\ b\leq(2\,n). \tag{2483}$$

این هم یعنی

$$\mathfrak{B}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]=[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]\circ\mathfrak{B},\quad b\leq(2\,n). \tag{2484}$$

سرانجام، ترکیب ِ $y^a_{(n+1)}$ با $\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)$ را، برا یِ b ها یِ نابزرگتر از $(2\,n)$ و a ها یِ بزرگتر از $(2\,n+2)$، بررسی میکنم. رابطه یِ (2435) میشود

$$y^a_{(n+1)}=y^a_{(n)}\circ\mathfrak{B},\qquad a>(2\,n+2). \tag{2485}$$

به این ترتیب،

$$y^a_{(n+1)}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)]=y^a_{(n)}\circ\mathfrak{B}\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)],\qquad a>(2\,n+2). \tag{2486}$$

که، با استفاده از (2484)، میشود

$$y^a_{(n+1)} \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] = y^a_{(n)} \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] \circ \mathfrak{B}, \qquad \{[a > (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2487}$$

از تعریف ِ $\mathfrak{w}^b$، رابطه یِ (2457) یا (2458)، همراه با فرض ِ استقرا، همچنین دیده میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{w}^b}\, y^a_{(n)} = 0, \qquad \{[a > (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2488}$$

به این ترتیب،

$$y^a_{(n)} \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] = y^a_{(n)}, \qquad \{[a > (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2489}$$

که نتیجه میدهد

$$y^a_{(n+1)} \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] = y^a_{(n)} \circ \mathfrak{B}, \quad \{[a > (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2490}$$

و از اینجا،

$$y^a_{(n+1)} \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{w}^b)] = y^a_{(n+1)}, \qquad \{[a > (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2491}$$

این هم یعنی

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{w}^b}\, y^a_{(n+1)} = 0, \qquad \{[a > (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2492}$$

پس،

$$\{y^a_{(n+1)}, y^b_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad \{[a > (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2493}$$

از این، همراه با روابط ِ (2451) و (2452)، نتیجه میشود

$$\{y^a_{(n+1)}, y^b_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad \{[a > (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n+2)]\}. \tag{2494}$$

از فرض ِ استقرا، همراه با روابط ِ (2450) و (2454) و (2472)، هم نتیجه میشود

$$\{y^a_{(n+1)}, y^b_{(n+1)}\}_{\mathfrak{J}} = \grave{J}^{a\,b}, \qquad \{[a \leq (2\,n+2)] \wedge [b \leq (2\,n+2)]\}. \tag{2495}$$

اینها حکم ِ استقرا را نشان میدهند.

به این ترتیب $\mathbf{A}_n$ برا یِ n ِ دلبخاه، با $(0 \leq n \leq \mathfrak{m})$ ثابت شد. از جمله $\mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$ درست است. که این هم حکم ِ قضیه یِ دَربو (در حالت ِ خاص) را نشان میدهد.

نتیجه این که (مُضعَن) مختصات ی، $(y^1_{(\mathfrak{m})}, \ldots, y^{2\,\mathfrak{m}}_{(\mathfrak{m})})$، هست، چنان که

$$y^a_{(\mathfrak{m})}(x_0) = 0. \tag{2496}$$

$$\{y^a_{(\mathfrak{m})}, y^b_{(\mathfrak{m})}\}_{\mathfrak{J}} = \grave{J}^{a\,b}. \tag{2497}$$

اینها را میشود با یک اسم-گذاری یِ مکان-تکانه نوشت. q^1 تا $q^{\mathfrak{m}}$، و p_1 تا $p_{\mathfrak{m}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$q^i = y^{2\,i-1}_{(m)}, \quad i \leq \mathfrak{m}. \tag{2498}$$

$$p_i = y^{2\,i}_{(m)}, \quad i \leq \mathfrak{m}. \tag{2499}$$

کروشه-یِ-پُؤَسُنها چنین میشوند.

$$\{q^i, q^j\} = 0. \tag{1782}$$

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j. \tag{1783}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0. \tag{1784}$$

به این ترتیب، $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن در واقع هم ان کروشه-یِ-پُؤَسُن است، که در مختصات ی دلبخاه (نَ لزومَن کانُنیک) نوشته شده.

74 قضیه یِ دَربو، حالت ِ کلی

$\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن با یک ماتریس ِ $\mathfrak{J}$ تعریف شد که پادمتقارن و واورن-پذیر است. شرط ِ وارون-پذیری را بر میدارم. $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را با $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}$ نشان میدهم، و آن را چنین تعریف

میکنم.

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,x^b}. \tag{2247}$$

در حالت ِ کلی، $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ی که با (2247) تعریف شده یاکُبی نیست. این شرط را بر $\mathfrak{J}$ میگذارم که $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ی که با (2247) تعریف شده یاکُبی باشد:

$$0=\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}+\{\mathfrak{C},\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}+\{\mathfrak{B},\{\mathfrak{C},\mathfrak{A}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2312}$$

رُشن است که این شرط همئرز است با این که $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ی که با (2247) تعریف شده (نسبت به هر یک از تابعیها)، با کروشه-یِ-پُؤَسُن (به جا یِ ضرب) لَیبنیتسی ست:

$$\{\mathfrak{A},\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}\}_{\mathfrak{J}}=\{\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}-\{\{\mathfrak{A},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}}. \tag{2313}$$

دیده میشود $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ی که با (2247) تعریف شده،

k1 پادمتقارن است.

k2 (نسبت به هر یک از تابعیها) خطی ست.

k3 (نسبت به هر یک از تابعیها) زنجیرئی ست.

k4 (نسبت به هر یک از تابعیها) لَیبنیتسی ست.

k5 (نسبت به هر یک از تابعیها)، با کروشه-یِ-پُؤَسُن (به جا یِ ضرب) لَیبنیتسی ست.

k6 یاکُبی ست (اتحاد ِ یاکُبی را برمیئاورَد).

این که $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن ی که با (2247) تعریف شده یاکُبی باشد، یک شرط بر $\mathfrak{J}$ است: رابطه یِ (2312) همئرز است با

$$0=\left(\mathfrak{J}^{a\,d}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}^{b\,c}}{\partial\,x^d}+\mathfrak{J}^{c\,d}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}^{a\,b}}{\partial\,x^d}+\mathfrak{J}^{b\,d}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}^{c\,a}}{\partial\,x^d}\right)\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^a}\,\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{C}}{\partial\,x^c}. \tag{2500}$$

در واقع در طرف ِ راست ِ (2312) جملات ی هم هستند که شامل ِ مشتق ِ مئلفِها یِ $\mathfrak{J}$ نیستند. اما مجموع ِ آن جملات صفر است. استدلال ی مشابه ِ آن ی ست که برا یِ اثبات ِ یاکُبی-بودن ِ کروشه-یِ-پُؤَسُن به کار رفت. به این ترتیب، این که (2312) به ازا یِ همه یِ تابعیها یِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ براورده شود همئرز است با این که (2500) به ازا یِ همه یِ تابعیها یِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ براورده شود. این هم همئرز است با

$$0 = \mathfrak{J}^{a\,d}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}^{b\,c}}{\partial\,x^d} + \mathfrak{J}^{c\,d}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}^{a\,b}}{\partial\,x^d} + \mathfrak{J}^{b\,d}\,\frac{\partial\,\mathfrak{J}^{c\,a}}{\partial\,x^d}. \tag{2501}$$

شاخصها را با $\mathfrak{J}$ بالا میبرم. اما چون فرض نشده $\mathfrak{J}$ وارون-پذیر است، $\mathfrak{J}$ با شاخص ِ پایین تعریف نکرده ام و شاخصها را پایین نمیئاورم. اثر ِ $\mathfrak{J}$ بر تابع ِ $\mathfrak{A}$ را هم با $\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{J}^a_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{J}^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^b}. \tag{2240}$$

مشابه با حالت ی که $\mathfrak{J}$ وارون-پذیر بود، دیده میشود اگر σ یک یک-فرم باشد،

$$\sigma\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{J}(\sigma, \mathbf{d}\,\mathfrak{A}). \tag{2243}$$

یا،

$$\sigma\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = -\mathfrak{J}(\mathbf{d}\,\mathfrak{A}, \sigma). \tag{2244}$$

که یعنی،

$$\sigma\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = -(\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\,(\mathfrak{J}\,\sigma). \tag{2245}$$

یا،

$$\sigma\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{L}_{\mathfrak{J}\,\sigma}\,\mathfrak{A}. \tag{2246}$$

همچنین،

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,x^a}\,\mathfrak{J}^a_{\mathfrak{B}}. \tag{2248}$$

بسته،

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = (\mathbf{d}\,\mathfrak{A})\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}. \tag{2249}$$

و البته این را میشود چنین نوشت.

$$\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}_{\mathfrak{J}} = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2250}$$

از این که $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکُبی ست، نتیجه میشود (2313) برقرار است. این هم، با استفاده از (2250)، میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}}\,\mathfrak{A} = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathfrak{A} - \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}\,\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}}\,\mathfrak{A}. \tag{2314}$$

یعنی،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}}\,\mathfrak{A} = [\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}]\,\mathfrak{A}. \tag{2315}$$

این برا یِ هر $\mathfrak{A}$ درست است. پس،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}} = [\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}]. \tag{2316}$$

رابطه یِ جا-به-جاگر ِ مشتق- ِ-لیها نتیجه میدهد

$$[\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}},\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}] = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\diamond\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}. \tag{2278}$$

به این ترتیب، (2316) چنین میشود.

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}}} = \mathbf{L}_{\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\diamond\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}}. \tag{2317}$$

این هم با (2288):

$$\mathfrak{J}_{\{\mathfrak{B},\mathfrak{C}\}_{\mathfrak{J}}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}\diamond\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}}, \tag{2288}$$

همئرز است. پس اگر $\mathfrak{J}$- کروشه- یِ- پُؤَسُن یا کُبی باشد، (2288) برقرار است.

رُشن است که

$$\{x^a, x^b\}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}^{a\,b}. \tag{2327}$$

و با مختصات ی دیگر، x'^a ها،

$$\{x'^a, x'^b\}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}^{a'\,b'}. \tag{2502}$$

که،

$$\mathfrak{J}^{a'\,b'} = \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}\,\mathfrak{J}^{c\,d}. \tag{2503}$$

اگر ماتریس ِ $\mathfrak{J}$ در یک پایه (پایه یِ متناظر با مختصات ِ بدون- ِ- پریم) وارون- پذیر نباشد، ماتریس ِ $\mathfrak{J}$ در هیچ پایه ای وارون- پذیر نیست، از جمله ماتریس ِ $\mathfrak{J}$ در پایه یِ متناظر با مختصات ِ پریم- دار هم واورن- پذیر نیست. پس مختصات ی (x^a ها) نیستند که کانُنیک باشند. یعنی این رابطه را براورند،

$$\{x^a, x^b\}_{\mathfrak{J}} = J^{a\,b}. \tag{2328}$$

در واقع پایه ای نیست که در آن ماتریس ِ $\mathfrak{J}$ به شکل ِ ماتریس ِ J دراید. $\grave{J}$ را ماتریس ی پادمتقارن تعریف میکنم، چنان که

$$\grave{J}^{a\,b} = J^{a\,b}, \quad \{[a \leq (2\,\mathfrak{m})] \wedge [b \leq (2\,\mathfrak{m})]\}. \tag{2504}$$

$$\grave{J}^{a\,b} = 0, \qquad\qquad a > (2\,\mathfrak{m}). \tag{2505}$$

به شکل ِ ماتریسی،

$$\grave{J}^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} (J^{\bullet\bullet})_{(2\,\mathfrak{m})\times(2\,\mathfrak{m})} & \mathbf{0}_{(2\,\mathfrak{m})\times\mathfrak{n}_0} \\ \mathbf{0}_{\mathfrak{n}_0\times(2\,\mathfrak{m})} & \mathbf{0}_{\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{n}_0} \end{pmatrix}. \tag{2506}$$

که $\mathfrak{n}_0$ بُعد ِ هسته یِ $\grave{J}$ است.

مختصات ی که با آنها مئلفیها یِ $\mathfrak{J}$ با مئلفِها یِ $\grave{J}$ یکسان َند را $\mathfrak{J}$- کانُنیک- وار مینامم. قضیه یِ دربُ (حالت ِ کلی) میگوید مختصات ی هستند که کانُنیک- وار َند.

چون $\mathfrak{J}$ لزومَن وارون-پذیر نیست، لازم نیست بُعد ِ دامنه یِ $\mathfrak{J}$ زُج باشد. اما همچنان رتبه یِ $\mathfrak{J}$ زُج است. رتبه یِ $\mathfrak{J}$ را با $(2\,\mathfrak{m})$ نشان میدهم:

$$\mathsf{rank}(\mathfrak{J}) = 2\,\mathfrak{m}. \tag{2507}$$

بُعد ِ دامنه یِ $\mathfrak{J}$ را با $\mathfrak{n}$ نشان میدهم. پس بُعد ِ $\mathbb{P}$ (خمینه ای که $\mathfrak{J}$ بر آن تعریف شده) $\mathfrak{n}$ است. بُعد ِ هسته یِ $\mathfrak{J}$ به پایه بستگی ندارد. $\mathfrak{J}$ تابع ِ نقطه است، و ممکن است بُعد ِ هسته اَش ثابت نباشد. حالت ی را بررسی میکنم که چنین نیست. یعنی بُعد ِ هسته یِ $\mathfrak{J}$ (دست- ِ-کم مُضعَن) ثابت است. رتبه یِ $\mathfrak{J}$ برابر با بُعد ِ دامنه یِ $\mathfrak{J}$ منها یِ بُعد ِ هسته یِ $\mathfrak{J}$ است:

$$\mathsf{dim}[\mathsf{img}(\mathfrak{J})] = \mathsf{dim}[\mathsf{dom}(\mathfrak{J})] - \mathsf{dim}[\mathsf{ker}(\mathfrak{J})]. \tag{2508}$$

$\mathsf{dim}[\mathsf{ker}(\mathfrak{J})]$ را با $\mathfrak{n}_0$ نشان میدهم:

$$\mathsf{dim}[\mathsf{ker}(\mathfrak{J})] = \mathfrak{n}_0. \tag{2509}$$

به این ترتیب،

$$2\,\mathfrak{m} = \mathfrak{n} - \mathfrak{n}_0. \tag{2510}$$

که $\mathfrak{n}$ و $\mathfrak{n}_0$ و $\mathfrak{m}$ ثابت َند.

قضیه یِ دربُ (حالت ِ کلی): گیرم $\mathfrak{J}$ یک ماتریس ِ پادمتقارن است،بُعد ِ هسته یِ $\mathfrak{J}$ (مُضعَن) ثابت است، و $\mathfrak{J}$-کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکبی ست. در این صورت (مُضعَن) مختصات ی هستند که $\mathfrak{J}$-کانُنیک-وار َند.

اینجا هم برا یِ اثبات، مختصات ِ $\mathfrak{J}$-کانُنیک-وار را میسازم. بخش ی از اثبات هم ان است که برا یِ اثبات ِ قضیه یِ دَربو در حالت ِ خاص به کار رفت.:

حکم ِ $\mathbf{A}_n$: برا یِ n با $(0 \leq n \leq \mathfrak{m})$ مختصات ی، $(y^{1}_{(n)}, \dots, y^{\mathfrak{n}}_{(n)})$، هست، چنان که

$$y^{a}_{(n)}(x_0) = 0. \tag{2329}$$

$$\{y^{a}_{n)}, y^{b}_{(n)}\}_{\mathfrak{J}} = \grave{J}^{a\,b}, \qquad \{[a \leq (2\,n)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2330}$$

$$\{y^{a}_{(n)}, y^{b}_{(n)}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad \{[a > (2\,n)] \wedge [b \leq (2\,n)]\}. \tag{2331}$$

$$y^{a}_{(n)} = y^{a}_{(n-1)}, \qquad a \leq (2\,n-2). \tag{2332}$$

که $\grave{J}$ یک باز-آراسته یِ J است:

$$\grave{J}^{\bullet\bullet} = \mathbf{1} \otimes J_{2\times 2}. \tag{2333}$$

$$J_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2334}$$

$\mathbf{A}_n$ در بخش ِ پیش ثابت شد. آن اثبات اینجا هم کار میکنَد، چون در آن وارون-پذیری یِ $\mathfrak{J}$ به کار نرفته. به این ترتیب اینجا هم $\mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$ درست است. این هنوز حکم ِ قضیه یِ دَربو (در حالت ِ کلی) را نشان نمیدهد. حکم ِ قضیه یِ دَربو (در حالت ِ کلی) ثابت میشود، اگر علاوه بر این نشان داده شود

$$\{y^{a}_{(\mathfrak{m})}, y^{b}_{(\mathfrak{m})}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad \{[a > (2\,\mathfrak{m})] \wedge [b > (2\,\mathfrak{m})]\}. \tag{2511}$$

برا یِ این کار، هسته یِ $\mathfrak{J}$ را بررسی میکنم. $\{(a, \mathbf{d}\,y^{a}_{(\mathfrak{m})}) \mid a\}$ یک پایه برا یِ دامنه یِ $\mathfrak{J}$ است. پس هر عضو ِ هسته یِ $\mathfrak{J}$ را میشود به شکل ِ یک ترکیب ِ خطی از $\{(a, \mathbf{d}\,y^{a}_{(\mathfrak{m})}) \mid a\}$ نوشت. پس اگر $\mathfrak{c}$ در هسته یِ $\mathfrak{J}$ باشد،

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_a\,\mathbf{d}\,y^{a}_{(\mathfrak{m})}. \tag{2512}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{d}\,y^{2\,j}_{(\mathfrak{m})})\,(\mathfrak{J}\,\mathfrak{c}) = -\mathfrak{c}_{2\,j-1}, \qquad j \leq \mathfrak{m}. \tag{2513}$$

$$(\mathbf{d}\,y^{2\,j-1}_{(\mathfrak{m})})\,(\mathfrak{J}\,\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}_{2\,j}, \qquad j \leq \mathfrak{m}. \tag{2514}$$

اما $(\mathfrak{J}\,\mathfrak{c})$ صفر است. پس طرف ِ چپ ِ روابط ِ بالا صفر است. که نتیجه میدهد

$$\mathfrak{c}_{2\,j-1} = 0, \qquad j \leq \mathfrak{m}. \tag{2515}$$

$$\mathfrak{c}_{2\,j} = 0, \qquad j \leq \mathfrak{m}. \tag{2516}$$

یا،

$$\mathfrak{c}_a = 0, \qquad a \leq (2\,\mathfrak{m}). \tag{2517}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{c} = \sum_{a=2\,\mathfrak{m}+1}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{c}_a\,\mathbf{d}\,y^a_{(\mathfrak{m})}. \tag{2518}$$

این یعنی

$$\mathsf{ker}(\mathfrak{J}) \sqsubseteq \mathsf{span}\{(a, \mathbf{d}\,y^a_{(\mathfrak{m})}) \mid (2\,\mathfrak{m}) < a \leq \mathfrak{n}\}. \tag{2519}$$

این هم نتیجه میدهد

$$\mathsf{dim}[\mathsf{ker}(\mathfrak{J})] \leq \mathsf{dim}\Big(\mathsf{span}\{(a, \mathbf{d}\,y^a_{(\mathfrak{m})}) \mid (2\,\mathfrak{m}) < a \leq \mathfrak{n}\}\Big). \tag{2520}$$

و برابری برقرار است، اگر و تنها اگر

$$\mathsf{ker}(\mathfrak{J}) = \mathsf{span}\{(a, \mathbf{d}\,y^a_{(\mathfrak{m})}) \mid (2\,\mathfrak{m}) < a \leq \mathfrak{n}\}. \tag{2521}$$

اما

$$\mathfrak{n} - 2\,\mathfrak{m} \geq \mathsf{dim}\Big(\mathsf{span}\{(a, \mathbf{d}\,y^a_{(\mathfrak{m})}) \mid (2\,\mathfrak{m}) < a \leq \mathfrak{n}\}\Big). \tag{2522}$$

روابط ِ (2509) و (2510) و (2522) نتیجه میدهند

$$\mathsf{dim}[\mathsf{ker}(\mathfrak{J})] \geq \mathsf{dim}\Big(\mathsf{span}\{(a, \mathbf{d}\,y^a_{(\mathfrak{m})}) \mid (2\,\mathfrak{m}) < a \leq \mathfrak{n}\}\Big). \tag{2523}$$

روابط ِ (2520) و (2523) نتیجه میدهند

$$\mathsf{dim}[\mathsf{ker}(\mathfrak{J})] = \mathsf{dim}\Big(\mathsf{span}\{(a, \mathbf{d}\, y^a_{(\mathfrak{m})}) \mid (2\,\mathfrak{m}) < a \leq \mathfrak{n}\}\Big). \tag{2524}$$

این هم نتیجه میدهد (2521) برقرار است. پس،

$$(\mathbf{d}\, y^a_{(\mathfrak{m})}) \in [\mathsf{ker}(\mathfrak{J})], \quad a > (2\,\mathfrak{m}). \tag{2525}$$

یعنی برا یِ هر تابعی یِ $\mathfrak{C}$،

$$\{\mathfrak{C}, y^a_{(\mathfrak{m})}\}_{\mathfrak{J}} = 0, \qquad a > (2\,\mathfrak{m}). \tag{2526}$$

از جمله (2511) برقرار است.

به این ترتیب اثبات ِ قضیه یِ دَربو (در حالت ِ کلی) کامل میشود.

نتیجه این که (مُضعَن) مختصات ی، $(y^1_{(\mathfrak{m})}, \ldots, y^{2\,\mathfrak{m}}_{(\mathfrak{m})})$، هست، چنان که

$$y^a_{(\mathfrak{m})}(x_0) = 0. \tag{2496}$$

$$\{y^a_{(\mathfrak{m})}, y^b_{(\mathfrak{m})}\}_{\mathfrak{J}} = \grave{\jmath}^{a\,b}. \tag{2527}$$

که،

$$\grave{\jmath}^{a\,b} = \grave{\jmath}^{a\,b}, \quad \{[a \leq (2\,\mathfrak{m})] \wedge [b \leq (2\,\mathfrak{m})]\}. \tag{2528}$$

$$\grave{\jmath}^{a\,b} = 0, \qquad a > (2\,\mathfrak{m}). \tag{2529}$$

به شکل ِ ماتریسی،

$$\grave{\jmath}^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} (\grave{\jmath}^{\bullet\bullet})_{(2\,\mathfrak{m})\times(2\,\mathfrak{m})} & \mathbf{0}_{(2\,\mathfrak{m})\times\mathfrak{n}_0} \\ \mathbf{0}_{\mathfrak{n}_0\times(2\,\mathfrak{m})} & \mathbf{0}_{\mathfrak{n}_0\times\mathfrak{n}_0} \end{pmatrix}. \tag{2530}$$

اینها را میشود با یک اسم-گذاری یِ مکان-تکانه-وار نوشت. q^1 تا $q^{\mathfrak{m}}$، و p_1 تا $p_{\mathfrak{m}}$ را بر حسب ِ $y^1_{(m)}$ تا $y^{2\,\mathfrak{m}}_{(m)}$، و o_1 تا $o_{2\,\mathfrak{m}+\mathfrak{n}_0}$ را برحسب ِ $y^1_{(m)}$ تا $y^{\mathfrak{n}}_{(m)}$تعریف میکنم:

$$q^i = y^{2\,i-1}_{(m)}, \quad i \leq \mathfrak{m}. \tag{2498}$$

$$p_i = y^{2\,i}_{(m)}, \qquad i \leq \mathfrak{m}. \tag{2499}$$

$$o_{\mathsf{i}} = y^{2\,\mathfrak{m}+\mathsf{i}}_{(m)}, \quad \mathsf{i} \leq \mathfrak{n}_0. \tag{2531}$$

کروشه-یِ-پُؤَسُنها چنین میشوند.

$$\{q^i, q^j\} = 0. \tag{1782}$$

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j. \tag{1783}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0. \tag{1784}$$

$$\{q^i, o_{\mathrm{j}}\} = 0. \tag{2532}$$

$$\{p_i, o_{\mathrm{j}}\} = 0. \tag{2533}$$

$$\{o_{\mathrm{i}}, o_{\mathrm{j}}\} = 0. \tag{2534}$$

به این ترتیب، آ-کروشه-یِ-پُؤَسُن در واقع هم ان کروشه-یِ-پُؤَسُن است، که در مختصات ی دلبخاه (نَ لزومَن کانُنیک-وار) نوشته شده.

قضیه یِ دَربو اساسَن میگوید (مُضعَن) لازم نیست آ-کروشه یِ پُؤَسُن با آ یِ دلبخاه (ِ البته پادمتقارن و چنان که آ-کروشه یِ پُؤَسُن یاکُبی باشد) بررسی شود. (مُضعَن) مختصات ی هستند که مثلفِها یِ آ را به J. (و اگر آ وارون-پذیر باشد به J) تبدیل میکنند. پس میشود J. (و اگر آ وارون-پذیر باشد J) را به جا یِ آ به کار برد.

8

تقارن در فرمول-بندی یِ هَمیلتِن

75 ناوردایی در فرمول-بندی یِ هَمیلتِن

تعریف ِ تقارن هم ان است که در فرمول-بندی یِ لَگرانژ آمد: تقارن ِ یک چیز عمل ی وارون-پذیر است که خُد َش و واورن ِش آن چیز را ناوردا میگذارند. به این ترتیب مجموعه یِ تقارنها یِ یک چیز (همراه با ترکیب ِ عملها) یک گروه است. به این مجموعه گروه ِ تقارن ِ آن چیز میگویند. در فرمول-بندی یِ لَگرانژ، ناوردایی یِ دُ چیز بررسی شد: معادله-یِ-حرکت، و کنش (یا لَگرانژی). اینجا (فرمول-بندی یِ فضا-یِ-فاز)، یک ساختار ِ دیگر هم (جز معادله-یِ-حرکت و کنش) هست: ساختار ِ پُؤَسُن (یا کانُنیک).

اینجا هم عملها یی که بررسی میشوند تبدیل- ِ-مسیرها یَند؛ البته مسیرها یِ فضا-یِ-فاز (یا فضا-یِ-فاز ِگسترش-یافته، یا فضا-زمان ِفاز). و تبدیل- ِ-مسیرها ممکن است نقطِئی باشند، نقطِئی نباشند ولی مُضعی باشند، یا مُضعی نباشند. اما معادلات- ِ-حرکت در فضا-یِ-فاز مرتبه-یِ-یک َند، و حالت ِ سیستم در یک زمان یک عضو ِ فضا-یِ-فاز است، مقدار ِ مسیر در آن زمان: برا یِ معلوم-بودن ِ حالت در یک زمان، مقدار ِ مشتقها یِ مسیر در آن زمان لازم نیست. پس تبدیل- ِ-مسیر، اگر قرار باشد حالت را هم به حالت تبدیل کند، باید نقطِئی باشد. البته تبدیل- ِ-مسیر، همچنان زمان را هم ممکن است تغییر

دهد. در این حالت شاید سادِتر باشد که تبدیل- ِ-مسیر در فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته یا فضا-زمان ِ فاز بررسی شود، که پارامتر ِ مسیر چیز ی جز زمان است و میشود آن را تحت ِ تبدیل- ِ-مسیر ثابت گرفت.

76 تقارن ِ ساختار ِ پُؤَسُن

تبدیل- ِ-مسیر ِ نقطِئی یِ $\mathfrak{B}_\tau$ در فضا-زمان- ِ-فاز، متناظر است با یک تابع $\mathfrak{C}$ از فضا-زمان ِ فاز به فضا-زمان- ِ-فاز:

$$[\mathfrak{B}_\tau(\underset{\sim}{x})](\tau) = \mathfrak{C}[\underset{\sim}{x}(\tau)]. \tag{2535}$$

تبدیل- ِ-مسیر ِ $\mathfrak{B}_\tau$ تقارن ِ ساختار ِ پُؤَسُن است، وقت ی

$$\mathfrak{C}_* \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{J}. \tag{2536}$$

که $\mathfrak{C}_*$ پیشران ِ $\mathfrak{C}$ است:

$$(\mathfrak{C}_* \underset{\sim}{J})^{\mathtt{a}'\,\mathtt{b}'}[\mathfrak{C}(\underset{\sim}{x})] = \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{a}'}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{b}'}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}). \tag{2537}$$

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{a}'}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{b}'}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,\{(\mathfrak{C}_* \underset{\sim}{J})_{\mathtt{a}'\,\mathtt{b}'}[\mathfrak{C}(\underset{\sim}{x})]\} = J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}). \tag{2538}$$

پریم در شاخصها تئکید بر این است که مختصات ِ به کار-رفته برا یِ $\mathfrak{C}(\underset{\sim}{x})$ لازم نیست با مختصات ِ به-کار-رفته برا یِ $\underset{\sim}{x}$ یکسان باشند. اما از این پس، برا یِ سادگی، پریم در شاخصها را حذف میکنم و (2537) و (2538) چنین مینویسم.

$$(\mathfrak{C}_* \underset{\sim}{J})^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}[\mathfrak{C}(\underset{\sim}{x})] = \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{a}}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}). \tag{2539}$$

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{a}}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,\{(\mathfrak{C}_* \underset{\sim}{J})_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}[\mathfrak{C}(\underset{\sim}{x})]\} = J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}). \tag{2540}$$

$\mathfrak{C}(\underset{\sim}{x})$ را با $\underset{\sim}{x}'$، و $(\mathfrak{C}_* \underset{\sim}{J})$ را با $\underset{\sim}{J}'$ نشان میدهم. روابط ِ بالا میشوند

$$J'^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}') = \frac{\partial\,x'^{\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}). \tag{2541}$$

$$\frac{\partial\,x'^{\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,J'_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}') = J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}). \tag{2542}$$

رابطه یِ اخیر را هم میشود چنین نوشت.

$$J'_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}') = \frac{\partial\, x^{\mathtt{c}}}{\partial\, x'^{\mathtt{a}}}\,\frac{\partial\, x^{\mathtt{d}}}{\partial\, x'^{\mathtt{b}}}\,J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}). \tag{2543}$$

البته مئلفِها یِ $\underset{\sim}{J}$ در طرف-ِ-راستها، به شرطِ این که مختصاتِ انتخاب-شده برا یِ $\underset{\sim}{x}$ کانُنیک باشند، مستقل از $\underset{\sim}{x}$ َند. دیده میشود

$$\begin{aligned}
[J'^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,[J'_{\mathtt{a}\,\mathtt{e}}(\underset{\sim}{x}')] &= \frac{\partial\, x'^{\mathtt{a}}}{\partial\, x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\, x'^{\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{d}}}\,[J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\, x^{\mathtt{f}}}{\partial\, x'^{\mathtt{a}}}\,\frac{\partial\, x^{\mathtt{g}}}{\partial\, x'^{\mathtt{e}}}\,[J_{\mathtt{f}\,\mathtt{g}}(\underset{\sim}{x})],\\
&= \delta^{\mathtt{f}}_{\mathtt{c}}\,\frac{\partial\, x'^{\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{d}}}\,\frac{\partial\, x^{\mathtt{g}}}{\partial\, x'^{\mathtt{e}}}\,[J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x})]\,[J_{\mathtt{f}\,\mathtt{g}}(\underset{\sim}{x})],\\
&= \frac{\partial\, x'^{\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{d}}}\,\frac{\partial\, x^{\mathtt{g}}}{\partial\, x'^{\mathtt{e}}}\,\delta^{\mathtt{d}}_{\mathtt{g}}.
\end{aligned} \tag{2544}$$

که نشان میدهد

$$[J'^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,[J'_{\mathtt{a}\,\mathtt{e}}(\underset{\sim}{x}')] = \delta^{\mathtt{b}}_{\mathtt{e}}. \tag{2545}$$

یا،

$$\{(\underset{\sim}{\mathfrak{C}}_*\,\underset{\sim}{J})^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(\underset{\sim}{x})]\}\,\{(\underset{\sim}{\mathfrak{C}}_*\,\underset{\sim}{J})_{\mathtt{a}\,\mathtt{e}}[(\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(\underset{\sim}{x})]\} = \delta^{\mathtt{b}}_{\mathtt{e}}. \tag{2546}$$

این یعنی رابطه یِ (2536) با شاخصها یِ بالا، با رابطه یِ (2536) با شاخصها یِ پایین همئرز است. رابطه یِ (2536)، با شاخص میشود

$$(\underset{\sim}{\mathfrak{C}}_*\,\underset{\sim}{J})^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{2547}$$

یا،

$$(\underset{\sim}{\mathfrak{C}}_*\,\underset{\sim}{J})_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} = J_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{2548}$$

روابطِ (2547) و (2548) همئرز َند.

رابطه یِ (2547) چنین میشود.

$$J'^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}') = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}'). \tag{2549}$$

یعنی،

$$\frac{\partial x'^{\mathtt{a}}}{\partial x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial x'^{\mathtt{b}}}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}) = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}'). \tag{2550}$$

اگر مختصات کانُنیک باشند، مئلفِها یِ $\underset{\sim}{J}$ ثابت َند. در این صورت، رابطه یِ بالا میشود

$$\frac{\partial x'^{\mathtt{a}}}{\partial x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial x'^{\mathtt{b}}}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}} = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{2551}$$

این رابطه شبیه ِ رابطه یِ (1999) است:

$$J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} = \frac{\partial x'^{\mathtt{a}}}{\partial x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial x'^{\mathtt{b}}}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}. \tag{1999}$$

تفاوت ِ شان این است که $x^{\mathtt{e}}$ ها و $x'^{\mathtt{e}}$ ها در (1999) مختصات ی متفاوت برا یِ یک نقطه ($\underset{\sim}{x}$) اند، در حال ی که در (2551) مختصات ِ دُ نقطه یِ احتمالَن متفاوت ($\underset{\sim}{x}$ و $\underset{\sim}{x}'$) اند. (1999) به تبدیل ِ مختصات (تبدیل ِ نافعال) مربوط است و (2551) به تبدیل ِ نقطه (تبدیل ِ فعال).

میگویند تبدیل ِ $\mathfrak{C}$ کانُنیک است، اگر $\mathfrak{C}$ رابطه یِ (2536)، یا همئرز با آن (2547) یا (2548)، را براورَد. به این ترتیب تقارنها یِ (نقطِئی یِ) ساختار ِ پُؤَسُن تبدیلها یِ کانُننیک َند.

رابطه یِ (2548) هم این میشود که اثر ِ پیشران ِ یک تبدیل ِ کانُنیک بر دُ-فرم ِ همتافته خُد ِ دُ-فرم ِ همتافته است، یعنی دُ-فرم ِ همتافته تحت ِ تبدیلها یِ کانُنیک ناوردا میمانَد. و البته بر عکس: اگر دُ-فرم ِ همتافته تحت ِ یک تبدیل ناوردا بماند، آن تبدیل کانُنیک است.

یک حالت ِ خاص ِ تبدیلها یِ کانُنیک این است که (با مختصات ِ کانُنیک) مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته یِ نقطه یِ تبدیل-یافته مستقل از p_0 باشند. در این صورت،

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial p_0} = 0. \tag{2552}$$

از رابطه یِ (2551) دیده میشود

$$J^{\alpha\,\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}. \tag{2553}$$

این هم، با استفاده از (2552)، میشود

$$J^{\alpha\,\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\,\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}\,J^{\gamma\,\delta}. \tag{2554}$$

از جمله،

$$\begin{aligned} J^{a\,b} &= \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^\gamma}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^\delta}\,J^{\gamma\,\delta}, \\ &= \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}\,J^{0\,d} + \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, t}\,J^{c\,0} + \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}\,J^{c\,d}. \end{aligned} \tag{2555}$$

اما

$$J^{0\,d} = 0. \tag{2556}$$

پس،

$$J^{a\,b} = \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}\,J^{c\,d}. \tag{2557}$$

این یعنی ساختار- ِ-پُؤَسُن ِ فضا-یِ-فاز هم تحت ِ ج ناوردا ست.

همچنین،

$$\begin{aligned} 0 &= J^{0\,\alpha}, \\ &= \frac{\partial\, t'}{\partial\, x^\gamma}\,\frac{\partial\, x'^\alpha}{\partial\, x^\delta}\,J^{\gamma\,\delta}. \end{aligned} \tag{2558}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\, x^b}{\partial\, x'^\alpha}\,\frac{\partial\, t'}{\partial\, x^\gamma}\,\frac{\partial\, x'^\alpha}{\partial\, x^\delta}\,J^{\gamma\,\delta}, \\ &= \frac{\partial\, t'}{\partial\, x^\gamma}\,J^{\gamma\,b}. \end{aligned} \tag{2559}$$

که، با توجه به (2556)، چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial\, t'}{\partial\, x^a}\,J^{a\,b}. \tag{2560}$$

این هم، با ضرب-کردن ِ دُ-طرف در وارون ِ ماتریس ِ J، نتیجه میدهد

$$\frac{\partial\, t'}{\partial\, x^a} = 0. \tag{2561}$$

از (2552) دیده میشود

$$\frac{\partial t'}{\partial p_0} = 0. \tag{2562}$$

پس t' تابعِ فقط t است.

دیده میشود برا یِ تبدیل-ِ-کانُنیکها یی که (با مختصاتِ کانُنیک) مختصاتِ فضا-یِ-فاز-ِ-گسترش-یافته یِ نقطه یِ تبدیل-یافته مستقل از p_0 اند، تبدیل-یافته یِ هر خمینه یِ زمان-ثابت یک خمینه یِ زمان-ثابت است، و افکنده یِ تبدیل بر فضا یِ فاز، در هر زمان کانُنیک است. ویژگی یِ اخیر مستقل از این است که مختصاتِ انتخاب-شده برا یِ فضا یِ فاز کانُنیک باشد. اما به تفکیکِ فضا-زمان-ِ-فاز به فضا یِ فاز و زمان و تکانه یِ متناظر با زمان بستگی دارد. نتیجه این که اگر $\mathfrak{C}$ تابع ی از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P}\times\mathbb{A})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P}\times\mathbb{A})$ باشد، چنان که $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\mathfrak{C}(t,x,p_0)]$ مستقل از p_0 باشد، وقت ی $\mathfrak{C}$ کانُنیک باشد $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ هم کانُنیک است، که $\mathfrak{C}$ تابع ی از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ است، چنان که

$$\mathfrak{C}(t,x) = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\mathfrak{C}(t,x,p_0)]. \tag{2563}$$

همچنین، $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0[\mathfrak{C}(t,x)]$ مستقل از x است؛ و $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[\mathfrak{C}(t,\cdot)]$ هم، به ازا یِ هر t، کانُنیک است.

بر عکس، گیرم $\mathfrak{C}$ تابع ی از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ است، چنان که $\mathfrak{C}$ کانُنیک است و $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0[\mathfrak{C}(t,x)]$ مستقل از x است. نشان میدهم یک $\mathfrak{C}$ از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P}\times\mathbb{A})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P}\times\mathbb{A})$ هست که (2563) برقرار است و $\mathfrak{C}$ کانُنیک است. برا یِ این کار، $\mathfrak{C}$ را چنین تعریف میکنم

$$\mathfrak{C}(t,x,p_0) = [\mathfrak{C}(t,x), p_0'(t,x,p_0)]. \tag{2564}$$

البته t' هم تابعِ فقط t است. پس،

$$\mathfrak{C}(t,x,p_0) = [t'(t), \mathfrak{C}(t,x), p_0'(t,x,p_0)]. \tag{2565}$$

تابعی یِ p'_0 را چنان میسازم که $\mathfrak{C}$ کانُنیک باشد. رُشن است که تعریف ِ (2564) رابطه یِ (2563) را برمیئاورَد. $\mathfrak{C}(t,x)$ را با (t',x') نشان میدهم. و برا یِ فضا-یِ-فاز مختصات ِ کانُنیک به کار میبَرم. ادامه یِ ساختار و اثبات بسیار شبیه ِ هم ان است که در ساختن ِ مختصات ِ کانُنیک به کار رفت. این که $\mathfrak{C}$ کانُنیک است، نتیجه میدهد (2557) برقرار است. از این که x'^α ها مستقل از p_0 اند، نتیجه میشود

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^{\mathsf{c}}}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^{\mathsf{d}}}\,J^{\mathsf{c}\,\mathsf{d}} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^d}\,J^{0\,d} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^c}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial t}\,J^{c\,0} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^c}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^d}\,J^{c\,d}. \tag{2566}$$

که، با استفاده از (2556)، میشود

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^{\mathsf{c}}}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^{\mathsf{d}}}\,J^{\mathsf{c}\,\mathsf{d}} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^c}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^d}\,J^{c\,d}. \tag{2567}$$

از جمله،

$$\frac{\partial t'}{\partial x^{\mathsf{c}}}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^{\mathsf{d}}}\,J^{\mathsf{c}\,\mathsf{d}} = \frac{\partial t'}{\partial x^c}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^d}\,J^{c\,d}. \tag{2568}$$

که چون t' تابع ِ فقط t است نتیجه میدهد

$$\frac{\partial t'}{\partial x^{\mathsf{c}}}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^{\mathsf{d}}}\,J^{\mathsf{c}\,\mathsf{d}} = 0. \tag{2569}$$

از (2567) همچنین نتیجه میشود

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^{\mathsf{c}}}\,\frac{\partial x'^b}{\partial x^{\mathsf{d}}}\,J^{\mathsf{c}\,\mathsf{d}} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\,\frac{\partial x'^b}{\partial x^d}\,J^{c\,d}. \tag{2570}$$

که، با استفاده از (2557)، میشود

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^{\mathsf{c}}}\,\frac{\partial x'^b}{\partial x^{\mathsf{d}}}\,J^{\mathsf{c}\,\mathsf{d}} = J^{a\,b}. \tag{2571}$$

چیز ی که میمانَد رابطه یِ (2551) است برا یِ وقت ی ست که $x'^{\mathtt{b}}$ برابر با p'_0 باشد. رُشن است که در این حالت کافی ست رابطه برا یِ $x'^{\mathtt{a}}$ برابر با t' یا x'^a بررسی شود. t' تابع ِ فقط t است. پس،

$$\begin{aligned}\frac{\partial t'}{\partial x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial p'_0}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}} &= \frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial p'_0}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{0\,\mathtt{d}},\\ &= \frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial p'_0}{\partial p_0}.\end{aligned} \tag{2572}$$

پس شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که رابطه یِ (2551) برا یِ t' و p_0 به جا یِ، به ترتیب، $x'^{\mathtt{a}}$ و $x'^{\mathtt{b}}$ برقرار باشد این است که

$$\frac{\partial p'_0}{\partial p_0} = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{2573}$$

این هم یعنی یک تابعی یِ $\mathcal{F}$ هست که

$$p'_0 = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[p_0 - \mathcal{F}(t,x)]. \tag{2574}$$

برا یِ x'^a و p'_0 به جا یِ، به ترتیب، $x'^{\mathtt{a}}$ و $x'^{\mathtt{b}}$،

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'^a}{\partial x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial p'_0}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}} &= \frac{\partial x'^a}{\partial t}\,\frac{\partial p'_0}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{0\,\mathtt{d}} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\,\frac{\partial p'_0}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{c\,\mathtt{d}},\\ &= \frac{\partial x'^a}{\partial t}\,\frac{\partial p'_0}{\partial p_0} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\,\frac{\partial p'_0}{\partial x^d}\,J^{c\,d}.\end{aligned} \tag{2575}$$

شرط این است که طرف ِ چپ صفر باشد. که میشود

$$0 = \frac{\partial x'^a}{\partial t}\,\frac{\partial p'_0}{\partial p_0} + \frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\,\frac{\partial p'_0}{\partial x^d}\,J^{c\,d}. \tag{2576}$$

یا،

$$0 = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\left(\frac{\partial x'^a}{\partial t} - J^{c\,d}\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^d}\right). \tag{2577}$$

که همئرز است با

$$\frac{\partial x'^a}{\partial t} = J^{c\,d}\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^d}. \tag{2578}$$

از (2557) دیده میشود

$$J^{c\,d}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}=J^{a\,b}\,\frac{\partial\,x^d}{\partial\,x'^b}. \tag{2579}$$

پس (2578) همئرز است با

$$\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}=J^{a\,b}\,\frac{\partial\,x^d}{\partial\,x'^b}\,\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,x^d}. \tag{2580}$$

این هم همرز است با

$$J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}=\frac{\partial\,x^d}{\partial\,x'^c}\,\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,x^d}. \tag{2581}$$

یا،

$$J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}=\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,x^b}. \tag{2582}$$

شرطِ لازم و کافی برا یِ این که این معادله برا یِ $\mathcal{F}$ جواب داشته باشد این است که مشتقِ طرفِ چپ نسبت به x^d، نسبت به شاخصها یِ b و d متقارن باشد:

$$0=\frac{\partial}{\partial\,x^b}\,\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}\right)-\frac{\partial}{\partial\,x^d}\,\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}\right). \tag{2583}$$

مشتقِ دوم نسبت به x متقارن است. پس رابطه یِ (2583) همئرز است با

$$0=J_{a\,c}\,\left(\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,t\,\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}-\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,t\,\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b}\right). \tag{2584}$$

J پادمتقارن است. پس رابطه یِ بالا همئرز است با

$$0=J_{a\,c}\,\left(\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,t\,\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}+\frac{\partial^2\,x'^c}{\partial\,t\,\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\right). \tag{2585}$$

یا،

$$0=\frac{\partial}{\partial\,t}\,\left(J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^d}\right). \tag{2586}$$

از (2557) نتیجه میشود پرانتز با $J_{b\,d}$ برابر است. پس رابطه یِ بالا همئرز است با

$$0 = \frac{\partial\, J_{b\,d}}{\partial\, t}. \tag{2587}$$

که برقرار است، پس p'_0 ی هست که $\mathfrak{C}$ با تعریف ِ (2564) کانُنیک است.

این که $\mathfrak{C}$ به شکل ِ (2564)، و در واقع (2565)، کانُنیک است، نتیجه میدهد $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ کانُنیک است. و این یعنی

$$[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*\, J = J. \tag{2588}$$

که $[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*$ پیشران ِ $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ است:

$$\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*\, J\}^{a'\,b'}[\mathfrak{C}(t,x)] = \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{a'}(t,x)]}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{b'}(t,x)]}{\partial\, x^d}\, J^{c\,d}(t,x). \tag{2589}$$

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{a'}(t,x)]}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{b'}(t,x)]}{\partial\, x^d}\,\Big(\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*\, J\}_{a'\,b'}\}[\mathfrak{C}(t,x)]\Big) = J_{c\,d}(t,x). \tag{2590}$$

پریم در شاخصها تئکید بر این است که مختصات ِ به کار-رفته برا یِ $\mathfrak{C}(x)$ لازم نیست با مختصات ِ به-کار-رفته برا یِ x یکسان باشند. اما از این پس، برا یِ سادگی، پریم در شاخصها را حذف میکنم و (2589) و (2590) چنین مینویسم.

$$\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*\, J\}^{a\,b}[\mathfrak{C}(t,x)] = \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{a}(t,x)]}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{b}(t,x)]}{\partial\, x^d}\, J^{c\,d}(t,x). \tag{2591}$$

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{a}(t,x)]}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{b}(t,x)]}{\partial\, x^d}\,\Big(\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*\, J\}_{a\,b}\}[\mathfrak{C}(t,x)]\Big) = J_{c\,d}(t,x). \tag{2592}$$

$\mathfrak{C}(t,x)$ را با (t',x')، و $\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*\, J\}$ را با J' نشان میدهم. روابط ِ بالا میشوند

$$J'^{a\,b}(t,x') = \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}\, J^{c\,d}(t,x). \tag{2593}$$

$$\frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}\, J'_{a\,b}(t',x') = J_{c\,d}(t,x). \tag{2594}$$

رابطه یِ اخیر را هم میشود چنین نوشت.

$$J'_{a\,b}(t',x') = \frac{\partial\, x^c}{\partial\, x'^a}\,\frac{\partial\, x^d}{\partial\, x'^b}\, J_{c\,d}(t,x). \tag{2595}$$

البته مئلفِها یِ J در طرف- ِ-راستها، به شرط ِ این که مختصات ِ انتخاب-شده برا یِ x کانُنیک باشند، مستقل از x َند. دیده میشود

$$\begin{aligned}[J'^{a\,b}(t',x')]\,[J'_{a\,e}(t',x')] &= \frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,[J^{c\,d}(t,x)]\,\frac{\partial\,x^f}{\partial\,x'^a}\,\frac{\partial\,x^g}{\partial\,x'^e}\,[J_{f\,g}(t,x)],\\ &= \delta^f_c\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x^g}{\partial\,x'^e}\,[J^{c\,d}(t,x)]\,[J_{f\,g}(t,x)],\\ &= \frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,x^g}{\partial\,x'^e}\,\delta^d_g. \end{aligned} \tag{2596}$$

که نشان میدهد

$$[J'^{a\,b}(t',x')]\,[J'_{a\,e}(t',x')] = \delta^b_e. \tag{2597}$$

یا،

$$\Big(\{[\mathfrak{C}(t,\centerdot)]_*\,J\}^{a\,b}[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)]\Big)\,\Big(\{[\mathfrak{C}(t,\centerdot)]_*\,J\}_{a\,e}[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)]\Big) = \delta^b_e. \tag{2598}$$

این یعنی رابطه یِ (2588) با شاخصها یِ بالا، با رابطه یِ (2588) با شاخصها یِ پایین همئرز است. رابطه یِ (2588)، با شاخص میشود

$$\{[\mathfrak{C}(t,\centerdot)]_*\,J\}^{a\,b} = J^{a\,b}. \tag{2599}$$

یا،

$$\{[\mathfrak{C}(t,\centerdot)]_*\,J\}_{a\,b} = J_{a\,b}. \tag{2600}$$

روابط ِ (2599) و (2600) همئرز َند.

رابطه یِ (2599) چنین میشود.

$$J'^{a\,b}(t',x') = J^{a\,b}(t',x'). \tag{2601}$$

یعنی،

$$\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,J^{c\,d}(t,x) = J^{a\,b}(t',x'). \tag{2602}$$

اگر مختصات کانُنیک باشند، مئلفِها یِ J ثابت َند. در این صورت، رابطه یِ بالا میشود

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\,\frac{\partial x'^b}{\partial x^d}\,J^{c\,d}=J^{a\,b}. \tag{2603}$$

این رابطه شبیه ِ رابطه یِ (1934) است:

$$J^{a\,b}=\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\,\frac{\partial x'^b}{\partial x^d}\,J^{c\,d}. \tag{1934}$$

تفاوت ِ شان این است که x^e ها و x'^e ها؛ در (1934) مختصات ی متفاوت برا یِ یک نقطه (x) اند، در حال ی که در (2603) مختصات ِ دُ نقطه یِ احتمالَن متفاوت (x و x') اند. (1934) به تبدیل ِ مختصات (تبدیل ِ نافعال) مربوط است و (2603) به تبدیل ِ نقطه (تبدیل ِ فعال).

میگویند تبدیل ِ $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ کانُنیک است، اگر $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ رابطه یِ (2588)، یا همئرز با آن (2599) یا (2600)، را براورَد. به این ترتیب تقارنها یِ (نقطِئی یِ) ساختار ِ پُؤَسُن تبدیلها یِ کانُننیک َند.

رابطه یِ (2600) هم این میشود که اثر ِ پیشران ِ یک تبدیل ِ کانُنیک بر دُ-فرم ِ همتافته خُد ِ دُ-فرم ِ همتافته است، یعنی دُ-فرم ِ همتافته تحت ِ تبدیلها یِ کانُنیک ناوردا میمانَد. و البته بر عکس: اگر دُ-فرم ِ همتافته تحت ِ یک تبدیل ناوردا بماند، آن تبدیل کانُنیک است.

یک حالت ِ خاصتر این است که x'، علاوه بر این که به p_0 بستگی ندارد به t هم وابسته نیست. در این حالت طرف ِ چپ ِ رابطه یِ (2582) صفر میشود. پس (2582) میشود

$$0=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x^a}. \tag{2604}$$

که یعنی $\mathcal{F}$ ثابت است. پس در این حالت p'_0 تابع ِ فقط t و p_0 است. از جمله میشود $\mathcal{F}$ را صفر گذاشت:

$$p'_0=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,0. \tag{2605}$$

این که t' تابع ِ فقط t است، x' تابع ِ فقط x است، و p'_0 تابع ِ فقط t و p_0 است، یعنی

$$\mathfrak{C}(t,x,p_0)=[t'(t),\mathfrak{C}(x),p'_0(t,p_0)]. \tag{2606}$$

که البته شکلِ p'_0 هم معلوم است:

$$\mathfrak{C}(t,x,p_0)=\left[t'(t),\mathfrak{C}(x),\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,p_0-\mathcal{F}\right]. \tag{2607}$$

که $\mathcal{F}$ ثابت است.

77 تقارنِ معادله-یِ-حرکت

معادله یِ حرکت برا یِ مختصاتِ فضا-زمان-ِ-فاز چنین است.

$$\frac{\mathrm{d}\,x^{\mathsf{a}}}{\mathrm{d}\,\tau}\stackrel{\mathrm{ns}}{=}[J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}. \tag{2608}$$

این که $\mathfrak{C}$ تقارنِ معادله-یِ-حرکت باشد، یعنی ($\mathfrak{C}$ وارون-پذیر است و)

$$\frac{\mathrm{d}\,x'^{\mathsf{a}}}{\mathrm{d}\,\tau}\stackrel{\mathrm{ns}}{=}[J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathsf{b}}}. \tag{2609}$$

که $\mathfrak{C}(\underset{\sim}{x})$ با $\underset{\sim}{x}'$ نشان داده شده. (2609) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\partial\,x'^{\mathsf{a}}}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}\,\frac{\mathrm{d}\,x^{\mathsf{b}}}{\mathrm{d}\,\tau}\stackrel{\mathrm{ns}}{=}[J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathsf{b}}}. \tag{2610}$$

این هم، با استفاده از (2608)، میشود

$$\frac{\partial\,x'^{\mathsf{a}}}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}\,[J^{\mathsf{b}\,\mathsf{c}}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathsf{c}}}\stackrel{\mathrm{ns}}{=}[J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathsf{b}}}. \tag{2611}$$

این معادله (مشتق نسبت به) τ ندارد. پس اگر بر-لاک برقرار باشد بیرون-ِ-لاک هم برقرار است. و البته رُشن است که هر معادله که بیرون-ِ-لاک برقرار باشد بر-لاک برقرار است. پس (2611) همئرز است با

$$\frac{\partial\,x'^{\mathsf{a}}}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}\,[J^{\mathsf{b}\,\mathsf{c}}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathsf{c}}}=[J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathsf{b}}}. \tag{2612}$$

با مختصاتِ کانُنیک، مئلفِها یِ J ثابت میشوند و (2608) تا (2612) چنین میشوند.

$$\frac{\mathrm{d}\,x^{\mathsf{a}}}{\mathrm{d}\,\tau}\stackrel{\mathrm{ns}}{=}J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}. \tag{2613}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x'^{\mathtt{a}}}{\mathrm{d}\,\tau} \stackrel{\mathrm{ns}}{\equiv} J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2614}$$

$$\frac{\partial\,x'^{\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{b}}}\,\frac{\mathrm{d}\,x^{\mathtt{b}}}{\mathrm{d}\,\tau} \stackrel{\mathrm{ns}}{\equiv} J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2615}$$

$$\frac{\partial\,x'^{\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{b}}}\,J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{c}}} \stackrel{\mathrm{ns}}{\equiv} J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2616}$$

$$\frac{\partial\,x'^{\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{b}}}\,J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{c}}} = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2617}$$

(2612)، یا (2617) با مختصات ِ کانُنیک، شرط ِ لازم و کافی برا یِ این است که $\mathfrak{C}$ (یِ وارون-پذیر) یک تقارن ِ معادله-یِ-حرکت ی باشد که با H_τ به دست میئاید. این رابطه مشتق ِ H_τ در نقطه یِ $\underset{\sim}{x}'$ را به مشتق ِ H_τ در نقطه یِ $\underset{\sim}{x}$ مربوط میکند.

اگر $\mathfrak{C}$ تقارن ِ ساختار- ِ-پُوَسُن هم باشد، رابطه یِ (2550) هم برقرار است:

$$\frac{\partial\,x'^{\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}) = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(x'). \tag{2550}$$

رابطه یِ (2550) نتیجه میدهد

$$\frac{\partial\,x'^{\mathtt{a}}}{\partial\,x^{b}}\,J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}(\underset{\sim}{x}) = [J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,x^{\mathtt{c}}}{\partial\,x'^{\mathtt{d}}}. \tag{2618}$$

و (2612) چنین میشود

$$[J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,x^{\mathtt{c}}}{\partial\,x'^{\mathtt{d}}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathtt{c}}} = [J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2619}$$

یا،

$$[J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x'^{\mathtt{d}}} = [J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2620}$$

پس،

$$0 = [J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\left\{\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}} - \frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}\right\}. \tag{2621}$$

یا،

$$0 = [J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}') - H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2622}$$

اگر مختصات کانُنیک باشند، (2550) میشود

$$\frac{\partial x'^{\mathtt{a}}}{\partial x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial x'^{\mathtt{b}}}{\partial x^{\mathtt{d}}}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}=J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{2551}$$

و (2618) تا (2622) چنین میشوند.

$$\frac{\partial x'^{\mathtt{a}}}{\partial x^{b}}\,J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}=J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}\,\frac{\partial x^{\mathtt{c}}}{\partial x'^{\mathtt{d}}}. \tag{2623}$$

$$J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}\,\frac{\partial x^{\mathtt{c}}}{\partial x'^{\mathtt{d}}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^{\mathtt{c}}}=J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2624}$$

$$J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial x'^{\mathtt{d}}}=J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2625}$$

$$0=J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,\left\{\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^{\mathtt{b}}}-\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial x'^{\mathtt{b}}}\right\}. \tag{2626}$$

$$0=J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')-H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial x'^{\mathtt{b}}}. \tag{2627}$$

$\underset{\sim}{J}$ وارون-پذیر است. پس (2622)، یا (2627) با مختصاتِ کانُنیک، همئرز است با

$$0=\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')-H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial x'^{\mathtt{a}}}. \tag{2628}$$

یعنی

$$H_\tau(\underset{\sim}{x}')=H_\tau(\underset{\sim}{x})+\mathfrak{c}. \tag{2629}$$

که $\mathfrak{c}$ یک ثابت است. نتیجه این که اگر $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ (که وارون-پذیر است) تقارنِ هم ساختار-ِ-پُؤَسُن و هم معادله-یِ-حرکت باشد، آنگاه

$$H_\tau\circ\underset{\sim}{\mathfrak{C}}-H_\tau=\mathfrak{c}. \tag{2630}$$

که $\mathfrak{c}$ یک ثابت است. اگر $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ تقارنِ ساختار-ِ-پُؤَسُن باشد، شرطِ لازم و کافی برا یِ این که $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ تقارنِ معادله-یِ-حرکت باشد (2630) است.

یک حالتِ خاص این است که $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ تابع ی از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P}\times\mathbb{A})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P}\times\mathbb{A})$ باشد، چنان که $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x,p_0)]$ مستقل از p_0 باشد. در این حالت $(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}\circ\underset{\sim}{\mathfrak{C}})$ تابع ی از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$

است. این تابع را با $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ نشان میدهم:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x) = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x,p_0)]. \tag{2563}$$

تفکیکِ فضا-زمانِ فاز به فضا یِ فاز و زمان و تکانه یِ متناظر با زمان، ضمنَن به این معنی ست که مئلفِها یِ J اینها را برمیئاورند.

$$J^{0\,\mathsf{a}} = \delta^{\mathsf{a}}_{2\,\mathfrak{m}+1}. \tag{2631}$$

$$J^{\mathsf{a}\,(2\,\mathfrak{m}+1)} = \delta^{\mathsf{a}}_{0}. \tag{2632}$$

که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعدِ فضا-یِ-فاز است، یعنی $(2\,\mathfrak{m}+2)$ بُعدِ فضا-زمان-ِ-فاز است.

شرطِ لازم و کافی برا یِ این که $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ تقارنِ معادله-یِ-حرکت باشد (2612) است. مئلفِها یِ فضا-یِ-فاز-ِ-گسترش-یافته یِ این شرط چنین میشوند.

$$\frac{\partial\, x'^{\alpha}}{\partial\, x^{\beta}}\,[J^{\beta\,\mathsf{c}}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H_{\tau}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\, x^{\mathsf{c}}} = [J^{\alpha\,\mathsf{b}}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_{\tau}(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\, x'^{\mathsf{b}}}. \tag{2633}$$

مئلفه یِ زمانی یِ (2633) میشود

$$\frac{\partial\, t'}{\partial\, t}\,\frac{\partial\,[H_{\tau}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\, p_0} + \frac{\partial\, t'}{\partial\, x^{b}}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H_{\tau}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\, x^{c}} = \frac{\partial\,[H_{\tau}(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\, p'_0}. \tag{2634}$$

مئلفِها یِ فضا-یِ-فازِ (2633) هم میشوند

$$\frac{\partial\, x'^{a}}{\partial\, t}\,\frac{\partial\,[H_{\tau}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\, p_0} + \frac{\partial\, x'^{a}}{\partial\, x^{b}}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H_{\tau}(\underset{\sim}{x})]}{\partial\, x^{c}} = [J^{a\,b}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H_{\tau}(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\, x'^{b}}. \tag{2635}$$

H_{τ} به شکلِ (1831) است:

$$H_{\tau}(t,x,p_0) = \mathfrak{H}(t,\mathsf{p}). \tag{1831}$$

که،

$$\mathsf{p} = p_0 + H(t,x). \tag{1822}$$

پس،

$$H_\tau(t,x,p_0) = \mathfrak{H}[t, p_0 + H(t,x)]. \tag{1832}$$

و البته،

$$H_\tau(t',x',p_0') = \mathfrak{H}(t',\mathsf{p}'). \tag{2636}$$

که،

$$\mathsf{p}' = p_0' + H(t',x'). \tag{2637}$$

پس،

$$H_\tau(t',x',p_0') = \mathfrak{H}[t', p_0' + H(t',x')]. \tag{2638}$$

به این ترتیب (2634) میشود

$$\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')}{\partial\,\mathsf{p}'} = \frac{\partial\,t'}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})}{\partial\,\mathsf{p}} + \frac{\partial\,t'}{\partial\,x^b}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})}{\partial\,\mathsf{p}}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^c}. \tag{2639}$$

یا،

$$\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')}{\partial\,\mathsf{p}'} = \frac{\partial\,\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})}{\partial\,\mathsf{p}}\,\left\{\frac{\partial\,t'}{\partial\,t} + \frac{\partial\,t'}{\partial\,x^b}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^c}\right\}. \tag{2640}$$

رابطه یِ (2635) هم میشود

$$\begin{aligned}[J^{a\,b}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')}{\partial\,\mathsf{p}'}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^b} &= \frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})}{\partial\,\mathsf{p}} \\ &\quad + \frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})}{\partial\,\mathsf{p}}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^c}.\end{aligned} \tag{2641}$$

یا،

$$\begin{aligned}[J^{a\,b}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')}{\partial\,\mathsf{p}'}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^b} &= \frac{\partial\,\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})}{\partial\,\mathsf{p}}\,\left\{\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^c}\right\}.\end{aligned} \tag{2642}$$

که، با استفاده از (2640)، میشود

$$[J^{a\,b}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^b}=\left\{\frac{\partial\,t'}{\partial\,t}+\frac{\partial\,t'}{\partial\,x^d}\,[J^{d\,e}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^e}\right\}^{-1}\left\{\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}+\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^c}\right\}. \tag{2643}$$

اگر $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)]$ مستقل از x باشد، $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\circ\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ تابع ی از $\mathbb{T}$ به $\mathbb{T}$ است. این یعنی t' تابع ِ فقط t است:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)=[t'(t),\mathfrak{C}(t,x)]. \tag{2644}$$

در این حالت (2643) چنین میشود.

$$[J^{a\,b}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^b}=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\left\{\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}+\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^c}\right\}. \tag{2645}$$

اگر $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)]$ مستقل از t باشد، $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ تابع ی از $\mathbb{P}$ به $\mathbb{P}$ است. این یعنی x' تابع ِ فقط x است:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)=[t'(t,x),\mathfrak{C}(x)]. \tag{2646}$$

در این حالت (2643) چنین میشود.

$$[J^{a\,b}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^b}=\left\{\frac{\partial\,t'}{\partial\,t}+\frac{\partial\,t'}{\partial\,x^d}\,[J^{d\,e}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^e}\right\}^{-1}\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^c}. \tag{2647}$$

سرانجام، اگر هم $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)]$ مستقل از x باشد و هم $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)]$ مستقل از t باشد،

$$\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(t,x)=[t'(t),\mathfrak{C}(x)]. \tag{2648}$$

در این حالت (2643) چنین میشود.

$$[J^{a\,b}(\underset{\sim}{x}')]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^b}=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^b}\,[J^{b\,c}(\underset{\sim}{x})]\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^c}. \tag{2649}$$

با مختصات ِ کانُنیک، مئلفِها یِ J ثابت َند. در این صورت روابط ِ (2633) تا (2635) چنین میشوند.

$$\frac{\partial\,x'^\alpha}{\partial\,x^\beta}\,J^{\beta\,\mathsf{c}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial\,x^{\mathsf{c}}}=J^{\alpha\,\mathsf{b}}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial\,x'^{\mathsf{b}}}. \tag{2650}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial p_0}+\frac{\partial t'}{\partial x^b}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^c}=\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial p_0'}. \tag{2651}$$

$$\frac{\partial x'^a}{\partial t}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial p_0}+\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^c}=J^{a\,b}\,\frac{\partial\,[H_\tau(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^b}. \tag{2652}$$

روابطِ (2640) و (2642) میشوند

$$\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')}{\partial\,\mathsf{p}'}=\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})}{\partial\,\mathsf{p}}\,\left\{\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial t'}{\partial x^b}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^c}\right\}. \tag{2653}$$

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')}{\partial\,\mathsf{p}'}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^b}=\frac{\partial\,\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})}{\partial\,\mathsf{p}}\,\left\{\frac{\partial x'^a}{\partial t}+\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^c}\right\}. \tag{2654}$$

رابطه یِ (2643) میشود

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^b}=\left\{\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial t'}{\partial x^d}\,J^{d\,e}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^e}\right\}^{-1}\left\{\frac{\partial x'^a}{\partial t}+\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^c}\right\}. \tag{2655}$$

رابطه یِ (2645)، که وقت ی ست که t' تابعِ فقط t باشد، میشود

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^b}=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\left\{\frac{\partial x'^a}{\partial t}+\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^c}\right\}. \tag{2656}$$

رابطه یِ (2647)، که وقت ی ست که x' تابعِ فقط x باشد، میشود

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^b}=\left\{\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial t'}{\partial x^d}\,J^{d\,e}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^e}\right\}^{-1}\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^c}. \tag{2657}$$

سرانجام رابطه یِ (2649)، که وقت ی ست که t' تابعِ فقط t باشد و x' تابعِ فقط x باشد، میشود

$$J^{a\,b}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x}')]}{\partial x'^b}=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\,J^{b\,c}\,\frac{\partial\,[H(\underset{\sim}{x})]}{\partial x^c}. \tag{2658}$$

اگر $\mathfrak{C}$ (که وارون-پذیر است) تقارنِ هم ساختارِ پُؤَسُن و هم معادله-یِ-حرکت باشد، (2630) برقرار است، یعنی $(H_\tau\circ\mathfrak{C}-H_\tau)$ ثابت است. رابطه یِ (2630) هم ان (2629) است، که با تفکیکِ فضا-زمان-ِ-فاز به زمان، فضا-یِ-فاز، و تکانه یِ متناظر با زمان چنین میشود.

$$\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')=\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})+\mathfrak{c}. \tag{2659}$$

مشتق ِ $\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')$ نسبت به p' ناصفر است:

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}')]}{\partial\,\mathsf{p}'}\neq 0. \tag{2660}$$

پس میشود p' را از رابطه یِ (2659) حساب کرد. یعنی یک تابعی یِ $\mathfrak{A}$ هست که

$$\mathsf{p}'=\mathfrak{A}(t',t,\mathsf{p}). \tag{2661}$$

در واقع،

$$\mathfrak{A}(t',\centerdot)=[\mathfrak{H}(t',\centerdot)]^{-1}\circ(\mathfrak{H}+\mathfrak{c}). \tag{2662}$$

یا،

$$\mathfrak{A}(t',\mathfrak{x})=[\mathfrak{H}(t',\centerdot)]^{-1}[\mathfrak{H}(\mathfrak{x})+\mathfrak{c}]. \tag{2663}$$

یعنی،

$$\mathfrak{A}(t',t,\mathsf{p})=[\mathfrak{H}(t',\centerdot)]^{-1}[\mathfrak{H}(t,\mathsf{p})+\mathfrak{c}]. \tag{2664}$$

حالت ی را بررسی میکنم که $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\mathfrak{C}(t,x,p_0)]$ مستقل از p_0 است، یعنی $\underset{\sim}{x}'$ تابع ِ فقط $\underset{\sim}{x}$ است. پس $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}\circ\mathfrak{C}$ یک تابع از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ است، که آن را با $\mathfrak{C}$ نشان میدهم. دیده شد در این حالت $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0}[\mathfrak{C}(t,x)]$ تابع ِ فقط t است، یعنی t' تابع ِ فقط t است. پس رابطه یِ (2661) را میشود بر حسب ِ تابعی یِ دُ-متغیره یِ $\mathfrak{B}$ نوشت:

$$\mathsf{p}'=\mathfrak{B}(t,\mathsf{p}). \tag{2665}$$

یا،

$$p_0'+H(t',x')=\mathfrak{B}[t,p_0+H(t,x)]. \tag{2666}$$

در این حالت، همچنین

$$\frac{\partial\,p_0'}{\partial\,p_0}=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{2573}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{B}(t,\mathsf{p})]}{\partial\,\mathsf{p}} = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{2667}$$

یعنی یک تابعی یِ $\mathfrak{h}$ هست که،

$$\mathfrak{B}(t,\mathsf{p}) = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\mathsf{p} + \mathfrak{h}(t). \tag{2668}$$

به این ترتیب (2666) چنین میشود.

$$p_0' + H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\mathsf{p} + \mathfrak{h}(t). \tag{2669}$$

رابطه یِ (2573) همئرز است با

$$p_0' = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[p_0 - \mathcal{F}(t,x)]. \tag{2574}$$

به این ترتیب (2669) چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[p_0 - \mathcal{F}(t,x)] + H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[p_0 + H(t,x)] + \mathfrak{h}(t). \tag{2670}$$

یا،

$$H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[H(t,x) + \mathcal{F}(t,x)] + \mathfrak{h}(t). \tag{2671}$$

$\mathfrak{h}$ در معادلاتِ حرکت (برا یِ $\underset{\sim}{x}$) وارد نمیشود. $\mathcal{F}$ باید (2582) را براورَد:

$$J_{a\,c}\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,x'^c}{\partial\,x^b} = \frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,x^b}. \tag{2582}$$

و دیده شد (2582) برا یِ $\mathcal{F}$ جواب دارد.

یک حالتِ خاص این است که x' مستقل از t باشد. در این حالت $\mathcal{F}$ مستقل از x میشود. و (2671) میشود

$$H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,H(t,x) + \mathfrak{h}^{\backprime}(t). \tag{2672}$$

که،

$$\mathfrak{h}^{\backprime}(t) = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\mathcal{F}(t) + \mathfrak{h}(t). \tag{2673}$$

البته $\mathfrak{h}^{\backprime}$ در معادله یِ حرکت (برا یِ $\underset{\sim}{x}$) وارد نمیشود. از جمله میشود آن را صفر گذاشت.

یک حالت ِ خاصتر این است که مشتق ِ t' نسبت به t یک باشد:

$$\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t} = 1. \tag{2066}$$

در این حالت،

$$H(t', x') = H(t, x) + \mathfrak{h}^{\backprime}(t). \tag{2674}$$

و البته $\mathfrak{h}^{\backprime}$ در معادله یِ حرکت (برا یِ $\underset{\sim}{x}$) وارد نمیشود.

78 تقارن ِ کنش

$\mathfrak{C}(\underset{\sim}{x})$ را با $\underset{\sim}{x}'$، و $(\mathfrak{C}_{*}\,\underset{\sim}{J})$ را با $\underset{\sim}{J}'$ نشان میدهم. متناظر با $L_{\phi\,\tau}$ (لَگرانژی یِ فضا-زمان- ِ-فاز) و H_{τ} (هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی)، $L'_{\phi\,\tau}$ و H'_{τ} را چنین تعریف میکنم.

$$L'_{\phi\,\tau}(\underset{\sim}{x}, \acute{\underset{\sim}{x}}) = [L_{\phi\,\tau}(\underset{\sim}{x}', \acute{\underset{\sim}{x}}')]. \tag{2675}$$

$$H'_{\tau}(\underset{\sim}{x}) = H_{\tau}(\underset{\sim}{x}'). \tag{2676}$$

شرط ِ تقارن ِ کنش تحت ِ تبدیل- ِ-مسیر ِ نقطِئی یِ متناظر با $\mathfrak{C}$ این است که $(L'_{\phi\,\tau} - L_{\phi\,\tau})$ مشتق ِ یک تابعی نسبت به τ باشد. معلوم شد این شرط آن است که

$$0 = [-\underset{\sim}{J}' - (\mathbf{d}\,H'_{\tau}) \wedge (\mathbf{d}\,\tau)] - [-\underset{\sim}{J} - (\mathbf{d}\,H_{\tau}) \wedge (\mathbf{d}\,\tau)]. \tag{2224}$$

$\underset{\sim}{J}'$ و $\underset{\sim}{J}$، ترکیب- ِ-خطیها یی از $[(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{a}}) \wedge (\mathbf{d}\,x^{\mathsf{b}})]$ اند. $[(\mathbf{d}\,H'_{\tau}) \wedge (\mathbf{d}\,\tau)]$ و $[(\mathbf{d}\,H_{\tau}) \wedge (\mathbf{d}\,\tau)]$، ترکیب- ِ-خطیها یی از $[(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{a}}) \wedge (\mathbf{d}\,\tau)]$ اند. پس (2224) نتیجه میدهد

$$\underset{\sim}{J}' - \underset{\sim}{J} = 0. \tag{2229}$$

$$(\mathbf{d}\,\tau) \wedge [\mathbf{d}\,(H'_{\tau} - H_{\tau})] = 0. \tag{2230}$$

رابطه یِ (2229) یعنی $\mathfrak{C}$ تقارنِ ساختار-ِ-پُؤَسُن است. رابطه یِ (2230) هم یعنی

$$[\mathbf{d}\,(H'_\tau - H_\tau)]_{|\,\tau} = 0. \tag{2235}$$

که، چون H_τ و H'_τ مستقل از τ هستند، نتیجه میدهد

$$\mathbf{d}\,(H'_\tau - H_\tau) = 0. \tag{2237}$$

یعنی یک ثابتِ $\mathfrak{c}$ هست که

$$H'_\tau - H_\tau = \mathfrak{c}. \tag{2677}$$

یا،

$$H'_\tau = H_\tau + \mathfrak{c}. \tag{2678}$$

که هم ان (2630) است:

$$H_\tau \circ \mathfrak{C} - H_\tau = \mathfrak{c}. \tag{2630}$$

یا،

$$\mathbf{d}\,(H_\tau \circ \mathfrak{C}) = \mathbf{d}\,H_\tau. \tag{2679}$$

نتیجه این که اگر $\mathfrak{C}$ تقارنِ کنش باشد، آنگاه $\mathfrak{C}$ تقارنِ ساختار-ِ-پُؤَسُن هم هست و (2630) برقرار است، یعنی H_τ در اثرِ $\mathfrak{C}$ با یک ثابتِ جمعی تغییر میکند. به سادگی دیده میشود عکسِ این هم درست است: اگر $\mathfrak{C}$ تقارنِ ساختار-ِ-پُؤَسُن باشد و H_τ در اثرِ $\mathfrak{C}$ با یک ثابتِ جمعی تغییر کند، آنگاه $\mathfrak{C}$ تقارنِ کنش است.

پس شرطِ لازم و کافی برا یِ این که $\mathfrak{C}$ تقارنِ کنش باشد این است که $\mathfrak{C}$ تقارنِ ساختار-ِ-پُؤَسُن باشد (کانُنیک باشد) و H_τ در اثرِ $\mathfrak{C}$ با یک ثابتِ جمعی تغییر کند. این را میشود بر حسبِ $(\mathbf{d}\,H_\tau)$، به جا یِ خُدِ H_τ، بیان کرد:

شرطِ لازم و کافی برا یِ این که $\mathfrak{C}$ تقارنِ کنش باشد این است که $\mathfrak{C}$ تقارنِ ساختار-ِ-پُؤَسُن باشد (کانُنیک باشد) و $[\mathbf{d}\,(H_\tau \circ \mathfrak{C})]$ با $(\mathbf{d}\,H_\tau)$ برابر باشد.

به این ترتیب، نتایج ی که در پایانِ بخش پیش به دست آمد، برا یِ این که $\mathfrak{C}$ تقارنِ کنش و تقارنِ ساختارِ پُؤَسُن باشد، تکرار میشوند. اینجا برا یِ این که $\mathfrak{C}$ تقارنِ کنش باشد.

79 تابعی یِ مولد

$\mathfrak{C}(x)$ را با x'، و $(\mathfrak{C}_*\,\mathcal{J})$ را با $\mathcal{J}'$ نشان میدهم. این که $\mathfrak{C}$ تقارنِ ساختار-ِ-پُؤَسُن باشد، یعنی $\mathfrak{C}$ کانُنیک باشد، این شرط است.

$$\mathcal{J}' - \mathcal{J} = 0. \tag{2229}$$

این که $\mathcal{J}$ و $\mathcal{J}'$ بسته اند، نتیجه میدهد $\mathcal{J}$ و $\mathcal{J}'$ (مُضعَن) دقیق َند. یعنی فرم-ِ-دیفرانسیلها یِ Ξ_τ و Ξ'_τ یی هستند که

$$\mathbf{d}\,\Xi_\tau = -\mathcal{J}. \tag{2217}$$

$$\mathbf{d}\,\Xi'_\tau = -\mathcal{J}'. \tag{2680}$$

به این ترتیب (2229) چنین میشود.

$$\mathbf{d}\,(\Xi'_\tau - \Xi_\tau) = 0. \tag{2681}$$

$(\Xi'_\tau - \Xi_\tau)$ بسته است. پس (مُضعَن) دقیق است. یعنی (مُضعَن) یک تابعی یِ (صفر-فرم-ِ-دیفرانسیلِ) Υ_τ هست که

$$\mathbf{d}\,\Upsilon_\tau = \Xi_\tau - \Xi'_\tau. \tag{2682}$$

(علامتِ منفی یی که به نظر میئاید در تعریفِ Υ_τ وارد شده اهمیت ی ندارد. صرفَن تاریخی ست.) به Υ_τ تابعی یِ مولد (تبدیل-ِ-کانُنیکِ $\mathfrak{C}$) میگویند.

از اینجا مختصات ِ کانُنیک به کار میبَرم. Ξ_τ و Ξ'_τ را میشود چنین نوشت.

$$\Xi_\tau = p_\alpha \, \mathbf{d}\, q^\alpha. \tag{2215}$$

$$\Xi'_\tau = p'_\alpha \, \mathbf{d}\, q'^\alpha. \tag{2683}$$

رُشن است که

$$\mathbf{d}\, \Xi_\tau = (\mathbf{d}\, p_\alpha) \wedge (\mathbf{d}\, q^\alpha). \tag{2216}$$

$$\mathbf{d}\, \Xi'_\tau = (\mathbf{d}\, p'_\alpha) \wedge (\mathbf{d}\, q'^\alpha). \tag{2684}$$

رابطه یِ (2682) هم چنین میشود.

$$\mathbf{d}\, \Upsilon_\tau = p_\alpha \, \mathbf{d}\, q^\alpha - p'_\alpha \, \mathbf{d}\, q'^\alpha. \tag{2685}$$

Υ_τ را میشود بر حسب ِ $\underset{\sim}{x}$ یا $\underset{\sim}{x}'$ نوشت. اما از (2685) برمیئاید سادِتر این است که Υ_τ بر حسب ِ نیم ی از مختصات ِ $\underset{\sim}{x}$ و نیم ی از مختصات ِ $\underset{\sim}{x}'$ نوشته شود، مثلَن بر حسب ِ $\underset{\sim}{q}$ و $\underset{\sim}{q}'$ نوشته شود. البته این نیم-مختصاتها خاص َند:

$\underset{\sim}{q}$ این ویژگی را دارد که کروشه-یِ-پُؤَسُن- ِ-گسترش-یافته یِ هر دُ-تا از q^α ها با هم صفر است. $\underset{\sim}{q}'$ هم این ویژگی را دارد که کروشه-یِ-پُؤَسُن- ِ-گسترش-یافته یِ هر دُ-تا از q'^α ها با هم صفر است.

میگویم یک دسته تابعی پُؤَسُنی (گسترش-یافته-پُؤَسُنی) یَند، وقت ی کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ (کروشه-یِ-پُؤَسُن- ِ-گسترش-یافته یِ) هر دُ-تا از آنها با هم صفر باشد. وقت ی گسترش-یافته-بودن معلوم باشد، برا یِ سادگی صفت ِ گسترش-یافته را حذف میکنم.

به این ترتیب، q^α ها پُؤَسُنی یَند. q'^α ها هم پُؤَسُنی یَند.

البته برا یِ این که بشود Υ_τ را بر حسب ِ $\underset{\sim}{q}$ و $\underset{\sim}{q}'$ نوشت، این نیم-مختصاتها باید مستقل از هم باشند. این بدیهی نیست، و در واقع همیشه درست نیست. مثلَن برا یِ تبدیل- ِ-کانُنیک ِ همانی، $\underset{\sim}{q}'$ هم ان $\underset{\sim}{q}$ است. پس $\underset{\sim}{q}$ و $\underset{\sim}{q}'$ مستقل از هم نیستند.

ثابت میکنم همیشه نیم-مختصاتها یی پُؤَسُنی برا یِ $\underset{\sim}{x}$ و نیم-مختصاتها یی پُؤَسُنی برا یِ $\underset{\sim}{x}'$ هستند که مستقل از هم َند. بیش از آن:

قضیه یِ B: گیرم q^i ها یک دسته تابعی یِ مستقل از هم َند، که پُؤَسُنی یَند. در این صورت یک مجموعه یِ $\mathbb{I}'$ هست که q^i ها و q'^α ها، که با روابط ِ زیر تعریف میشوند، مستقل از هم َند.

$$\mathrm{q}'^\alpha = q'^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{I}'. \tag{2686}$$

$$\mathrm{q}'^\alpha = p'_\alpha, \quad \alpha \notin \mathbb{I}'. \tag{2687}$$

برا یِ اثبات، $\mathbb{I}'$ را میسازم. p'_α ها را (متناظر با $\mathbb{I}'$) چنین تعریف میکنم.

$$\mathrm{p}'_\alpha = p'_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{I}'. \tag{2688}$$

$$\mathrm{p}'_\alpha = -q'^\alpha, \quad \alpha \notin \mathbb{I}'. \tag{2689}$$

دیده میشود $(\mathrm{q}'^0, \ldots, \mathrm{q}'^{\mathfrak{m}}, \mathrm{p}'_0, \ldots, \mathrm{p}'_{\mathfrak{m}})$، که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است، مختصات ی کانُنیک برا یِ $\underset{\sim}{x}'$ است:

$$\{\mathrm{q}'^\alpha, \mathrm{q}'^\beta\}_\tau = 0. \tag{2690}$$

$$\{\mathrm{q}'^\alpha, \mathrm{p}'_\beta\}_\tau = \delta^\alpha_\beta. \tag{2691}$$

$$\{\mathrm{p}'_\alpha, \mathrm{p}'_\beta\}_\tau = 0. \tag{2692}$$

به $(\mathrm{q}'^0, \ldots, \mathrm{q}'^{\mathfrak{m}}, \mathrm{p}'_0, \ldots, \mathrm{p}'_{\mathfrak{m}})$ جایگشت- ِ-کانُنیک ِ $(q'^0, \ldots, q'^{\mathfrak{m}}, p'_0, \ldots, p'_{\mathfrak{m}})$ با $\mathbb{I}'$ میگویم. یا، بدون ِ این که به $\mathbb{I}'$ ارجاع دهم، میگویم $(\mathrm{q}'^0, \ldots, \mathrm{q}'^{\mathfrak{m}}, \mathrm{p}'_0, \ldots, \mathrm{p}'_{\mathfrak{m}})$ یک جایگشت-ِ-کانُنیک ِ $(q'^0, \ldots, q'^{\mathfrak{m}}, p'_0, \ldots, p'_{\mathfrak{m}})$ است. سادِتر، میگویم $(\mathrm{q}', \mathrm{p}')$ یک جایگشت- ِ-کانُنیک ِ (q', p') است.

حکم ِ قضیه یِ **B** حکم ِ $\mathbf{B}_{\mathfrak{m}}$ است، که $\mathbf{B}_n$ چنین است.

حکم ِ $\mathbf{B}_n$: یک مجموعه یِ $\mathbb{I}'$ هست که برا یِ n با این شرط که $(n \leq \mathfrak{m})$، تابعیها یِ q^i و q'^0 تا q'^n مستقل از هم َند، که q'^α ها هم چنین تعریف میشوند.

$$\mathrm{q}'^\alpha = q'^\alpha, \quad [(\alpha \leq n) \wedge (\alpha \in \mathbb{I}')]. \tag{2693}$$

$$\mathrm{q}'^\alpha = p'_\alpha, \quad [(\alpha \leq n) \wedge (\alpha \notin \mathbb{I}')]. \tag{2694}$$

این که یک دسته تابعی مستقل از هم باشند، یعنی دیفرانسیل ِ هیچ کدام در پهنه یِ دیفرانسیلها یِ تابعیها یِ دیگر نباشد. وقت ی تابعیها یِ $\mathfrak{X}_i$ مستقل از هم َند، این که تابعیها یِ $\mathfrak{X}_i$ و تابعی یِ $\mathfrak{Y}$ مستقل از هم باشند یعنی $(\mathbf{d}\,\mathfrak{Y})$ در پهنه یِ $\{(i, \mathbf{d}\,\mathfrak{X}_i) \mid i\}$ نباشد.

اثبات ِ حکم ِ $\mathbf{B}_n$ با استقرا بر n انجام میشود. برا یِ $(n = -1)$، حکم ِ $\mathbf{B}_n$ بدیهی ست.

برا یِ ادامه یِ اثبات، گیرم $\mathbf{B}_n$ درست است و میکوشم $\mathbf{B}_{n+1}$ را ثابت کنم. گیرم $\mathbf{B}_{n+1}$ نادرست است. این یعنی $(\mathbf{d}\,q'^{n+1})$ و $(\mathbf{d}\,p'_{n+1})$، هر-دُ، در پهنه یِ $\mathbb{S}$ اند، که

$$\mathbb{S} = \{(i, \mathbf{d}\,\mathfrak{q}^i) \mid i\} \cup \{(\beta, \mathbf{d}\,\mathrm{q}'^{\beta}) \mid \beta \leq n\}. \tag{2695}$$

این هم یعنی $\mathfrak{a}_i$ ها و a'_α ها و $\mathfrak{b}_i$ ها و b'_α یی هستند که (تابعی یَند و)

$$\mathbf{d}\,q'^{n+1} = \mathfrak{a}_i\,\mathbf{d}\,\mathfrak{q}^i + \sum_{\alpha=0}^{n} \mathrm{a}'_\alpha\,\mathbf{d}\,\mathrm{q}'^{\alpha}. \tag{2696}$$

$$\mathbf{d}\,p'_{n+1} = \mathfrak{b}_i\,\mathbf{d}\,\mathfrak{q}^i + \sum_{\alpha=0}^{n} \mathrm{b}'_\alpha\,\mathbf{d}\,\mathrm{q}'^{\alpha}. \tag{2697}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned}\{q'^{n+1}, p'_{n+1}\}_\tau &= \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_j\,\{\mathfrak{q}^i, \mathfrak{q}^j\}_\tau + \sum_{\beta=0}^{n} \mathfrak{a}_i\,\mathrm{b}'_\beta\,\{\mathfrak{q}^i, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau \\ &\quad + \sum_{\alpha=0}^{n} \mathrm{a}'_\alpha\,\mathfrak{b}_j\,\{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathfrak{q}^j\}_\tau + \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{n} \mathrm{a}'_\alpha\,\mathrm{b}'_\beta\,\{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau.\end{aligned} \tag{2698}$$

اما

$$\{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau = 0, \quad [(\alpha \leq n) \wedge (\beta \leq n)]. \tag{2699}$$

$\mathfrak{q}^i$ ها هم پُوَسُنی یَند:

$$\{\mathfrak{q}^i, \mathfrak{q}^j\}_\tau = 0. \tag{2700}$$

با استفاده از (2699) و (2716)، رابطه یِ (2698) چنین میشود.

$$\{q'^{n+1}, p'_{n+1}\}_\tau = \sum_{\beta=0}^{n} \mathfrak{a}_i\,\mathrm{b}'_\beta\,\{\mathfrak{q}^i, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau + \sum_{\alpha=0}^{n} \mathrm{a}'_\alpha\,\mathfrak{b}_j\,\{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathfrak{q}^j\}_\tau. \tag{2701}$$

دیده میشود

$$\{q'^{n+1}, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau = \mathfrak{a}_i \{\mathfrak{q}^i, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau + \sum_{\alpha=0}^{n} \mathrm{a}'_\alpha \{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau, \quad \beta \leq n. \tag{2702}$$

که، با استفاده از (2699)، نتیجه میدهد

$$\{q'^{n+1}, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau = \mathfrak{a}_i \{\mathfrak{q}^i, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau, \qquad \beta \leq n. \tag{2703}$$

اما،

$$\{q'^{n+1}, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau = 0, \quad \beta \leq n. \tag{2704}$$

پس،

$$\mathfrak{a}_i \{\mathfrak{q}^i, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau = 0, \quad \beta \leq n. \tag{2705}$$

به شکل ی مشابه،

$$\{\mathrm{q}'^{\alpha}, p'_{n+1}\}_\tau = \mathfrak{b}_j \{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathfrak{q}^j\}_\tau + \sum_{\beta=0}^{n} \mathrm{b}'_\beta \{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathrm{q}'^{\beta}\}_\tau, \quad \alpha \leq n. \tag{2706}$$

که، با استفاده از (2699)، نتیجه میدهد

$$\{\mathrm{q}'^{\alpha}, p'_{n+1}\}_\tau = \mathfrak{b}_j \{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathfrak{q}^j\}_\tau, \qquad \alpha \leq n. \tag{2707}$$

اما،

$$\{\mathrm{q}'^{\alpha}, p'_{n+1}\}_\tau = 0, \quad \alpha \leq n. \tag{2708}$$

پس،

$$\mathfrak{b}_j \{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathfrak{q}^j\}_\tau = 0, \quad \alpha \leq n. \tag{2709}$$

با استفاده از (2705) و (2709)، رابطه یِ (2701) نتیجه میدهد

$$\{q'^{n+1}, p'_{n+1}\}_\tau = 0. \tag{2710}$$

اما

$$\{q'^{n=1}, p'_{n+1}\}_\tau = 1. \tag{2711}$$

پس این فرض که $(\mathbf{d}\, q'^{n+1})$ و $(\mathbf{d}\, p'_{n+1})$، هر-دُ، در پهنه یِ $\mathbb{S}$ باشند به یک نتیجه یِ نادرست مینجامد. که یعنی فرض نادرست است. این نشان میدهد $\mathbf{B}_{n+1}$ درست است.

به این ترتیب اثبات ِ $\mathbf{B}_n$ ها با استقرا کامل میشود. پس $\mathbf{B}_{\mathrm{m}}$ درست است، که یعنی قضیه یِ $\mathbf{B}$ درست است.

از جمله معلوم میشود برا یِ هر مجموعه یِ $\mathbb{I}$ یک مجموعه یِ $\mathbb{I}'$ هست که q^α ها و q'^α ها مستقل از هم َند، که

$$\mathrm{q}^\alpha = q^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{I}. \tag{2712}$$

$$\mathrm{q}^\alpha = p_\alpha, \quad \alpha \notin \mathbb{I}. \tag{2713}$$

و q'^α ها هم با (2686) و (2687) ساخته میشوند. تکانِها یِ متناظر با q^α ها را هم چنین تعریف میکنم.

$$\mathrm{p}_\alpha = p_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{I}. \tag{2714}$$

$$\mathrm{p}_\alpha = -q^\alpha, \quad \alpha \notin \mathbb{I}.. \tag{2715}$$

و دیده میشود $(\mathrm{q}^0, \ldots, \mathrm{q}^{\mathrm{m}}, \mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_{\mathrm{m}})$ مختصات ی کانُنیک برا یِ $\underset{\sim}{x}$ است:

$$\{\mathrm{q}^\alpha, \mathrm{q}^\beta\}_\tau = 0. \tag{2716}$$

$$\{\mathrm{q}^\alpha, \mathrm{p}_\beta\}_\tau = \delta^\alpha_\beta. \tag{2717}$$

$$\{\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{p}_\beta\}_\tau = 0. \tag{2718}$$

دیده میشود

$$p_\alpha\, \mathbf{d}\, q^\alpha = \mathrm{p}_\alpha\, \mathbf{d}\, \mathrm{q}^\alpha + \mathbf{d}\, \mathfrak{O}_{\mathbb{I}}. \tag{2719}$$

که،

$$\mathfrak{O}_{\mathbb{I}} = \sum_{\alpha \notin \mathbb{I}} p_\alpha\, q^\alpha. \tag{2720}$$

همچنین،

$$p'_\alpha\,\mathbf{d}\,q'^\alpha = \mathrm{p}'_\alpha\,\mathbf{d}\,\mathrm{q}'^\alpha + \mathbf{d}\,\mathfrak{O}'_{\mathbb{I}'}. \tag{2721}$$

که،

$$\mathfrak{O}'_{\mathbb{I}'} = \sum_{\alpha\notin\mathbb{I}'} p'_\alpha\,q'^\alpha. \tag{2722}$$

به این ترتیب رابطه یِ (2685) برا یِ تابعی یِ-مولد ِ Υ_τ را میشود چنین نوشت.

$$\mathbf{d}\,\Upsilon_\tau = \mathrm{p}_\alpha\,\mathbf{d}\,\mathrm{q}^\alpha - \mathrm{p}'_\alpha\,\mathbf{d}\,\mathrm{q}'^\alpha + \mathbf{d}\,\mathfrak{O}_{\mathbb{I}} - \mathbf{d}\,\mathfrak{O}'_{\mathbb{I}'}. \tag{2723}$$

تابعی یِ $\tilde{\Upsilon}_\tau$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\Upsilon}_\tau = \Upsilon_\tau - \mathfrak{O}_{\mathbb{I}} + \mathfrak{O}'_{\mathbb{I}'}. \tag{2724}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,\tilde{\Upsilon}_\tau = \mathrm{p}_\alpha\,\mathbf{d}\,\mathrm{q}^\alpha - \mathrm{p}'_\alpha\,\mathbf{d}\,\mathrm{q}'^\alpha. \tag{2725}$$

طرف ِ راست ِ این رابطه یک ترکیب- ِ-خطی از دیفرانسیلها یِ تابعیها یِ مستقل-از-هم است، بر خلاف ِ (2685) که لزومَن چنین نبود. به $\tilde{\Upsilon}_\tau$ یک تابعی-یِ-مولد ِ استاندارد، یا سادِتر یک تابعی-یِ-مولد ِ (ِ تبدیل- ِ-کانُنیک ِ $\mathfrak{C}$) میگویم.

این که تابعیها یِ q^0 تا q^{m} و q'^0 تا q'^{m} (مُضعَن) مستقل از هم َند، نشان میدهد q^0 تا q^{m} و q'^0 تا q'^{m} را میشود مختصات (برا یِ فضا-زمان- ِ-فاز) گرفت. با این انتخاب برا یِ مختصات، رابطه یِ (2725) نتیجه میدهد

$$\mathrm{p}_\alpha = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}. \tag{2726}$$

$$\mathrm{p}'_\alpha = -\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,\mathrm{q}'^\alpha}. \tag{2727}$$

تبدیل ِ کانُنیک $\underset{\sim}{x}'$ را بر حسب ِ $\underset{\sim}{x}$ میدهد. اما روابط ِ (2726) و (2727) برا یِ این مناسب َند که همه چیز بر حسب ِ $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ بیان شود. برا یِ این کار، رابطه یِ $\underset{\sim}{x}'$ بر حسب ِ $\underset{\sim}{x}$ را تفکیک میکنم:

$$\underset{\sim}{\mathrm{q}}' = \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}}). \tag{2728}$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{p}}' = \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(2)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}}). \tag{2729}$$

$\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ (مُضعَن) مستقل از هم َند. پس (مُضعَن) میشود (2728) را در $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ یِ ثابت وارون کرد و $\underset{\sim}{\mathrm{p}}$ را بر حسب ِ $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ نوشت:

$$\underset{\sim}{\mathrm{p}} = \mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}'). \tag{2730}$$

که،

$$\mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \cdot) = [\underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \cdot)]^{-1}. \tag{2731}$$

و رابطه یِ (2729) هم چنین میشود.

$$\underset{\sim}{\mathrm{p}}' = \mathfrak{D}_{\tau}^{(2)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}'). \tag{2732}$$

که،

$$\mathfrak{D}_{\tau}^{(2)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \cdot) = [\underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(2)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \cdot)] \circ [\mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \cdot)]. \tag{2733}$$

روابط ِ (2731) و (2733) یعنی

$$\underset{\sim}{\mathrm{q}}' = \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}[\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}')]. \tag{2734}$$

$$\mathfrak{D}_{\tau}^{(2)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}') = \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(2)}[\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}')]. \tag{2735}$$

قبلَن هم دیده شد که $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ یک تقارن ِ کنش ِ فضا-زمان- ِ-فاز است، اگر و تنها اگر $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$ کانُنیک باشد و هَمیلتِنی ِ فضا-زمانی را (جز با یک ثابت ِ جمعی) عوض نکند:

$$H_{\tau}(\underset{\sim}{x}') = H_{\tau}(\underset{\sim}{x}) + \mathfrak{c}. \tag{2629}$$

یا،

$$H_\tau \circ \mathfrak{C} = H_\tau + \mathfrak{c}. \tag{2736}$$

که $\mathfrak{c}$ یک ثابت است.

حالت ی را بررسی میکنم که مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته یِ نقطه یِ تبدیل-یافته مستقل از p_0 باشند. این یعنی $\mathfrak{C}$ تابع ی از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P}\times\mathbb{A})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P}\times\mathbb{A})$ باشد، چنان که $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\mathfrak{C}(t,x,p_0)]$ مستقل از p_0 باشد. در این حالت یک تابع ِ $\mathfrak{C}$ از $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ به $(\mathbb{T}\times\mathbb{P})$ هست، چنان که

$$\mathfrak{C}(t,x) = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\mathfrak{C}(t,x,p_0)]. \tag{2563}$$

و دیده شد وقت ی $\mathfrak{C}$ کانُنیک باشد $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ هم کانُنیک است، و وقت ی $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ کانُننیک باشد میشود $\mathfrak{C}$ را چنان ساخت که $\mathfrak{C}$ کانُننیک باشد. همچنین، دیده شد برا یِ تبدیل- ِ-کانُننیکها یی که $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\mathfrak{C}(t,x,p_0)]$ مستقل از p_0 باشد، t' تابع ِ فقط t است.

مختصات ِ q و q' جمعَن $(2\,\mathfrak{m})$ تابعی با دامنه یِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند، که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. رُشن است که مختصات ِ q و q'، همراه با t و t'، مستقل-از-هم نیستند، چون جمعَن $(2\,\mathfrak{m}+2)$ تابعی با دامنه یِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند، در حال ی که بُعد ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته $(2\,\mathfrak{m}+1)$ است. پس یا

$$\mathrm{q}^0 = t. \tag{2737}$$

$$\mathrm{q}'^0 = p'_0. \tag{2738}$$

یا،

$$\mathrm{q}^0 = p_0. \tag{2739}$$

$$\mathrm{q}'^0 = t'. \tag{2740}$$

با هر q، و هر q' چنان که q و q' مستقل-از-هم باشند، هر یک از زُجها یِ (2737) و (2738)، یا (2739) و (2740) ممکن است. (به $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ ی مستقل-از-هم مینجامد.) اولی را برمیگزینم. نتیجه میشود

$$\mathrm{p}_0 = p_0. \tag{2741}$$

$$\mathrm{p}'_0 = -t'. \tag{2742}$$

از (2727) نتیجه میشود

$$-t' = -\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,p'_0}. \tag{2743}$$

t'، به عنوان ِ تابع ی از $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و q' و p'_0، مستقل از p'_0 است. پس انتگرال-گیری از رابطه یِ بالا نتیجه میدهد یک $\tilde{\Upsilon}$ هست که

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(t,\mathrm{q},p'_0,\mathrm{q}') = p'_0\,t' + \tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},\mathrm{q}'). \tag{2744}$$

البته t' تابع ِ فقط t است. با تئکید بر این، رابطه یِ (2744) چنین میشود.

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(t,\mathrm{q},p'_0,\mathrm{q}') = p'_0\,t'(t) + \tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},\mathrm{q}'). \tag{2745}$$

از (2726) و (2727) نتیجه میشود

$$\mathrm{p}_i = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}^i}. \tag{2746}$$

$$\mathrm{p}'_i = -\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}'^i}. \tag{2747}$$

از (2726)، همچنین نتیجه میشود

$$p_0 = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,t}. \tag{2748}$$

که، با استفاده از (2745)، میشود

$$p_0 = p'_0\,\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}. \tag{2749}$$

یا،

$$p_0' = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\left(p_0 - \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}\right). \tag{2750}$$

H_τ به شکلِ (1831) است:

$$H_\tau(t,x,p_0) = \mathfrak{H}(t,\mathsf{p}). \tag{1831}$$

که،

$$\mathsf{p} = p_0 + H(t,x). \tag{1822}$$

پس،

$$H_\tau(t,x,p_0) = \mathfrak{H}[t,p_0 + H(t,x)]. \tag{1832}$$

و البته،

$$H_\tau(t',x',p_0') = \mathfrak{H}(t',\mathsf{p}'). \tag{2636}$$

که،

$$\mathsf{p}' = p_0' + H(t',x'). \tag{2637}$$

پس،

$$H_\tau(t',x',p_0') = \mathfrak{H}[t',p_0' + H(t',x')]. \tag{2638}$$

شرطِ این که تبدیل-ِ-کانُنیکِ $\mathfrak{C}$، که $\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\mathfrak{C}(t,x,p_0)]$ مستقل از p_0 است، یعنی (2563) برقرار است، تقارنِ کنشِ فضا-زمان-ِ-فاز باشد، رابطه یِ (2629) است، که چنین میشود.

$$\mathfrak{H}(t',\mathsf{p}') = \mathfrak{H}(t,\mathsf{p}) + \mathfrak{c}. \tag{2659}$$

مشتق ِ $\mathfrak{H}(t', \mathsf{p}')$ نسبت به p' ناصفر است:

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{H}(t', \mathsf{p}')]}{\partial\,\mathsf{p}'} \neq 0. \tag{2660}$$

پس میشود p' را از رابطه یِ بالا حساب کرد. یعنی یک تابعی یِ $\mathfrak{A}$ هست که

$$\mathsf{p}' = \mathfrak{A}(t', t, \mathsf{p}). \tag{2661}$$

t' تابع ِ فقط t است. پس رابطه یِ بالا را میشود بر حسب ِ تابعی یِ دُ-متغیره یِ $\mathfrak{B}$ نوشت:

$$\mathsf{p}' = \mathfrak{B}(t, \mathsf{p}). \tag{2665}$$

یا،

$$p_0' + H(t', x') = \mathfrak{B}[t, p_0 + H(t, x)]. \tag{2666}$$

همچنین،

$$\frac{\partial\,p_0'}{\partial\,p_0} = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{2573}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{B}(t, \mathsf{p})]}{\partial\,\mathsf{p}} = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}. \tag{2667}$$

یعنی یک تابعی یِ $\mathfrak{h}$ هست که،

$$\mathfrak{B}(t, \mathsf{p}) = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\mathsf{p} + \mathfrak{h}(t). \tag{2668}$$

به این ترتیب (2666) چنین میشود.

$$p_0' + H(t', x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\mathsf{p} + \mathfrak{h}(t). \tag{2669}$$

رابطه یِ (2573) همئرز است با

$$p_0' = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[p_0 - \mathcal{F}(t,x)]. \tag{2574}$$

به این ترتیب (2669) چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[p_0 - \mathcal{F}(t,x)] + H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[p_0 + H(t,x)] + \mathfrak{h}(t). \tag{2670}$$

یا،

$$H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,[H(t,x) + \mathcal{F}(t,x)] + \mathfrak{h}(t). \tag{2671}$$

از مقایسه یِ (2750) با (2574) دیده میشود

$$\mathcal{F} = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}. \tag{2751}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{F}(t,x) = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\Upsilon})(t,\mathrm{q},\mathrm{q}'). \tag{2752}$$

به این ترتیب (2671) چنین میشود.

$$H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\left[H(t,x) + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\Upsilon})(t,\mathrm{q},\mathrm{q}')\right] + \mathfrak{h}(t). \tag{2753}$$

البته $\mathfrak{h}$ در معادلات ِ حرکت (برا یِ $\underset{\sim}{x}$) وارد نمیشود.

یک حالت ِ خاص این است که x' تابع ِ t هم نیست، یعنی تابع ِ فقط x است. در این حالت از (2746) و (2747) نتیجه میشود

$$\frac{\partial^2\,\tilde{\Upsilon}}{(\partial\,t)\,(\partial\,\mathrm{q}^i)} = 0. \tag{2754}$$

$$\frac{\partial^2\,\tilde{\Upsilon}}{(\partial\,t)\,(\partial\,\mathrm{q}'^i)} = 0. \tag{2755}$$

این یعنی $\tilde{\Upsilon}$ مجموع ِ دُ تابع است، که یک ی به فقط t و دیگری به فقط q و q' بستگی دارد:

$$\tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},\mathrm{q}') = \mathfrak{T}(t) + \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}(\mathrm{q},\mathrm{q}'). \tag{2756}$$

روابط ِ (2746) و (2747) میشوند

$$\mathrm{p}_i = \frac{\partial\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}}{\partial\,\mathrm{q}^i}. \tag{2757}$$

$$\mathrm{p}'_i = -\frac{\partial\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}}{\partial\,\mathrm{q}'^i}. \tag{2758}$$

رابطه یِ (2750) هم میشود

$$p'_0 = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\left(p_0 - \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{T}}{\mathrm{d}\,t}\right). \tag{2759}$$

و اگر یِ تقارن ِ کنش ِ فضا-زمان- ِ-فاز هم باشد، (2753) هم چنین میشود.

$$H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,\left[H(t,x) + \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{T}}{\mathrm{d}\,t}\right] + \mathfrak{h}(t). \tag{2760}$$

یا،

$$H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,H(t,x) + \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{T}}{\mathrm{d}\,t'} + \mathfrak{h}(t). \tag{2761}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$H(t',x') = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\,H(t,x) + \mathfrak{h}^{\backprime}(t). \tag{2672}$$

که،

$$\mathfrak{h}^{\backprime}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{T}}{\mathrm{d}\,t'} + \mathfrak{h}(t). \tag{2762}$$

البته $\mathfrak{h}^{\backprime}$ در معادله یِ حرکت (برا یِ $\underset{\sim}{x}$) وارد نمیشود.

گیرم $\underset{\sim}{x}'$ تابع ِ فقط $\underset{\sim}{x}$ است، و مشتق ِ t' نسبت به t یک است. این که مشتق ِ t' نسبت به t یک است، یعنی $(t'-t)$ ثابت است. (2750) میشود

$$p'_0 = p_0 - \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}. \tag{2763}$$

و اگر $\mathfrak{C}$ تقارن ِ کنش ِ فضا-زمان- ِ-فاز هم باشد،

$$H(t',x') = H(t,x) + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\Upsilon})(t,\mathrm{q},\mathrm{q}') + \mathfrak{h}(t). \tag{2764}$$

سرانجام، گیرم x' تابع ِ فقط x است، و مشتق ِ t' نسبت به t هم یک است. در این صورت (2759) میشود

$$p'_0 = p_0 - \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{T}}{\mathrm{d}\,t}. \tag{2765}$$

و اگر $\mathfrak{C}$ تقارن ِ کنش ِ فضا-زمان- ِ-فاز هم باشد،

$$H(t',x') = H(t,x) + \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{T}}{\mathrm{d}\,t} + \mathfrak{h}(t). \tag{2766}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$H(t',x') = H(t,x) + \mathfrak{h}^{\backprime}(t). \tag{2767}$$

که،

$$\mathfrak{h}^{\backprime}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{T}}{\mathrm{d}\,t} + \mathfrak{h}(t). \tag{2768}$$

البته $\mathfrak{h}^{\backprime}$ در معادله یِ حرکت (برا یِ $\underset{\sim}{x}$) وارد نمیشود.

یک دسته از تبدیلها یِ کانُنینک آنها یی یَند که $\underset{\sim}{\mathrm{p}}'$ تابع ِ فقط $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ است. در این صورت طرف ِ راست ِ (2727) تابع ِ فقط ِ $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ است، یعنی به $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ بستگی ندارد. پس به سادگی میشود از آن انتگرال گرفت. نتیجه میشود

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{q}}') = -\mathrm{p}'_\alpha\,\mathrm{q}'^\alpha + \Upsilon^{\backprime}_\tau(\underset{\sim}{\mathrm{q}}). \tag{2769}$$

$\underset{\sim}{\mathrm{p}}'$ در طرف ِ راست تابع ِ (فقط) q است. از (2769) و (2726) هم نتیجه میشود

$$\mathrm{p}_\alpha = -\frac{\partial\,\mathrm{p}'_\beta}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}\,\mathrm{q}'^\beta + \frac{\partial\,\Upsilon^{\backprime}_\tau}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}. \tag{2770}$$

این را میشود وارون کرد و از آن $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ را به دست آورد:

$$\mathrm{q}'^{\alpha} = \left(-\mathrm{p}_{\beta} + \frac{\partial\,\Upsilon_{\tau}^{\backprime}}{\partial\,\mathrm{q}^{\beta}}\right)\,\frac{\partial\,\mathrm{q}^{\beta}}{\partial\,\mathrm{p}'_{\alpha}}. \tag{2771}$$

یک مثال این است که $\underset{\sim}{q}'$ تابعِ فقط $\underset{\sim}{q}$ است. به تبدیل-ِ-کانُنیکی که $\underset{\sim}{q}'$ تابعِ فقط $\underset{\sim}{q}$ باشد یک تبدیلِ (کانُنیکِ) نقطِئی میگویند. رُشن است که برا یِ چنین-تبدیل ی، هیچ یک از q'^{α} ها مستقل از $\underset{\sim}{q}$ نیستند. پس اگر $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ چنین انتخاب شود،

$$\mathrm{q}^{\alpha} = q^{\alpha}, \tag{2772}$$

برا یِ این که $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ مستقل از $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ باشد، $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ را باید چنین انتخاب کرد

$$\mathrm{q}'^{\alpha} = p'_{\alpha}. \tag{2773}$$

رُشن است که در این حالت،

$$\mathrm{p}_{\alpha} = p_{\alpha}. \tag{2774}$$

$$\mathrm{p}'_{\alpha} = -q'^{\alpha}. \tag{2775}$$

و روابطِ (2726) و (2727) میشوند

$$p_{\alpha} = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_{\tau}}{\partial\,q^{\alpha}}. \tag{2776}$$

$$q'^{\alpha} = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_{\tau}}{\partial\,p'_{\alpha}}. \tag{2777}$$

رابطه یِ (2769) میشود

$$\tilde{\Upsilon}_{\tau}(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p}') = p'_{\alpha}\,q'^{\alpha} + \Upsilon_{\tau}^{\backprime}(\underset{\sim}{q}). \tag{2778}$$

$\underset{\sim}{q}'$ در طرفِ راست تابعِ (فقط) $\underset{\sim}{q}$ است. رابطه یِ (2770) هم میشود

$$p_{\alpha} = p'_{\beta}\,\frac{\partial\,q'^{\beta}}{\partial\,q^{\alpha}} + \frac{\partial\,\Upsilon_{\tau}^{\backprime}}{\partial\,q^{\alpha}}. \tag{2779}$$

که میشود آن را وارون کرد و از آن $\underset{\sim}{p}'$ را به دست آورد:

$$p'_\alpha = \left(p_\beta - \frac{\partial\,\Upsilon'_\tau}{\partial\,q^\beta}\right)\,\frac{\partial\,q^\beta}{\partial\,q'^\alpha}. \tag{2780}$$

از جمله، اگر $\tilde{\Upsilon}_\tau$ چنین باشد،

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}') = p'_\alpha\,q^\alpha, \tag{2781}$$

نتیجه میشود

$$p_\alpha = p'_\alpha. \tag{2782}$$

$$q'^\alpha = q^\alpha. \tag{2783}$$

البته (2782) را میشود چنین نوشت.

$$p'_\alpha = p_\alpha. \tag{2784}$$

تابعی-یِ-مولد ِ $\tilde{\Upsilon}_\tau$ به شکل ِ (2781) متناظر با تبدیل ِ همانی ست.

یک مثال ِ دیگر این است که $\underset{\sim}{p}'$ تابع ِ فقط $\underset{\sim}{q}$ است. رُشن است که برا یِ چنین-تبدیل ی، هیچ یک از p'_α ها مستقل از $\underset{\sim}{q}$ نیستند. پس اگر $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ به شکل ِ (2772) شود، برا یِ این که $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ مستقل از $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ باشد، $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ را باید چنین انتخاب کرد

$$\mathrm{q}'^\alpha = q'^\alpha. \tag{2785}$$

رُشن است که در این حالت $\underset{\sim}{\mathrm{p}}$ به شکل ِ (2774) است و

$$\mathrm{p}'_\alpha = p'_\alpha. \tag{2786}$$

اینجا هم رابطه یِ (2726) به شکل ِ رابطه یِ (2776) در میئاید. رابطه یِ (2727) هم چنین میشود

$$p'_\alpha = -\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,q'^\alpha}. \tag{2787}$$

رابطه یِ (2769) میشود

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{q}') = -p'_\alpha\, q'^\alpha + \Upsilon^{\backprime}_\tau(\underset{\sim}{q}). \tag{2788}$$

$\underset{\sim}{p}'$ در طرفِ راست تابعِ (فقط) $\underset{\sim}{q}$ است. رابطه یِ (2770) هم میشود

$$p_\alpha = -\frac{\partial\, p'_\beta}{\partial\, q^\alpha}\, q'^\beta + \frac{\partial\, \Upsilon^{\backprime}_\tau}{\partial\, q^\alpha}. \tag{2789}$$

که میشود آن را وارون کرد و از آن $\underset{\sim}{q}'$ را به دست آورد:

$$q'^\alpha = \left(-p_\beta + \frac{\partial\, \Upsilon^{\backprime}_\tau}{\partial\, q^\beta}\right)\, \frac{\partial\, q^\beta}{\partial\, p'_\alpha}. \tag{2790}$$

از جمله، اگر $\tilde{\Upsilon}_\tau$ چنین باشد،

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{q}') = \mathfrak{E}_{\alpha\,\beta}\, q^\alpha\, q'^\beta, \tag{2791}$$

که $\mathfrak{E}_{\alpha\,\beta}$ ها ثابت َند، نتیجه میشود

$$p_\alpha = \mathfrak{E}_{\alpha\,\beta}\, q'^\beta. \tag{2792}$$

$$p'_\alpha = -\mathfrak{E}_{\beta\,\alpha}\, q^\beta. \tag{2793}$$

البته (2792) را میشود چنین نوشت.

$$q'^\alpha = (\mathfrak{E}^{-1})^{\alpha\,\beta}\, p_\beta. \tag{2794}$$

تابعی-یِ-مولدِ $\tilde{\Upsilon}_\tau$ به شکلِ (2791)، نقشِ مکان و تکانه را جا-به-جا میکند.

یک حالتِ خاص برا یِ $\mathfrak{E}$ این است.

$$\mathfrak{E}_{\alpha\,\beta} = \delta_{\alpha\,\beta}. \tag{2795}$$

در این صورت (2791) میشود

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{q}') = \sum_\alpha q^\alpha\, q'^\alpha. \tag{2796}$$

روابط ِ (2792) تا (2794) هم چنین میشوند.

$$p_\alpha = q'^\alpha. \tag{2797}$$

$$p'_\alpha = -q^\alpha. \tag{2798}$$

$$q'^\alpha = p_\alpha. \tag{2799}$$

80 مختصات ِ کانُنیک از نیم-مختصات

با استفاده از قضیه یِ **B**، از جمله معلوم میشود با یک دسته تابعی یِ مستقل-از-هم و پُوَسُنی که تعداد ِ شان کافی (نصف ِ بُعد ِ فضا-زمان- ِ-فاز) باشد، میشود مختصات- ِ-کانُنیک ی ساخت که نیم ی از آنها این تابعیها باشند:

گیرم q'^0 تا q'^m مستقل-از-هم َند و پُوَسُنی یَند. قضیه یِ **B** میگوید متناظر با مختصات ِ کانُنیک ِ $(q^0, \ldots, q^\mathrm{m}, p_0, \ldots, p_\mathrm{m})$ یک مجموعه یِ $\mathbb{I}$ هست که q'^0 تا q'^m و q^0 تا q^m مستقل از هم َند، که q^α ها چنین تعریف میشوند.

$$\mathrm{q}^\alpha = q^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{I}. \tag{2712}$$

$$\mathrm{q}^\alpha = p_\alpha, \qquad \alpha \notin \mathbb{I}. \tag{2713}$$

p^α ها هم چنین تعریف میشوند.

$$\mathrm{p}_\alpha = p_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{I}. \tag{2714}$$

$$\mathrm{p}_\alpha = -q^\alpha, \quad \alpha \notin \mathbb{I}. \tag{2715}$$

میخاهم p'_0 تا p'_m را چنان بسازم که $(\mathrm{q}'^0, \ldots, \mathrm{q}'^\mathrm{m}, \mathrm{p}'_0, \ldots, \mathrm{p}'_\mathrm{m})$ کانُنیک باشد. برا یِ این کار، میکوشم تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با تبدیل- ِ-کانُنیک ی را بسازم که $\underset{\sim}{x}$ را به $\underset{\sim}{x}'$ تبدیل میکند. این تابعی-یِ-مولد- ِ-استاندارد را با $\tilde{\Upsilon}_\tau$ نشان میدهم و متغیرها یِ آن را q^0 تا q^m و q'^0 تا q'^m میگیرم.

$\tilde{\Upsilon}_\tau$ باید این معادلات را براورَد.

$$\mathrm{p}_\alpha = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}. \tag{2726}$$

با فرض ِ این که (2726) برا یِ $\tilde{\Upsilon}_\tau$ جواب دارد، p'_α ها چنین به دست میئایند

$$\mathrm{p}'_\alpha = -\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,\mathrm{q}'^\alpha}. \tag{2727}$$

برا یِ بررسی یِ (2726) باید $\underset{\sim}{\mathrm{p}}$ را بر حسب ِ $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ نوشت:

$$\underset{\sim}{\mathrm{q}}' = \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}}). \tag{2728}$$

پس،

$$\underset{\sim}{\mathrm{p}} = \mathfrak{D}^{(1)}_\tau(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}'). \tag{2730}$$

که،

$$\mathfrak{D}^{(1)}_\tau(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \cdot) = [\underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \cdot)]^{-1}. \tag{2731}$$

به این ترتیب معادله یِ (2726) چنین است.

$$\mathfrak{D}^{(1)}_{\tau\,\alpha}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}') = \frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}_\tau(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}')]}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}. \tag{2800}$$

شرط ِ این که این معادله (مُضعَن) برا یِ $\tilde{\Upsilon}$ جواب داشته باشد این است که

$$0 = \frac{\partial\,[\mathfrak{D}^{(1)}_{\tau\,\beta}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}')]}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha} - \frac{\partial\,[\mathfrak{D}^{(1)}_{\tau\,\alpha}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{q}}')]}{\partial\,\mathrm{q}^\beta}. \tag{2801}$$

سادِتر،

$$0 = \frac{\partial\,\mathrm{p}_\beta}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha} - \frac{\partial\,\mathrm{p}_\alpha}{\partial\,\mathrm{q}^\beta}. \tag{2802}$$

که منظور از مشتق ِ پارِئی یِ $\underset{\sim}{\mathrm{p}}$، مشتق ِ پارِئی یِ $\underset{\sim}{\mathrm{p}}$ به عنوان ِ تابع ی از $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ است.

از (2728) و (2730) دیده میشود

$$\underset{\sim}{\mathrm{p}} = \mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}[\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]. \tag{2803}$$

مشتق ِطرف ِراست، به عنوان ِتابع ی از $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{p}}$، نسبت به $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ صفر است:

$$0 = \left(\frac{\partial\,\{\mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}[\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\}}{\partial\,\underset{\sim}{\mathrm{q}}}\right)_{\underset{\sim}{\mathrm{p}}}. \tag{2804}$$

پس،

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mathbf{D}_{(1)}\,\{\mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}[\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\} \\ & + \Big(\mathbf{D}_{(2)}\,\{\mathfrak{D}_{\tau}^{(1)}[\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\}\Big)\,\Big(\mathbf{D}_{(1)}\,\{\underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}[\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^{(1)}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\}\Big). \end{aligned} \tag{2805}$$

سادِتر،

$$0 = \frac{\partial\,\underset{\sim}{\mathrm{p}}}{\partial\,\underset{\sim}{\mathrm{q}}} + \frac{\partial\,\underset{\sim}{\mathrm{p}}}{\partial\,\underset{\sim}{\mathrm{q}}'}\,\frac{\partial\,\underset{\sim}{\mathrm{q}}'}{\partial\,\underset{\sim}{\mathrm{q}}}. \tag{2806}$$

با شاخصها،

$$0 = \frac{\partial\,\mathrm{p}_{\beta}}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}} + \frac{\partial\,\mathrm{p}_{\beta}}{\partial\,\mathrm{q}'^{\gamma}}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\gamma}}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}}. \tag{2807}$$

q'^{α} ها پُوَسُنی یَند:

$$\{\mathrm{q}'^{\alpha}, \mathrm{q}'^{\beta}\}_{\tau} = 0. \tag{2690}$$

این یعنی

$$\frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\alpha}}{\partial\,\mathrm{q}^{\gamma}}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\beta}}{\partial\,\mathrm{p}_{\gamma}} - \frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\beta}}{\partial\,\mathrm{q}^{\gamma}}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\alpha}}{\partial\,\mathrm{p}_{\gamma}} = 0. \tag{2808}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\partial\,\mathrm{p}_{\mu}}{\partial\,\mathrm{q}'^{\alpha}}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\alpha}}{\partial\,\mathrm{q}^{\gamma}}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\beta}}{\partial\,\mathrm{p}_{\gamma}} - \frac{\partial\,\mathrm{p}_{\mu}}{\partial\,\mathrm{q}'^{\alpha}}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\beta}}{\partial\,\mathrm{q}^{\gamma}}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^{\alpha}}{\partial\,\mathrm{p}_{\gamma}} = 0. \tag{2809}$$

که یعنی

$$\frac{\partial\,\mathrm{p}_\mu}{\partial\,\mathrm{q}'^\alpha}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^\alpha}{\partial\,\mathrm{q}^\gamma}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^\beta}{\partial\,\mathrm{p}_\gamma}-\frac{\partial\,\mathrm{q}'^\beta}{\partial\,\mathrm{q}^\mu}=0. \tag{2810}$$

این هم نتیجه میدهد

$$\frac{\partial\,\mathrm{p}_\nu}{\partial\,\mathrm{q}'^\beta}\,\frac{\partial\,\mathrm{p}_\mu}{\partial\,\mathrm{q}'^\alpha}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^\alpha}{\partial\,\mathrm{q}^\gamma}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^\beta}{\partial\,\mathrm{p}_\gamma}-\frac{\partial\,\mathrm{p}_\nu}{\partial\,\mathrm{q}'^\beta}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^\beta}{\partial\,\mathrm{q}^\mu}=0. \tag{2811}$$

که یعنی

$$\frac{\partial\,\mathrm{p}_\mu}{\partial\,\mathrm{q}'^\alpha}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^\alpha}{\partial\,\mathrm{q}^\nu}-\frac{\partial\,\mathrm{p}_\nu}{\partial\,\mathrm{q}'^\beta}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^\beta}{\partial\,\mathrm{q}^\mu}=0. \tag{2812}$$

از ترکیب ِ (2807) و (2812) دیده میشود

$$-\frac{\partial\,\mathrm{p}_\mu}{\partial\,\mathrm{q}^\nu}+\frac{\partial\,\mathrm{p}_\nu}{\partial\,\mathrm{q}^\mu}=0. \tag{2813}$$

که هم ان (2802) است. پس معادله یِ (2800)، یا هم ان (2726)، (مُضعَن) برا یِ $\tilde{\Upsilon}_\tau$ جواب دارد. به این ترتیب میشود p'^α ها از رابطه یِ (2727) به دست آورد و $(\mathrm{q}'^0,\ldots,\mathrm{q}'^\mathrm{m},\mathrm{p}'_0,\ldots,\mathrm{p}'_\mathrm{m})$ کانُنیک میشود.

یک حالت ِ خاص این است که q'^i ها یک دسته تابعی یِ پُوَسُنی یِ مستقل-ازهم، و مستقل از p_0 باشند، چنان که تحدید ِ q'^i ها به t برابر با هر ثابت ی هم مستقل-از-هم باشند. در این حالت به ازا یِ هر t یِ ثابت، تابعیها یِ q'^1 تا q'^m و q^1 تا q^m مستقل-از-هم َند. پس به ازا یِ هر t یِ ثابت میشود (مُضعَن) p_1 تا p_m را بر حسب ِ q'^1 تا q'^m و q^1 تا q^m حساب کرد. در این حالت مسئله یِ یافتن ِ p'_1 تا p'_m چنان که $(\mathrm{q}'^1,\ldots,\mathrm{q}'^\mathrm{m},\mathrm{p}'_1,\ldots,\mathrm{p}'_\mathrm{m})$ کانُنیک باشند، بسیار شبیه ِ مسئله یِ یافتن ِ p'_0 تا p'_m است چنان که $(\mathrm{q}'^0,\ldots,\mathrm{q}'^\mathrm{m},\mathrm{p}'_0,\ldots,\mathrm{p}'_\mathrm{m})$ کانُنیک باشند. به جا یِ روابط ِ (2726) و (2727) روابط ِ (2746) و (2747) را به کار میبَرم:

$$\mathrm{p}_i=\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}^i}. \tag{2746}$$

$$\mathrm{p}'_i=-\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}'^i}. \tag{2747}$$

که $\tilde{\Upsilon}$ تابعِ t و q^1 تا q^{m} و q'^1 تا q'^{m} است. با استدلال ی مشابه با هم ان که نشان داد معادله یِ (2726) برا یِ $\tilde{\Upsilon}_\tau$ جواب دارد، معلوم میشود (2746) برا یِ $\tilde{\Upsilon}$ جواب دارد.

میشود به $(\mathrm{q}'^1, \ldots, \mathrm{q}'^{\mathrm{m}}, \mathrm{p}'_1, \ldots, \mathrm{p}'_{\mathrm{m}})$ تابعیها یِ t' و p'_0 را هم افزود و q'^0 و p'_0 را چنین تعریف کرد:

$$\mathrm{q}'^0 = t'. \tag{2814}$$

$$\mathrm{p}'_0 = p'_0. \tag{2815}$$

چنان که $(\mathrm{q}'^0, \ldots, \mathrm{q}'^{\mathrm{m}}, \mathrm{p}'_0, \ldots, \mathrm{p}'_{\mathrm{m}})$ هم کانُنیک باشند. برا یِ این کار t' و p'_0 را میسازم. دیده شد برا یِ این که چنین باشد t' باید تابعِ فقط t باشد. و در این صورت به ازا یِ هر t' (که بستگی یِ آن به t وارون-پذیر باشد)، p'_0 چنین میشود.

$$p_0 = p'_0 \,\frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}. \tag{2749}$$

یا،

$$p'_0 = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,t'}\left(p_0 - \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}\right). \tag{2750}$$

از جمله اگر t' هم ان t باشد، یا کم ی کلیتر مشتقِ t' نسبت به t یک باشد،

$$p'_0 = p_0 - \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}. \tag{2763}$$

کروشه-یِ-پُؤَسُنِ گسرش-یافته یِ q'^0، که هم ان t' است، با q'^i ها و p'_i ها صفر است:

$$\{t', \mathrm{q}'^i\}_\tau = 0. \tag{2816}$$

$$\{t', \mathrm{p}'_i\}_\tau = 0. \tag{2817}$$

گیرم t' تابعِ فقط t است. در این صورت،

$$\{t', \mathrm{q}'^i\}_\tau = \frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial\,\mathrm{q}'^i}{\partial\,p_0}. \tag{2818}$$

$$\{t', \mathrm{p}'_i\}_\tau = \frac{\mathrm{d}\,t'}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\partial\,\mathrm{p}'_i}{\partial\,p_0}. \tag{2819}$$

پس،

$$\frac{\partial \mathrm{q}'^i}{\partial p_0} = 0. \tag{2820}$$

$$\frac{\partial \mathrm{p}'_i}{\partial p_0} = 0. \tag{2821}$$

یعنی،

$$\frac{\partial x'^a}{\partial p_0} = 0. \tag{2822}$$

در این حالت x'^a ها به p_0 بستگی ندارند، یعنی تابع ِ فقط مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند. p_0 در فقط p'_0 وارد میشود، آن هم به شکل ِ یک تابع ِ درجه-یِ-یک.

پس در حالت ی که t' تابع ِ فقط t است، p_0 عملَن از تبدیل ِ کانُنیک جدا میشود: بخش ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته یِ تبدیل ِ کانُنیک مستقل از p_0 است. و بخش ِ فضا-یِ-فاز ِ تبدیل ِ کانُنیک، در هر زمان ِ ثابت یک تبدیل ِ کانُنیک در فضا-یِ-فاز است. در این حالت، تبدیل ِ کانُنیک در فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته را میشود بدون ِ وارد-کردن ِ p_0 و فضا-زمان- ِ-فاز بررسی کرد، که البته عجیب نیست: p_0 یک متغیر ِ اضافی ست که وارد-کردن ِ آن (و فضا-زمان- ِ-فاز) بعض ی عملیات، به طُر ِ مشخص عملیات ِ وابسته-به-زمان، در فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته را سادِتر میکند.

81 خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک ِ هموار

یک خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک ِ هموار، یک خانواده-یِ-تبدیل ِ هموار است که کانُنیک هم هست (یا یک خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنینک هست که هموار هم هست). مشتق-پذیری یِ خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک $\mathfrak{C}$ در s_0، یعنی یک $\mathcal{J}_\tau$ هست که به ازا یِ s در یک همسایگی از s_0،

$$[\mathfrak{C}^{\mathrm{a}}(s)](\underset{\sim}{x}) = [\mathfrak{C}^{\mathrm{a}}(s_0)](\underset{\sim}{x}) + [\mathcal{J}^{\mathrm{a}}_{\tau\,\mathbf{b}}(\underset{\sim}{x})]\,(s^{\mathbf{b}} - s_0^{\mathbf{b}}) + o(s - s_0). \tag{2823}$$

$(s - s_0)$ را با h نشان میدهم:

$$s = s_0 + h. \tag{1238}$$

به این ترتیب،

$$[\mathfrak{C}^{\mathsf{a}}(s)](\underset{\sim}{x}) = [\mathfrak{C}^{\mathsf{a}}(s_0)](\underset{\sim}{x}) + [\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_{\tau\,\mathbf{b}}(\underset{\sim}{x})]\, h^{\mathbf{b}} + o(h). \tag{2824}$$

از جمله، برا یِ s_0 چنان که $\mathfrak{C}(s_0)$ همانی ست،

$$[\mathfrak{C}^{\mathsf{a}}(s)](\underset{\sim}{x}) = x^{\mathsf{a}} + [\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_{\tau\,\mathbf{b}}(\underset{\sim}{x})]\, h^{\mathbf{b}} + o(h). \tag{2825}$$

یا،

$$(\delta\, x^{a})_{=\mathbf{1}} = [\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_{\tau\,\mathbf{b}}(\underset{\sim}{x})]\, h^{\mathbf{b}}. \tag{2826}$$

بسته یِ اینها میشود

$$[\mathfrak{C}^{\mathsf{a}}(s)](\underset{\sim}{x}) = x^{\mathsf{a}} + [\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_{\tau}(\underset{\sim}{x})]\, h + o(h). \tag{2827}$$

$$(\delta\, x^{a})_{=\mathbf{1}} = [\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_{\tau}(\underset{\sim}{x})]\, h. \tag{2828}$$

به $\mathcal{J}_\tau$ مولد ِ خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{C}$، یا سادِتر مولد ِ (تبدیل ِ) $\mathfrak{C}$، میگویم. به s (یا h) هم پارامتر ِ خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{C}$، یا سادِتر پارامتر ِ (تبدیل ِ) $\mathfrak{C}$، میگویم.

$[\mathfrak{C}(s)](\underset{\sim}{x})$ را با $\underset{\sim}{x}'$ نشان میدهم. $\mathfrak{C}(s_0)$ همانی ست. پس q^0 تا q^{m} و p'_0 تا p'_{m}، به ازا یِ $s = s_0$ مستقل-از-هم َند. از این نتیجه میشود یک همسایگی از s_0 هست که اگر s در آن باشد، q^0 تا q^{m} و p'_0 تا p'_{m} مستقل-از-هم َند. این یعنی متغیرها یِ تابعی-یِ-مولد ِ $\tilde{\Upsilon}_\tau(s)$ متناظر با $\mathfrak{C}(s)$ را میشود $(\mathrm{q}^0, \ldots, \mathrm{q}^{\mathrm{m}}, \mathrm{q}'^0, \ldots, \mathrm{q}'^{\mathrm{m}})$ گرفت، که $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ هم ان $\underset{\sim}{q}$ است:

$$\mathrm{q}^{\alpha} = q^{\alpha}, \tag{2772}$$

و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$ هم ان $\underset{\sim}{p}'$ است:

$$\mathrm{q}'^{\alpha} = p'_{\alpha}. \tag{2773}$$

پس،

$$p_\alpha = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,q^\alpha}. \tag{2776}$$

$$q'^\alpha = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}_\tau}{\partial\,p'_\alpha}. \tag{2777}$$

این که $\mathfrak{C}(s_0)$ همانی ست، نتیجه میدهد

$$[\tilde{\Upsilon}_\tau(s_0)](\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}') = p'_\alpha\,q^\alpha. \tag{2829}$$

پس، یک $\mathcal{K}_\tau$ هست که

$$[\tilde{\Upsilon}_\tau(s)](\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}') = p'_\alpha\,q^\alpha + [\mathcal{K}_\tau(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}')]\,h + o(h). \tag{2830}$$

به این ترتیب،

$$p_\alpha = p'_\alpha + \frac{\partial\,\mathcal{K}_\tau}{\partial\,q^\alpha}\;h + o(h). \tag{2831}$$

$$q'^\alpha = q^\alpha + \frac{\partial\,\mathcal{K}_\tau}{\partial\,p'_\alpha}\;h + o(h). \tag{2832}$$

یا،

$$p_\alpha(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}') = p'_\alpha + [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}')]\,h + o(h). \tag{2833}$$

$$q'^\alpha(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}') = q^\alpha + [(\mathbf{D}_{(2)}{}^\alpha\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}')]\,h + o(h). \tag{2834}$$

از این روابط، چنان که انتظار میرفت، دیده میشود

$$p'_\alpha - p_\alpha = O(h). \tag{2835}$$

$$q'^\alpha - q^\alpha = O(h). \tag{2836}$$

پس تا مرتبه یِ یک نسبت به h، در ضریب ِ h در طرف ِ راست ِ روابط ِ (2833) و (2834) میشود $\underset{\sim}{p}'$ را با $\underset{\sim}{p}$ جایگزین کرد:

$$p_\alpha(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}') = p'_\alpha + [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p})]\,h + o(h). \tag{2837}$$

$$q'^\alpha(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}') = q^\alpha + [(\mathbf{D}_{(2)}{}^\alpha\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p})]\,h + o(h). \tag{2838}$$

خلاصِتر،

$$p_\alpha = p'_\alpha + [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p})]\,h + o(h). \tag{2839}$$

$$q'^\alpha = q^\alpha + [(\mathbf{D}_{(2)}{}^\alpha\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p})]\,h + o(h). \tag{2840}$$

رابطه یِ (2839) را هم میشود چنین نوشت.

$$p'_\alpha = p_\alpha - [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p})]\,h + o(h). \tag{2841}$$

و روابط ِ (2840) و (2841) را میشود در این رابطه خلاصه کرد:

$$x'^{\mathtt{a}} = x^{\mathtt{a}} + J^{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}\,[(\mathbf{D}_{\mathtt{c}}\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{x})]\,h + o(h). \tag{2842}$$

که میشود

$$(\delta\,x^{\mathtt{a}})_{=\mathbf{1}} = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}\,[(\mathbf{D}_{\mathtt{c}}\,\mathcal{K}_\tau)(\underset{\sim}{x})]\,h \tag{2843}$$

یا،

$$(\delta\,x^{\mathtt{a}})_{=\mathbf{1}} = \{x^{\mathtt{a}},\mathcal{K}_\tau\}_\tau\;h. \tag{2844}$$

از مقایسه یِ این با (2828) دیده میشود

$$\mathcal{J}^{\mathtt{a}}_\tau = \{x^{\mathtt{a}},\mathcal{K}_\tau\}_\tau. \tag{2845}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{J}^{\mathtt{a}}_{\tau\,\mathbf{b}} = \{x^{\mathtt{a}},\mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}\}_\tau. \tag{2846}$$

به $\mathcal{K}_\tau$ مولد ِ پُؤَسُنی یِ خانواده-یِ-تبدیل ِ $\mathfrak{C}$، یا سادِتر مولد ِ پُؤَسُنی یِ (تبدیل ِ) $\mathfrak{C}$، میگویم.

رابطه یِ (2845) را به شکل ِ مستقیم هم میشود به دست آورد. قرار است $x'^{\mathtt{a}}$ ها کانُنیک باشند. پس،

$$\{x'^{\mathtt{a}},x'^{\mathtt{b}}\}_\tau = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{1997}$$

یا، چون x^{a} ها هم کانُنیک َند،

$$\{x'^{\mathsf{a}}, x'^{\mathsf{b}}\}_\tau = \{x^{\mathsf{a}}, x^{\mathsf{b}}\}_\tau. \tag{1998}$$

رابطه یِ (2827) یعنی

$$x'^{\mathsf{a}} = x^{\mathsf{a}} + [\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_\tau(\underset{\sim}{x})]\, h + o(h). \tag{2847}$$

پس،

$$\{x'^{\mathsf{a}}, x'^{\mathsf{b}}\}_\tau = \{x^{\mathsf{a}}, x^{\mathsf{b}}\}_\tau + \{x^{\mathsf{a}}, \mathcal{J}^{\mathsf{b}}_\tau\}_\tau\, h^{\mathsf{c}} + \{\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_\tau, x^{\mathsf{b}}\}_\tau\, h + o(h). \tag{2848}$$

به این ترتیب از (1998) نتیجه میشود

$$0 = \{x^{\mathsf{a}}, \mathcal{J}^{\mathsf{b}}_\tau\}_\tau\, h + \{\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_\tau, x^{\mathsf{b}}\}_\tau\, h + o(h). \tag{2849}$$

که یعنی،

$$0 = \{x^{\mathsf{a}}, \mathcal{J}^{\mathsf{b}}_\tau\}_\tau + \{\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_\tau, x^{\mathsf{b}}\}_\tau. \tag{2850}$$

یا،

$$0 = J^{\mathsf{a}\,\mathsf{d}}\, \partial_{\mathsf{d}}\, \mathcal{J}^{\mathsf{b}}_\tau - J^{\mathsf{b}\,\mathsf{d}}\, \partial_{\mathsf{d}}\, \mathcal{J}^{\mathsf{a}}_\tau. \tag{2851}$$

$\mathcal{J}$ با شاخص ِ بالا را بر حسب ِ $\mathcal{J}$ با شاخص ِ پایین مینویسم:

$$\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_\tau = J^{\mathsf{e}\,\mathsf{a}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathsf{e}}. \tag{2852}$$

به این ترتیب،

$$0 = J^{\mathsf{a}\,\mathsf{d}}\, J^{\mathsf{e}\,\mathsf{b}}\, \partial_{\mathsf{d}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathsf{e}} - J^{\mathsf{b}\,\mathsf{d}}\, J^{\mathsf{e}\,\mathsf{a}}\, \partial_{\mathsf{d}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathsf{e}}. \tag{2853}$$

یا،

$$0 = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}\, J^{\mathtt{e}\,\mathtt{b}}\, \partial_{\mathtt{d}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathtt{e}} - J^{\mathtt{b}\,\mathtt{e}}\, J^{\mathtt{d}\,\mathtt{a}}\, \partial_{\mathtt{e}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathtt{d}}. \tag{2854}$$

J پادمتقارن است. پس،

$$J^{\mathtt{b}\,\mathtt{e}}\, J^{\mathtt{d}\,\mathtt{a}} = J^{\mathtt{e}\,\mathtt{b}}\, J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}. \tag{2855}$$

پس (2854) همئرز است با

$$0 = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}\, J^{\mathtt{e}\,\mathtt{b}}\, \left(\partial_{\mathtt{d}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathtt{e}} - \partial_{\mathtt{e}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathtt{d}}\right). \tag{2856}$$

J وارون-پذیر است. پس (2856) همئرز است با

$$0 = \partial_{\mathtt{d}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathtt{e}} - \partial_{\mathtt{e}}\, \mathcal{J}_{\tau\,\mathtt{d}}. \tag{2857}$$

و این یعنی $\mathcal{J}_{\tau\,\mathtt{b}}$ مشتق ِ یک تابع نسبت به $x^{\mathtt{b}}$ است:

$$\mathcal{J}_{\tau\,\mathtt{b}} = -\partial_{\mathtt{b}}\, \mathcal{K}_{\tau}. \tag{2858}$$

علامت ِ منفی مهم نیست (قرارداد است) و فقط، چنان که دیده خاهد شد، برا یِ سازگاری با نماد-گذاری یِ قبلی وارد شده. (2858) همئرز است با

$$\mathcal{J}_{\tau}^{\mathtt{a}} = -J^{\mathtt{b}\,\mathtt{a}}\, \partial_{\mathtt{b}}\, \mathcal{K}_{\tau}. \tag{2859}$$

یا،

$$\mathcal{J}_{\tau}^{\mathtt{a}} = J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, \partial_{\mathtt{b}}\, \mathcal{K}_{\tau}. \tag{2860}$$

که هم ان (2845) است.

روابط ِ (2845) یا (2860) را به این شکل هم میشود نوشت.

$$\mathcal{J}_{\tau} = J_{\mathcal{K}_{\tau}}. \tag{2861}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{J}_{\tau\,\mathbf{b}} = \mathcal{J}_{\mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}}. \tag{2862}$$

و رُشن است که متناظر با هر $\mathcal{K}$، شارش ِ میدان ِ برداری یِ $\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}$ یک خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک ِ هموار است. یعنی گیرم

$$\mathfrak{C}(h) = \mathsf{fl}(h\,\mathcal{J}_\tau). \tag{2863}$$

مفصلتر،

$$\mathfrak{C}(h) = \mathsf{fl}(h^{\mathbf{b}}\,\mathcal{J}_{\tau\,\mathbf{b}}). \tag{2864}$$

که $\mathcal{J}_\tau$ به شکل ِ (2861) است. در این صورت $\mathfrak{C}(h)$، به ازا یِ هر h، کانُنیک است. و البته از تعریف ِ شارش هم رُشن است که $\mathfrak{C}(h)$، نسبت به h، هموار است. همچنین، رُشن است که

$$\mathfrak{C}(0) = \mathbf{1}. \tag{2865}$$

در (2863) پارامتر ِ تبدیل، به جا یِ s خُد ِ h است.

حالت ی را بررسی میکنم که q'^α ها و p'_i ها تابع ِ فقط مختصات ِ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته اند، یعنی مستقل از p_0 اند. این یعنی یک وابرریختی یِ $\mathfrak{C}$ از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته هست که

$$\mathfrak{C}(t,x) = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0,1}[\mathfrak{C}(t,x,p_0)]. \tag{2563}$$

مانسته یِ (2824) چنین میشود.

$$[\mathfrak{C}^\alpha(s)](\underset{\sim}{x}) = [\mathfrak{C}^\alpha(s_0)](\underset{\sim}{x}) + [\mathcal{J}^{\mathsf{a}}_{\mathbf{b}}(\underset{\sim}{x})]\,h^{\mathbf{b}} + o(h). \tag{2866}$$

و، چون $\mathfrak{C}(s_0)$ همانی ست، مانسته یِ (2825) هم چنین میشود.

$$[\mathfrak{C}^\alpha(s)](\underset{\sim}{x}) = x^\alpha + [\mathcal{J}^\alpha_{\mathbf{b}}(\underset{\sim}{x})]\,h^{\mathbf{b}} + o(h). \tag{2867}$$

بسته،

$$[\mathfrak{C}^\alpha(s)](\underset{\sim}{x}) = x^\alpha + [\mathcal{J}^\alpha(\underset{\sim}{x})]\,h + o(h). \tag{2868}$$

معلوم شد در این حالت t' تابع ِ فقط t است و

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(t,\mathrm{q},p'_0,\mathrm{q}') = p'_0\,t'(t) + \tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},\mathrm{q}'). \tag{2745}$$

که، با استفاده از (2772) و (2773) برا یِ $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}'$، میشود

$$\tilde{\Upsilon}_\tau(t,q,p'_0,p') = p'_0\,t'(t) + \tilde{\Upsilon}(t,q,p'). \tag{2869}$$

و برا یِ خانواده-یِ-تبدیل،

$$[\tilde{\Upsilon}_\tau(s)](t,\mathrm{q},p'_0,\mathrm{q}') = p'_0\,[t'(s)](t) + [\tilde{\Upsilon}(s)](t,\mathrm{q},\mathrm{q}'). \tag{2870}$$

که میشود

$$[\tilde{\Upsilon}_\tau(s)](t,q,p'_0,p') = p'_0\,[t'(s)](t) + [\tilde{\Upsilon}(s)](t,q,p'). \tag{2871}$$

به ازا یِ $s = s_0$، تبدیل همانی ست. طرف ِ چپ ِ (2871) از (2829) به دست میئاید. به این ترتیب (2871) در $s = s_0$ میشود

$$p'_\alpha\,q^\alpha = p'_0\,[t'(s_0)](t) + [\tilde{\Upsilon}(s_0)](t,q,p'). \tag{2872}$$

همچنین،

$$[t'(s_0)](t) = t. \tag{2873}$$

پس،

$$p'_\alpha\,q^\alpha = p'_0\,t + [\tilde{\Upsilon}(s_0)](t,q,p'). \tag{2874}$$

که نتیجه میدهد

$$[\tilde{\Upsilon}(s_0)](t,q,p') = p'_i\,q^i. \tag{2875}$$

پس یک $\mathcal{K}$ هست که

$$[\tilde{\Upsilon}(s)](t,q,p') = p'_i\, q^i + [\mathcal{K}_{\mathbf{b}}(t,q,p')]\, h^{\mathbf{b}} + o(h). \tag{2876}$$

از (2873) هم نتیجه میشود یک $\mathcal{T}$ هست که

$$[t'(s)](t) = t + [\mathcal{T}_{\mathbf{b}}(t)]\, h^{\mathbf{b}} + o(h). \tag{2877}$$

بسته یِ اینها چنین میشود.

$$[\tilde{\Upsilon}(s)](t,q,p') = p'_i\, q^i + [\mathcal{K}(t,q,p')]\, h + o(h). \tag{2878}$$

$$[t'(s)](t) = t + [\mathcal{T}(t)]\, h + o(h). \tag{2879}$$

روابط ِ (2878) و (2879) را در (2871) میگذارم:

$$[\tilde{\Upsilon}_\tau(s)](t,q,p'_0,p') = p'_0\, t + p'_0\, [\mathcal{T}(t)]\, h + p'_i\, q^i + [\mathcal{K}(t,q,p')]\, h + o(h). \tag{2880}$$

یعنی،

$$[\tilde{\Upsilon}_\tau(s)](t,q,p'_0,p') = p'_\alpha\, q^\alpha + p'_0\, [\mathcal{T}(t)]\, h + [\mathcal{K}(t,q,p')]\, h + o(h). \tag{2881}$$

از این و (2830) نتیجه میشود

$$\mathcal{K}_\tau(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}') = p'_0\, \mathcal{T}(t) + \mathcal{K}(t,q,p'). \tag{2882}$$

پس،

$$\mathcal{K}_\tau(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{p}) = p_0\, \mathcal{T}(t) + \mathcal{K}(t,q,p). \tag{2883}$$

یعنی،

$$\mathcal{K}_\tau(\underset{\sim}{x}) = p_0\, \mathcal{T}(t) + \mathcal{K}(t,x). \tag{2884}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}(\underset{\sim}{x}) = p_0\,\mathcal{T}_{\mathbf{b}}(t) + \mathcal{K}_{\mathbf{b}}(t,x). \tag{2885}$$

به $\mathcal{K}$ بخش ِ فضایی یِ $\mathcal{K}_\tau$ میگویم. به $\mathcal{K}_\tau$ هم زمان-گسترش-یافته یِ $\mathcal{K}$ میگویم.

از رابطه یِ (2884) نتیجه میشود

$$\{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}_\tau\}_\tau = (\partial_0\,\mathfrak{X}_\tau)\,\mathcal{T} - (\partial_{2\,\mathfrak{m}+1}\,\mathfrak{X}_\tau)\,(p_0\,\dot{\mathcal{T}} + \partial_0\,\mathcal{K}) + \{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}\}. \tag{2886}$$

که $\mathfrak{X}_\tau$ یک تابعی از فضا-زمان- ِ-فاز و $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. مفصلتر،

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}\}_\tau = {}& (\partial_0\,\mathfrak{X}_\tau)\,\mathcal{T}_{\mathbf{b}} - (\partial_{2\,\mathfrak{m}+1}\,\mathfrak{X}_\tau)\,(p_0\,\dot{\mathcal{T}}_{\mathbf{b}} + \partial_0\,\mathcal{K}_{\mathbf{b}})\\ &+ \{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}_{\mathbf{b}}\}.\end{aligned} \tag{2887}$$

از جمله، (2886) نتیجه میدهد

$$\{x^{\mathsf{a}},\mathcal{K}_\tau\}_\tau = \delta^{\mathsf{a}}_0\,\mathcal{T} - \delta^{\mathsf{a}}_{2\,\mathfrak{m}+1}\,(p_0\,\dot{\mathcal{T}} + \partial_0\,\mathcal{K}) + \{x^{\mathsf{a}},\mathcal{K}\}. \tag{2888}$$

که یعنی

$$t' = t + \mathcal{T}\,h + o(h). \tag{2889}$$

$$x'^a = x^a + \{x^a,\mathcal{K}\}\,h + o(h). \tag{2890}$$

$$p'_0 = p_0 - (p_0\,\dot{\mathcal{T}} + \partial_0\,\mathcal{K})\,h + o(h). \tag{2891}$$

و رابطه یِ (2844) چنین میشود.

$$(\delta\,t)_{=\mathbf{1}} = \mathcal{T}\,h. \tag{2892}$$

$$(\delta\,x^a)_{=\mathbf{1}} = \{x^a,\mathcal{K}\}\,h. \tag{2893}$$

$$(\delta\,p_0)_{=\mathbf{1}} = -(p_0\,\dot{\mathcal{T}} + \partial_0\,\mathcal{K})\,h. \tag{2894}$$

و البته (2845) چنین میشود.

$$\mathcal{J}^0_\tau = \mathcal{T}. \tag{2895}$$

$$\mathcal{J}^a_\tau = \{x^a, \mathcal{K}\}. \tag{2896}$$

$$\mathcal{J}^{2\,\mathrm{m}+1}_\tau = -(p_0\,\dot{\mathcal{T}} + \partial_0\,\mathcal{K}). \tag{2897}$$

رابطه یِ (2868) هم نشان میدهد

$$\mathcal{J}^0 = \mathcal{T}. \tag{2898}$$

$$\mathcal{J}^a = \{x^a, \mathcal{K}\}. \tag{2899}$$

و رُشن است که

$$\mathcal{J}^\alpha_\tau = \mathcal{J}^\alpha. \tag{2900}$$

اگر q'^α ها و p'_i ها مستقل از p_0 باشند و $(t'-t)$ ثابت باشد، $\mathcal{T}$ ثابت میشود:

$$\dot{\mathcal{T}} = 0. \tag{2901}$$

و (2894) و (2897) چنین میشوند.

$$(\delta\,p_0)_{=\mathbf{1}} = -(\partial_0\,\mathcal{K})\,h. \tag{2902}$$

$$\mathcal{J}^{2\,\mathrm{m}+1}_\tau = -\partial_0\,\mathcal{K}. \tag{2903}$$

اگر q'^α ها و p'_i ها مستقل از p_0 باشند و q'^i ها و p'_i ها مستقل از t هم باشند، $\{x^a, \mathcal{K}\}$ مستقل از زمان میشود:

$$\partial_0\,\{x^a, \mathcal{K}\}. \tag{2904}$$

این نتیجه میدهد

$$\partial_0\,\partial_a\,\mathcal{K} = 0. \tag{2905}$$

یا،

$$\partial_a \, \partial_0 \, \mathcal{K} = 0. \tag{2906}$$

که یعنی $(\partial_0 \, \mathcal{K})$ تابع ی از فقط زمان میشود. به این ترتیب $(\partial_0 \, \mathcal{K})$ در تبدیل ِ x^α ها به x'^α ها اثر ی ندارد. از جمله میشود آن را صفر گذاشت:

$$\partial_0 \, \mathcal{K} = 0. \tag{2907}$$

و (2894) و (2897) چنین میشوند.

$$(\delta \, p_0)_{\mathbf{=1}} = -p_0 \, \dot{\mathcal{T}} \, h. \tag{2908}$$

$$\mathcal{J}_\tau^{2\,\mathrm{m}+1} = -p_0 \, \dot{\mathcal{T}}. \tag{2909}$$

سرانجام، اگر q'^α ها و p'_i ها مستقل از p_0 باشند، $(t' - t)$ ثابت باشد، و q'^i ها و p'_i ها مستقل از t هم باشند، $\mathcal{T}$ ثابت و $(\partial_0 \, \mathcal{K})$ تابع ی از فقط زمان میشود. از جمله میشود $(\partial_0 \, \mathcal{K})$ را صفر گذاشت. در این حالت (2894) و (2897) چنین میشوند.

$$(\delta \, p_0)_{\mathbf{=1}} = 0. \tag{2910}$$

$$\mathcal{J}_\tau^{2\,\mathrm{m}+1} = 0. \tag{2911}$$

اثر ِ خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک ِ هموار ِ $\mathfrak{C}$ بر $\mathfrak{X}_\tau$ را بررسی میکنم، که $\mathfrak{X}_\tau$ یک تابعی از فضا-زمان- ِ-فاز است:

$$\{[\mathfrak{C}(s)]^* \, \mathfrak{X}_\tau\}(\underset{\sim}{x}) = \mathfrak{X}_\tau\{[\mathfrak{C}(s)](\underset{\sim}{x})\}. \tag{2912}$$

برا یِ s نزدیک به s_0، که $\mathfrak{C}(s_0)$ همانی ست، $[\mathfrak{C}(s)](\underset{\sim}{x})$ از (2825) به دست میئاید. پس (2912) چنین میشود.

$$\{[\mathfrak{C}(s)]^* \, \mathfrak{X}_\tau\}(\underset{\sim}{x}) = \mathfrak{X}_\tau(\underset{\sim}{x}) + [(\partial_{\mathsf{a}} \, \mathfrak{X}_\tau)(\underset{\sim}{x})] \, [\mathcal{J}_\tau^{\mathsf{a}}(\underset{\sim}{x})] \, h + o(h). \tag{2913}$$

یعنی،

$$[\mathfrak{C}(s)]^* \, \mathfrak{X}_\tau = \mathfrak{X}_\tau + (\partial_{\mathsf{a}} \, \mathfrak{X}_\tau) \, \mathcal{J}_\tau^{\mathsf{a}} \, h + o(h). \tag{2914}$$

یا،

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = (\partial_{\mathrm{a}}\,\mathfrak{X}_\tau)\,\mathcal{J}^{\mathrm{a}}_\tau\,h. \tag{2915}$$

این هم، با استفاده از (2846)، چنین میشود

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = (\partial_{\mathrm{a}}\,\mathfrak{X}_\tau)\,\{x^{\mathrm{a}},\mathcal{K}_\tau\}_\tau\,h. \tag{2916}$$

که نتیجه میدهد

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = \{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}_\tau\}_\tau\,h. \tag{2917}$$

مفصلتر،

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = \{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}\}_\tau\,h^{\mathbf{b}}. \tag{2918}$$

حالت ی را بررسی میکنم که q'^α ها و p'_i ها تابع ِ فقط مختصات ِ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته اند، یعنی مستقل از p_0 اند. این یعنی یک وابرریختی یِ $\mathfrak{C}$ از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته هست که (2563) برقرار است. پس $\mathcal{K}_\tau$ به شکل ِ (2884) است و رابطه یِ (2886) برقرار است. رابطه یِ (2886) را در (2917) میگذارم:

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = [(\partial_0\,\mathfrak{X}_\tau)\,\mathcal{T} - (\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathfrak{X}_\tau)\,(p_0\,\dot{\mathcal{T}} + \partial_0\,\mathcal{K}) + \{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}\}]\,h. \tag{2919}$$

مفصلتر،

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = [(\partial_0\,\mathfrak{X}_\tau)\,\mathcal{T}_{\mathbf{b}} - (\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathfrak{X}_\tau)\,(p_0\,\dot{\mathcal{T}}_{\mathbf{b}} + \partial_0\,\mathcal{K}_{\mathbf{b}}) + \{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}_{\mathbf{b}}\}]\,h^{\mathbf{b}}. \tag{2920}$$

اگر q'^α ها و p'_i ها مستقل از p_0 باشند و $(t'-t)$ ثابت باشد، $\mathcal{T}$ ثابت میشود. پس،

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = [(\partial_0\,\mathfrak{X}_\tau)\,\mathcal{T} - (\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathfrak{X}_\tau)\,\partial_0\,\mathcal{K} + \{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}\}]\,h. \tag{2921}$$

و اگر، علاوه بر این، t' هم ان t باشد، $\mathcal{T}$ صفر میشود و

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = [-(\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathfrak{X}_\tau)\,\partial_0\,\mathcal{K} + \{\mathfrak{X}_\tau,\mathcal{K}\}]\,h. \tag{2922}$$

اگر q'^{α} ها و p'_i ها مستقل از p_0 باشند و q'^i ها و p'_i ها مستقل از t هم باشند، $\mathcal{K}$ را میشود مستقل از زمان گرفت. در این حالت،

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = [(\partial_0\,\mathfrak{X}_\tau)\,\mathcal{T} - (\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathfrak{X}_\tau)\,p_0\,\dot{\mathcal{T}} + \{\mathfrak{X}_\tau, \mathcal{K}\}]\,h. \tag{2923}$$

سرانجام، اگر q'^{α} ها و p'_i ها مستقل از p_0 باشند، $(t'-t)$ ثابت باشد، و q'^i ها و p'_i ها مستقل از t هم باشند، $\mathcal{T}$ ثابت است و $\mathcal{K}$ را میشود مستقل از زمان گرفت. در این حالت،

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = [(\partial_0\,\mathfrak{X}_\tau)\,\mathcal{T} + \{\mathfrak{X}_\tau, \mathcal{K}\}]\,h. \tag{2924}$$

و اگر، علاوه بر این، t' هم ان t باشد،

$$\mathcal{T} = 0. \tag{2925}$$

و

$$(\delta\,\mathfrak{X}_\tau)_{=\mathbf{1}} = \{\mathfrak{X}_\tau, \mathcal{K}\}\,h. \tag{2926}$$

گیرم $\mathfrak{X}$ یک تابعی از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته است، یعنی یک تابعی از فضا-زمان- ِ-فاز است که به p_0 بستگی ندارد. در این صورت مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به p_0 صفر میشود و

$$\{\mathfrak{X}, \mathcal{K}_\tau\}_\tau = (\partial_0\,\mathfrak{X})\,(\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathcal{K}_\tau) + \{\mathfrak{X}, \mathcal{K}_\tau\}. \tag{2927}$$

مفصلتر،

$$\{\mathfrak{X}, \mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}\}_\tau = (\partial_0\,\mathfrak{X})\,(\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}) + \{\mathfrak{X}, \mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}\}. \tag{2928}$$

مانسته یِ (2917)، با $\mathfrak{X}$ به جا یِ $\mathfrak{X}_\tau$، هم چنین میشود.

$$(\delta\,\mathfrak{X})_{=\mathbf{1}} = [(\partial_0\,\mathfrak{X})\,(\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathcal{K}_\tau) + \{\mathfrak{X}, \mathcal{K}_\tau\}]\,h. \tag{2929}$$

مفصلتر،

$$(\delta\,\mathfrak{X})_{=\mathbf{1}} = [(\partial_0\,\mathfrak{X})\,(\partial_{2\,\mathrm{m}+1}\,\mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}) + \{\mathfrak{X}, \mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}\}]\,h^{\mathbf{b}}. \tag{2930}$$

حالت ی را بررسی میکنم که $\mathfrak{X}$ یک تابعی از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته است، و q'^{α} ها و p'_i ها تابع ِ فقط مختصات ِ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته اند. پس $\mathcal{K}_\tau$ به شکل ِ (2884) است و

$$\partial_{2\,\mathtt{m}+1}\,\mathcal{K}_\tau = \mathcal{T}. \tag{2931}$$

پس،

$$\{\mathfrak{X},\mathcal{K}_\tau\}_\tau = (\partial_0\,\mathfrak{X})\,\mathcal{T} + \{\mathfrak{X},\mathcal{K}\}. \tag{2932}$$

$$(\delta\,\mathfrak{X})_{=\mathbf{1}} = [(\partial_0\,\mathfrak{X})\,\mathcal{T}) + \{\mathfrak{X},\mathcal{K}\}]\,h. \tag{2933}$$

حالتها یی خاصتر این َند که $\mathfrak{X}$ مستقل از زمان باشد، یا t' هم ان t باشد. در حالت ِ اول،

$$\partial_0\,\mathfrak{X} = 0. \tag{2934}$$

در حالت ِ دوم (2925) برقرار است، یعنی $\mathcal{T}$ صفر است. پس در هر-دُ-حالت، جملات ِ اول در طرف ِ راست ِ (2932) و (2933) صفر َند. نتیجه میشود اگر $\mathfrak{X}$ مستقل از زمان باشد، یا t' هم ان t باشد،

$$\{\mathfrak{X},\mathcal{K}_\tau\}_\tau = \{\mathfrak{X},\mathcal{K}\}. \tag{2935}$$

$$(\delta\,\mathfrak{X})_{=\mathbf{1}} = \{\mathfrak{X},\mathcal{K}\}\,h. \tag{2936}$$

82 قضیه یِ لیوویل

گیرم تبدیل ِ $\mathfrak{C}$ کانُنیک است:

$$\mathfrak{C}_*\,\mathcal{J} = \mathcal{J}. \tag{2536}$$

که یعنی،

$$(\mathfrak{C}_*\,\mathcal{J})_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} = \mathcal{J}_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{2548}$$

$\mathfrak{C}$ وارون-پذیر است. پس $\mathfrak{C}_*$ هم وارون-پذیر است. و (2536) همئرز است با

$$(\mathfrak{C}_*)^{-1}\, \mathcal{J} = \mathcal{J}. \tag{2937}$$

یا،

$$\mathfrak{C}^*\, \mathcal{J} = \mathcal{J}. \tag{2938}$$

که $\mathfrak{C}^*$ پسار ِ $\mathfrak{C}$ است:

$$\{(\mathfrak{C}^*\, \mathcal{J})_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\mathcal{x}) = \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{c}'}(\mathcal{x})]}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}\, \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{d}'}(\mathcal{x})]}{\partial\, x^{\mathtt{b}}}\, \{\mathcal{J}_{\mathtt{c}'\,\mathtt{d}'}[\mathfrak{C}(\mathcal{x})]\}. \tag{2939}$$

پریم در شاخصها تئکید بر این است که مختصات ِ به کار-رفته برا یِ $\mathfrak{C}(\mathcal{x})$ لازم نیست با مختصات ِ به-کار-رفته برا یِ $\mathcal{x}$ یکسان باشند. اما از این پس، برا یِ سادگی، پریم در شاخصها را حذف میکنم و (2939) چنین مینویسم.

$$\{(\mathfrak{C}^*\, \mathcal{J})_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}(\mathcal{x}) = \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{c}}(\mathcal{x})]}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}\, \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{\mathtt{d}}(\mathcal{x})]}{\partial\, x^{\mathtt{b}}}\, \{\mathcal{J}_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}[\mathfrak{C}(\mathcal{x})]\}. \tag{2940}$$

از (2938) ضمنَن نتیجه میشود

$$\mathfrak{C}^*\, (\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}) = \mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}. \tag{2941}$$

گیرم $\mathbb{P}_{\tau\,2}$ یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز است. دیده میشود

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} \mathcal{J} = \int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathfrak{C}^*\, \mathcal{J}. \tag{2942}$$

از این، همراه با (2938)، نتیجه میشود

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} \mathcal{J} = \int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathcal{J}. \tag{2943}$$

کلیتر، گیرم $\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})}$ یک زیرخمینه یِ $(2\,\mathfrak{k})$ بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز است. دیده میشود

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})})} \mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} = \int_{\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})}} \mathfrak{C}^*\, (\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}). \tag{2944}$$

از این، همراه با (2941)، نتیجه میشود

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})})} \mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} = \int_{\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})}} \mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}. \tag{2945}$$

از جمله،

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)})} \mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{m}+1)} = \int_{\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)}} \mathfrak{C}^{*}\,(\mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{m}+1)}). \tag{2946}$$

که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. به این ترتیب،

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)})} \mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{m}+1)} = \int_{\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)}} \mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{m}+1)}. \tag{2947}$$

به هر یک از روابط ِ (2943) یا (2945) یا (2947)، شکل ِ انتگرالی یِ قضیه یِ لیوویل (بر فضا-زمان- ِ-فاز) میگویند.

روابط ِ (2943) و (2947) حالت ِ خاص ِ رابطه یِ (2945) اند. رابطه یِ (2945) هم یعنی $(2\,\mathfrak{k})$-حجم، که با $\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}$ تعریف میشود، در اثر ِ تبدیلها یِ کانُنیک تغییر نمیکند. به-ویژه معنی یِ (2947) این است که عنصر- ِ-حجم، یعنی $(2\,\mathfrak{m}+2)$-حجم، در اثر ِ تبدیلها یِ کانُنیک تغییر نمیکند. البته برا یِ این که بشود عنصر- ِ-حجم را با $\mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{m}+1)}$ تعریف کرد، $\mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{m}+1)}$ باید ناتکین باشد. نشان میدهم چنین است. یک راه، استفاده از مختصات ِ کانُنیک است. گیرم $(q^0,\ldots,q^{\mathfrak{m}},p_0,\ldots,p_{\mathfrak{m}})$ کانُنیک است. در این صورت،

$$\mathcal{J} = (\mathbf{d}\,q^{\alpha})\wedge(\mathbf{d}\,p_{\alpha}). \tag{2146}$$

$\mathcal{J}_{[\alpha]}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{J}_{[\alpha]} = \delta_{\alpha\,\beta}\,(\mathbf{d}\,q^{\beta})\wedge(\mathbf{d}\,p_{\alpha}). \tag{2948}$$

به این ترتیب،

$$\mathcal{J} = \sum_{\alpha=0}^{\mathfrak{m}} \mathcal{J}_{[\alpha]}. \tag{2949}$$

از این نتیجه میشود

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{k}} = \sum_{\alpha_1=1}^{\mathfrak{k}} \cdots \sum_{\alpha_{\mathfrak{k}}=1}^{\mathfrak{m}} \mathcal{J}_{[\alpha_1]} \wedge \cdots \wedge \mathcal{J}_{[\alpha_{\mathfrak{k}}]}. \tag{2950}$$

یا،

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{k}} = (\mathfrak{k}!)\, \boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{k}}. \tag{2951}$$

که،

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{k}} = \sum_{\alpha_1=\alpha_0+1}^{\mathfrak{k}} \cdots \sum_{\alpha_{\mathfrak{k}}=\alpha_{\mathfrak{k}-1}+1}^{\mathfrak{m}} \mathcal{J}_{[\alpha_1]} \wedge \cdots \wedge \mathcal{J}_{[\alpha_{\mathfrak{k}}]}. \tag{2952}$$

و α_0 برابر با (-1) تعریف شده:

$$\alpha_0 = -1. \tag{2953}$$

به این ترتیب،

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{m}+1} = [(\mathfrak{m}+1)!]\, \mathcal{J}_{[0]} \wedge \cdots \wedge \mathcal{J}_{[\mathfrak{m}]}. \tag{2954}$$

که یعنی،

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{m}+1} = [(\mathfrak{m}+1)!]\, (\mathbf{d}\, q^0) \wedge (\mathbf{d}\, p_0) \wedge \cdots \wedge (\mathbf{d}\, q^{\mathfrak{m}}) \wedge (\mathbf{d}\, p_{\mathfrak{m}}). \tag{2955}$$

یا،

$$\mathcal{J}^{\mathfrak{m}+1} = [(\mathfrak{m}+1)!]\, \mathcal{E}. \tag{2956}$$

که $\mathcal{E}$ هم ان $\boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{m}+1}$ است:

$$\mathcal{E} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{m}+1}. \tag{2957}$$

یعنی،

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = (\mathbf{d}\, q^0) \wedge (\mathbf{d}\, p_0) \wedge \cdots \wedge (\mathbf{d}\, q^{\mathfrak{m}}) \wedge (\mathbf{d}\, p_{\mathfrak{m}}). \tag{2958}$$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ ناتکین است، و در نتیجه $\underset{\sim}{J}^{\mathfrak{m}+1}$ ناتکین است.

البته $\underset{\sim}{J}^{\wedge\, \mathfrak{k}}$، از جمله $\underset{\sim}{J}^{\mathfrak{m}+1}$، و $\underset{\sim}{\varepsilon}$ مستقل از پایه اند. مانستِها یِ (2955) و (2958) در یک پایه یِ دلبخاه را به دست میئاورم. δ_e را، متناظر با پایه یِ e چنین تعریف میکنم.

$$\delta_e\, e^{\mathsf{a}} = e_{\mathsf{a}}. \tag{2959}$$

این مانسته یِ (178) است:

$$\delta_e\, e^i = e_i. \tag{178}$$

دیده میشود اگر e پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصات ی کانُنیک باشد،

$$\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{J}) = 1. \tag{2960}$$

و (2958) را میشود چنین نوشت.

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{J})}\, (\mathbf{d}\, q^0) \wedge (\mathbf{d}\, p_0) \wedge \cdots \wedge (\mathbf{d}\, q^{\mathfrak{m}}) \wedge (\mathbf{d}\, p_{\mathfrak{m}}). \tag{2961}$$

به این ترتیب معلوم میشود در حالت ِ کلی (متناظر با پایه یِ دلبخاه ِ e)،

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = [\mathsf{sgnc}(e)]\, \sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{J})}\, e^0 \wedge \cdots \wedge e^{2\,\mathfrak{m}+1}. \tag{2962}$$

که $\mathsf{sgnc}(e)$ دستیدگی یِ پایه یِ e نسبت به پایه ای که در (2958) به کار رفته است. این هم مانسته یِ (177) است:

$$\varepsilon(e_1, \cdots, e_{\mathfrak{m}}) = \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, g)|}. \tag{177}$$

(که در آن e راست-دست است.) نتیجه یِ متناظر برا یِ $\underset{\sim}{J}^{\mathfrak{m}+1}$ هم چنین میشود.

$$\underset{\sim}{J}^{\mathfrak{m}+1} = [(\mathfrak{m}+1)!]\, [\mathsf{sgnc}(e)]\, \sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{J})}\, e^0 \wedge \cdots \wedge e^{2\,\mathfrak{m}+1}. \tag{2963}$$

با هر تابعی یِ $\mathcal{K}_\tau$ از فضا-زمان- ِ-فاز، یک خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک ِ هموار ِ $\mathfrak{C}$ ساخته میشود:

$$\mathfrak{C}(h) = \mathsf{fl}(h\,\mathcal{J}_\tau). \tag{2863}$$

که،

$$\mathcal{J}_\tau = \mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}. \tag{2861}$$

پس،

$$\mathfrak{C}(h) = \mathsf{fl}(h\,\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}). \tag{2964}$$

دیده میشود

$$[\mathfrak{C}(h)]^* = \{[\mathfrak{C}(h)]^{-1}\}_*. \tag{2965}$$

همچنین،

$$[\mathfrak{C}(h)]^{-1} = \mathfrak{C}(-h). \tag{2966}$$

پس،

$$[\mathfrak{C}(h)]^* = [\mathfrak{C}(-h)]_*. \tag{2967}$$

یعنی،

$$[\mathfrak{C}(h)]^* = [\mathsf{fl}(-h\,\mathcal{J}_{\mathcal{K}_{\tau\,\mathbf{b}}})]_*. \tag{2968}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{D}\,\{[\mathfrak{C}(\boldsymbol{.})]^*\} = \mathbf{D}\,\{[\mathsf{fl}(-\,\boldsymbol{.}\;\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau})]_*\} \tag{2969}$$

از جمله،

$$\Big(\mathbf{D}\,\{[\mathfrak{C}(\boldsymbol{.})]^*\}\Big)(0) = \Big(\mathbf{D}\,\{[\mathsf{fl}(-\,\boldsymbol{.}\;\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau})]_*\}\Big)(0). \tag{2970}$$

مشتق ِ لی با میدان ِ برداری یِ $\mathfrak{u}$ چنین تعریف میشود.

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}} = \Big(\mathbf{D}\,\{[\mathsf{fl}(-\,\boldsymbol{.}\;\mathfrak{u})]_*\}\Big)(0). \tag{2971}$$

پس طرف ِ راست ِ (2970) مشتق ِ لی با $\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}$ است:

$$\Big(\mathbf{D}\,\{[\mathsf{fl}(-\,\boldsymbol{.}\;\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau})]_*\}\Big)(0) = \mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}. \tag{2972}$$

و رابطه یِ (2970) چنین میشود.

$$\Big(\mathbf{D}\,\{[\mathfrak{C}(\boldsymbol{.})]^*\}\Big)(0) = \mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}. \tag{2973}$$

$\mathfrak{C}(h)$ یک تبدیل ِ کانُنیک است. پس،

$$[\mathfrak{C}(h)]^*\,\mathcal{J} = \mathcal{J}. \tag{2974}$$

طرف ِ راست مستقل از h است. پس مشتق ِ آن نسبت به h صفر است. و این نتیجه میدهد مشتق ِ طرف ِ چپ نسبت به h صفر است. از جمله،

$$\Big(\mathbf{D}\,\{[\mathfrak{C}(\boldsymbol{.})]^*\,\mathcal{J}\}\Big)(0) = 0. \tag{2975}$$

از این و (2964) نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = 0. \tag{2976}$$

این مانسته یِ (2096) است:

$$\mathbf{L}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J = 0. \tag{2096}$$

که برا یِ هر تابعی یِ $\mathfrak{A}$ برقرار است. همچنین، برا یِ هر میدان- ِ-برداری یِ $\mathfrak{u}$ و هر میدان- ِ-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ،

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\,\sigma)+\mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\,(\mathbf{d}\,\sigma)=\mathbf{L}_{\mathfrak{u}}\,\sigma. \tag{2095}$$

پس،

$$\mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}=\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J})+\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,(\mathbf{d}\,\mathcal{J}). \tag{2977}$$

از این و (2976) نتیجه میشود

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J})+\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,(\mathbf{d}\,\mathcal{J})=0. \tag{2978}$$

همچنین،

$$\mathbf{d}\,\mathcal{J}=0. \tag{2979}$$

که مانسته یِ (2092) است:

$$\mathbf{d}\,J=0. \tag{2092}$$

از روابط ِ (2978) و (2979) نتیجه میشود

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J})=0. \tag{2980}$$

این هم مانسته یِ (2093) است:

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{J_{\mathfrak{A}}}\,J)=0. \tag{2093}$$

گیرم $\mathbb{P}_{\tau\,2}$ یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز است. از (2980) نتیجه میشود

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}}\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J})=0. \tag{2981}$$

این همئرز است با

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = 0. \tag{2982}$$

که $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ مرز ِ $\mathbb{M}$ است. رابطه یِ (2982) عجیب نیست:

$$\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = \mathbf{d}\,\mathcal{K}_\tau. \tag{2983}$$

و البته،

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{d}\,\mathcal{K}_\tau = 0. \tag{2984}$$

رابطه یِ (2982) در واقع هم ان (2942) یا (2943) است، برا یِ حالت ی که $\mathcal{J}$ یک خانواده- یِ- تبدیل باشد که مولد- ِ-پُوَسُنی یِ آن $\mathcal{K}_\tau$ است.

روابط ی متناظر برا یِ $\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}$، به جا یِ $\mathcal{J}$، چنین به دست میئایند. مشتق ِ لی نسبت به ضرب ِ برونی لَیبنیتسی ست، و

$$\mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{k}+1)} = \mathcal{J} \wedge \mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}. \tag{2985}$$

پس،

$$\mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{k}+1)} = (\mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}) \wedge \mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} + \mathcal{J} \wedge (\mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}). \tag{2986}$$

با استفاده از (2976) و (2986)، یک استقرا یِ ساده نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} = 0. \tag{2987}$$

همچنین،

$$\mathbf{d}\,\mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{k}+1)} = (\mathbf{d}\,\mathcal{J}) \wedge \mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} + \mathcal{J} \wedge (\mathbf{d}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}). \tag{2988}$$

با استفاده از (2979) و (2988)، یک استقرا یِ ساده نتیجه میدهد

$$\mathbf{d}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} = 0. \tag{2989}$$

از رابطه یِ (2095) نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} = \mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}) + \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,(\mathbf{d}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}). \tag{2990}$$

که، با استفاده از (2989)، میشود

$$\mathbf{L}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} = \mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}). \tag{2991}$$

رابطه یِ (2987) نشان میدهد طرف ِ چپ صفر است. به این ترتیب،

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}) = 0. \tag{2992}$$

این شکل ِ کلیتر ِ (2980) است.

گیرم $\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})}$ یک زیرخمینه یِ $(2\,\mathfrak{k})$ بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز است. از (2992) نتیجه میشود

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})}} \mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}}) = 0. \tag{2993}$$

این همئرز است با

$$\oint_{\mathbf{b}(\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})})} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge\mathfrak{k}} = 0. \tag{2994}$$

با استفاده از (2951)، روابط ِ (2993) و (2994) را میشود چنین نوشت.

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})}} \mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{k}}) = 0. \tag{2995}$$

$$\oint_{\mathbf{b}(\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{k})})} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{k}} = 0. \tag{2996}$$

یک حالت ِ خاص ِ (2993) این است.

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)}} \mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{m}+1)}) = 0. \tag{2997}$$

که همئرز است با

$$\oint_{\mathbf{b}(\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)})} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\, \mathcal{J}^{\wedge(\mathfrak{m}+1)} = 0. \tag{2998}$$

با استفاده از (2956)، روابط ِ (2997) و (2998) را میشود چنین نوشت.

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)}} \mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\, \underset{\sim}{\varepsilon}) = 0. \tag{2999}$$

$$\oint_{\mathbf{b}(\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)})} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\, \underset{\sim}{\varepsilon} = 0. \tag{3000}$$

رابطه یِ (2999) برا یِ هر $\mathbb{P}_{\tau\,(2\,\mathfrak{m}+2)}$، یعنی برا یِ هر زیرخمینه یِ $(2\,\mathfrak{m}+2)$ بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز، درست است. پس انتگرال-ده در طرف ِ چپ ِ آن صفر است:

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\, \underset{\sim}{\varepsilon}) = 0. \tag{3001}$$

دیورژانس ِ میدان ِ برداری یِ $\mathfrak{u}$ را با $(\mathbf{div}\,\mathfrak{u})$ نشان میدهم و آن را با استفاده از عنصر- ِ-حجم ِ $\underset{\sim}{\varepsilon}$ تعریف میکنم:

$$(\mathbf{div}\,\mathfrak{u})\,\underset{\sim}{\varepsilon} = \mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}). \tag{3002}$$

رابطه یِ (3001) چنین میشود.

$$(\mathbf{div}\,\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau})\,\underset{\sim}{\varepsilon} = 0. \tag{3003}$$

و چون $\underset{\sim}{\varepsilon}$ ناتکین است،

$$\mathbf{div}\,\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau} = 0. \tag{3004}$$

این شکل ِ دیفرانسیلی یِ قضیه یِ لیوویل است.

با شاخصها،

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = [\mathsf{sgnc}(e)]\,\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}\,(\mathbf{d}\,x^0)\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,x^{2\,\mathfrak{m}+1}). \tag{3005}$$

که،

$$e^{\mathsf{a}} = \mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}}. \tag{3006}$$

البته،

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{(2\,\mathfrak{m}+2)!}\, \varepsilon_{\mathsf{a}_0\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}\, (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_0}) \wedge \cdots \wedge (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}). \tag{3007}$$

یا،

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{\mathsf{a}_0\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}\, (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_0}) \otimes \cdots \otimes (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}). \tag{3008}$$

که

$$\varepsilon_{\mathsf{a}_0\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}} = [\mathsf{sgnc}(e)]\, \sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{J})}\, [\mathsf{a}_0 \cdots \mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}]. \tag{3009}$$

و $[\mathsf{a}_0 \cdots \mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}]$ نسبت به شاخصها یَ ش پادمتقارن است و

$$[0 \cdots (2\,\mathfrak{m}+1)] = 1. \tag{3010}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\, \underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{\mathsf{a}_0\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}\, \mathfrak{u}^{\mathsf{a}_0}\, (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_1}) \otimes \cdots \otimes (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}). \tag{3011}$$

یا،

$$\mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\, \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{(2\,\mathfrak{m}+1)!}\, \varepsilon_{\mathsf{a}_0\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}\, \mathfrak{u}^{\mathsf{a}_0}\, (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_1}) \wedge \cdots \wedge (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}). \tag{3012}$$

پس،

$$\mathbf{d}\, (\mathbf{i}_{\mathfrak{u}}\, \underset{\sim}{\varepsilon}) = \frac{1}{(2\,\mathfrak{m}+1)!}\, [\mathbf{d}\, (\varepsilon_{\mathsf{a}_0\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}\, \mathfrak{u}^{\mathsf{a}_0})] \wedge (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_1}) \wedge \cdots \wedge (\mathbf{d}\, x^{\mathsf{a}_{2\,\mathfrak{m}+1}}). \tag{3013}$$

یا،

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathsf{u}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}) = \frac{1}{(2\,\mathsf{m}+1)!}\,\frac{\varepsilon_{\mathsf{a}_0\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathsf{m}+1}}}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}}\,\{\mathbf{d}\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}\,\mathsf{u}^{\mathsf{a}_0}]\}$$
$$\wedge\,(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{a}_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{a}_{2\,\mathsf{m}+1}}). \tag{3014}$$

که میشود

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathsf{u}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}) = \frac{1}{(2\,\mathsf{m}+1)!}\,\frac{\varepsilon_{\mathsf{a}_0\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathsf{m}+1}}}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}}\,\frac{\partial\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}\,\mathsf{u}^{\mathsf{a}_0}]}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}\,(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{b}})$$
$$\wedge\,(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{a}_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{a}_{2\,\mathsf{m}+1}}). \tag{3015}$$

همچنین،

$$(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{b}})\wedge(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{a}_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,x^{\mathsf{a}_{2\,\mathsf{m}+1}}) = [\mathsf{b}\,\mathsf{a}_1\cdots\mathsf{a}_{2\,\mathsf{m}+1}]$$
$$(\mathbf{d}\,x^0)\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,x^{2\,\mathsf{m}+1}). \tag{3016}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathsf{u}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}) = [\mathsf{sgnc}(e)]\,\delta^{\mathsf{b}}_{\mathsf{a}_0}\,\frac{\partial\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}\,\mathsf{u}^{\mathsf{a}_0}]}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}\,(\mathbf{d}\,x^0)\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,x^{2\,\mathsf{m}+1}). \tag{3017}$$

یا،

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathsf{u}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}) = [\mathsf{sgnc}(e)]\,\frac{\partial\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}\,\mathsf{u}^{\mathsf{b}}]}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}\,(\mathbf{d}\,x^0)\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,x^{2\,\mathsf{m}+1}). \tag{3018}$$

که میشود

$$\mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{\mathsf{u}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}) = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}}\,\frac{\partial\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}\,\mathsf{u}^{\mathsf{b}}]}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}. \tag{3019}$$

پس،

$$\mathbf{div}\,\mathsf{u} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}}\,\frac{\partial\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{J})}\,\mathsf{u}^{\mathsf{b}}]}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}. \tag{3020}$$

از جمله،

$$\mathbf{div}\, \mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\, \mathcal{J})}}\, \frac{\partial}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}\, \left[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\, \mathcal{J})}\, J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, \frac{\partial\, \mathcal{K}_\tau}{\partial\, x^{\mathtt{b}}}\right]. \tag{3021}$$

و رابطه یِ (3004) چنین میشود.

$$0 = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\, \mathcal{J})}}\, \frac{\partial}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}\, \left[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\, \mathcal{J})}\, J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, \frac{\partial\, \mathcal{K}_\tau}{\partial\, x^{\mathtt{b}}}\right]. \tag{3022}$$

این رابطه را میشود بر حسب ِ مشتق ِ هموردا هم نوشت. مشتق ِ هموردا را با هموستار ِ $\underset{\sim}{\Gamma}$ تعریف میکنم، که $\underset{\sim}{\Gamma}$ با $\underset{\sim}{J}$ سازگار است و متقارن است. سازگاری یِ $\underset{\sim}{\Gamma}$ با $\underset{\sim}{J}$ یعنی مشتق ِ هموردا یِ $\underset{\sim}{J}$ صفر است:

$$0 = \frac{\partial\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, J_{\mathtt{d}\,\mathtt{c}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{d}}. \tag{3023}$$

این رابطه را در $J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}$ ضرب میکنم:

$$0 = J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}\, \frac{\partial\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, \delta^{\mathtt{b}}_{\mathtt{d}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}\, \delta^{\mathtt{c}}_{\mathtt{d}}. \tag{3024}$$

یا،

$$0 = J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}\, \frac{\partial\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}} - 2\, \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}. \tag{3025}$$

پس،

$$\Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{d}} = \frac{1}{2}\, J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}\, \frac{\partial\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}. \tag{3026}$$

مئلفِها یِ $\underset{\sim}{J}$ را میشود بر حسب ِ مئلفِها یِ $(\delta_e\, \underset{\sim}{J})$ نوشت:

$$(\delta_e\, \underset{\sim}{J})^{\mathtt{b}}{}_{\mathtt{c}} = J_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}. \tag{3027}$$

$$[(\delta_e\, \underset{\sim}{J})^{-1}]^{\mathtt{c}}{}_{\mathtt{b}} = [(\underset{\sim}{J})^{-1}]^{\mathtt{c}\,\mathtt{b}}. \tag{3028}$$

یا،

$$[(\delta_e\, \underset{\sim}{J})^{-1}]^{\mathtt{c}}{}_{\mathtt{b}} = J^{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}. \tag{3029}$$

با هر ماتریس ِ وارون-پذیر ِ $\mathfrak{G}$،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\mathfrak{G})]}{\partial\,\mathfrak{G}^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}} = [\mathsf{det}(\mathfrak{G})]\,(\mathfrak{G}^{-1})^{\mathfrak{b}}{}_{\mathfrak{a}}. \tag{3030}$$

پس،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,(\delta_e\,\mathcal{J})^{\mathsf{b}}{}_{\mathsf{c}}} = [\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]\,[(\delta_e\,\mathcal{J})^{-1}]^{\mathsf{c}}{}_{\mathsf{b}}. \tag{3031}$$

همچنین،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}} = \frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,(\delta_e\,\mathcal{J})^{\mathsf{b}}{}_{\mathsf{c}}}\,\frac{\partial\,(\delta_e\,\mathcal{J})^{\mathsf{b}}{}_{\mathsf{c}}}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}. \tag{3032}$$

پس،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}} = [\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]\,[(\delta_e\,\mathcal{J})^{-1}]^{\mathsf{c}}{}_{\mathsf{b}}\,\frac{\partial\,(\delta_e\,\mathcal{J})^{\mathsf{b}}{}_{\mathsf{c}}}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}. \tag{3033}$$

یا،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}} = [\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]\,J^{\mathsf{b}\,\mathsf{c}}\,\frac{\partial\,\mathcal{J}_{\mathsf{b}\,\mathsf{c}}}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}. \tag{3034}$$

و (3026) چنین میشود.

$$\Gamma^{\mathsf{d}}{}_{\mathsf{a}\,\mathsf{d}} = \frac{1}{2\,\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}\,\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}. \tag{3035}$$

تقارن ِ Γ یعنی

$$\Gamma^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{c}\,\mathsf{b}} = \Gamma^{\mathsf{a}}{}_{\mathsf{b}\,\mathsf{c}}. \tag{3036}$$

از (3035) و (3036) هم نتیجه میشود

$$\Gamma^{\mathsf{d}}{}_{\mathsf{d}\,\mathsf{a}} = \frac{1}{2\,\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}\,\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}. \tag{3037}$$

سازگاری یِ $\underset{\sim}{\Gamma}$ با $\underset{\sim}{J}$ و تقارن ِ $\underset{\sim}{\Gamma}$، روابط ِ (3023) و (3036)، دُ دسته معادله برا یِ $\underset{\sim}{\Gamma}$ یَند. این که این دُ-دسته معادله جواب داشته باشند بدیهی نیست. مجموع ِ (3023) و دُ رابطه یِ حاصل از تبدیل ِ دُری یِ شاخصها یِ a و b و c در آن چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}} + \frac{\partial\, J_{\mathtt{c}\,\mathtt{a}}}{\partial\, x^{\mathtt{b}}} + \frac{\partial\, J_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{c}}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, J_{\mathtt{d}\,\mathtt{c}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{d}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}\, J_{\mathtt{d}\,\mathtt{a}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{b}\,\mathtt{a}}\, J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{c}\,\mathtt{a}}\, J_{\mathtt{d}\,\mathtt{b}} - \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{c}\,\mathtt{b}}\, J_{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}. \tag{3038}$$

تقارن ِ $\underset{\sim}{\Gamma}$ (همراه با این که $\underset{\sim}{J}$ پادمتقارن است) نتیجه میدهد

$$0 = \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}\, J_{\mathtt{d}\,\mathtt{c}} + \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{b}\,\mathtt{a}}\, J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}. \tag{3039}$$

$$0 = \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{d}} + \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{c}\,\mathtt{a}}\, J_{\mathtt{d}\,\mathtt{b}}. \tag{3040}$$

$$0 = \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}\, J_{\mathtt{d}\,\mathtt{a}} + \Gamma^{\mathtt{d}}{}_{\mathtt{c}\,\mathtt{b}}\, J_{\mathtt{a}\,\mathtt{d}}. \tag{3041}$$

پس این که $\underset{\sim}{\Gamma}$ متقارن و با $\underset{\sim}{J}$ سازگار است، نتیجه میدهد

$$0 = \frac{\partial\, J_{\mathtt{b}\,\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}} + \frac{\partial\, J_{\mathtt{c}\,\mathtt{a}}}{\partial\, x^{\mathtt{b}}} + \frac{\partial\, J_{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{c}}}. \tag{3042}$$

این یعنی مشتق ِ برونی یِ $\underset{\sim}{J}$ صفر است.

پس شرط ِ لازم برا یِ این که معادلات ِ حاصل از سازگاری یِ $\underset{\sim}{\Gamma}$ با $\underset{\sim}{J}$ و تقارن ِ $\underset{\sim}{\Gamma}$ جواب داشته باشند، این است که $\underset{\sim}{J}$ بسته باشد. میشود دید این شرط (که $\underset{\sim}{J}$ بسته باشد) کافی هم هست. یک راه ِ اثبات، استفاده از قضیه یِ دَربو است: وقت ی $\underset{\sim}{J}$ پادمتقارن، ناتکین، و بسته است، (مُضعَن) مختصات ی هست (مختصات ِ کانُنیک، پریم-دار) که در پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن مشتق ِ مئلفِها یِ $\underset{\sim}{J}$ صفر است. در این پایه، (3023) چنین میشود.

$$0 = -\Gamma'^{\mathtt{d}'}{}_{\mathtt{a}'\,\mathtt{b}'}\, J_{\mathtt{d}'\,\mathtt{c}'} - \Gamma'^{\mathtt{d}'}{}_{\mathtt{a}'\,\mathtt{c}'}\, J_{\mathtt{b}'\,\mathtt{d}'}. \tag{3043}$$

یعنی،

$$0 = \Gamma'_{\mathtt{c}'\,\mathtt{a}'\,\mathtt{b}'} - \Gamma'_{\mathtt{b}'\,\mathtt{a}'\,\mathtt{c}'}. \tag{3044}$$

که شاخصها با $\mathcal{J}$ پایین آمده اند. این معادله نشان میدهد $\mathcal{\Gamma}'$ با شاخصها یِ پایین، نسبت به شاخصها یِ اول و سوم متقارن است:

$$\Gamma'_{\mathtt{c'\,a'\,b'}} = \Gamma'_{\mathtt{b'\,a'\,c'}}. \tag{3045}$$

$\mathcal{\Gamma}'$ با شاخصها یِ پایین، نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم هم متقارن است:

$$\Gamma'_{\mathtt{c'\,a'\,b'}} = \Gamma'_{\mathtt{c'\,b'\,a'}}. \tag{3046}$$

همچنین، در طرف ِ راست ِ (3046) تقارن ِ $\mathcal{\Gamma}'$ نسبت به شاخصها یِ اول و سوم را به کار میبَرم:

$$\Gamma'_{\mathtt{c'\,a'\,b'}} = \Gamma'_{\mathtt{a'\,b'\,c'}}. \tag{3047}$$

و در طرف ِ راست ِ (3047) تقارن ِ $\mathcal{\Gamma}'$ نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم را به کار میبَرم:

$$\Gamma'_{\mathtt{c'\,a'\,b'}} = \Gamma'_{\mathtt{a'\,c'\,a'}}. \tag{3048}$$

این یعنی $\mathcal{\Gamma}'$ با شاخصها یِ پایین، نسبت به شاخصها یِ اول و دوم هم متقارن است. پس $\mathcal{\Gamma}'$ با شاخصها یِ پایین، کاملَن متقارن است. رُشن است که چنین-هموستار ی رابطه یِ (3043) را برمیئاورَد. در واقع در مختصات ِ کانُنیک، یک هوستار ِ متقارن (نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم) با $\mathcal{J}$ سازگار است، یعنی (3043) را برمیئاورَد؛ اگر و تنها اگر (وقت ی هر-سه-شاخص َ ش پایین است) کاملَن متقارن باشد. از جمله میشود این هموستار را صفر گرفت.

پس در مختصات ِ کانُنیک، هموستار ی هست که متقارن است و با $\mathcal{J}$ هم سازگار است. از اینجا معلوم میشود در مختصات ِ دلبخاه (بی-پریم) هم هموستار ی هست که (نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم) متقارن است و با $\mathcal{J}$ هم سازگار است:

$$\Gamma^{\mathtt{a}}{}_{\mathtt{b\,c}} = \frac{\partial\, x'^{\mathtt{e}}}{\partial\, x^{\mathtt{b}}}\,\left[\frac{\partial\, x^{\mathtt{a}}}{\partial\, x'^{\mathtt{d}}}\,\Gamma'^{\mathtt{d'}}{}_{\mathtt{e'\,f'}} + \frac{\partial\, x'^{\mathtt{f}}}{\partial\, x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial^2\, x^{\mathtt{a}}}{\partial\, x'^{\mathtt{e}}\,\partial\, x'^{\mathtt{f}}}\right]. \tag{3049}$$

که $\mathcal{\Gamma}'$ (وقت ی هر-سه-شاخص َ ش پایین است) کاملَن متقارن است، و جز این دلبخاه است. از جمله میشود $\mathcal{\Gamma}'$ را صفر گرفت. در این حالت $\mathcal{\Gamma}$ چنین میشود.

$$\Gamma^{\mathtt{a}}{}_{\mathtt{b\,c}} = \frac{\partial\, x'^{\mathtt{e}}}{\partial\, x^{\mathtt{b}}}\,\frac{\partial\, x'^{\mathtt{f}}}{\partial\, x^{\mathtt{c}}}\,\frac{\partial^2\, x^{\mathtt{a}}}{\partial\, x'^{\mathtt{e}}\,\partial\, x'^{\mathtt{f}}}. \tag{3050}$$

نتیجه این که با یک $\mathcal{J}$ یِ پادمتقارن ِ ناتکین، یک هموستار ِ $\mathcal{\Gamma}$ هست که متقارن است و با $\mathcal{J}$ سازگار است؛ اگر و تنها اگر $\mathcal{J}$ بسته باشد. و البته معلوم شد $\mathcal{\Gamma}$ رابطه یِ (3037) را برمیئاورَد.

با هموستار ِ $\mathcal{\Gamma}$، دیورژانس ِ میدان ِ برداری یِ $\mathfrak{u}$ چنین میشود.

$$\mathbf{div}\,\mathfrak{u} = \frac{\partial\,\mathfrak{u}^{\mathsf{a}}}{\partial\,x^{\mathsf{a}}} + \Gamma^{\mathsf{b}}{}_{\mathsf{b}\,\mathsf{a}}\,\mathfrak{u}^{\mathsf{a}}. \tag{3051}$$

که، با استفاده از (3020)، چنین میشود.

$$\mathbf{div}\,\mathfrak{u} = \frac{\partial\,\mathfrak{u}^{\mathsf{a}}}{\partial\,x^{\mathsf{a}}} + \frac{1}{2\,\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}\,\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}\,\mathfrak{u}^{\mathsf{a}}. \tag{3052}$$

یا،

$$\mathbf{div}\,\mathfrak{u} = \frac{\partial\,\mathfrak{u}^{\mathsf{a}}}{\partial\,x^{\mathsf{a}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}}\,\frac{\partial\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}\,\mathfrak{u}^{\mathsf{a}}. \tag{3053}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{div}\,\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau} = \frac{\partial}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}\,\left(J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}\,\frac{\partial\,\mathcal{K}_\tau}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}}\,\frac{\partial\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}\,J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}\,\frac{\partial\,\mathcal{K}_\tau}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}. \tag{3054}$$

دیده میشود این هم ان (3021) است.

رابطه یِ (3004)، با مختصات ِ کانُنیک بدیهی ست: از (3021) دیده میشود

$$\mathbf{div}\,\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau} = J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}\,\frac{\partial^2\,\mathcal{K}_\tau}{\partial\,x^{\mathsf{a}}\,\partial\,x^{\mathsf{b}}} + \mathfrak{V}^{\mathsf{b}}\,\frac{\partial\,\mathcal{K}_\tau}{\partial\,x^{\mathsf{b}}}. \tag{3055}$$

که،

$$\mathfrak{V}^{\mathsf{b}} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}}\,\frac{\partial\,[\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}\,J^{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}]}{\partial\,x^{\mathsf{a}}}. \tag{3056}$$

جمله یِ اول ِ (3055) صفر است، چون $\mathcal{J}$ پادمتقارن و مشتق ِ دوم ِ $\mathcal{K}_\tau$ متقارن است. جمله یِ دوم ِ (3055) هم با مختصات ِ کانُنیک صفر است. چون با مختصات ِ کانُنیک، $\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})$ و مئلفِها یِ $\mathcal{J}$ ثابت َند. چیز ی که ثابت شده عملَن این است که جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (3055)، با مختصات ِ دلبخاه هم صفر است:

$$\mathfrak{V} = 0. \tag{3057}$$

این را میشد مستقیمَن هم دید:

$$\mathfrak{V}^{\mathtt{b}} = \frac{1}{2\,\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}\,\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,x^{\mathtt{a}}}\,J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} + \frac{\partial\,J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}}{\partial\,x^{\mathtt{a}}}. \tag{3058}$$

از (3034)دیده میشود

$$\frac{1}{\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})}\,\frac{\partial\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\mathcal{J})]}{\partial\,x^{\mathtt{a}}}\,J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} = J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}\,\frac{\partial\,J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}}{\partial\,x^{\mathtt{a}}}\,J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}. \tag{3059}$$

پس (3058) چنین میشود.

$$\mathfrak{V}^{\mathtt{b}} = \frac{1}{2}\,J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}\,\frac{\partial\,J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}}{\partial\,x^{\mathtt{a}}}\,J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} + \frac{\partial\,J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}}{\partial\,x^{\mathtt{a}}}. \tag{3060}$$

این که مشتق ِ برونی یِ $\mathcal{J}$ صفر است، رابطه یِ (3042)، نتیجه میدهد

$$\frac{\partial\,J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}}{\partial\,x^{\mathtt{a}}} = -\frac{\partial\,J_{\mathtt{d}\,\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{c}}} - \frac{\partial\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}. \tag{3061}$$

پس،

$$J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}\,\frac{\partial\,J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}}{\partial\,x^{\mathtt{a}}} = -J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}\,\left(\frac{\partial\,J_{\mathtt{d}\,\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{c}}} + \frac{\partial\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\right). \tag{3062}$$

یا، چون $\mathcal{J}$ پادمتقارن است،

$$J^{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}\,\frac{\partial\,J_{\mathtt{c}\,\mathtt{d}}}{\partial\,x^{\mathtt{a}}} = 2\,J^{\mathtt{d}\,\mathtt{c}}\,\frac{\partial\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}. \tag{3063}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\,\delta^{\mathtt{d}}_{\mathtt{a}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}, \\ &= \frac{\partial\,(J^{\mathtt{d}\,\mathtt{c}}\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}})}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}, \\ &= J^{\mathtt{d}\,\mathtt{c}}\,\frac{\partial\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}} + \frac{\partial\,J^{\mathtt{d}\,\mathtt{c}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}. \end{aligned} \tag{3064}$$

پس،

$$J^{\mathtt{d}\,\mathtt{c}}\,\frac{\partial\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}} = -\frac{\partial\,J^{\mathtt{d}\,\mathtt{c}}}{\partial\,x^{\mathtt{d}}}\,J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}. \tag{3065}$$

و (3060) چنین میشود.

$$\mathfrak{V}^{\mathtt{b}} = -\frac{\partial\, J^{\mathtt{d}\,\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{d}}}\, J_{\mathtt{a}\,\mathtt{c}}\, J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}} + \frac{\partial\, J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}. \tag{3066}$$

که یعنی،

$$\mathfrak{V}^{\mathtt{b}} = -\frac{\partial\, J^{\mathtt{d}\,\mathtt{c}}}{\partial\, x^{\mathtt{d}}}\, \delta^{\mathtt{b}}_{\mathtt{c}} + \frac{\partial\, J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}. \tag{3067}$$

یا،

$$\mathfrak{V}^{\mathtt{b}} = -\frac{\partial\, J^{\mathtt{d}\,\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{d}}} + \frac{\partial\, J^{\mathtt{a}\,\mathtt{b}}}{\partial\, x^{\mathtt{a}}}. \tag{3068}$$

پس،

$$\mathfrak{V}^{\mathtt{b}} = 0. \tag{3069}$$

که هم ان (3057) است.

یک حالت ِ خاص برا یِ تبدیل- ِ-کانُنیک ِ ِ این است که زمان ِ تبدیل-یافته تابع ِ فقط زمان است. در این حالت ِ به این شکل است.

$$\mathfrak{C}(t, x, p_0) = [\mathfrak{C}(t, x), p_0'(t, x, p_0)]. \tag{2564}$$

خُد ِ ِ هم چنین است.

$$\mathfrak{C}(t, x) = [t'(t), \mathfrak{C}(t, x)]. \tag{2644}$$

پس،

$$\mathfrak{C}(t, x, p_0) = [t'(t), \mathfrak{C}(t, x), p_0'(t, x, p_0)]. \tag{2565}$$

و البته $\mathfrak{C}(t, \cdot)$ کانُنیک است:

$$[\mathfrak{C}(t, \cdot)]_*\, J = J.. \tag{2588}$$

که یعنی،

$$\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*\, J\}_{a\,b} = J_{a\,b}. \tag{2548}$$

$\mathfrak{C}(t,\cdot)$ وارون-پذیر است. پس $[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*$ هم وارون-پذیر است. و (2588) همئرز است با

$$\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]_*\}^{-1}\, J = J. \tag{3070}$$

یا،

$$[\mathfrak{C}(t,\cdot)]^*\, J = J. \tag{3071}$$

که $[\mathfrak{C}(t,\cdot)]^*$ پسار ِ $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ است:

$$\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]^*\, J\}_{a\,b}(x) = \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{c'}(t,x)]}{\partial\, x^a}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{d'}(t,x)]}{\partial\, x^b}\,\{J_{c'\,d'}[\mathfrak{C}(t,x)]\}. \tag{3072}$$

پریم در شاخصها تئکید بر این است که مختصات ِ به کار-رفته برا یِ $\mathfrak{C}(t,x)$ لازم نیست با مختصات ِ به-کار-رفته برا یِ x یکسان باشند. اما از این پس، برا یِ سادگی، پریم در شاخصها را حذف میکنم و (3072) چنین مینویسم.

$$\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]^*\, J\}_{a\,b}(x) = \frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{c}(t,x)]}{\partial\, x^a}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{C}^{d}(t,x)]}{\partial\, x^b}\,\{J_{c\,d}[\mathfrak{C}(t,x)]\}. \tag{3073}$$

از (3071) ضمنَن نتیجه میشود

$$[\mathfrak{C}(t,\cdot)]^*\,(J^{\wedge\mathfrak{k}}) = J^{\wedge\mathfrak{k}}. \tag{3074}$$

با اینها قضیه یِ لیوویل بر فضا-یِ-فاز را بررسی میکنم. گیرم $\mathbb{P}_{\tau\,2}$ یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز است، چنان که مختصه یِ زمانی یِ همه یِ نقاط ِ آن ثابت است. و تبدیل- ِ-کانُنیک ِ $\mathfrak{C}$ هم به شکل ِ (2564) است. پس زمان ِ تبدیل-یافته تابع ِ فقط زمان است. به این ترتیب $\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,2})$ هم یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز است، چنان که مختصه یِ زمانی یِ همه یِ نقاط ِ آن ثابت است. در این حالت،

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} \mathcal{J} = \int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} \mathcal{J}_{|\,t}. \tag{3075}$$

یا،

$$\int_{\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} \underset{\sim}{J} = \int_{\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} J. \tag{3076}$$

اثر ِ J بر بردار-پایه-یِ-مختصاتیها یِ متناظر با t و p_0 صفر است. پس،

$$\int_{\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} J = \int_{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}_{\tau\,2})]} J. \tag{3077}$$

یعنی،

$$\int_{\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} J = \int_{\mathfrak{C}[\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0\,1}(\mathbb{P}_{\tau\,2})]} J. \tag{3078}$$

و رابطه یِ (3075) چنین میشود.

$$\int_{\underset{\sim}{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} \underset{\sim}{J} = \int_{\mathfrak{C}[\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0\,1}(\mathbb{P}_{\tau\,2})]} J. \tag{3079}$$

همچنین،

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^* \underset{\sim}{J} = \int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} (\underset{\sim}{\mathfrak{C}}^* \underset{\sim}{J})_{|\,t}. \tag{3080}$$

یا،

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} \underset{\sim}{\mathfrak{C}}^* \underset{\sim}{J} = \int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} [\mathfrak{C}(t,\cdot)]^* J. \tag{3081}$$

که t مختصه یِ زمانی یِ $\mathbb{P}_{\tau\,2}$ است. اثر ِ $\{[\mathfrak{C}(t,\cdot)]^* J\}$ بر بردار-پایه-یِ-مختصاتیها یِ متناظر با t و p_0 صفر است. پس،

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} [\mathfrak{C}(t,\cdot)]^* J = \int_{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1(\mathbb{P}_{\tau\,2})} [\mathfrak{C}(t,\cdot)]^* J. \tag{3082}$$

$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1(\mathbb{P}_{\tau\,2})$ افکنده-بر-فضا-یِ-فاز ِ $\mathbb{P}_{\tau\,2}$ است. این را با $\mathbb{P}_2$ نشان میدهم:

$$\mathbb{P}_2 = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1(\mathbb{P}_{\tau\,2}). \tag{3083}$$

به این ترتیب (3082) چنین میشود.

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} [\mathfrak{C}(t,\centerdot)]^*\, J = \int_{\mathbb{P}_2} [\mathfrak{C}(t,\centerdot)]^*\, J. \tag{3084}$$

و رابطه یِ (3081) میشود

$$\int_{\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathfrak{C}^*\, \mathcal{J} = \int_{\mathbb{P}_2} [\mathfrak{C}(t,\centerdot)]^*\, J. \tag{3085}$$

از تعریف ِ $\mathbb{P}_2$، همچنین دیده میشود.

$$\mathfrak{C}[\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0\,1}(\mathbb{P}_{\tau\,2})] = \mathfrak{C}(t,\mathbb{P}_2). \tag{3086}$$

یا،

$$\mathfrak{C}[\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0\,1}(\mathbb{P}_{\tau\,2})] = [\mathfrak{C}(t,\centerdot)](\mathbb{P}_2). \tag{3087}$$

و رابطه یِ (3079) چنین میشود.

$$\int_{\mathfrak{C}(\mathbb{P}_{\tau\,2})} \mathcal{J} = \int_{[\mathfrak{C}(t,\centerdot)](\mathbb{P}_2)} J. \tag{3088}$$

با استفاده از روابط ِ (3085) و (3088)، رابطه یِ (2942) به این شکل در میئاید.

$$\int_{[\mathfrak{C}(t,\centerdot)](\mathbb{P}_2)} J = \int_{\mathbb{P}_2} [\mathfrak{C}(t,\centerdot)]^*\, J. \tag{3089}$$

که البته میشد آن را مستقیمَن هم نوشت. از این، همراه با (3071)، نتیجه میشود

$$\int_{[\mathfrak{C}(t,\centerdot)](\mathbb{P}_2)} J = \int_{\mathbb{P}_2} J. \tag{3090}$$

کلیتر، گیرم $\mathbb{P}_{(2\,\mathfrak{k})}$ یک زیرخمینه یِ $(2\,\mathfrak{k})$ بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-یِ-فاز است. دیده میشود

$$\int_{[\mathfrak{C}(t,\centerdot)](\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}})} J^{\wedge\mathfrak{k}} = \int_{\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}}} [\mathfrak{C}(t,\centerdot)]^*\, (J^{\wedge\mathfrak{k}}). \tag{3091}$$

از این، همراه با (3074)، نتیجه میشود

$$\int_{[\mathfrak{C}(t,\cdot)](\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}})} J^{\wedge\mathfrak{k}} = \int_{\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}}} J^{\wedge\mathfrak{k}}. \tag{3092}$$

از جمله،

$$\int_{[\mathfrak{C}(t,\cdot)](\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}})} J^{\wedge\mathfrak{m}} = \int_{\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}}} [\mathfrak{C}(t,\cdot)]^* \, (J^{\wedge\mathfrak{m}}). \tag{3093}$$

که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. به این ترتیب،

$$\int_{[\mathfrak{C}(t,\cdot)](\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}})} J^{\wedge\mathfrak{m}} = \int_{\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}}} J^{\wedge\mathfrak{m}}. \tag{3094}$$

به هر یک از روابط ِ (3090) یا (3092) یا (3094)، شکل ِ انتگرالی یِ قضیه یِ لیوویل (بر فضا-یِ-فاز) میگویند.

روابط ِ (3090) و (3094) حالت ِ خاص ِ رابطه یِ (3092) اند. رابطه یِ (3092) هم یعنی $(2\,\mathfrak{k})$-حجم، که با $J^{\wedge\mathfrak{k}}$ تعریف میشود، در اثر ِ تبدیلها یِ کانُنیک تغییر نمیکند. به-ویژه معنی یِ (3094) این است که عنصر- ِ-حجم، یعنی $(2\,\mathfrak{m})$-حجم، در اثر ِ تبدیلها یِ کانُنیک تغییر نمیکند. البته برا یِ این که بشود عنصر- ِ-حجم را با $J^{\wedge\mathfrak{m}}$ تعریف کرد، $J^{\wedge\mathfrak{m}}$ باید ناتکین باشد. اثبات ِ این که چنین است، کاملَن شبیه ِ آن است که برا یِ فضا-زمان- ِ-فاز به کار رفت.

با هر تابعی یِ $\mathcal{K}_\tau$ از فضا-زمان- ِ-فاز، یک خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک ِ هموار ِ $\mathfrak{C}$ ساخته میشود، به شکل ِ روابط ِ (2861) و (2863). یک حالت ِ خاص ِ تبدیل ِ $\mathfrak{C}$ این است که q'^α ها و p'_i ها تابع ِ فقط مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند، یعنی مستقل از p_0 اند. این حالت متناظر با $\mathcal{K}$ به شکل ِ (2884) است:

$$\mathcal{K}_\tau(\underset{\sim}{x}) = p_0\,\mathcal{T}(t) + \mathcal{K}(t,x). \tag{2884}$$

دیده میشود

$$\mathbf{L}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J = 0. \tag{3095}$$

از (2095) هم نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J = \mathbf{d}\,(\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J) + \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,(\mathbf{d}\, J). \tag{3096}$$

از این و (3095) نتیجه میشود

$$\mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J] + \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,(\mathbf{d}\, J) = 0. \tag{3097}$$

مشتق ِ برونی یِ J هم صفر است. پس

$$\mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J] = 0. \tag{3098}$$

گیرم $\mathbb{P}_2$ یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-یِ-فاز است. از (3098) نتیجه میشود

$$\int_{\mathbb{P}_2} \mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J] = 0. \tag{3099}$$

این همئرز است با

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_2} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J = 0. \tag{3100}$$

که عجیب نیست:

$$\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J = \mathbf{d}\,[\mathcal{K}(t,\cdot)]. \tag{3101}$$

و البته،

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_2} \mathbf{d}\,[\mathcal{K}(t,\cdot)] = 0. \tag{3102}$$

رابطه یِ (3100) در واقع هم ان (3088) یا (3089) است، برا یِ حالت ی که $\mathfrak{C}(t,\cdot)$ یک خانواده-یِ-تبدیل باشد که مولد- ِ-پُوَسُنی یِ آن $\mathcal{K}(t,\cdot)$ است.

رابطه یِ (3100) را میشد با استفاده از رابطه یِ (2982) هم به دست آورد. $\mathbb{P}_{\tau\,2}$ را یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز میگیرم، چنان که مختصه یِ زمانی یِ همه یِ نقاط ِ آن ثابت

است و $\mathbb{P}_2$ افکنده-بر-فضا-یِ-فاز ِ $\mathbb{P}_\tau$ است: رابطه یِ (3083). رابطه یِ $\mathcal{J}$ با J چنین است.

$$\mathcal{J} = (\mathbf{d}\,t) \wedge (\mathbf{d}\,p_0) + J. \tag{2148}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,[(\mathbf{d}\,t) \wedge (\mathbf{d}\,p_0)] + \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,J. \tag{3103}$$

و،

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = \oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,[(\mathbf{d}\,t) \wedge (\mathbf{d}\,p_0)] + \oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,J. \tag{3104}$$

با $\mathcal{K}_\tau$ به شکل ِ (2884)،

$$\mathbf{d}\,\mathcal{K}_\tau = [p_0\,\dot{\mathcal{T}} + (\overset{0}{\mathbf{D}}_0\,\mathcal{K})]\,\mathbf{d}\,t + \mathcal{T}\,\mathbf{d}\,p_0 + \mathbf{d}\,[\mathcal{K}(t,\boldsymbol{\cdot})]. \tag{3105}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,[(\mathbf{d}\,t) \wedge (\mathbf{d}\,p_0)] = [p_0\,\dot{\mathcal{T}} + (\overset{0}{\mathbf{D}}_0\,\mathcal{K})]\,\mathbf{d}\,t + \mathcal{T}\,\mathbf{d}\,p_0. \tag{3106}$$

$$\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,J = \mathbf{d}\,[\mathcal{K}(t,\boldsymbol{\cdot})]. \tag{3107}$$

البته

$$\mathbf{d}\,[\mathcal{K}(t,\boldsymbol{\cdot})] = \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\boldsymbol{\cdot})}}\,J. \tag{3108}$$

پس،

$$\mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,J = \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\boldsymbol{\cdot})}}\,J. \tag{3109}$$

از (3106) نتیجه میشود

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,[(\mathbf{d}\,t) \wedge (\mathbf{d}\,p_0)] = \oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} [p_0\,\dot{\mathcal{T}} + (\overset{0}{\mathbf{D}}_0\,\mathcal{K})]\,\mathbf{d}\,t + \oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathcal{T}\,\mathbf{d}\,p_0. \tag{3110}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست صفر است، چون مختصه یِ زمانی یِ $\mathbb{P}_{\tau\,2}$ و در نتیجه $(\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2})$ ثابت است. در جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست هم، باز چون مختصه یِ زمانی یِ $(\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2})$ ثابت است میشود $\mathcal{T}$ را (که تابع ِ فقط زمان است) از انتگرال بیرون آورد. به این ترتیب،

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,[(\mathbf{d}\,t)\wedge(\mathbf{d}\,p_0)] = \mathcal{T}\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{d}\,p_0. \tag{3111}$$

در طرف ِ راست، ضریب ِ $\mathcal{T}$ صفر است، چون انتگرال ِ یک مشتق- ِ-برونی بر مرز ِ یک ناحیه است. پس،

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,[(\mathbf{d}\,t)\wedge(\mathbf{d}\,p_0)] = 0. \tag{3112}$$

در نتیجه،

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = \oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,J. \tag{3113}$$

از این و (3109) هم نتیجه میشود

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = \oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,J. \tag{3114}$$

اثر ِ $[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,J]$ بر بردار-پایه-یِ-مختصاتیها یِ متناظر با t و p_0 صفر است. پس،

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = \oint_{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1(\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2})} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,J. \tag{3115}$$

یا،

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = \oint_{\mathbf{b}\,[\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1(\mathbb{P}_{\tau\,2})]} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,J. \tag{3116}$$

که، با استفاده از (3083)، میشود

$$\oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_{\tau\,2}} \mathbf{i}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}_\tau}}\,\mathcal{J} = \oint_{\mathbf{b}\,\mathbb{P}_2} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,J. \tag{3117}$$

از رابطه یِ (2982) معلوم میشود طرف ِ چپ ِ (3117) صفر است. پس طرف ِ راست ِ (3117) هم صفر میشود. این که طرف ِ راست ِ (3117) صفر است، هم ان (3100) است.

روابط ی متناظر برا یِ $J^{\wedge\mathfrak{k}}$، به جا یِ J، هم به شکل ی مشابه به دست میئایند:

$$\mathbf{L}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J^{\wedge\mathfrak{k}} = 0. \tag{3118}$$

$$\mathbf{d}\, J^{\wedge\mathfrak{k}} = 0. \tag{3119}$$

$$\mathbf{L}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J^{\wedge\mathfrak{k}} = \mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J^{\wedge\mathfrak{k}}]. \tag{3120}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J^{\wedge\mathfrak{k}}] = 0. \tag{3121}$$

این شکل ِ کلیتر ِ (3098) است.

گیرم $\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}}$ یک زیرخمینه یِ $(2\,\mathfrak{k})$ بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-زمان- ِ-فاز است. از (3121) نتیجه میشود

$$\int_{\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}}} \mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J^{\wedge\mathfrak{k}}] = 0. \tag{3122}$$

این همئرز است با

$$\oint_{\mathbf{b}(\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}})} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J^{\wedge\mathfrak{k}} = 0. \tag{3123}$$

روابط ِ (3122) و (3123) را میشود چنین نوشت.

$$\int_{\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}}} \mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{k}}] = 0. \tag{3124}$$

$$\oint_{\mathbf{b}(\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{k}})} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\mathfrak{k}} = 0. \tag{3125}$$

یک حالت ِ خاص ِ (3122) این است.

$$\int_{\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}}} \mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J^{\wedge\mathfrak{m}}] = 0. \tag{3126}$$

که همئرز است با

$$\oint_{\mathbf{b}(\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}})} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\, J^{\wedge\mathfrak{m}} = 0. \tag{3127}$$

روابط ِ (3126) و (3127) را میشود چنین نوشت.

$$\int_{\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}}} \mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,\varepsilon] = 0. \tag{3128}$$

$$\oint_{\mathbf{b}(\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}})} \mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,\varepsilon = 0. \tag{3129}$$

رابطه یِ (3128) برا یِ هر $\mathbb{P}_{2\,\mathfrak{m}}$، یعنی برا یِ هر زیرخمینه یِ $(2\,\mathfrak{m})$ بُعدی یِ سمت-پذیر ِ فضا-یِ-فاز، درست است. پس انتگرال-ده در طرف ِ چپ ِ آن صفر است:

$$\mathbf{d}\,[\mathbf{i}_{J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}}\,\varepsilon] = 0. \tag{3130}$$

دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری را با رابطه یِ (3002) تعریف میکنم. رابطه یِ (3130) چنین میشود.

$$[\mathbf{div}\,J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}]_{|\,t}\,\varepsilon = 0. \tag{3131}$$

و چون ε ناتکین است،

$$[\mathbf{div}\,J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}]_{|\,t} = 0. \tag{3132}$$

این شکل ِ دیفرانسیلی یِ قضیه یِ لیوویل (بر فضا-یِ-فاز) است. شاخص ِ $|\,t$ نشانه یِ این است که محاسبه در فضا-یِ-فاز (با t یِ ثابت) انجام شده.

همچنین،

$$[\mathbf{div}\,J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}]_{|\,t} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,J)}}\,\frac{\partial}{\partial\,x^a}\,\left\{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,J)}\,J^{a\,b}\,\frac{\partial\,[\mathcal{K}(t,\cdot)]}{\partial\,x^b}\right\}. \tag{3133}$$

و البته،

$$0 = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,J)}}\,\frac{\partial}{\partial\,xa}\,\left\{\sqrt{\mathsf{det}(\delta_e\,J)}\,J^{a\,b}\,\frac{\partial\,[\mathcal{K}(t,\cdot)]}{\partial\,x^b}\right\}. \tag{3134}$$

اینجا هم رُشن است که رابطه یِ (3132)، با مختصات ِ کانُنیک بدیهی ست: از (3133) دیده میشود

$$[\mathbf{div}\,J_{\mathcal{K}(t,\cdot)}]_{|\,t} = J^{a\,b}\,\frac{\partial^2\,\mathcal{K}_\tau}{\partial\,x^a\,\partial\,x^b} + \mathfrak{V}^b\,\frac{\partial\,\mathcal{K}_\tau}{\partial\,x^b}. \tag{3135}$$

که،

$$\mathfrak{V}^b = \frac{1}{\sqrt{\det(\delta_e\, J)}}\, \frac{\partial\, [\sqrt{\det(\delta_e\, J)}\, J^{a\,b}]}{\partial\, x^a}. \tag{3136}$$

چیز ی که ثابت شده عملَن این است که جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (3135)، با مختصات ِ دلبخاه هم صفر است:

$$\mathfrak{V} = 0. \tag{3137}$$

83 تقارن و ثابت- ِ-حرکت

میگویند تابعی یِ I_τ از فضا-زمان- ِ-فاز یک ثابت ِ حرکت است، اگر I_τ بر-لاک ثابت باشد:

$$\acute{I}_\tau \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3138}$$

و البته میگویند تابعی یِ I از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته (یا فضا-یِ-فاز) یک ثابت ِ حرکت است، اگر I بر-لاک ثابت باشد:

$$\acute{I} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3139}$$

یا،

$$\dot{I} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3140}$$

معادله یِ حرکت ِ متناظر با هَمیلتِنی-یِ-فضا-زمانی یِ H_τ نتیجه میدهد

$$\acute{I}_\tau \stackrel{\text{ns}}{=} \{I_\tau, H_\tau\}. \tag{3141}$$

پس I_τ یک ثابت- ِ-حرکت است، اگر و تنها اگر کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ I_τ با H_τ صفر باشد:

$$\{I_\tau, H_\tau\}_\tau = 0. \tag{3142}$$

با I_τ میشود یک خانواده-یِ-تبدیل ِ کانُنیک ِ $\mathfrak{C}$ ساخت، که I_τ مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ $\mathfrak{C}$ است:

$$(\delta\, x^{\mathsf{a}})_{=\mathbf{1}} = \{x^{\mathsf{a}}, I_\tau\}_\tau\, h. \tag{3143}$$

به این ترتیب،

$$(\delta\, H_\tau)_{=\mathbf{1}} = \{H_\tau, I_\tau\}_\tau\, h. \tag{3144}$$

دیده میشود این که کروشه-یِ-پُؤَسُن- ِ-گسترش-یافته یِ I_τ با H_τ صفر باشد، همئرز است با این که H_τ تحت ِ خانواده-یِ-تبدیل- ِ-کانُنیک ی که I_τ مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ آن است ناوردا بماند، یعنی

$$(\delta\, H_\tau)_{=\mathbf{1}} = 0. \tag{3145}$$

پس این که I_τ یک ثابت- ِ-حرکت باشد، رابطه یِ (3138)، همئرز است با این که H_τ تحت ِ خانواده-یِ-تبدیل- ِ-کانُنیک ی که I_τ مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ آن است ناوردا بماند، که رابطه یِ (3145) است.

یک حالت ِ خاص ثابت- ِ-حرکتی ی ست که تابع ی از فقط فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته است، یعنی مستقل از p_0 است:

$$\frac{\partial\, I}{\partial\, p_0} = 0. \tag{3146}$$

معادله یِ تحول برا یِ I چنین است.

$$\acute{I} \stackrel{\text{ns}}{=} \{I, H_\tau\}_\tau. \tag{3147}$$

دیده میشود I یک ثابت- ِ-حرکت است، رابطه یِ (3139)، اگر و تنها اگر

$$\{I, H_\tau\}_\tau = 0. \tag{3148}$$

اما

$$\{I, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial\, I}{\partial\, t}\,\frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, p_0} - \frac{\partial\, I}{\partial\, p_0}\,\frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, t} + \{I, H_\tau\}. \tag{3149}$$

پس، چون مشتقِ I نسبت به p_0 صفر است،

$$\{I, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial I}{\partial t}\,\frac{\partial H_\tau}{\partial p_0} + \{I, H_\tau\}. \tag{3150}$$

و رابطه یِ (3148) چنین میشود.

$$\frac{\partial I}{\partial t}\,\frac{\partial H_\tau}{\partial p_0} + \{I, H_\tau\} = 0. \tag{3151}$$

برا یِ H_τ شکلِ (1831) را به کار میبَرم:

$$H_\tau(t, x, p_0) = \mathfrak{H}(t, \mathsf{p}). \tag{1831}$$

که،

$$\mathsf{p} = p_0 + H(t, x). \tag{1822}$$

به این ترتیب،

$$\{I, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\,\{I, \mathsf{p}\}_\tau. \tag{3152}$$

همچنین،

$$\{I, \mathsf{p}\}_\tau = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\}_\tau. \tag{3153}$$

و

$$\{I, H\}_\tau = \{I, H\}. \tag{3154}$$

پس،

$$\{I, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}}\,\left(\frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\}\right). \tag{3155}$$

به این ترتیب (3148) چنین میشود.

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}} \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} \right) = 0. \tag{3156}$$

مشتق ِ $\mathfrak{H}$ نسبت به p ناصفر است:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}} \neq 0. \tag{1833}$$

پس (3156) همئرز است با

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} = 0. \tag{3157}$$

این که ثابت-بودن ِ I (بر-لاک) با (3157) همئرز است را مستقیمَن هم میشد به دست آورد:

$$\dot{I} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\}. \tag{3158}$$

پس طرف ِ چپ بر-لاک صفر است، اگر طرف ِ راست بر-لاک صفر باشد. اما طرف ِ راست ِ (3158) مستقل از معادله-یِ-حرکت است. پس طرف ِ راست ِ (3158) بر-لاک صفر است، اگر و تنها اگر بیرون- ِ-لاک صفر باشد. و این یعنی ثابت- ِ-حرکت-بودن ِ I با (3157) همئرز است.

اما این که تابعی یِ I از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته یک ثابت- ِ-حرکت باشد، با این همئرز نیست که H تحت ِ خانواده-یِ-تبدیل- ِ-کانُنیک ی که I مولد- ِ-پُوَسُنی یِ آن است ناوردا بماند. دیده میشود

$$(\delta\, \mathsf{p})_{=\mathbf{1}} = \{\mathsf{p}, I\}_\tau\, h. \tag{3159}$$

$$\{I, \mathsf{p}\}_\tau = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, \mathsf{p}\}. \tag{3160}$$

$$\{I, \mathsf{p}\}_\tau = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\}. \tag{3161}$$

پس،

$$(\delta\, \mathsf{p})_{=\mathbf{1}} = -\left(\frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} \right) h. \tag{3162}$$

و رابطه یِ (3157) همئرز است با

$$(\delta\,\mathsf{p})_{=\mathbf{1}} = 0. \tag{3163}$$

تحت ِ تبدیل ی که مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ آن I است (که مستقل از p_0 است)، t تغییر نمیکند. پس شرط ِ (3145)، این که H_τ ناوردا بماند، میشود این که p ناوردا بماند، که هم ان (3163) است.

پس این که I یک ثابت- ِ-حرکت باشد، رابطه یِ (3139) یا (3140)، همئرز است با این که p تحت ِ خانواده-یِ-تبدیل- ِ-کانُنیک ی که I مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ آن است ناوردا بماند، که رابطه یِ (3163) است.

یک حالت ِ خاصتر این است که ثابت- ِ-حرکت ِ I تابع ی از فقط فضا-یِ-فاز باشد، یعنی مستقل از هم p_0 و هم t باشد. در این حالت،

$$\frac{\partial\,I}{\partial\,t} = 0. \tag{3164}$$

و شرط ِ (3157) چنین میشود.

$$\{I, H\} = 0. \tag{3165}$$

چون I و H، هر-دِ، تابع ِ فقط فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند (مستقل از p_0 اند)

$$\{H, I\}_\tau = \{H, I\}. \tag{3166}$$

پس،

$$(\delta\,H)_{=\mathbf{1}} = \{H, I\}\,h. \tag{3167}$$

این که کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ I با H صفر باشد، همئرز است با این که H تحت ِ خانواده-یِ-تبدیل- ِ-کانُنیک ی که I مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ آن است ناوردا بماند، یعنی

$$(\delta\,H)_{=\mathbf{1}} = 0. \tag{3168}$$

به یک شکل ِ دیگر، وقت ی (3164) برقرار است،

$$\{I, p_0\}_\tau = 0. \tag{3169}$$

پس،

$$(\delta\, p_0)_{=\mathbf{1}} = 0. \tag{3170}$$

و،

$$(\delta\, \mathsf{p})_{=\mathbf{1}} = (\delta\, H)_{=\mathbf{1}}. \tag{3171}$$

این نتیجه میدهد وقت ی (3164) برقرار است، (3163) با رابطه یِ (3168) همئرز است.

پس این که I (که مستقل از p_0 و t است) یک ثابت- ِ-حرکت باشد، رابطه یِ (3139) یا (3140)، همئرز است با این که H تحت ِ خانواده-یِ-تبدیل- ِ-کانُنیک ی که I مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ آن است ناوردا بماند، که رابطه یِ (3168) است.

چه در فضا-زمان- ِ-فاز، و چه در فضا-یِ-فاز (ِ گسترش-یافته)، وجود ِ یک ثابت- ِ-حرکت همئرز است با وجود ِ یک خانواده-یِ-تبدیل- ِ-کانُنیک ِ هموار، که مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ تحول را ناوردا نگه میدارد. مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ تحول با پارامتر ِ τ، هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی ست. اگر تبدیل زمان را عوض نکند، مولد- ِ-پؤَسُنی یِ تبدیل با پارامتر ِ زمان هم تحت ِ تبدیل ناوردا میماند. مولد- ِ-پؤَسُنی یِ تبدیل با پارامتر ِ زمان، p است. سرانجام، اگر تبدیل زمان و p_0، هر-دِ، را ناوردا نگه دارد، مولد- ِ-پؤَسُنی یِ تبدیل با پارامتر ِ زمان برا یِ فضا-یِ-فاز هم تحت ِ تبدیل ناوردا میمانَد. مولد- ِ-پؤَسُنی یِ تبدیل با پارامتر ِ زمان برا یِ فضا-یِ-فاز، خُد ِ هَمیلتِنی ست.

9

انتگرال-پذیری

84 هَمیلتِنی یِ مستقل-از-مکان

معادلات-ِ-حرکت ِ متناظر با هَمیلتِنی یِ فضا-زمان یِ H_τ اینها یَند.

$$\acute{q}^\alpha \overset{\text{ns}}{=} \frac{\partial H_\tau}{\partial p_\alpha}. \tag{3172}$$

$$\acute{p}_\alpha \overset{\text{ns}}{=} -\frac{\partial H_\tau}{\partial q^\alpha}. \tag{3173}$$

گیرم هَمیلتِنی-یِ-فضا-زمانی یِ H_τ تابع ِ فقط مئلفِها یِ تکانه است، یعنی H_τ تابع ِ فقط p_0 تا $p_{\mathfrak{m}}$ است، که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. این که H_τ تابع ِ فقط مئلفِها یِ تکانه است، یعنی H_τ به مئلفِها یِ مکان بستگی ندارد. پس مشتق ِ H_τ نسبت به مئلفِها یِ مکان صفر است:

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{3174}$$

با این، معادله-یِ-حرکت ِ (3173) چنین میشود

$$\acute{p}_\alpha \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{3175}$$

این یعنی p_α ها بر-لاک ثابت َند:

$$p_\alpha(\tau) \overset{\text{ns}}{=} p_\alpha(\tau_0). \tag{3176}$$

مشتق ِ H_τ نسبت به p_α را با u^α نشان میدهم:

$$u^\alpha = \frac{\partial H_\tau}{\partial p_\alpha}. \tag{3177}$$

چون H_τ تابع ِ فقط $\underset{\sim}{p}$ است، مشتق ِ H_τ نسبت به p_α هم چنین است. یعنی u^α تابع ِ فقط $\underset{\sim}{p}$ است. معادله-یِ-حرکت ِ (3172) چنین میشود.

$$\acute{q}^\alpha(\tau) \overset{\text{ns}}{=} u^\alpha[\underset{\sim}{p}(\tau)]. \tag{3178}$$

از (3176) نتیجه میشود

$$u^\alpha[\underset{\sim}{p}(\tau)] \overset{\text{ns}}{=} u^\alpha[\underset{\sim}{p}(\tau_0)]. \tag{3179}$$

که یعنی u^α بر-لاک ثابت است:

$$\acute{u}^\alpha \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{3180}$$

پس جواب ِ معادله-یِ-حرکت ِ (3178) چنین میشود.

$$q^\alpha(\tau) \overset{\text{ns}}{=} q^\alpha(\tau_0) + u^\alpha\,(\tau - \tau_0). \tag{3181}$$

مفصلتر،

$$q^\alpha(\tau) \overset{\text{ns}}{=} q^\alpha(\tau_0) + \{u^\alpha[\underset{\sim}{p}(\tau)]\}\,(\tau - \tau_0). \tag{3182}$$

یا، با استفاده از (3178)،

$$q^\alpha(\tau) \overset{\text{ns}}{=} q^\alpha(\tau_0) + \{u^\alpha[\underset{\sim}{p}(\tau_0)]\}\,(\tau - \tau_0). \tag{3183}$$

بسته یِ (3176) و (3183) چنین میشود.

$$\underset{\sim}{p}(\tau) \overset{\text{ns}}{=} \underset{\sim}{p}(\tau_0). \tag{3184}$$

$$\underset{\sim}{q}(\tau) \overset{\text{ns}}{=} \underset{\sim}{q}(\tau_0) + \{\underset{\sim}{u}[\underset{\sim}{p}(\tau_0)]\}\,(\tau - \tau_0). \tag{3185}$$

روابطِ (3176) و (3183)، یا بسته (3184) و (3185)، جوابِ معادلاتِ-حرکت َند در حالت ی که مشتقِ هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی نسبت به مئلفِها یِ مکان صفر است.

رُشن است که نتیجه ای مشابه، با $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{p}}$ به جا یِ $\underset{\sim}{q}$ و $\underset{\sim}{p}$، هم برقرار است، که $(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})$ یک جایگشت-کانُنیکِ $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$ است:

$$\mathrm{q}^\alpha = q^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{I}. \tag{2712}$$

$$\mathrm{q}^\alpha = p_\alpha, \qquad \alpha \notin \mathbb{I}. \tag{2713}$$

$$\mathrm{p}_\alpha = p_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{I}. \tag{2714}$$

$$\mathrm{p}_\alpha = -q^\alpha, \quad \alpha \notin \mathbb{I}. \tag{2715}$$

اگر وقت ی هَمیلتنی-یِ-فضا-زمانی یِ H_τ بر حسبِ $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{p}}$ به جا یِ $\underset{\sim}{q}$ و $\underset{\sim}{p}$ نوشته شود مشتقِ H_τ نسبت به q^α ها صفر باشد هم، نتیجه ای مشابه به دست میئاید. یعنی اگر

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial \mathrm{q}^\alpha} = 0, \tag{3186}$$

آنگاه،

$$\underset{\sim}{\mathrm{p}}(\tau) \overset{\text{ns}}{=} \underset{\sim}{\mathrm{p}}(\tau_0). \tag{3187}$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{q}}(\tau) \overset{\text{ns}}{=} \underset{\sim}{\mathrm{q}}(\tau_0) + \{\underset{\sim}{\mathrm{u}}[\underset{\sim}{p}(\tau_0)]\}\,(\tau - \tau_0). \tag{3188}$$

که،

$$\mathrm{u}^\alpha = \frac{\partial H_\tau}{\partial \mathrm{p}_\alpha}. \tag{3189}$$

و البته $\underset{\sim}{\mathrm{u}}$ بر-لاک ثابت است:

$$\acute{\mathrm{u}}^\alpha \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{3190}$$

به هم ین ترتیب، معادلات- ِ-حرکت ِ متناظر با هَمیلتِنی یِ H اینها یَند.

$$\dot{q}^i \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{1683}$$

$$\dot{p}_i \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1684}$$

گیرم هَمیلتِنی یِ H تابع ِ فقط زمان و مئلفِها یِ تکانه است، یعنی H تابع ِ فقط t و p_1 تا $p_{\mathfrak{m}}$ است، که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. این که H تابع ِ فقط مئلفِها یِ تکانه است، یعنی H به مئلفِها یِ مکان بستگی ندارد. پس مشتق ِ H نسبت به مئلفِها یِ مکان صفر است:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0. \tag{3191}$$

با این، معادله-یِ-حرکت ِ (1684) چنین میشود

$$\dot{p}_i \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3192}$$

این یعنی p_i ها بر-لاک ثابت َند:

$$p_i(t) \stackrel{\text{ns}}{=} p_i(0). \tag{3193}$$

مشتق ِ H نسبت به p_i را با v^i نشان میدهم:

$$v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{3194}$$

معادله یِ حرکت ِ (1683) چنین میشود.

$$\dot{q}^i(t) \stackrel{\text{ns}}{=} v^i[t, p(t)]. \tag{3195}$$

از (3193) دیده میشود

$$v^i[t, p(t)] \stackrel{\text{ns}}{=} v^i[t, p(t_0)]. \tag{3196}$$

بسته،

$$v[t, p(t)] \stackrel{\text{ns}}{=} v[t, p(t_0)]. \tag{3197}$$

به این ترتیب (3195) چنین میشود.

$$\dot{q}^i(t) \stackrel{\text{ns}}{=} v^i[t, p(t_0)]. \tag{3198}$$

که نتیجه میدهد

$$q^i(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q^i(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v^i[s, p(t_0)]. \tag{3199}$$

بسته یِ (3193) و (3199) چنین میشود.

$$p(t) \stackrel{\text{ns}}{=} p(0). \tag{3200}$$

$$q(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v[s, p(t_0)]. \tag{3201}$$

گیرم H تابع ِ فقط p_i ها ست، یعنی به زمان هم وابسته نیست:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{3202}$$

در این صورت v^i ها تابع ِ فقط p میشوند، یعنی مستقل از زمان هم میشوند:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} = 0. \tag{3203}$$

و (3196) چنین میشود.

$$v^i[p(t)] \stackrel{\text{ns}}{=} v^i[p(t_0)]. \tag{3204}$$

که یعنی v^i ها بر-لاک ثابت میشوند:

$$\dot{v}^i \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3205}$$

در این صورت (3199) چنین میشود.

$$q^i(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q^i(t_0) + \{v^i[p(t_0)]\}\, (t - t_0). \tag{3206}$$

بسته،

$$q(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q(t_0) + \{v[p(t_0)]\}\,(t - t_0). \tag{3207}$$

روابط ِ (3193) و (3199)، یا بسته (3200) و (3201)، جواب ِ معادلات- ِ-حرکت َند در حالت ی که مشتق ِ هَمیلتِنی نسبت به مئلفِها یِ مکان صفر است. اگر، علاوه بر این، مشتق ِ هَمیلتِنی نسبت به زمان هم صفر باشد، جواب ِ معادلات- ِ-حرکت (3193) و (3206)، یا بسته، (3200) و (3207) میشود.

رُشن است که نتیجه ای مشابه، با q و p به جا یِ q و p، هم برقرار است، که (q, p) یک جایگشت- ِ-کانُنیک ِ (q, p) است: اگر وقت ی هَمیلتنی یِ H بر حسب ِ q و p به جا یِ q و p نوشته شود مشتق ِ H نسبت به q^i ها صفر باشد هم، نتیجه ای مشابه به دست میئاید. یعنی اگر

$$\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^i} = 0, \tag{3208}$$

آنگاه،

$$\mathrm{p}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathrm{p}(t_0). \tag{3209}$$

$$\mathrm{q}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathrm{q}(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \mathrm{v}[s, p(t_0)]. \tag{3210}$$

که،

$$\mathrm{v}^i = \frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}_i}. \tag{3211}$$

و اگر، علاوه بر این، مشتق ِ H نسبت به t هم صفر باشد، v هم بر-لاک ثابت است:

$$\dot{\mathrm{v}}^i \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3212}$$

و (3210) چنین میشود.

$$\mathrm{q}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathrm{q}(t_0) + \{\mathrm{v}[p(t_0)]\}\,(t - t_0). \tag{3213}$$

85 سیستمِ انتگرال-پذیر

سیستم ی را بررسی میکنم که بُعدِ فضا-یِ-فازِ متناظر با آن $(2\,\mathfrak{m})$، و هَمیلتِنی-یِ-فضا-زمانی یِ متناظر با آن H_τ است. میگویم این سیستم انتگرال-پذیر (یا حل-پذیر) است، وقت ی $(\mathfrak{m}+1)$ تابعی از فضا-زمان-ِ-فاز هستند که پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، و کروشه-یِ-پُوَسُن-ِ-گسترش-یافته یِ هر یک از آنها با H_τ صفر است. یعنی تابعیها یِ I_0 تا $I_\mathfrak{m}$ از فضا-زمان-ِ-فاز هستند که مستقل-از-هم َند و

$$\{I_\alpha, I_\beta\}_\tau = 0. \tag{3214}$$

$$\{I_\alpha, H_\tau\}_\tau = 0. \tag{3215}$$

این که I_0 تا $I_\mathfrak{m}$ پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، نتیجه میدهد میشود I_0 تا $I_\mathfrak{m}$ را مئلفِها یِ تکانه برا یِ یک دسته مختصاتِ کانُنیک گرفت. یعنی q'^α ها یی هستند که $(\underset{\sim}{q}', \underset{\sim}{I})$ کانُنیک است. یا $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$ کانُنیک است، که $\underset{\sim}{p}'$ هم ان $\underset{\sim}{I}$ تعریف شده:

$$p'_\alpha = I_\alpha. \tag{3216}$$

به این ترتیب،

$$\{p'_\alpha, H_\tau\}_\tau = 0. \tag{3217}$$

که، چون $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{p})$ کانُنیک است، یعنی

$$-\frac{\partial H_\tau}{\partial q'^\alpha} = 0. \tag{3218}$$

این هم ان (3174)، با $\underset{\sim}{q}'$ و $\underset{\sim}{p}'$ به جا یِ $\underset{\sim}{q}$ و $\underset{\sim}{p}$ است:

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{3174}$$

پس نتیجه میشود

$$\underset{\sim}{p}'(\tau) \overset{\text{ns}}{=} \underset{\sim}{p}'(\tau_0). \tag{3219}$$

$$\underset{\sim}{q}'(\tau) \overset{\text{ns}}{=} \underset{\sim}{q}'(\tau_0) + \{\underset{\sim}{u}'[\underset{\sim}{p}'(\tau)_0]\}\,(\tau - \tau_0). \tag{3220}$$

که،

$$u'^{\alpha} = \frac{\partial H_\tau}{\partial p'_\alpha}. \tag{3221}$$

اتتگرال-پذیری را میشود بر حسب ِ هَمیلتنی و تابعیها یِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته، هم بیان کرد. سیستم ی را بررسی میکنم که بُعد ِ فضا-یِ-فاز ِ متناظر با آن $(2\,\mathfrak{m})$، و هَمیلتِنی یِ متناظر با آن H است. در حالت ی خاص، میگویم این سیستم انتگرال-پذیر (یا حل-پذیر) است، وقت ی $\mathfrak{m}$ تابعی از فضا-یِ-فاز هستند که پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، و کروشه-یِ-پُوَسُن ِ هر یک از آنها با H صفر است. یعنی تابعیها یِ I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ از فضا-یِ-فاز هستند که مستقل-از-هم َند و

$$\{I_i, I_j\} = 0. \tag{3222}$$

$$\{I_i, H\} = 0. \tag{3223}$$

این که I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، نتیجه میدهد میشود I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ را مئلفِها یِ تکانه برا یِ یک دسته مختصات ِ کانُنیک گرفت. یعنی q'^i ها یی هستند که (q', I) کانُنیک است. یا (q', p') کانُنیک است، که p' هم ان I تعریف شده:

$$p'_i = I_i. \tag{3224}$$

به این ترتیب،

$$\{p'_i, H\} = 0. \tag{3225}$$

که، چون (q', p') کانُنیک است، یعنی

$$-\frac{\partial H}{\partial q'^i} = 0. \tag{3226}$$

این هم ان (3191)، با q' و p' به جا یِ q و p است:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0. \tag{3191}$$

پس نتیجه میشود

$$p'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} p'(t_0). \tag{3227}$$

$$q'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q'(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v'[s, p'(t_0)] \tag{3228}$$

که،

$$v'^i = \frac{\partial\, H}{\partial\, p'_i}. \tag{3229}$$

و اگر، علاوه بر این، مشتقِ H نسبت به t هم صفر باشد، v' بر لاک ثابت است:

$$\dot{v}' \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3230}$$

و (3228) چنین میشود.

$$q'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q'(t_0) + \{v'[p'(t_0)]\}\, (t - t_0). \tag{3231}$$

حالتِ کلیتر این است که تابعیهایِ مستقل-از-هم ی که قرار است بر-لاک ثابت بمانند، تابعیها یی از فضا-یِ-فازِ گسترش-یافته باشند، یعنی مشتقِشان نسبت به زمان لزومَن صفر نباشد. در این حالت (3222) همچنان برقرار است. اما (3223) با این جایگزین میشود.

$$\frac{\partial\, I_i}{\partial\, t} + \{I_i, H\} = 0. \tag{3232}$$

I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند. اما برا یِ این که بشود I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ را مئلفِها یِ تکانه برا یِ یک دسته مختصاتِ کانُنیک گرفت، باید نشان داد تحدیدِ I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ به هر زمانِ ثابت هم مستقل-از-هم َند. یعنی $\{[i, (\mathbf{d}\, I_i)_{|\, t}] \mid i\}$ خطی-مستقل است. برا یِ اثبات، یک ترکیبِ خطی از $\{[i, (\mathbf{d}\, I_i)_{|\, t}] \mid i\}$ را صفر میگذارم و نشان میدهم ضریبها یِ این ترکیب صفر َند. گیرم $\mathfrak{a}^i$ ها یی هستند که

$$\mathfrak{a}^i\, (\mathbf{d}\, I_i)_{|\, t} = 0. \tag{3233}$$

اما

$$\{I_i, H\} = (\mathbf{d}\, I_i)_{|\, t}\, J_H. \tag{3234}$$

پس (3233) نتیجه میدهد

$$\mathfrak{a}^i\,\{I_i, H\} = 0. \tag{3235}$$

از ترکیب ِ این با (3232) معلوم میشود

$$\mathfrak{a}^i\,\frac{\partial\, I_i}{\partial\, t} = 0. \tag{3236}$$

همچنین،

$$\mathbf{d}\, I_i = \frac{\partial\, I_i}{\partial\, t}\,\mathbf{d}\, t + (\mathbf{d}\, I_i)_{|\,t}. \tag{3237}$$

این، همراه با (3233) و (3236)، نتیجه میدهد

$$\mathfrak{a}^i\,\mathbf{d}\, I_i = 0. \tag{3238}$$

اما I_1 تا I_{m} مستقل-از-هم َند. پس $\{[i, (\mathbf{d}\, I_i)] \mid i\}$ خطی-مستقل است. در نتیجه $\mathfrak{a}^i$ ها صفر َند. این یعنی تحدید ِ I_1 تا I_{m} به هر زمان ِ ثابت هم مستقل-از-هم َند.

به این ترتیب، میشود I_1 تا I_{m} را مئلفِها یِ تکانه برا یِ یک دسته مختصات ِ کانُنیک گرفت. یعنی q'^i ها یی هستند که (q', I) کانُنیک است. یا (q', p') کانُنیک است، که p' هم ان I تعریف شده: رابطه یِ (3224). اما (3225) با این جایگزین میشود.

$$\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t} + \{p'_i, H\} = 0. \tag{3239}$$

و (3226) با این جایگزین میشود.

$$\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t} - \frac{\partial\, H}{\partial\, q'^i} = 0. \tag{3240}$$

نشان میدهم (3240) را هم میشود، با یک هَمیلتِنی یِ H' به جا یِ H، به شکل ِ (3226) دراورد.

(q, p) را یک جایگشت- ِ-کانُنیک ِ (q, p) میگیرم، چنان که q^1 تا q^{m} و p'_1 تا p'_{m} مستقل-از-هم َند. نمیگیرم که p'_i ها ثابت- ِ-حرکت َند. یعنی (3239) لزومَن برقرار نیست. تابعی-یِ-مولد ِ

متناظر با تبدیل ِ کانُنیک ی که (q,p) را به (q',p') تبدیل میکند را با $\tilde{\Upsilon}$ نشان میدهم، که $\tilde{\Upsilon}$ تابع ی از زمان و q و p' است:

$$\mathrm{p}_i = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}^i}\right)_{t,p'}. \tag{3241}$$

$$q'^i = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3242}$$

مشتق ِ $\tilde{\Upsilon}$ نسبت به زمان را با $\mathcal{F}$ نشان میدهم:

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3243}$$

دیده میشود

$$\{p'_i,\mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\{p'_i,\mathrm{q}^j\} + \left(\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}}\{p'_i,p'_j\}. \tag{3244}$$

p'_i ها پُوَسُنی یَند:

$$\{p'_i,p'_j\} = 0. \tag{3245}$$

پس

$$\{p'_i,\mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\{p'_i,\mathrm{q}^j\}. \tag{3246}$$

همچنین،

$$\{p'_i,\mathrm{q}^j\} = -\left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3247}$$

به این ترتیب،

$$\{p'_i,\mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3248}$$

از (3243) دیده میشود

$$\left(\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\left(\frac{\partial}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}\tilde{\Upsilon}. \tag{3249}$$

که نتیجه میدهد

$$\left(\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}\,\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\,\tilde{\Upsilon}. \tag{3250}$$

پس، با استفاده از (3241)،

$$\left(\frac{\partial\,\mathcal{F}}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_j}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3251}$$

و (3248) چنین میشود.

$$\{p'_i,\mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_j}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}\,\left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3252}$$

اما،

$$\left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}} = -\left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}\,\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_j}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3253}$$

پس،

$$\{p'_i,\mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}}. \tag{3254}$$

یا،

$$\{p'_i,\mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t}\right)_{x}. \tag{3255}$$

پس، متناظر با هر تابعی یِ $\mathfrak{X}$ از فضا-زمان- ِ-گسترش-یافته،

$$\{p'_i,\mathfrak{X}+\mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t}\right)_{x} + \{p'_i,\mathfrak{X}\}. \tag{3256}$$

از جمله،

$$\{p'_i,H+\mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t}\right)_{x} + \{p'_i,H\}. \tag{3257}$$

یا،

$$\{p'_i, H'\} = \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t}\right)_x + \{p'_i, H\}. \tag{3258}$$

که،

$$H' = H + \mathcal{F}. \tag{3259}$$

یعنی،

$$H' = H + \left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3260}$$

معادله یِ حرکت برا یِ p' را میشود چنین نوشت.

$$\dot{p}'_i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t}\right)_x + \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,\mathrm{p}} \dot{\mathrm{q}}^j + \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, \mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \dot{\mathrm{p}}_j. \tag{3261}$$

که میشود

$$\dot{p}'_i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t}\right)_x + \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,\mathrm{p}} \{\mathrm{q}^j, H\} + \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, \mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \{\mathrm{p}_j, H\}. \tag{3262}$$

یا،

$$\dot{p}'_i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t}\right)_x + \{p'_i, H\}. \tag{3263}$$

این هم، با استفاده از (3255)، چنین میشود.

$$\dot{p}'_i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \{p'_i, \mathcal{F}\} + \{p'_i, H\}. \tag{3264}$$

پس،

$$\dot{p}'_i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \{p'_i, H'\}. \tag{3265}$$

به شکل ی مشابه،

$$\{\mathrm{q}^i, \mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\, \mathcal{F}}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \{\mathrm{q}^i, \mathrm{q}^j\} + \left(\frac{\partial\, \mathcal{F}}{\partial\, p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \{\mathrm{q}^i, p'_j\}. \tag{3266}$$

اما،

$$\{\mathrm{q}^i, \mathrm{q}^j\} = 0. \tag{3267}$$

پس،

$$\{\mathrm{q}^i, \mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \{\mathrm{q}^i, p'_j\}. \tag{3268}$$

همچنین،

$$\{\mathrm{q}^i, p'_j\} = \left(\frac{\partial \mathrm{q}^i}{\partial q'^j}\right)_{t,p'}. \tag{3269}$$

به این ترتیب،

$$\{\mathrm{q}^i, \mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial \mathrm{q}^i}{\partial q'^j}\right)_{t,p'}. \tag{3270}$$

از (3243) دیده میشود

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p'_j}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} \tilde{\Upsilon}. \tag{3271}$$

که نتیجه میدهد

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} \left(\frac{\partial}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \tilde{\Upsilon}. \tag{3272}$$

پس، با استفاده از (3242)،

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} = \left(\frac{\partial q'^j}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3273}$$

و (3270) چنین میشود.

$$\{\mathrm{q}^i, \mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial q'^j}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} \left(\frac{\partial \mathrm{q}^i}{\partial q'^j}\right)_{t,p'}. \tag{3274}$$

اما،

$$\left(\frac{\partial\,\mathrm{q}^i}{\partial\,t}\right)_{q',p'} = -\left(\frac{\partial\,\mathrm{q}^i}{\partial\,q'^j}\right)_{t,p'}\left(\frac{\partial\,q'^j}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3275}$$

پس،

$$\{\mathrm{q}^i,\mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial\,\mathrm{q}^i}{\partial\,t}\right)_{q',p'}. \tag{3276}$$

یا،

$$\{\mathrm{q}^i,\mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial\,\mathrm{q}^i}{\partial\,t}\right)_{x'}. \tag{3277}$$

پس،

$$\{\mathrm{q}^i,H'\} = -\left(\frac{\partial\,\mathrm{q}^i}{\partial\,t}\right)_{x'} + \{\mathrm{q}^i,H\}. \tag{3278}$$

معادله یِ حرکت برا یِ q را میشود چنین نوشت.

$$\dot{\mathrm{q}}^i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \{\mathrm{q}^i,H\}. \tag{3279}$$

که میشود

$$\dot{\mathrm{q}}^i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} -\{\mathrm{q}^i,\mathcal{F}\} + \{\mathrm{q}^i,H'\}. \tag{3280}$$

یا، با استفاده از (3277)،

$$\dot{\mathrm{q}}^i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,\mathrm{q}^i}{\partial\,t}\right)_{x'} + \{\mathrm{q}^i,H'\}. \tag{3281}$$

برا یِ q' هم،

$$\{q'^i,\mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\{\mathrm{q}^j,\mathcal{F}\} + \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}}\{p'_j,\mathcal{F}\}. \tag{3282}$$

که، با استفاده از (3254) و (3276)، میشود

$$\{q'^i,\mathcal{F}\}=-\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\left(\frac{\partial\,\mathrm{q}^j}{\partial\,t}\right)_{q',p'}+\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}}\left(\frac{\partial\,p'_j}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}}. \tag{3283}$$

اما،

$$\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}=-\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\left(\frac{\partial\,\mathrm{q}^j}{\partial\,t}\right)_{q',p'}. \tag{3284}$$

پس،

$$\{q'^i,\mathcal{F}\}=\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}+\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}}\left(\frac{\partial\,p'_j}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}}. \tag{3285}$$

که نتیجه میدهد

$$\{q'^i,\mathcal{F}\}=\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}}. \tag{3286}$$

یا،

$$\{q'^i,\mathcal{F}\}=\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{x}. \tag{3287}$$

پس،

$$\{q'^i,H'\}=\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{x'}+\{q'^i,H\}. \tag{3288}$$

معادله یِ حرکت برا یِ q' را میشود چنین نوشت.

$$\dot{q}'^i\stackrel{\mathrm{ns}}{=}\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{x}+\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,\mathrm{p}}\dot{\mathrm{q}}^j+\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}\dot{\mathrm{p}}_j. \tag{3289}$$

که میشود

$$\dot{q}'^i\stackrel{\mathrm{ns}}{=}\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{x}+\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,\mathrm{p}}\{\mathrm{q}^j,H\}+\left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}\{\mathrm{p}_j,H\}. \tag{3290}$$

یا،

$$\dot{q}'^i \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial q'^i}{\partial t}\right)_x + \{q'^i, H\}. \tag{3291}$$

این هم، با استفاده از (3287)، چنین میشود.

$$\dot{q}'^i \stackrel{\text{ns}}{=} \{q'^i, \mathcal{F}\} + \{q'^i, H\}. \tag{3292}$$

پس،

$$\dot{q}'^i \stackrel{\text{ns}}{=} \{q'^i, H'\}. \tag{3293}$$

سرانجام،

$$\{\mathrm{p}_i, \mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \{\mathrm{q}^j, \mathcal{F}\} + \left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \{p'_j, \mathcal{F}\}. \tag{3294}$$

که، با استفاده از (3254) و (3276)، میشود

$$\{q'^i, \mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial \mathrm{q}^j}{\partial t}\right)_{q',p'} + \left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial p'_j}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}}. \tag{3295}$$

اما،

$$\left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} = -\left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial p'_j}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}}. \tag{3296}$$

پس،

$$\{\mathrm{p}_i, \mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial \mathrm{q}^j}{\partial t}\right)_{q',p'} - \left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3297}$$

که نتیجه میدهد

$$\{\mathrm{p}_i, \mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial \mathrm{p}_i}{\partial t}\right)_{q',p'}. \tag{3298}$$

یا،

$$\{\mathrm{p}_i, \mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,t}\right)_{x'}. \tag{3299}$$

پس،

$$\{\mathrm{p}_i, H'\} = -\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,t}\right)_{x'} + \{\mathrm{p}_i, H\}. \tag{3300}$$

معادله یِ حرکت برا یِ p را میشود چنین نوشت.

$$\dot{\mathrm{p}}_i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \{\mathrm{p}_i, H\}. \tag{3301}$$

که میشود

$$\dot{\mathrm{p}}_i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} -\{\mathrm{p}_i, \mathcal{F}\} + \{\mathrm{p}_i, H'\}. \tag{3302}$$

یا، با استفاده از (3299)،

$$\dot{\mathrm{p}}_i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,t}\right)_{x'} + \{\mathrm{p}_i, H'\}. \tag{3303}$$

روابط ی که به دست آمدند را میشود چنین خلاصه کرد:

روابط ِ (3255) و (3287) میشوند

$$\{x'^a, \mathcal{F}\} = \left(\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\right)_{x}. \tag{3304}$$

روابط ِ (3258) و (3288) میشوند

$$\{x'^a, H'\} = \left(\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,t}\right)_{x} + \{x'^a, H\}. \tag{3305}$$

روابط ِ (3277) و (3299) میشوند

$$\{x^a, \mathcal{F}\} = -\left(\frac{\partial\,x^a}{\partial\,t}\right)_{x'}. \tag{3306}$$

روابطِ (3278) و (3300) میشوند

$$\{x^a, H'\} = -\left(\frac{\partial\, x^a}{\partial\, t}\right)_{x'} + \{x^a, H\}. \tag{3307}$$

روابطِ (3263) و (3291) میشوند

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, x'^a}{\partial\, t}\right)_{x} + \{x'^a, H\}. \tag{3308}$$

روابطِ (3265) و (3293) میشوند

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x'^a, H'\}. \tag{3309}$$

روابطِ (3279) و (3301) میشوند

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x^a, H\}. \tag{1777}$$

روابطِ (3281) و (3303) میشوند

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, x^a}{\partial\, t}\right)_{x'} + \{x^a, H'\}. \tag{3310}$$

کلیتر، گیرم $\mathfrak{X}$ یک تابعی با دامنه یِ فضا-یِ-فاز-ِ-گسترش-یافته است. دیده میشود

$$\left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}} = \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}}. \tag{3311}$$

$$\left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, t}\right)_{q',p'} = \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, \mathrm{q}^i}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial\, \mathrm{q}^i}{\partial\, t}\right)_{q',p'}. \tag{3312}$$

به این ترتیب،

$$\left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, t}\right)_{x} - \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, t}\right)_{x'} = \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t}\right)_{x} - \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, \mathrm{q}^i}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial\, \mathrm{q}^i}{\partial\, t}\right)_{x'}. \tag{3313}$$

که، با استفاده از (3255) و (3277)، چنین میشود.

$$\left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, t}\right)_{x} - \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, t}\right)_{x'} = \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \{p'_i, \mathcal{F}\} + \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, \mathrm{q}^i}\right)_{t,p'} \{\mathrm{q}^i, \mathcal{F}\}. \tag{3314}$$

به این ترتیب،

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_x - \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_{x'} = \{\mathfrak{X}, \mathcal{F}\}. \tag{3315}$$

یعنی،

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_x - \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_{x'} = \{\mathfrak{X}, H' - H\}. \tag{3316}$$

پس،

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_x + \{\mathfrak{X}, H\} = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_{x'} + \{\mathfrak{X}, H'\}. \tag{3317}$$

این نشان میدهد، چنان که انتظار میرود، که دُ-رابطه یِ زیر همئرز َند.

$$\dot{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_x + \{\mathfrak{X}, H\}. \tag{3318}$$

$$\dot{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_{x'} + \{\mathfrak{X}, H'\}. \tag{3319}$$

رابطه یِ (3309)، که هم ان روابط ِ (3265) و (3293) است، یعنی هَمیلتِنی یِ متناظر با مختصات ِ پریم-دار H' است. (3319) هم هم ین را نشان میدهد. انتگرال-پذیری را، برا یِ سیستم ی که بُعد ِ فضا-یِ-فاز ِ متناظر با آن $(2\,\mathfrak{m})$ است و هَمیلتِنی یِ متناظر با آن H است، این تعریف میکنم که $\mathfrak{m}$ تابعی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته هستند که پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، و ثابت- ِ-حرکت َند، یعنی بر-لاک ثابت َند. این که I_i ها بر-لاک ثابت َند، یعنی (3232) برقرار است. p' را هم ان I تعریف میکنم: رابطه یِ (3224). به این ترتیب رابطه یِ (3232) به شکل ِ (3239) در میئاید، که با استفاده از (3258) میشود

$$\{p'_i, H'\} = 0. \tag{3320}$$

این یعنی

$$-\frac{\partial\,H'}{\partial\,q'^i} = 0. \tag{3321}$$

مفصلتر،

$$-\left(\frac{\partial H'}{\partial q'^i}\right)_{t,p'} = 0. \tag{3322}$$

رابطه یِ (3320) جایگزینِ (3225) است. رابطه یِ (3321)، یا (3322)، هم جایگزینِ (3226) است. به این ترتیب، این حالتِ کلی یِ انتگرال-پذیری مثلِ هم ان حالتِ خاص است، با این تفاوت که H (در حالتِ خاص) با H' (در حالتِ کلی) جایگزین شده. نتیجه میشود

$$p'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} p'(t_0). \tag{3323}$$

$$q'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q'(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v'[s, p'(t_0)]. \tag{3324}$$

که،

$$v'^i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}. \tag{3325}$$

یعنی

$$v'^i = \left(\frac{\partial H'}{\partial p'_i}\right)_{t,q'}. \tag{3326}$$

H'، به عنوانِ تابع ی از t و q' و p'، مستقل از q' است. پس v' هم، به عنوانِ تابع ی از t و q' و p'، مستقل از q' است. البته v' را بر حسبِ t و x هم میشود حساب کرد:

$$v'^i = \{q'^i, H'\}. \tag{3327}$$

که، با استفاده از (3288)، میشود

$$v'^i = \left(\frac{\partial q'^i}{\partial t}\right)_x + \{q'^i, H\}. \tag{3328}$$

مشتقِ زمانی یِ کاملِ هَمیلتِنی با مشتقِ پارِئی یِ هَمیلتِنی نسبت به زمان برابر است:

$$\dot{H} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1839}$$

پس اگر هَمیلتِنی مستقل-از-زمان باشد، هَمیلتِنی بر-لاک ثابت میمانَد. یعنی گیرم مشتق ِ پارِئی یِ هَمیلتِنی نسبت به زمان صفر است:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{3202}$$

در این صورت،

$$\dot{H} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3329}$$

وقت ی هَمیلتِنی مستقل-از-زمان است، حتمَن یک ثابت- ِ-حرکت هست، که خُد ِ هَمیلتِنی ست. به شکل یِ مشابه، هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی مستقل از τ است:

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} = 0. \tag{3330}$$

پس هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی بر-لاک ثابت میمانَد:

$$\acute{H}_\tau \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3331}$$

این یعنی با فضا-زمان- ِ-فاز، همیشه یک ثابت- ِ-حرکت هست. آیا چنین است که با فضا-زمان- ِ-فاز، ثابت- ِ-حرکتها همیشه (نسبت به فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته) یک ی بیشتر است؟ نشان میدهم چنین است، و این که ثابت- ِ-حرکتها یِ فضا-زمان- ِ-فاز را میشود به شکل ی نوشت که یک ی و فقط یک ی شامل ِ p_0 است (مشتق َ ش نسبت به p_0 ناصفر است) و بقیه مستقل از p_0 اند، یعنی تابعیها یی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند.

86 کاهش از فضا-زمان- ِ-فاز به فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته

H_τ به شکل ِ (1831) است:

$$H_\tau(t, x, p_0) = \mathfrak{H}(t, \mathsf{p}). \tag{1831}$$

که

$$\mathsf{p} = p_0 + H(t, x). \tag{1822}$$

و مشتق ِ $\mathfrak{H}$ نسبت به p صفر نیست:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathsf{p}} \neq 0. \tag{1833}$$

پس p را میشود بر حسب ِ $\mathfrak{H}$ و t حساب کرد. یعنی یک تابعی یِ $\mathfrak{A}$ هست که

$$\mathsf{p} = \mathfrak{A}(t, H_\tau). \tag{3332}$$

در واقع،

$$\mathfrak{A}(t, \cdot) = [\mathfrak{H}(t, \cdot)]^{-1}. \tag{3333}$$

یا،

$$\mathfrak{A}(t, \mathfrak{x}) = [\mathfrak{H}(t, \cdot)]^{-1}(\mathfrak{x}). \tag{3334}$$

پس،

$$\mathsf{p} = [\mathfrak{H}(t, \cdot)]^{-1}(H_\tau). \tag{3335}$$

به این ترتیب میشود p_0 را بر حسب ِ t و x و H_τ حساب کرد:

$$p_0 = \mathfrak{A}(t, H_\tau) - H(t, x). \tag{3336}$$

یعنی،

$$p_0 = [\mathfrak{H}(t, \cdot)]^{-1}(H_\tau) - H(t, x). \tag{3337}$$

پس هر تابع از فضا-زمان- ِ-فاز را میشود بر حسب ِ (t, x)، یعنی مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته، و H_τ نوشت:

$$\mathfrak{X}(t, x, p_0) = \tilde{\mathfrak{X}}(t, x, H_\tau). \tag{3338}$$

که یعنی،

$$\mathfrak{X}(t,x,p_0)=\tilde{\mathfrak{X}}\{t,x,\mathfrak{H}[t,p_0+H(t,x)]\}. \tag{3339}$$

یا،

$$\tilde{\mathfrak{X}}(t,x,H_\tau)=\mathfrak{X}\{t,x,[\mathfrak{H}(t,\cdot)]^{-1}(H_\tau)-H(t,x)\}. \tag{3340}$$

برا یِ سادِگی، $\tilde{\mathfrak{X}}$ را با خُد ِ $\mathfrak{X}$ نشان میدهم.

گیرم $\mathfrak{X}$ یک تابع از فضا-زمان- ِ-فاز است. دیده میشود

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{X},H_\tau\}_\tau=&\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_{x,H_\tau}\{t,H_\tau\}_\tau+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,x^a}\right)_{t,H_\tau}\{x^a,H_\tau\}_\tau\\&+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,H_\tau}\right)_{t,x}\{H_\tau,H_\tau\}_\tau.\end{aligned} \tag{3341}$$

جمله یِ آخر در طرف ِ راست صفر است. پس،

$$\{\mathfrak{X},H_\tau\}_\tau=\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_{x,H_\tau}\{t,H_\tau\}_\tau+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,x^a}\right)_{t,H_\tau}\{x^a,H_\tau\}_\tau. \tag{3342}$$

تحدید ِ $\mathfrak{X}$ به ($\mathfrak{Y}$ برابر با یک ثابت) را با $\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}$ نشان میدهم. یعنی $\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}$ هم ان $\mathfrak{X}$ است که در آن با $\mathfrak{Y}$ مثل ِ یک ثابت رفتار شده. از جمله،

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\mathfrak{x}}\right)_{\mathfrak{Y}}=\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,\mathfrak{x}}. \tag{3343}$$

و رابطه یِ (3342) چنین میشود.

$$\{\mathfrak{X},H_\tau\}_\tau=\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x\{t,H_\tau\}_\tau+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,x^a}\right)_t\{x^a,H_\tau\}_\tau. \tag{3344}$$

همچنین، H_τ تابع ی از t و p است. به این ترتیب،

$$\{x^\alpha,H_\tau\}_\tau=\{x^\alpha,t\}_\tau\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,t}\right)_{\mathsf{p}}+\{x^\alpha,\mathsf{p}\}_\tau\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,\mathsf{p}}\right)_t. \tag{3345}$$

و

$$\{x^\alpha, t\}_\tau = 0. \tag{3346}$$

پس،

$$\{x^\alpha, H_\tau\}_\tau = \{x^\alpha, \mathsf{p}\}_\tau \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3347}$$

و البته،

$$\{t, \mathsf{p}\}_\tau = 1. \tag{3348}$$

$$\{x^a, \mathsf{p}\}_\tau = \{x^a, H\}. \tag{3349}$$

به این ترتیب،

$$\{t, H_\tau\}_\tau = \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3350}$$

یا،

$$\{t, H_\tau\}_\tau = \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial p_0}\right)_{t,x}. \tag{3351}$$

و

$$\{x^a, H_\tau\}_\tau = \{x^a, H\} \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3352}$$

یا،

$$\{x^a, H_\tau\}_\tau = \{x^a, H\} \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial p_0}\right)_{t,x}. \tag{3353}$$

روابطِ (3350) و (3352) را در (3344) میگذارم:

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial x^a}\right)_t \{x^a, H\}\right] \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3354}$$

یا،

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,x^a}\right)_t \{x^a, H\}\right]\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0}\right)_{t,x}. \tag{3355}$$

پس،

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}, H\}\right]\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,\mathsf{p}}\right)_t. \tag{3356}$$

یا،

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}, H\}\right]\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0}\right)_{t,x}. \tag{3357}$$

همچنین،

$$\acute{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{ns}}{=} \{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau. \tag{3358}$$

به این ترتیب،

$$\acute{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{ns}}{=} \left[\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}, H\}\right]\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,\mathsf{p}}\right)_t. \tag{3359}$$

درون ِ کروشه مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ $\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}$ است:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}, H\}. \tag{3360}$$

یا،

$$\dot{\mathfrak{X}}_{|\,H_\tau} \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{\mathfrak{X}_{|\,H_\tau}, H\}. \tag{3361}$$

که $\dot{\mathfrak{X}}_{|\,\mathfrak{Y}}$ یعنی مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ $\mathfrak{X}$ وقت ی با $\mathfrak{Y}$ مثل ِ یک ثابت رفتار شود. رابطه یِ (3361) را در (3359) میگذارم:

$$\acute{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{\mathfrak{X}}_{|\,H_\tau}\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,\mathsf{p}}\right)_t. \tag{3362}$$

اما،

$$\acute{t} \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3363}$$

پس،

$$\acute{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{\mathfrak{X}}_{|\,H_\tau}\,\acute{t}. \tag{3364}$$

البته H_τ بر-لاک ثابت است. پس (3364) در واقع این است.

$$\acute{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{\mathfrak{X}}\,\acute{t}. \tag{3365}$$

که عجیب هم نیست: هم ان قاعده یِ زنجیرِئی یِ مشتق-گیری ست.

تغییر ِ متغیر از (t,x,p_0) به $(t,x,\mathfrak{Y})$ هم مشابه ِ تغییر ِ متغیر از (t,x,p_0) به (t,x,H_τ) است، به شرط ی که بستِگی یِ $\mathfrak{Y}$ نسبت به p_0 وارون-پذیر باشد. گیرم $\mathfrak{B}$ یک تابعی از فضا-زمان- ِ-فاز است که

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}(t,x,p_0). \tag{3366}$$

و $\mathfrak{B}(t,x,\cdot)$ وارون-پذیر است. پس

$$p_0 = [\mathfrak{B}(t,x,\cdot)]^{-1}(\mathfrak{Y}). \tag{3367}$$

و هر تابع از فضا-زمان- ِ-فاز را میشود بر حسب ِ (t,x)، یعنی مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته، و $\mathfrak{Y}$ نوشت:

$$\mathfrak{X}(t,x,p_0) = \tilde{\mathfrak{X}}(t,x,\mathfrak{Y}). \tag{3368}$$

که یعنی،

$$\mathfrak{X}(t,x,p_0) = \tilde{\mathfrak{X}}[t,x,\mathfrak{B}(t,x,p_0)]. \tag{3369}$$

یا،

$$\tilde{\mathfrak{X}}(t,x,\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}\{t,x,[\mathfrak{B}(t,x,\cdot)]^{-1}(\mathfrak{Y})\}. \tag{3370}$$

باز، برا یِ سادِگی، $\tilde{\mathfrak{X}}$ را با خُد ِ $\mathfrak{X}$ نشان میدهم.

گیرم $\mathfrak{Y}$ یک تابعی از فضا-زمان- ِ-فاز است، که مشتق َ ش نسبت به p_0 ناصفر است:

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Y}}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} \neq 0. \tag{3371}$$

پس بستگی یَ ش به p_0 وارون-پذیر است. با $\mathfrak{X}$، که آن هم یک تابعی از فضا-زمان- ِ-فاز است، دیده میشود

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,x^\alpha}\right)_{\mathfrak{Y}} \{x^\alpha,\mathfrak{Y}\}_\tau + \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{\mathfrak{Y},\mathfrak{Y}\}_\tau. \tag{3372}$$

جمله یِ دوم صفر است. پس،

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,x^\alpha}\right)_{\mathfrak{Y}} \{x^\alpha,\mathfrak{Y}\}_\tau. \tag{3373}$$

یا،

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^\alpha} \{x^\alpha,\mathfrak{Y}\}_\tau. \tag{3374}$$

مفصلتر،

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right)_{x,\mathfrak{Y}} \{t,\mathfrak{Y}\}_\tau + \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,x^a}\right)_{t,\mathfrak{Y}} \{x^a,\mathfrak{Y}\}_\tau. \tag{3375}$$

یا،

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,t}\right)_{x} \{t,\mathfrak{Y}\}_\tau + \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^a}\right)_{t} \{x^a,\mathfrak{Y}\}_\tau. \tag{3376}$$

اما،

$$\{t,\mathfrak{Y}\}_\tau = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{Y}}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}}. \tag{3377}$$

پس،

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,t}\right)_x \left(\frac{\partial\,\mathfrak{Y}}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} + \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^a}\right)_t \{x^a,\mathfrak{Y}\}_\tau. \tag{3378}$$

البته

$$\{x^a,\mathfrak{Y}\}_\tau = \{x^a,\mathfrak{Y}\}. \tag{3379}$$

پس،

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,t}\right)_x \left(\frac{\partial\,\mathfrak{Y}}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} + \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^a}\right)_t \{x^a,\mathfrak{Y}\}. \tag{3380}$$

یا،

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,t}\right)_x \left(\frac{\partial\,\mathfrak{Y}}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} + \{\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}},\mathfrak{Y}\}. \tag{3381}$$

بسته،

$$\{\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}},\mathfrak{Y}\}_\tau = \frac{\partial\,\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^\alpha}\,\{x^\alpha,\mathfrak{Y}\}_\tau. \tag{3382}$$

پس (3374) چنین میشود.

$$\{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\}_\tau = \{\mathfrak{X}_{|\,\mathfrak{Y}},\mathfrak{Y}\}_\tau. \tag{3383}$$

به شکل ی مشابه، برا یِ تابعیها یِ $\mathfrak{X}_1$ و $\mathfrak{X}_2$ از فضا-زمان- ِ-فاز،

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\}_\tau = &\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_1}{\partial\,x^\alpha}\right)_{\mathfrak{Y}} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_2}{\partial\,x^\beta}\right)_{\mathfrak{Y}} \{x^\alpha,x^\beta\}_\tau \\ &+ \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_1}{\partial\,x^\alpha}\right)_{\mathfrak{Y}} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_2}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{x^\alpha,\mathfrak{Y}\}_\tau \\ &+ \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_1}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_2}{\partial\,x^\beta}\right)_{\mathfrak{Y}} \{\mathfrak{Y},x^\beta\}_\tau.\end{aligned} \tag{3384}$$

یا،

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\}_\tau = &\frac{\partial\,(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^\alpha}\,\frac{\partial\,(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^\beta}\,\{x^\alpha,x^\beta\}_\tau\\ &+\frac{\partial\,(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^\alpha}\,\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_2}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}}\,\{x^\alpha,\mathfrak{Y}\}_\tau\\ &+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_1}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}}\,\frac{\partial\,(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}}{\partial\,x^\beta}\,\{\mathfrak{Y},x^\beta\}_\tau.\end{aligned}\tag{3385}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\}_\tau = &\{(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}},(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}\}_\tau\\ &+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_2}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}}\,\{(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}},\mathfrak{Y}\}_\tau+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_1}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}}\,\{\mathfrak{Y},(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}\}_\tau.\end{aligned}\tag{3386}$$

پس،

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\}_\tau = &\{(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}},(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}\}\\ &+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_2}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}}\,\{(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}},\mathfrak{Y}\}_\tau+\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}_1}{\partial\,\mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}}\,\{\mathfrak{Y},(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}\}_\tau.\end{aligned}\tag{3387}$$

در رسیدن به رابطه یِ اخیر این به کار رفته که

$$\{(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}},(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}\}_\tau=\{(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}},(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}\}.\tag{3388}$$

گیرم کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ $\mathfrak{X}_i$ ها با $\mathfrak{Y}$ صفر است:

$$\{\mathfrak{X}_i,\mathfrak{Y}\}_\tau=0.\tag{3389}$$

از (3383) نتیجه میشود

$$\{(\mathfrak{X}_i)_{|\,\mathfrak{Y}},\mathfrak{Y}\}_\tau=0.\tag{3390}$$

پس (3387) چنین میشود

$$\{\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2\}_\tau=\{(\mathfrak{X}_1)_{|\,\mathfrak{Y}},(\mathfrak{X}_2)_{|\,\mathfrak{Y}}\}.\tag{3391}$$

یعنی کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ $\mathfrak{X}_1$ با $\mathfrak{X}_2$ هم ان کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ $(\mathfrak{X}_1)_{|\mathfrak{Y}}$ با $(\mathfrak{X}_2)_{|\mathfrak{Y}}$ است.

گیرم $\mathfrak{X}_i$ ها و $\mathfrak{Y}$ یک دسته تابعی بر فضا-زمان- ِ-فاز َند، و مستقل-از-هم َند. این که این تابعیها مستقل-از-هم َند، یعنی دیفرانسیلها یِ آنها خطی-مستقل َند. این یعنی، گیرم

$$0 = \mathfrak{a}^i \, \mathbf{d}\, \mathfrak{X}_i + \mathfrak{b}\, \mathbf{d}\, \mathfrak{Y}. \tag{3392}$$

در این صورت همه یِ ضریبها صفر َند:

$$0 = \mathfrak{a}^i. \tag{3393}$$

$$0 = \mathfrak{b}. \tag{3394}$$

گیرم مشتق ِ $\mathfrak{Y}$ نسبت به p_0 ناصفر است. نشان میدهم $(\mathfrak{X}_i)_{|\mathfrak{Y}}$ ها هم مستقل-از-هم َند. $(\mathfrak{X}_i)_{|\mathfrak{Y}}$ را با $\tilde{\mathfrak{X}}_i$ نشان میدهم:

$$\tilde{\mathfrak{X}}_i = (\mathfrak{X}_i)_{|\mathfrak{Y}}. \tag{3395}$$

برا یِ اثبات ِ این که $\tilde{\mathfrak{X}}_i$ ها مستقل-از-هم َند، نشان میدهم اگر یک ترکیب ِ خطی از $\{(i, \mathbf{d}\, \tilde{\mathfrak{X}}_i) \mid i\}$ صفر باشد ضریبها صفر َند. گیرم یک دسته ضریب هست، ($\tilde{\mathfrak{a}}_i$ ها)، که

$$0 = \tilde{\mathfrak{a}}^i \, \mathbf{d}\, \tilde{\mathfrak{X}}_i. \tag{3396}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\, \mathfrak{X}_i = \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_i}{\partial\, x^\alpha}\right)_{\mathfrak{Y}} \mathbf{d}\, x^\alpha + \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_i}{\partial\, \mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \mathbf{d}\, \mathfrak{Y}. \tag{3397}$$

یا،

$$\mathbf{d}\, \mathfrak{X}_i = \frac{\partial\, \tilde{\mathfrak{X}}_i}{\partial\, x^\alpha} \mathbf{d}\, x^\alpha + \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_i}{\partial\, \mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \mathbf{d}\, \mathfrak{Y}. \tag{3398}$$

پس،

$$\mathbf{d}\, \mathfrak{X}_i = \mathbf{d}\, \tilde{\mathfrak{X}}_i + \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_i}{\partial\, \mathfrak{Y}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \mathbf{d}\, \mathfrak{Y}. \tag{3399}$$

و رابطه یِ (3396) چنین میشود.

$$0 = \tilde{\mathfrak{a}}^i \, (\mathbf{d}\, \mathfrak{X}_i - \mathfrak{c}_i \, \mathbf{d}\, \mathfrak{Y}). \tag{3400}$$

که،

$$\mathfrak{c}_i = \left(\frac{\partial \, \mathfrak{X}_i}{\partial \, \mathfrak{Y}} \right)_{\underset{\sim}{x}}. \tag{3401}$$

این یعنی (3392) برقرار است، با

$$\mathfrak{a}^i = \tilde{\mathfrak{a}}^i. \tag{3402}$$

$$\mathfrak{b} = -\tilde{\mathfrak{a}}^i \, \mathfrak{c}_i. \tag{3403}$$

از این که $\mathfrak{X}_i$ ها و $\mathfrak{Y}$ مستقل-ازهم َند، نتیجه میشود $\mathfrak{a}^i$ ها و $\mathfrak{b}$ صفر َند. پس همه یِ $\tilde{\mathfrak{a}}^i$ ها صفر َند. این نشان میدهد $\{(i, \mathbf{d}\, \tilde{\mathfrak{X}}_i) \mid i\}$ خطی-مستقل است، که یعنی $\tilde{\mathfrak{X}}_i$ ها مستقل-ازهم َند.

گیرم I_τ یک تابعی از فضا-زمان- ِ-فاز است که بر-لاک ثابت است، یعنی یک ثابت- ِ-حرکت است:

$$\acute{I}_\tau \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{3138}$$

پس،

$$\{I_\tau, H_\tau\}_\tau = 0. \tag{3142}$$

مانسته یِ (3364) برا یِ I_τ چنین میشود.

$$\acute{I}_\tau \overset{\text{ns}}{=} (\dot{I}_\tau)_{|\, H_\tau} \, \acute{t}. \tag{3404}$$

$\acute{t}$ صفر نیست:

$$\acute{t} \neq 0. \tag{3405}$$

پس (3138) همئرز است با

$$(\dot{I}_\tau)_{|\,H_\tau} \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{3406}$$

مانسته یِ (3361) برا یِ I_τ هم چنین میشود.

$$(\dot{I}_\tau)_{|\,H_\tau} \overset{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,(I_\tau)_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{(I_\tau)_{|\,H_\tau}, H\}. \tag{3407}$$

پس (3138) همئرز است با

$$0 \overset{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,(I_\tau)_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{(I_\tau)_{|\,H_\tau}, H\}. \tag{3408}$$

که، چون طرف ِ راست ِ (3408) به معادله-یِ-حرکت وابسته نیست، همئرز است با

$$0 = \left(\frac{\partial\,(I_\tau)_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{(I_\tau)_{|\,H_\tau}, H\}. \tag{3409}$$

این یعنی (3138) با (3409) همئرز است. یک راه ِ دیگر ِ رسیدن به این همئرزی، استفاده از همئرزی یِ (3138) با (3142) است. مانسته یِ (3356) برا یِ I_τ چنین است.

$$\{I_\tau, H_\tau\}_\tau = \left[\left(\frac{\partial\,(I_\tau)_{|\,H_\tau}}{\partial\,t}\right)_x + \{(I_\tau)_{|\,H_\tau}, H\}\right]\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,\mathsf{p}}\right)_t. \tag{3410}$$

اما

$$\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,\mathsf{p}} \neq 0. \tag{1833}$$

که یعنی مشتق ِ H_τ نسبت به p صفر نیست:

$$\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,\mathsf{p}}\right)_t \neq 0. \tag{3411}$$

پس (3142) با رابطه یِ (3409) همئرز است.

همچنین، گیرم مشتق ِ I_τ نسبت به p_0 ناصفر است:

$$\left(\frac{\partial\,I_\tau}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} \neq 0. \tag{3412}$$

پس بستِگی یِ I_τ به p_0 وارون-پذیر است. با تابعی یِ $\mathfrak{X}$ از فضا-زمان- ِ-فاز، تابعی یِ $\tilde{\mathfrak{X}}$ را میسازم، که متغیرها یَ ش (t, x, I_τ) اند:

$$\mathfrak{X}(t, x, p_0) = \tilde{\mathfrak{X}}(t, x, I_\tau). \tag{3413}$$

مفصلتر این است که $\mathfrak{B}$ یک تابعی ی از فضا-زمان- ِ-فاز است که

$$I_\tau = \mathfrak{B}(t, x, p_0). \tag{3414}$$

$\mathfrak{B}(t, x, \cdot)$ وارون-پذیر است. پس p_0 را میشود بر حسب ِ (t, x, I_τ) به دست آورد:

$$p_0 = [\mathfrak{B}(t, x, \cdot)]^{-1}(I_\tau). \tag{3415}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{X}(t, x, p_0) = \tilde{\mathfrak{X}}[t, x, \mathfrak{B}(t, x, p_0)]. \tag{3416}$$

یا،

$$\tilde{\mathfrak{X}}(t, x, I_\tau) = \mathfrak{X}\{t, x, [\mathfrak{B}(t, x, \cdot)]^{-1}(I_\tau)\}. \tag{3417}$$

و البته، برا یِ سادِگی، $\tilde{\mathfrak{X}}$ را با خُد ِ $\mathfrak{X}$ نشان میدهم.

معادله یِ تحول برا یِ $\mathfrak{X}$ چنین است.

$$\acute{\mathfrak{X}} \stackrel{\text{ns}}{=} \{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau. \tag{3418}$$

دیده میشود

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x^\alpha}\right)_{I_\tau} \{x^\alpha, H_\tau\}_\tau + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial I_\tau}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{I_\tau, H_\tau\}_\tau. \tag{3419}$$

یا،

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial x^\alpha} \{x^\alpha, H_\tau\}_\tau + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial I_\tau}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{I_\tau, H_\tau\}_\tau. \tag{3420}$$

I_τ بر-لاک ثابت است. پس (3142) برقرار است، یعنی ضریب ِ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به I_τ صفر است. به این ترتیب،

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \frac{\partial\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial\, x^\alpha}\, \{x^\alpha, H_\tau\}_\tau. \tag{3421}$$

یعنی،

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \{\mathfrak{X}_{|\, I_\tau}, H_\tau\}_\tau. \tag{3422}$$

مفصلتر ِ رابطه یِ (3421) چنین است.

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial\, t}\right)_x \{t, H_\tau\}_\tau + \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial\, x^a}\right)_t \{x^a, H_\tau\}_\tau. \tag{3423}$$

که، با استفاده از (3350) و (3352)، چنین میشود.

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial\, t}\right)_x \left(\frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, \mathsf{p}}\right)_t + \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial\, x^a}\right)_t \{x^a, H\} \left(\frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3424}$$

یا،

$$\{\mathfrak{X}, H_\tau\}_\tau = \left[\left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial\, t}\right)_x + \{\mathfrak{X}_{|\, I_\tau}, H\}\right] \left(\frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3425}$$

درون ِ کروشه مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ $\mathfrak{X}_{|\, I_\tau}$ است:

$$\frac{\mathrm{d}\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\mathrm{d}\, t} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial\, t}\right)_x + \{\mathfrak{X}_{|\, I_\tau}, H\}. \tag{3426}$$

یا،

$$\dot{\mathfrak{X}}_{|\, I_\tau} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, \mathfrak{X}_{|\, I_\tau}}{\partial\, t}\right)_x + \{\mathfrak{X}_{|\, I_\tau}, H\}. \tag{3427}$$

رابطه یِ (3427) را در (3418) میگذارم:

$$\acute{\mathfrak{X}} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \dot{\mathfrak{X}}_{|\, I_\tau} \left(\frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3428}$$

این هم، با استفاده از (3363)، چنین میشود.

$$\acute{\mathfrak{x}} \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{\mathfrak{x}}_{|\,I_\tau}\,\acute{t}. \tag{3429}$$

البته I_τ بر-لاک ثابت است. پس (3429) در واقع هم ان (3365) است. که عجیب هم نیست: هم ان قاعده یِ زنجیرِئی یِ مشتق-گیری ست.

گیرم $I_{\tau\,\alpha}$ ها، از جمله $I_{\tau\,0}$، تابعیها یی از فضا-زمان- ِ-فاز َند، که بر-لاک ثابت َند:

$$\acute{I}_{\tau\,\alpha} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3430}$$

و مشتق ِ $I_{\tau\,0}$ نسبت به p_0 صفر نیست:

$$\left(\frac{\partial\, I_{\tau\,0}}{\partial\, p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} \neq 0. \tag{3431}$$

رابطه یِ (3430) همئرز است با

$$\{I_{\tau\,\alpha}, H_\tau\}_\tau = 0. \tag{3432}$$

$(I_{\tau\,\alpha})_{|\,I_{\tau\,0}}$ را با I_α نشان میدهم:

$$I_\alpha = (I_{\tau\,\alpha})_{|\,I_{\tau\,0}}. \tag{3433}$$

I_α (به ازا یِ هر مقدار ِ $I_{\tau\,\alpha}$) یک تابعی از فضا-ی-فاز- ِ-گسترش-یافته است. مانستِها یِ روابط ِ (3422) و (3425) و (3429)، برا یِ $I_{\tau\,\alpha}$ به جا یِ $\mathfrak{X}$، چنین میشود.

$$\{I_{\tau\,\alpha}, H_\tau\}_\tau = \{I_\alpha, H_\tau\}_\tau. \tag{3434}$$

$$\{I_{\tau\,\alpha}, H_\tau\}_\tau = \left[\left(\frac{\partial\, I_\alpha}{\partial\, t}\right)_x + \{I_\alpha, H\}\right]\left(\frac{\partial\, H_\tau}{\partial\, \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3435}$$

$$\acute{I}_{\tau\,\alpha} \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{I}_\alpha\,\acute{t}. \tag{3436}$$

که

$$\acute{I}_{\tau\,\alpha} \stackrel{\text{ns}}{=} \{I_{\tau\,\alpha}, H_\tau\}_\tau. \tag{3437}$$

$$\dot{I}_\alpha \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, I_\alpha}{\partial\, t}\right)_x + \{I_\alpha, H\}. \tag{3438}$$

از (3435)، همراه با این که مشتق ِ H_τ نسبت به p صفر نیست، دیده میشود رابطه یِ (3432) همئرز است با

$$\left(\frac{\partial I_\alpha}{\partial t}\right)_x + \{I_\alpha, H\} = 0. \tag{3439}$$

از (3436)، همراه با این که $\acute{t}$ صفر نیست، هم دیده میشود رابطه یِ (3430) همئرز است با

$$\dot{I}_\alpha \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3440}$$

البته از (3438) دیده میشود (3440) هم ان (3439) است. نتیجه: این که $I_{\tau\,\alpha}$ بر-لاک ثابت است، همئرز است با این که I_α بر لاک ثابت است. به این ترتیب، با استفاده از ثابت- ِ-حرکت ِ $I_{\tau\,0}$، از هر ثابت- ِ-حرکت ِ $I_{\tau\,\alpha}$ که دامنه اَ ش فضا-زمان- ِ-فاز است، یک ثابت- ِ-حرکت ِ I_α ساخته شده که دامنه اَ ش فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته است، یعنی به p_0 وابسته نیست.

مانسته یِ (3383) هم، برا یِ $(I_{\tau\,\alpha}, I_{\tau\,0})$ به جا یِ $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$، چنین میشود.

$$\{I_{\tau\,\alpha}, I_{\tau\,0}\}_\tau = \{I_\alpha, I_{\tau\,0}\}_\tau. \tag{3441}$$

و مانسته یِ (3387)، برا یِ $(I_{\tau\,\alpha}, I_{\tau\,\beta}, I_{\tau\,0})$ به جا یِ $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y})$، چنین میشود.

$$\begin{aligned}\{I_{\tau\,\alpha}, I_{\tau\,\beta}\}_\tau &= \{I_\alpha, I_\beta\} \\ &\quad + \left(\frac{\partial I_{\tau\,\beta}}{\partial I_{\tau\,0}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{I_\alpha, I_{\tau\,0}\}_\tau + \left(\frac{\partial I_{\tau\,\alpha}}{\partial I_{\tau\,0}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{I_{\tau\,0}, I_\beta\}_\tau.\end{aligned} \tag{3442}$$

I_α برا یِ $\alpha = 0$ هم مثل ِ (3433) تعریف شده:

$$I_0 = (I_{\tau\,0})_{|\,I_{\tau\,0}}. \tag{3443}$$

و روابط ِ (3434) تا (3436)، برا یِ $\alpha = 0$ هم برقرار َند:

$$\{I_{\tau\,0}, H_\tau\}_\tau = \{I_0, H_\tau\}_\tau. \tag{3444}$$

$$\{I_{\tau\,0}, H_\tau\}_\tau = \left[\left(\frac{\partial I_0}{\partial t}\right)_x + \{I_0, H\}\right] \left(\frac{\partial H_\tau}{\partial \mathsf{p}}\right)_t. \tag{3445}$$

$$\acute{I}_{\tau\,0} \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{I}_0\, \acute{t}. \tag{3446}$$

که

$$\acute{I}_{\tau\,0} \stackrel{\text{ns}}{=} \{I_{\tau\,0}, H_\tau\}_\tau. \tag{3447}$$

$$\dot{I}_0 \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\, I_0}{\partial\, t}\right)_x + \{I_0, H\}. \tag{3448}$$

رابطه یِ (3441) هم، برا یِ $\alpha = 0$ چنین میشود

$$\{I_{\tau\,0}, I_{\tau\,0}\}_\tau = \{I_0, I_{\tau\,0}\}_\tau. \tag{3449}$$

یعنی،

$$0 = \{I_0, I_{\tau\,0}\}_\tau. \tag{3450}$$

و (3442) هم، برا یِ $\alpha = 0$ میشود

$$\begin{aligned}\{I_{\tau\,0}, I_{\tau\,\beta}\}_\tau &= \{I_0, I_\beta\} \\ &\quad + \left(\frac{\partial\, I_{\tau\,\beta}}{\partial\, I_{\tau\,0}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{I_0, I_{\tau\,0}\}_\tau + \left(\frac{\partial\, I_{\tau\,0}}{\partial\, I_{\tau\,0}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{I_{\tau\,0}, I_\beta\}_\tau.\end{aligned} \tag{3451}$$

یعنی

$$\{I_{\tau\,0}, I_{\tau\,\beta}\}_\tau = \{I_0, I_\beta\} + \left(\frac{\partial\, I_{\tau\,\beta}}{\partial\, I_{\tau\,0}}\right)_{\underset{\sim}{x}} \{I_0, I_{\tau\,0}\}_\tau + \{I_{\tau\,0}, I_\beta\}_\tau. \tag{3452}$$

از رابطه یِ (3443) دیده میشود I_0 یک تابعی یِ ثابت است. پس مشتق ِ I_0 صفر است. یعنی مشتق ِ I_0 نسبت به مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته صفر است:

$$\frac{\partial\, I_0}{\partial\, x^\alpha} = 0. \tag{3453}$$

و البته از این نتیجه میشود کروشه-یِ-پُؤَسُن و کروشه-یِ-پُؤَسُن- ِ-گسترش-یافته یِ I_0 با هر تابعی یی صفر است:

$$\{I_0, \mathfrak{X}\} = 0. \tag{3454}$$

$$\{I_0, \mathfrak{X}\}_\tau = 0. \tag{3455}$$

به این ترتیب،

$$0 = \{I_0, H_\tau\}_\tau. \tag{3456}$$

$$0 = \left(\frac{\partial I_0}{\partial t}\right)_x + \{I_0, H\} \tag{3457}$$

از اولی و (3444)، یا از دومی و (3445)، نتیجه میشود کروشه-یِ-پُؤَسُن- ِ-گسترش-یافته یِ $I_{\tau\,0}$ با H_τ صفر است، که هم ان (3432) است. البته این هم ان (3430) است: این که $I_{\tau\,0}$ بر-لاک ثابت است. و از این و (3446) هم دیده میشود

$$\dot{I}_0 \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{3458}$$

این که کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ (ِ گسترش-یافته یِ) I_0 با هر تابعی یی صفر است هم (3452) را به این تبدیل میکند.

$$\{I_{\tau\,0}, I_{\tau\,\beta}\}_\tau = \{I_{\tau\,0}, I_\beta\}_\tau. \tag{3459}$$

گیرم کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ گسترش-یافته یِ $I_{\tau\,\alpha}$ ها با $I_{\tau\,0}$ صفر است:

$$\{I_{\tau\,\alpha}, I_{\tau\,0}\}_\tau = 0. \tag{3460}$$

این و (3459) نتیجه میدهند

$$\{I_\alpha, I_{\tau\,0}\}_\tau = 0. \tag{3461}$$

پس (3442) چنین میشود.

$$\{I_{\tau\,\alpha}, I_{\tau\,\beta}\}_\tau = \{I_\alpha, I_\beta\}. \tag{3462}$$

خلاصه، از ثابت- ِ-حرکتها یِ $I_{\tau\,\alpha}$ بر فضا-زمان- ِ-فاز، ثابت- ِ-حرکتها یِ I_α بر فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته ساخته شده، که البته تعداد ِ آنها یِ شان که نابدیهی یَند یک ی کمتر است: I_0 بیرون- ِ-لاک ثابت است. برا یِ اینها،

$$\dot{I}_i \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{3463}$$

یا،

$$\left(\frac{\partial I_i}{\partial t}\right)_x + \{I_i, H\} = 0. \tag{3464}$$

و البته،

$$\{I_i, I_j\} = \{I_{\tau\, i}, I_{\tau\, j}\}_\tau. \tag{3465}$$

گیرم $I_{\tau\, 0}$ تا $I_{\tau\, \mathfrak{m}}$ تابعیها یی از فضا-زمان- ِ-فاز َند، مستقل-از-هم َند، و بر-لاک ثابت َند. $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. گیرم $I_{\tau\, \alpha}$ ها پُؤَسُنی هم هستند:

$$\{I_{\tau\, \alpha}, I_{\tau\, \beta}\}_\tau = 0. \tag{3466}$$

در این صورت سیستم ی که تحول َش با هَمیلتِنی یِ H_τ بر فضا-زمان- ِ-فاز داده میشود انتگرال-پذیر است. گیرم علاوه بر این مشتق ِ I_0 نسبت به p_0 هم ناصفر است. در این صورت $(I_{\tau\, i})_{|\, I_{\tau\, 0}}$ ها تابعیها یی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند، و مستقل-از-هم َند. $(I_{\tau\, i})_{|\, I_{\tau\, 0}}$ را، مثل ِ (3433)، با I_i نشان میدهم:

$$I_i = (I_{\tau\, i})_{|\, I_{\tau\, 0}}. \tag{3467}$$

از (3466) نتیجه میشود

$$\{I_{\tau\, i}, I_{\tau\, j}\}_\tau = 0. \tag{3468}$$

که، با استفاده از (3465)، میشود

$$\{I_i, I_j\} = 0. \tag{3469}$$

همچنین، I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ بر-لاک ثابت َند، روابط ِ (3463) و (3464).

به این ترتیب، I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ تابعیها یی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند که مستقل-از-هم َند، پُؤَسُنی یَند، و بر-لاک ثابت َند. این یعنی سیستم ی که تحول َش با هَمیلتِنی یِ H بر فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته داده میشود هم انتگرال-پذیر است. و انتگرال-پذیری یِ آن مستقل از p_0 تعریف شده.

برا یِ این که این کاهش از فضا-زمان- ِ-فاز به فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته ممکن باشد، لازم است مشتق ِ دست- ِ-کم یک ی از ثابت- ِ-حرکتها نسبت به p_0 ناصفر باشد. نشان میدهم این شرط همیشه برقرار است.

برا یِ اثبات، گیرم $I_{\tau\,0}$ تا $I_{\tau\,\mathfrak{m}}$ تابعیها یی از فضا-زمان- ِ-فاز َند، مستقل-از-هم َند، و بر-لاک ثابت َند. که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. از اینها نتیجه میشود سیستم (ی که تحول َ ش با هَمیلتِنی یِ H_τ بر فضا-زمان- ِ-فاز داده میشود) انتگرال-پذیر است. از جمله H_τ تابع ی از فقط $I_{\tau\,\alpha}$ ها ست. پس،

$$\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} = \frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,I_{\tau\,\alpha}}\,\left(\frac{\partial\,I_{\tau\,\alpha}}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}}. \tag{3470}$$

اما مشتق ِ H_τ نسبت به p_0 ناصفر است:

$$\left(\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} \neq 0. \tag{3471}$$

پس دست- ِ-کم یک α هست که مشتق ِ $I_{\tau\,\alpha}$ نسبت به p_0 ناصفر است:

$$\exists\,\alpha\ \ni\ \left(\frac{\partial\,I_{\tau\,\alpha}}{\partial\,p_0}\right)_{\underset{\sim}{x}} \neq 0. \tag{3472}$$

بدون ِ کاستن از کلیت، میشود این α را هم ان 0 گرفت، یعنی آن ثابت- ِ-حرکت که مشتق َ ش نسبت به p_0 ناصفر است را $I_{\tau\,0}$ گرفت.

نتیجه: گیرم یک سیستم در فضا-زمان- ِ-فاز انتگرال-پذیر است، یعنی $(\mathfrak{m}+1)$ ثابت- ِ-حرکت ِ پُؤَسُنی یِ مستقل-از-هم بر فضا-زمان- ِ-فاز دارد، که $(2\,\mathfrak{m}+2)$ بُعد ِ فضا-زمان- ِ-فاز است. در این صورت این سیستم $\mathfrak{m}$ ثابت- ِ-حرکت ِ پُؤَسُنی یِ مستقل-از-هم بر فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته دارد. پس در فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته هم انتگرال-پذیر است. یعنی میشود p_0 و τ را حذف کرد و انتگرال-پذیری باقی میمانَد.

بر عکس هم به-رُشنی درست است: گیرم سیستم در فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته، که بعد َ ش $(2\,\mathfrak{m}+1)$ است، انتگرال-پذیر است. به $\mathfrak{m}$ ثابت- ِ-حرکت ِ پُؤَسُنی یِ مستقل-از-هم ِ I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$، که دامنه یِ شان فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته است (یعنی مستقل از p_0 اند)، هَمیلتِنی-یِ-فضا-زمانی یِ H_τ را میفزایم. چون مشتق ِ H_τ نسبت به p_0 صفر نیست، $(\mathbf{d}\,H_\tau)$ در پهنه یِ $\{(i,\mathbf{d}\,I_i)\mid i\}$ نیست.

پس H_τ و I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ مستقل-از-هم َند. کروشه یِ-پُؤَسُن ِ (گسترش-یافته یِ) H_τ با I_i ها صفر است (چون I_i ها بر-لاک ثابت َند). و البته H_τ هم بر-لاک ثابت است. پس $(\mathfrak{m}+1)$ تابعی یِ H_τ و I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ ثابت- ِ-حرکتها یی پُؤَسُنی و مستقل-از-هم َند. که یعنی سیستم در فضا-زمان ِ-فاز انتگرال-پذیر است.

87 هَمیلتِنی یِ مستقل از زمان، و فضا-یِ-فاز ِ دُ-بُعدی

تحول ِ یک سیستم با هَمیلتِنی یِ H داده میشود. گیرم H صریحَن به زمان وابسته نیست:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0. \tag{3202}$$

در این صورت،

$$\dot{H}\overset{\text{ns}}{=}0. \tag{3329}$$

خُد ِ H یک ثابت- ِ-حرکت است. یک حالت ِ خاص این است که H مستقل از مختصات ِ فضا-یِ-فاز باشد:

$$\frac{\partial H}{\partial x^a}=0. \tag{3473}$$

در این صورت همه یِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز بر-لاک ثابت میمانند:

$$\dot{x}^a\overset{\text{ns}}{=}0. \tag{3474}$$

در این حالت ِ خاص، معادله یِ تحول ِ سیستم (3474) است، که به-سادِگی حل میشود. جواب این است که همه یِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز بر-لاک ثابت میمانند:

$$\dot{x}^a(t)\overset{\text{ns}}{=}\dot{x}^a(t_0). \tag{3475}$$

این حالت- ِ-خاص (ِ بدیهی) را کنار میگذارم. پس H یک ثابت- ِ-حرکت ِ مستقل است. از جمله تحدید ِ H به فضا-یِ-فاز ثابت نیست، یعنی در هر نقطه از فضا-یِ-فاز، مشتق ِ H نسبت به دست- ِ-کم یک ی از مختصات ِ فضا-یِ-فاز ناصفر است.

گیرم بُعد ِ فضا-یِ-فاز 2 است. این سیستم یک ثابت- ِ-حرکت ِ مستقل دارد. پس انتگرال-پذیر است. این ثابت- ِ-حرکت را میشود خُد ِ H گرفت، یا هر تابعی یِ مستقل ی (از فضا-یِ-فاز) که H تابع ِ فقط آن است. I را یک تابعی یِ مستقل میگیرم، که H تابع ِ فقط I است. (از جمله میشود I را خُد ِ H گرفت.) بین ِ q و p (مختصات ِ فضا-یِ-فاز) دست- ِ-کم یک ی هست که مشتق ِ I نسبت به آن ناصفر است. این مختصه را با p نشان میدهم. q را هم چنین تعریف میکنم.

$$\mathrm{q} = q, \qquad \mathrm{p} = p. \tag{3476}$$

$$\mathrm{q} = -p, \quad \mathrm{p} = q. \tag{3477}$$

به این ترتیب (q,p) کانُنیک است. مشتق ِ I نسبت به p ناصفر است:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \mathrm{p}}\right)_{t,\mathrm{q}} \neq 0. \tag{3478}$$

پس p را میشود (مُضعَن) بر حسب ِ (t,q,I) حساب کرد. البته مشتق ِ I نسبت به t (در q و p یِ ثابت) صفر است:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}} = 0. \tag{3479}$$

پس p را میشود (مُضعَن) بر حسب ِ (q,I) حساب کرد:

$$\mathrm{p} = \mathfrak{p}(\mathrm{q},I). \tag{3480}$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},I} = 0. \tag{3481}$$

ثابت- ِ-حرکت ِ I را تکانه یِ مختصات- ِ-کانُنیک ِ (q',p') میگیرم:

$$p' = I. \tag{3482}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{p} = \mathfrak{p}(\mathrm{q},p'). \tag{3483}$$

تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با تبدیل- ِ-کانُنیک ی که (q,p) را به (q',p')، یا هم ان (q',H)، تبدیل میکند را با $\tilde{\Upsilon}$ نشان میدهم.

$$\mathrm{p}=\left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}}\right)_{t,p'}. \tag{3484}$$

$$q'=\left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,p'}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3485}$$

از (3484) نتیجه میشود

$$\tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},p')=\int_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},p')+\mathfrak{b}(t,p'). \tag{3486}$$

ثابت ِ $\mathfrak{a}$ و تابعی یِ $\mathfrak{b}$ دلبخاه َند. البته رُشن است که ثابت ِ $\mathfrak{a}$ و تابعی یِ $\mathfrak{b}$ مستقل-از-هم نیستند: $\tilde{\Upsilon}_{\mathrm{i}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\Upsilon}_{\mathrm{i}}(t,\mathrm{q},p')=\int_{\mathfrak{a}_{\mathrm{i}}}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},p')+\mathfrak{b}_{\mathrm{i}}(t,p'). \tag{3487}$$

دیده میشود

$$\tilde{\Upsilon}_2=\tilde{\Upsilon}_1.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathfrak{b}_2(t,p')=\mathfrak{b}_1(t,p')+\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{a}_2}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},p'). \tag{3488}$$

با گذاشتن ِ (3486) در (3485) نتیجه میشود

$$q'=\int_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\frac{\partial\,[\mathfrak{p}(\mathfrak{q},p')]}{\partial\,p'}+\frac{\partial\,[\mathfrak{b}(t,p')]}{\partial\,p'}. \tag{3489}$$

همچنین،

$$H'=H+\left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3260}$$

که نتیجه میدهد

$$H'=H+\frac{\partial\,[\mathfrak{b}(t,p')]}{\partial\,t}. \tag{3490}$$

یا،

$$H' = H + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{b})(t,p'). \tag{3491}$$

H تابع ِ I است. یعنی یک η هست که

$$H = \eta(I). \tag{3492}$$

پس (3490) چنین میشود.

$$H' = \eta(p') + \frac{\partial\,[\mathfrak{b}(t,p')]}{\partial\,t}. \tag{3493}$$

یا،

$$H' = \eta(p') + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{b})(t,p'). \tag{3494}$$

معادله یِ حرکت برا یِ q' چنین است.

$$\dot{q}' \overset{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,H'}{\partial\,p'}\right)_{t,q'}. \tag{3495}$$

که، با استفاده از (3493)، میشود

$$\dot{q}' \overset{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}\,[\eta(p')]}{\mathrm{d}\,p'} + \frac{\partial^2\,[\mathfrak{b}(t,p')]}{(\partial\,p')\,(\partial\,t)}. \tag{3496}$$

مفصلتر،

$$\dot{q}'(t) \overset{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\,\eta)[p'(t)] + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{b})[t,p'(t)]. \tag{3497}$$

p' بر-لاک ثابت است. پس،

$$\dot{q}'(t) \overset{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)] + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{b})[t,p'(t_0)]. \tag{3498}$$

که جواب َ ش چنین میشود.

$$q'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q'(t_0) + \{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)]\}\,(t-t_0) + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{b})[t,p'(t_0)] - (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{b})[t_0,p'(t_0)]. \tag{3499}$$

یا،

$$q'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q'(t_0) + \{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t)]\}\,t - \{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)]\}\,t_0 + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{b})[t,p'(t)] - (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{b})[t_0,p'(t_0)]. \tag{3500}$$

اینها بر حسب ِ $q^{\backprime}$ به جا یِ q' سادِتر میشوند، که $q^{\backprime}$ چنین تعریف میشود.

$$q^{\backprime} = q' - \frac{\partial\,[\mathfrak{b}(t,p')]}{\partial\,p'}. \tag{3501}$$

یا،

$$q^{\backprime} = q' - (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{b})(t,p'). \tag{3502}$$

معادله یِ حرکت برا یِ $q^{\backprime}$ چنین میشود.

$$\dot{q}^{\backprime} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}\,[\eta(p')]}{\mathrm{d}\,p'}. \tag{3503}$$

مفصلتر،

$$\dot{q}^{\backprime}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\,\eta)[p'(t)]. \tag{3504}$$

p' بر-لاک ثابت است. پس،

$$\dot{q}^{\backprime}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)]. \tag{3505}$$

که نتیجه میدهد

$$q^{\backprime}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q^{\backprime}(t_0) + \{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)]\}\,(t-t_0). \tag{3506}$$

یا،

$$q^{`}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q'(t_0) + \{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t)]\}\,t - \{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)]\}\,t_0 \tag{3507}$$

و این هم ان است که با جا-گذاری یِ (3502) در (3500) به دست میئاید.

میشود از هم ان اول $\mathfrak{b}$ را مستقل از p' گرفت. در این صورت $\mathfrak{b}$ تابع ی از فقط زمان میشود، و نتیجه میشود

$$\dot{q}' \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}\,[\eta(p')]}{\mathrm{d}\,p'}. \tag{3508}$$

یا،

$$\dot{q}'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} (\mathbf{D}\,\eta)[p'(t)]. \tag{3509}$$

با استفاده از جواب ِ معادلات- ِ-حرکت برا یِ q' و p'، میشود جواب ِ معادلات- ِ-حرکت برا یِ q و p را به دست آورد. از جمله، از (3485) نتیجه میشود

$$\dot{q}' \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'} \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,p'}\right)_{t,\mathrm{q}} + \left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{q}}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,p'}\right)_{t,\mathrm{q}} \dot{\mathrm{q}}. \tag{3510}$$

یا،

$$\dot{q}' \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial\,p'}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial}{\partial\,p'}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}}\right)_{t,p'} \dot{\mathrm{q}}. \tag{3511}$$

مفصلتر،

$$\dot{q}'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\Upsilon})[t,\mathrm{q}(t),p'(t)] + \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\tilde{\Upsilon})[t,\mathrm{q}(t),p'(t)]\}\,\dot{\mathrm{q}}(t). \tag{3512}$$

این هم، با استفاده از (3486) میشود

$$\dot{q}'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{b})[t,p'(t)] + \{(\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{p})[\mathrm{q}(t),p'(t)]\}\,\dot{\mathrm{q}}(t). \tag{3513}$$

$\dot{q}'$ را از (3497) در (3513) میگذارم:

$$(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t)] \stackrel{\text{ns}}{=} \{(\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{p})[\mathrm{q}(t),p'(t)]\}\,\dot{\mathrm{q}}(t). \tag{3514}$$

یا،

$$\dot{\mathrm{q}}(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t)]}{(\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{p})[\mathrm{q}(t), p'(t)]}. \tag{3515}$$

البته p' بر-لاک ثابت است. پس،

$$\dot{\mathrm{q}}(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)]}{(\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{p})[\mathrm{q}(t), p'(t_0)]}. \tag{3516}$$

از این میشود انتگرال گرفت:

$$\{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)]\}\,(t-t_0) = \int_{\mathrm{q}(t_0)}^{\mathrm{q}(t)} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,(\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{p})[\mathfrak{q}, p'(t_0)]. \tag{3517}$$

یا،

$$\{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t)]\}\,t - \{(\mathbf{D}\,\eta)[p'(t_0)]\}\,t_0 = \int_{\mathrm{q}(t_0)}^{\mathrm{q}(t)} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,(\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{p})[\mathfrak{q}, p'(t_0)]. \tag{3518}$$

که رابطه یِ q با t است. برا یِ p هم،

$$\mathrm{p}(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \mathfrak{p}[\mathrm{q}(t), p'(t)]. \tag{3519}$$

و چون p' بر-لاک ثابت است،

$$\mathrm{p}(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \mathfrak{p}[\mathrm{q}(t), p'(t_0)]. \tag{3520}$$

از جمله دیده میشود در روابط ی که q و p را میدهند ثابت ِ دلبخاه ِ $\mathfrak{a}$ و تابعی یِ دلبخاه ِ $\mathfrak{b}$ (که در $\tilde{\Upsilon}$ هستند) ظاهر نشده اند. که نباید هم ظاهر میشدند: $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ در مسئله یِ اولیه نبودند.

معادلات- ِ-حرکت برا یِ q و p را میشود مستقیمَن هم نوشت و حل کرد:

$$\dot{\mathrm{q}} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial\,[H(\mathrm{q},\mathrm{p})]}{\partial\,\mathrm{p}}. \tag{3521}$$

یا،

$$\dot{\mathrm{q}} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}\,H}{\mathrm{d}\,I}\,\frac{\partial\,[I(\mathrm{q},\mathrm{p})]}{\partial\,\mathrm{p}}. \tag{3522}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\dot{\mathrm{q}} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}\,H}{\mathrm{d}\,p'}\,\left(\frac{\partial\,p'}{\partial\,\mathrm{p}}\right)_{\mathrm{q}}. \tag{3523}$$

یا،

$$\dot{\mathrm{q}} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\mathrm{d}\,H}{\mathrm{d}\,p'}\,\left[\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}}{\partial\,p'}\right)_{\mathrm{q}}\right]^{-1}. \tag{3524}$$

این هم ان (3516) است. از اینجا به بعد مثل ِ قبل است: p' بر-لاک ثابت است. پس میشود از (3524) انتگرال گرفت و به این ترتیب رابطه یِ q با t را به دست آورد. با استفاده از آن هم رابطه یِ p با t به دست میئاید. همچنین، رُشن است که انتخاب ِ I به عنوان ِ ثابت- ِ-حرکت، در رابطه یِ q و p با زمان اثر ی ندارد: (3522) هم ان (3521) است.

وقت ی فضا-یِ-فاز دُ-بُعدی ست، فضا-زمان ِ فاز چهار-بُعدی ست. در این حالت سیستم انتگرال-پذیر است، اگر دُ تابعی بر فضا-زمان- ِ-فاز باشند که پُؤَسُنی یَند و مستقل-از-هم َند . یک ی از این ثابت- ِ-حرکتها همیشه هست: H_τ (هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی) بستگی یِ صریح به τ ندارد:

$$\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,\tau} = 0. \tag{3330}$$

پس هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی بر-لاک ثابت میمانَد:

$$\acute{H}_\tau \stackrel{\mathrm{ns}}{=} 0. \tag{3331}$$

به این ترتیب این سیستم انتگرال-پذیر است، اگر و تنها اگر یک ثابت- ِ-حرکت ِ دیگر ِ I_τ هم باشد، چنان که I_τ و H_τ پُؤَسُنی و مستقل-از-هم باشند. دیده شد این سیستم (که بُعد ِ فضا-یِ-فاز ِ متناظر با آن 2 است) 2 ثابت- ِ-حرکت ِ پُؤَسُنی یِ مستقل-از-هم دارد، اگر و تنها اگر یک ثابت- ِ-حرکت ِ مستقل داشته باشد که به p_0 وابسته نیست. این ثابت- ِ-حرکت را با I نشان میدهم. پس این سیستم انتگرال-پذیر است، اگر و تنها اگر یک تابعی یِ I از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته باشد که بر-لاک ثابت باشد (و البته مستقل باشد). مستقل-بودن ِ I یعنی مشتق ِ I صفر نیست، که با این همئرز است که I بیرون- ِ-لاک ثابت نیست.

این که I بر-لاک ثابت است، همئرز است با

$$\{I, H_\tau\}_\tau = 0. \tag{3148}$$

که، چون I مستقل از p_0 است، همئرز است با

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} = 0. \tag{3157}$$

که هم ان شرط ِ انتگرال-پذیری یِ سیستم بر اساس ِ فضا-یِ-فاز (یا فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته) است. چنان که انتظار میرفت، انتگرال-پذیری بر اساس ِ فضا-زمان- ِ-فاز، با انتگرال-پذیری بر اساس ِ فضا-یِ-فاز (یا فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته) همئرز است. از جمله سیستم (ی که بُعد ِ فضا-زمان- ِ-فاز ِ متناظر با آن 4 است)، اگر هَمیلتِنی یَ ش (خُد ِ H، نَ هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی یِ H_τ) بستگی یِ صریح به زمان نداشته باشد، انتگرال-پذیر است.

88 اَبَرانتگرال-پذیری

گیرم هَمیلتِنی-یِ-فضا-زمانی یِ H_τ تابع ِ فقط مئلفِها یِ تکانه است، یعنی H_τ تابع ِ فقط p_0 تا $p_{\mathfrak{m}}$ است، که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. این که H_τ تابع ِ فقط مئلفِها یِ تکانه است، یعنی H_τ به مئلفِها یِ مکان بستگی ندارد. پس مشتق ِ H_τ نسبت به مئلفِها یِ مکان صفر است:

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial q^\alpha} = 0. \tag{3174}$$

با این، معادله-یِ-حرکت برا یِ مئلفِها یِ تکانه چنین میشود.

$$\acute{p}_\alpha \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3175}$$

این یعنی p_α ها بر-لاک ثابت َند:

$$p_\alpha(\tau) \stackrel{\text{ns}}{=} p_\alpha(\tau_0). \tag{3176}$$

گیرم هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی، علاوه بر این که به مئلفِها یِ مکان بستگی ندارد به بعض ی از مئلفِها یِ تکانه هم بستگی ندارد. این مئلفِها را، بی آن که از کلیت کاسته شود، $p_{\mathfrak{k}+1}$ تا $p_{\mathfrak{m}}$ میگیرم:

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial p_\alpha} = 0, \qquad \alpha > \mathfrak{k}. \tag{3525}$$

از این نتیجه میشود

$$\acute{q}^\alpha \stackrel{\text{ns}}{=} 0, \qquad \alpha > \mathfrak{k}. \tag{3526}$$

که یعنی $q^{\mathfrak{k}+1}$ تا $q^{\mathfrak{m}}$ هم بر-لاک ثابت َند:

$$q^\alpha(\tau) \stackrel{\text{ns}}{=} q^\alpha(\tau_0), \qquad \alpha > \mathfrak{k}. \tag{3527}$$

البته معادله-یِ-حرکت برا یِ مئلفِها یِ مکان هم ان (3178) است:

$$\acute{q}^\alpha(\tau) \stackrel{\text{ns}}{=} u^\alpha[\underset{\sim}{p}(\tau)]. \tag{3178}$$

که

$$u^\alpha = \frac{\partial H_\tau}{\partial p_\alpha}. \tag{3177}$$

و چون H_τ تابع ِ فقط $\underset{\sim}{p}$ است، u^α هم چنین است. اینجا H_τ تابع ِ فقط p_0 تا $p_{\mathfrak{k}}$ است. پس مشتق ِ H_τ نسبت به $p_{\mathfrak{k}+1}$ تا $p_{\mathfrak{m}}$ هم صفر است. که یعنی

$$u^\alpha(\tau) = 0, \qquad \alpha > \mathfrak{k}. \tag{3528}$$

جواب ِ معادله-یِ-حرکت ِ (3178)، همچنان (3181) است:

$$q^\alpha(\tau) \stackrel{\text{ns}}{=} q^\alpha(\tau_0) + u^\alpha\,(\tau - \tau_0). \tag{3181}$$

مفصلتر،

$$q^\alpha(\tau) \stackrel{\text{ns}}{=} q^\alpha(\tau_0) + \{u^\alpha[\underset{\sim}{p}(\tau)]\}\,(\tau - \tau_0). \tag{3182}$$

یا،

$$q^\alpha(\tau) \stackrel{\text{ns}}{=} q^\alpha(\tau_0) + \{u^\alpha[\underset{\sim}{p}(\tau_0)]\}\,(\tau - \tau_0). \tag{3183}$$

اما اینجا (3528) هم برقرار است، که (3527) را نتیجه میدهد.

این که H_τ تابعِ فقط p_0 تا $p_{\mathfrak{k}}$ است، نتیجه میشود p_0 تا $p_{\mathfrak{m}}$، و $q^{\mathfrak{k}+1}$ تا $q^{\mathfrak{m}}$ ثابت-ِ-حرکت َند. برا یِ انتگرال-پذیری، لازم و کافی است که $(\mathfrak{m}+1)$ تابعی از فضا-زمان-ِ-فاز باشند که پُؤَسُنی و مستقل-از-هم باشند، و بر-لاک ثابت باشند. اینجا بیش از $(\mathfrak{m}+1)$ تابعی از فضا-زمان-ِ-فاز هستند، $(2\,\mathfrak{m}-\mathfrak{k}+1)$ تابعی از فضا-زمان-ِ-فاز هستند، که مستقل-از-هم َند، و بر-لاک ثابت َند. البته پُؤَسُنی نیستند. اما متناظر با هر یک از این تابعیها یک دسته یِ $(\mathfrak{m}+1)$ تایی از این $(2\,\mathfrak{m}-\mathfrak{k}+1)$ ثابت-ِ-حرکت ِ مستقل-از-هم هست، که پُؤَسُنی ست. اعضا یِ هر یک از این دستِها یِ $(\mathfrak{m}+1)$ تایی را میشود مئلفِها یِ تکانه در فضا-زمان-ِ-فاز گرفت و همچنان H_τ مستقل از مکان (ِ متناظر) میشود. از جمله میشود مختصات ِ کانُنیک ِ پریم-دار را چنین گرفت:

$$q'^\alpha = q^\alpha, \qquad \alpha \le \mathfrak{k}. \tag{3529}$$

$$q'^\alpha = -p_\alpha, \quad \alpha > \mathfrak{k}. \tag{3530}$$

$$p'_\alpha = p_\alpha, \qquad \alpha \le \mathfrak{k}. \tag{3531}$$

$$p'_\alpha = q^\alpha, \qquad \alpha > \mathfrak{k}. \tag{3532}$$

کلیتر، گیرم یک $\mathfrak{n}$ هست که بزرگتر از $\mathfrak{m}$ است، و تابعیها یِ I_0 تا $I_{\mathfrak{n}}$ از فضا-زمان-ِ-فاز هستند که مستقل-از-هم َند و بر-لاک ثابت َند؛ و متناظر با هر j که از $\mathfrak{n}$ بزرگتر نیست، یک دسته یِ $(\mathfrak{m}+1)$ تایی از I_i ها هست که پُؤَسُنی یَند و I_j یک ی از آنها ست. در این صورت میگویم سیستم اَبَرانتگرال-پذیر است.

وقت ی سیستم اَبَرانتگرال-پذیر است، بیش از یک دسته مختصات ِ کانُنیک هست که تکانِها یِ متناظر با آنها ثابت-ِ-حرکت َند. و البته رابطه یِ بین ِ این دسته-یِ-مختصاتها نابدیهی ست: چنین نیست که تکانِها یِ یک دسته تابعِ تکانِها یِ یک دسته یِ دیگر باشند. همئرز با این، چنین نیست که زیرخمینه یِ تکانه-ثابت ِ متناظر با یک ی از این دسته-مختصاتها، با زیرخمینه یِ تکانه-ثابت ِ متناظر با یک ی دیگر از این دسته-مختصاتها یکسان است.

10

فرمول- بندی یِ هَمیلتِن- یاکُبی

89 هَمیلتِنی یِ صفر

گیرم هَمیلتِنی یِ H مستقل از مختصات ِ فضا- یِ- فاز است. این یعنی H تابع ی از فقط زمان است:

$$H = \mathfrak{a}(t). \tag{3533}$$

مشتق ِ چنین- هَمیلتِنی یی نسبت به مختصات ِ فضا- یِ- فاز صفر است:

$$\frac{\partial H}{\partial x^a} = 0. \tag{3473}$$

پس،

$$\{x^a, H\} = 0. \tag{3534}$$

معادله- یِ- حرکت برا یِ مختصات ِ فضا- یِ- فاز هم چنین است.

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x^a, H\}. \tag{1777}$$

پس مشتق ِ زمانی یِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز صفر است:

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{3474}$$

و این معادله-یِ-حرکت به-سادگی حل میشود. جواب ِ معادله-یِ-حرکت این است که همه یِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز بر-لاک ثابت میمانند:

$$\dot{x}^a(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{x}^a(t_0). \tag{3475}$$

یک حالت ِ خاصتر این است که هَمیلتِنی صفر است:

$$H = 0. \tag{3535}$$

رُشن است که در این حالت هم (3474) و (3475) برقرار َند: مشتق ِ زمانی یِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز صفر است، پس این مختصات بر-لاک ثابت میمانند.

90 معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی

معمولَن هَمیلتِنی صفر (یا تابع ِ فقط زمان) نیست. اما با تبدیل از مختصات ِ کانُنیک ِ اولیه (بدون-پریم) به مختصات-ِ-کانُنیک ِ پریم-دار، اگر این تبدیل وابسته به زمان باشد هَمیلتِنی عوض میشود: هَمیلتِنی یِ اولیه (H) به هَمیلتِنیِ پریم-دار (H') تبدیل میشود، که

$$H' = H + \left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3260}$$

$\tilde{\Upsilon}$ تابعی یِ مولد ِ تبدیل-ِ-کانُنیک است، که x را به x' تبدیل میکند:

$$\mathrm{p}_i = \left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial \mathrm{q}^i}\right)_{t,p'}. \tag{3241}$$

$$q'^i = \left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3242}$$

و (q,p) یک جایگشت ِ کانُنیک ِ (q,p) است، چنان که q^i ها و p'_i ها مستقل-از-هم َند. هدف یافتن ِ تبدیل ی ست که با آن H' صفر شود:

$$H' = 0. \tag{3536}$$

در این صورت مختصات ِ پریم-دار ِ فضا یِ-فاز بر-لاک ثابت میمانند.

با گذاشتن ِ (3241) در (3260)، شرط ِ (3536) چنین میشود

$$0 = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'} + H\left[t,\mathrm{q},\mathrm{p} = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}}\right)_{t,p'}\right]. \tag{3537}$$

در این معادله، p' فقط از طرق ِ بستگی یِ $\tilde{\Upsilon}$ به p' وارد میشود. معادله یِ (3537) یک معادله یِ دیفرانسیل ِ پارِئی برا یِ $\tilde{\Upsilon}$ بر حسب ِ t و q است. این را، سادِتر، چنین مینویسند.

$$0 = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t} + H\left(t,\mathrm{q},\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3538}$$

یا،

$$0 = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t} + H(t,\mathrm{q},\nabla\,\tilde{\Upsilon}). \tag{3539}$$

که ∇ مشتق-گیری نسبت به q است:

$$(\nabla\,\mathfrak{X})_i = \frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\mathrm{q}^i}. \tag{3540}$$

شکل ِ بستِتر ِ (3539) میشود

$$0 = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t} + H(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\nabla\,\tilde{\Upsilon}). \tag{3541}$$

یا (از آن هم بستِتر)،

$$0 = \mathsf{p}(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\tilde{\Upsilon}). \tag{3542}$$

که،

$$\mathsf{p} = p_0 + H(t, x). \tag{1822}$$

$$\mathrm{q}^0 = t. \tag{2737}$$

و $\underset{\sim}{\nabla}$ مشتق-گیری نسبت به $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ است:

$$(\underset{\sim}{\nabla}\, \mathfrak{X})_\alpha = \frac{\partial\, \mathfrak{X}}{\partial\, \mathrm{q}^\alpha}. \tag{3543}$$

به (3539)، یا شکل ِ بسته اَ ش (3541) یا (3542)، معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی میگویند.

معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ پارِئی (و در اغلب ِ موارد غیر- ِ-خطی) ست. به-دست-آوردن ِ جواب ِ کلی یِ چنین-معادله ای معمولَن بسیار دشوار است، یا نشدنی ست. هدف هم این نیست. هدف حل ِ معادلات- ِ-دیفرانسیل ِ حرکت برا یِ (q, p)، یا هم ان (q, p)، است. برا یِ این کار، فقط یک جواب برا یِ تابعی-یِ-مولد کافی ست. البته تابعی-یِ-مولد قرار است به p' هم (علاوه بر t و q) وابسته باشد. p'_i ها به شکل ِ ثابتها یی در جواب ظاهر میشوند. به این ترتیب، هدف یافتن ِ یک جواب ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی برا یِ تابعی-یِ-مولد است، که شامل ِ $\mathfrak{m}$ ثابت باشد، که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است.

گیرم چنین-جواب ی به دست آمده. رابطه یِ (3242) بستگی یِ q' به t و q و p' را میدهد:

$$q'^i = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}{}^i\, \tilde{\Upsilon})(t, \mathrm{q}, p'). \tag{3544}$$

بسته،

$$q' = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \tilde{\Upsilon})(t, \mathrm{q}, p'). \tag{3545}$$

باید این رابطه را وارون کرد و بستگی یِ q به t و q' و p' را به دست آورد:

$$\mathrm{q}^i = \mathfrak{q}^i(t, q', p'). \tag{3546}$$

بسته،

$$\mathrm{q} = \mathfrak{q}(t, q', p'). \tag{3547}$$

که،

$$q'^i = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}{}^i\,\tilde{\Upsilon})[t, \mathfrak{q}(t, q', p'), p']. \tag{3548}$$

بسته،

$$q' = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})[t, \mathfrak{q}(t, q', p'), p']. \tag{3549}$$

یا،

$$q' = \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})[t, \mathfrak{q}(t, \cdot, p'), p']\}(q'). \tag{3550}$$

که یعنی $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})[t, \mathfrak{q}(t, \cdot, p'), p']$ همانی ست:

$$\mathbf{1} = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})[t, \mathfrak{q}(t, \cdot, p'), p']. \tag{3551}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{q}(t, \cdot, p') = [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t, \cdot, p')]^{-1}. \tag{3552}$$

پس،

$$\mathrm{q}^i = \{[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t, \cdot, p')]^{-1}\}^i(q'). \tag{3553}$$

بسته،

$$\mathrm{q} = [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t, \cdot, p')]^{-1}(q'). \tag{3554}$$

q را، که بر حسبِ t و q' و p' به دست آمده، در (3241) میگذارم. p، بر حسبِ t و q' و p'، به دست میئاید:

$$\mathrm{p}_i = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,i}\,\tilde{\Upsilon})(t, \mathrm{q}, p'). \tag{3555}$$

بسته،

$$\mathrm{p} = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\tilde{\Upsilon})(t, \mathrm{q}, p'). \tag{3556}$$

با استفاده از (3547)،

$$\mathrm{p}_i = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,i}\,\tilde{\Upsilon})[t, \mathfrak{q}(t, q', p'), p']. \tag{3557}$$

بسته،

$$\mathrm{p} = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\tilde{\Upsilon})[t, \mathfrak{q}(t, q', p'), p']. \tag{3558}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{p}_i = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,i}\,\tilde{\Upsilon})\{t, [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t, \cdot, p')]^{-1}(q'), p'\}. \tag{3559}$$

بسته،

$$\mathrm{p} = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\tilde{\Upsilon})\{t, [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t, \cdot, p')]^{-1}(q'), p'\}. \tag{3560}$$

روابط ِ (3546) و (3557)، یا شکلها یِ بسته یِ شان، (3547) و (3558)، بستگی یِ q و p به t و q' و p' میدهند. البته خُد ِ q در این روابط هم از (3552) به دست میئاید. به این ترتیب بستگی یِ صریح ِ q و p به t و q' و p'، از روابط ِ (3553) و (3559)، یا شکلها یِ بسته یِ شان، (3554) و (3560)، به دست میئاید.

q' و p' بر-لاک ثابت َند (چون H' صفر است). پس q و p بر حسب ِ t و $(2\,\mathfrak{m})$ ثابت به دست آمده اند. این ثابتها مثل ِ شرایط- ِ-اولیه اند. به این ترتیب جواب ِ کلی یِ معادلات- ِ-دیفرانسیل ِ حرکت به دست آمده.

البته برا یِ این که روش ِ بالا کار کند یک شرط لازم است: باید بشود q را از (3545) به دست آورد، دست- ِ-کم مُضعَن. این یعنی $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t, \cdot, p')$ باید (دست- ِ-کم مُضعَن) وارون پذیر باشد. در این صورت است که (3552) را میشود نوشت. وارون-پذیر-بودن ِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t, \cdot, p')$ (مُضعَن)

همئرز است با این که مئلفِها یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t,\centerdot,p')$ مستقل-از-هم باشند. این براورده میشود، اگر

$$\{0\}=\mathsf{ker}\{\mathbf{D}\,[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t,\centerdot,p')]\}. \tag{3561}$$

یا،

$$\{0\}=\mathsf{ker}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon})(t,\mathrm{q},p')]. \tag{3562}$$

بسته،

$$\{0\}=\mathsf{ker}(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon}). \tag{3563}$$

در روابط ِ (3547) و (3558)، که q و p را بر حسب ِ زمان و q' و p' میدهند، q'^i ها و p'_i ها بر-لاک ثابت َند. عملَن میشود بحث ِ تبدیل- ِ-کانُنیک، تابعی-یِ-مولد، و مختصات- ِ-کانُنیک ِ پریم-دار را کنار گذاشت. به جا یِ $\tilde{\Upsilon}$ و q' و p'، به ترتیب، S و $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ را به کار میبَرم. معادله یِ هَمیلتِن یاکُبی این است.

$$0=\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t}+H(t,\mathrm{q},\nabla\,\mathsf{S}). \tag{3564}$$

بستِتِر،

$$0=\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t}+H(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\nabla\,\mathsf{S}). \tag{3565}$$

و از آن هم بستِتِر،

$$0=\mathsf{p}(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S}). \tag{3566}$$

به S تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی میگویند. دنبال ِ جواب ی برا یِ تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی میگردند که شامل ِ $\mathfrak{m}$ ثابت ِ $\mathfrak{b}_1$ تا $\mathfrak{b}_\mathfrak{m}$ است، چنان که

$$\{0\}=\mathsf{ker}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,\mathrm{q},\mathfrak{b})]. \tag{3567}$$

که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. (3567) همئرز است با

$$\mathfrak{m} = \mathsf{rank}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,\mathrm{q},\mathfrak{b})]. \tag{3568}$$

به S ی که (یک جواب ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی باشد) و (3567) یا، همئرز با آن، (3568) را براورَد، یک جواب ِ کامل ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی میگویند. با فرض ِ این که S یک جواب ِ کامل باشد، q (بر-لاک) از این معادله به دست میئاید.

$$\mathfrak{a} \overset{\mathrm{ns}}{=} (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,\mathrm{q},\mathfrak{b}). \tag{3569}$$

که $\mathfrak{a}^1$ تا $\mathfrak{a}^{\mathfrak{m}}$ ثابت َند. معادله یِ (3569) یعنی

$$\mathrm{q} \overset{\mathrm{ns}}{=} [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,\boldsymbol{\cdot},\mathfrak{b})]^{-1}(\mathfrak{a}). \tag{3570}$$

p هم (بر-لاک) چنین میشود.

$$\mathrm{p} \overset{\mathrm{ns}}{=} (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathsf{S})\{t,[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,\boldsymbol{\cdot},\mathfrak{b})]^{-1}(\mathfrak{a}),\mathfrak{b}\}. \tag{3571}$$

شکل ِ رایجتر ِ اینها متناظر است با حالت ی که q هم ان q (مکان) است. در این حالت (3564) تا (3566) چنین میشوند.

$$0 = \frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t} + H(t,q,\nabla\,\mathsf{S}). \tag{3572}$$

$$0 = \frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t} + H(\underset{\sim}{q},\nabla\,\mathsf{S}). \tag{3573}$$

$$0 = \mathsf{p}(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S}). \tag{3574}$$

روابط ِ (3567) تا (3571) هم چنین میشوند.

$$\{0\} = \mathsf{ker}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,q,\mathfrak{b})]. \tag{3575}$$

$$\mathfrak{m} = \mathsf{rank}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,q,\mathfrak{b})]. \tag{3576}$$

$$\mathfrak{a} \overset{\mathrm{ns}}{=} (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,q,\mathfrak{b}). \tag{3577}$$

$$q \overset{\mathrm{ns}}{=} [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,\boldsymbol{\cdot},\mathfrak{b})]^{-1}(\mathfrak{a}). \tag{3578}$$

$$p \overset{\mathrm{ns}}{=} (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathsf{S})\{t,[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,\boldsymbol{\cdot},\mathfrak{b})]^{-1}(\mathfrak{a}),\mathfrak{b}\}. \tag{3579}$$

یک جواب ِ S برا یِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی کامل است، وقت ی (3567)، یا همئرز با آن (3568)، را براورَد، که اگر q هم ان q باشد میشود شرط ِ (3575)، یا همئرز با آن (3576). چنین-جواب ی کلیترین جواب ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی نیست. اما هدف هم به-دست-آوردن ِ کلیترین جواب ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی نیست. هدف حل ِ معادله-یِ-حرکت است. با داشتن ِ یک جواب ِ کامل ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی، جواب ِ کلی یِ معادله-یِ-حرکت به دست میئاید: (3570) و (3571)، و اگر q هم ان q باشد (3578) و (3579).

91 هَمیلتِنی یِ مستقل از بعض ی مختصات

گیرم هَمیلتِنی صریحَن به زمان وابسته نیست:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{3202}$$

یعنی،

$$\frac{\partial\,[H(t,\mathrm{q},\mathrm{p})]}{\partial t} = 0. \tag{3580}$$

در این حالت معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial t} + H(\mathrm{q},\nabla\,\mathsf{S}). \tag{3581}$$

از این معادله نسبت به زمان مشتق میگیرم:

$$0 = \frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial t^2} + [(\mathbf{D}_{(2)}{}^i\,H)(\mathrm{q},\nabla\,\mathsf{S})]\,\frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial t\,\partial\,\mathrm{q}^i}. \tag{3582}$$

این معادله براورده میشود اگر

$$0 = \frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial t^2}. \tag{3583}$$

$$0 = \frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial t\,\partial\,\mathrm{q}^i}. \tag{3584}$$

بسته یِ اینها میشود

$$0 = \frac{\partial^2 \mathsf{S}}{\partial t\, \partial \mathrm{q}^\alpha}. \tag{3585}$$

یا،

$$0 = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\mathrm{q}}} \left(\frac{\partial \mathsf{S}}{\partial t} \right). \tag{3586}$$

که همئرز است با این که مشتق ِ S نسبت به t ثابت است:

$$\frac{\partial \mathsf{S}}{\partial t} = -E. \tag{3587}$$

این که ثابت با $(-E)$ نشان داده شده فقط به این خاطر است که معادلات ِ بعدی شکل ِ آشناتر ی داشته باشند. (3587) همئرز است با این که یک تابعی یِ $\mathsf{S}_{|\,t}$ هست که به t وابسته نیست و

$$\mathsf{S}(t, \mathrm{q}) = -E\, t + \mathsf{S}_{|\,t}(\mathrm{q}). \tag{3588}$$

مفصلتر (با در-نظر-گرفتن ِ بستگی به ثابتها)،

$$\mathsf{S}(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b}) = -E\, t + \mathsf{S}_{|\,t}(\mathrm{q}, \mathfrak{b}). \tag{3589}$$

که E یک ی از $\mathfrak{b}^i$ ها ست: $\mathfrak{b}_{|\,E}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{b} = (E, \mathfrak{b}_{|\,E}). \tag{3590}$$

که یعنی

$$\mathfrak{b}_1 = E. \tag{3591}$$

$$\mathfrak{b}_i = (\mathfrak{b}_{|\,E})_i, \quad i > 1. \tag{3592}$$

با شکل ِ (3589) برا یِ S،

$$\nabla \mathsf{S} = \nabla \mathsf{S}_{|\,t}. \tag{3593}$$

و معادله یِ (3581) چنین میشود.

$$E = H(\mathrm{q}, \nabla \mathsf{S}_{|\,t}). \tag{3594}$$

رُشن است که برا یِ سازگاری یِ این معادله لازم است H صریحَن به t وابسته نباشد، که فرض شد چنین است.

تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی ضمنَن باید شرط ِ (3567) را هم براورَد:

$$\{0\} = \mathsf{ker}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \mathsf{S})(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b})]. \tag{3567}$$

از (3589) دیده میشود

$$\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \mathsf{S} = \mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(2)}\, \mathsf{S}_{|\,t}. \tag{3595}$$

پس (3567) همئرز است با

$$\{0\} = \mathsf{ker}[(\mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(2)}\, \mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b})]. \tag{3596}$$

یا،

$$\mathfrak{m} = \mathsf{rank}[(\mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(2)}\, \mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b})]. \tag{3597}$$

که $(2\,\mathfrak{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. نشان میدهم (3597) همئرز است با این که

$$\mathfrak{m} - 1 = \mathsf{rank}[(\mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(3)}\, \mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, E, \mathfrak{b}_{|\,E})]. \tag{3598}$$

رابطه یِ (3597) یعنی $\{[i, (\mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(2)}{}^{i}\, \mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b})] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ خطی-مستقل است. رُشن است که اگر چنین باشد، $\{[i, (\mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(2)}{}^{i}\, \mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b})] \mid 2 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ هم خطی-مستقل است، که یعنی (3598) برقرار است. پس رابطه یِ (3597) رابطه یِ (3598) را نتیجه میدهد. بر عکس گیرم (3598) برقرار است. نشان میدهم اگر یک ترکیب ِ خطی از $\{[i, (\mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(2)}{}^{i}\, \mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b})] \mid 1 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ صفر باشد، ضریبها یِ این ترکیب صفر َند. گیرم $\mathfrak{d}_1$ تا $\mathfrak{d}_{\mathfrak{m}}$ چنان َند که

$$0 = \sum_{i=1}^{\mathfrak{m}} \mathfrak{d}_i\, (\mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(2)}{}^{i}\, \mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b}). \tag{3599}$$

از (3594) نسبت به $\mathfrak{b}_i$ مشتق میگیرم:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{b}_i} = [(\mathbf{D}_{(2)}{}^j H)(\mathrm{q}, \nabla \mathsf{S}_{|\,t})]\,(\mathbf{D}_{(1)\,j}\,\mathbf{D}_{(2)}{}^i\,\mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b}). \tag{3600}$$

از (3591) و (3592) دیده میشود

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{b}_i} = \delta_1^i. \tag{3601}$$

پس (3600) چنین میشود.

$$\delta_1^i = [(\mathbf{D}_{(2)}{}^j H)(\mathrm{q}, \nabla \mathsf{S}_{|\,t})]\,(\mathbf{D}_{(1)\,j}\,\mathbf{D}_{(2)}{}^i\,\mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b}). \tag{3602}$$

از (3599) نتیجه میشود

$$0 = \sum_{i=1}^{\mathfrak{m}} \mathfrak{d}_i\,[(\mathbf{D}_{(2)}{}^j H)(\mathrm{q}, \nabla \mathsf{S}_{|\,t})]\,(\mathbf{D}_{(1)\,j}\,\mathbf{D}_{(2)}{}^i\,\mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b}). \tag{3603}$$

از (3602) و (3603) نتیجه میشود

$$0 = \mathfrak{d}_1. \tag{3604}$$

با این، رابطه یِ (3599) چنین میشود.

$$0 = \sum_{i=2}^{\mathfrak{m}} \mathfrak{d}_i\,(\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}{}^i\,\mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b}). \tag{3605}$$

اما رابطه یِ (3598) یعنی $\{[i, (\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}{}^i\,\mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, \mathfrak{b})] \mid 2 \leq i \leq \mathfrak{m}\}$ خطی-مستقل است. پس $\mathfrak{d}_2$ تا $\mathfrak{d}_{\mathfrak{m}}$ هم صفر َند. به این ترتیب، رابطه یِ (3567) با رابطه یِ (3598) همئرز است: هسته یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b})$ بدیهی ست، اگر و تنها اگر رتبه یِ $(\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(3)}\,\mathsf{S}_{|\,t})(\mathrm{q}, E, \mathfrak{b}_{|\,E})$ کامل باشد.

پس حل ِ معادله یِ (3581) و براورده-شدن ِ شرط ِ (3567) به حل ِ معادله یِ (3594) و براورده-شدن ِ شرط ِ (3598) تحویل میشود.

معادله یِ (3594) همچنان یک معادله یِ پارِئی ست (مگر بُعد ِ فضا-یِ-فاز 2 باشد، که در آن صورت $\mathsf{S}_{|\,t}$ یک-متغیر ی ست). اما تعداد ِ متغیرها، نسبت به معادله یِ (3581)، یک ی کم شده:

وقت ی بُعد ِ فضا-یِ-فاز $(2\,\mathfrak{m})$ است، S یک تابعی از $(\mathfrak{m}+1)$ متغیر است، و $\mathsf{S}_{|\,t}$ یک تابعی از $\mathfrak{m}$ متغیر است. میگویند متغیر ِ t جدا شده.

ساختار ی مشابه هست، برا یِ حالت ی که H تابع ِ چند تا از مختصات ِ q نیست. گیرم H تابع ِ $\mathfrak{k}$ تا از مختصات ِ q نیست. این مختصات را با v^1 تا $v^{\mathfrak{k}}$ نشان میدهم:

$$\frac{\partial\, H}{\partial\, v^i} = 0. \tag{3606}$$

پس،

$$\frac{\partial\, \mathsf{p}}{\partial\, v^i} = 0. \tag{3607}$$

یعنی،

$$\frac{\partial\, [\mathsf{p}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]}{\partial\, v^i} = 0. \tag{3608}$$

از معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی، (3566)، نسبت به v^i مشتق میگیرم:

$$0 = \frac{\partial\, [\mathsf{p}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})]}{\partial\, v^i} + [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, \mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})]\, \frac{\partial^2\, \mathsf{S}}{\partial\, v^i\, \partial\, \mathrm{q}^{\alpha}}. \tag{3609}$$

جمله یِ اول ِ طرف- ِ-راست صفر است. پس (3609) چنین میشود.

$$0 = [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, \mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})]\, \frac{\partial^2\, \mathsf{S}}{\partial\, v^i\, \partial\, \mathrm{q}^{\alpha}}. \tag{3610}$$

این معادله براورده میشود اگر،

$$0 = \frac{\partial^2\, \mathsf{S}}{\partial\, v^i\, \partial\, \mathrm{q}^{\alpha}}. \tag{3611}$$

بسته

$$0 = \frac{\partial}{\partial\, \underset{\sim}{\mathrm{q}}}\, \left(\frac{\partial\, \mathsf{S}}{\partial\, v^i}\right). \tag{3612}$$

که همئرز است با این که مشتق ِ S نسبت به v ثابت است:

$$\frac{\partial\, \mathsf{S}}{\partial\, v^i} = \mathfrak{c}_i. \tag{3613}$$

که $\mathfrak{c}_1$ تا $\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}$ ثابت َند. (3613) همئرز است با این که یک تابعی یِ $\mathsf{S}_{|\,\upsilon}$ هست که به υ وابسته نیست و

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q}) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}_i\,\upsilon^i + \mathsf{S}_{|\,\upsilon}(t,\mathrm{q}_{|\,\upsilon}). \tag{3614}$$

مفصلتر (با در-نظر-گرفتن ِ بستگی به ثابتها)،

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{b}) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}_i\,\upsilon^i + \mathsf{S}_{|\,\upsilon}(t,\mathrm{q}_{|\,\upsilon},\mathfrak{b}). \tag{3615}$$

یا،

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{b}) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}_i\,\upsilon^i + \mathsf{S}_{|\,\upsilon}(t,\mathrm{q}_{|\,\upsilon},\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}}). \tag{3616}$$

که $\mathrm{q}_{|\,\upsilon}$ و $\mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}}$ چنین تعریف شده اند.

$$\mathrm{q} = (\upsilon,\mathrm{q}_{|\,\upsilon}). \tag{3617}$$

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}}). \tag{3618}$$

$\nabla_{|\,\upsilon}$ را هم چنین تعریف میکنم:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial\upsilon},\nabla_{|\,\upsilon}\right). \tag{3619}$$

دقیقتر این است که در طرف ِ راست ِ روابط ِ (3617) تا (3619)، مئلفِها جا-به-جا شده اند، چنان که

$$\mathrm{q}^i = (\mathrm{q}_{|\,\upsilon})^i, \quad \mathrm{q}^i \notin \{\upsilon^1,\ldots,\upsilon^{\mathfrak{k}}\}. \tag{3620}$$

اما رعایت-نکردن ِ این نکته استدلالها یِ بعدی را خدشه-دار نمیکند. اینجا هم ان شکلها یِ ساده یِ (3617) تا (3619) را به کار میبَرم.

به این ترتیب،

$$\nabla\,\mathsf{S} = (\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}},\mathsf{S}_{|\,\upsilon}). \tag{3621}$$

و معادله یِ (3566) میشود

$$0 = \mathsf{p}\left(t, \mathrm{q}_{|\,v}, \frac{\partial\,\mathsf{S}_{|\,v}}{\partial\,t}, \mathfrak{c}, \nabla_{|\,v}\,\mathsf{S}_{|\,v}\right). \tag{3622}$$

تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی باید شرط ِ (3567) را هم براورَد، این که هسته یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{b})$ بدیهی ست. دیده میشود

$$[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{b})]_{\cdot}^{\cdot} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} & \mathbf{0}_{1\times(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})} \\ \mathfrak{A}_{\cdot}^{\cdot} & [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(3)}\,\mathsf{S}_{|\,v})(t, \mathrm{q}_{|\,v}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})]_{\cdot}^{\cdot} \end{pmatrix}. \tag{3623}$$

که،

$$\mathfrak{A} = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S}_{|\,v})(t, \mathrm{q}_{|\,v}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}}). \tag{3624}$$

رابطه یِ (3623) نشان میدهد این که هسته یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{b})$ بدیهی ست، همئرز است با

$$\{0\} = \mathsf{ker}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(3)}\,\mathsf{S}_{|\,v})(t, \mathrm{q}_{|\,v}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})]. \tag{3625}$$

یعنی رابطه یِ (3567) همئرز است با رابطه یِ (3625): هسته یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{b})$ بدیهی ست، اگر و تنها اگر هسته یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(3)}\,\mathsf{S}_{|\,v})(t, \mathrm{q}_{|\,v}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})$ بدیهی باشد. رابطه یِ (3625) همئرز است با

$$\mathfrak{m} - \mathfrak{k} = \mathsf{rank}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(3)}\,\mathsf{S}_{|\,v})(t, \mathrm{q}_{|\,v}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})]. \tag{3626}$$

که یعنی رتبه یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(3)}\,\mathsf{S}_{|\,v})(t, \mathrm{q}_{|\,v}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})$ کامل است. پس هسته یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{b})$ بدیهی ست، اگر و تنها اگر رتبه یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(3)}\,\mathsf{S}_{|\,v})(t, \mathrm{q}_{|\,v}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})$ کامل باشد.

در معادله یِ (3622) متغیرها یِ v^1 تا $v^{\mathfrak{k}}$ ظاهر نشده اند. تعداد ِ متغیرها، نسبت به معادله یِ (3566)، $\mathfrak{k}$ تا کم شده: وقت ی بُعد ِ فضا-یِ-فاز $(2\,\mathfrak{m})$ است، S یک تابعی از $(\mathfrak{m}+1)$ متغیر است، و $\mathsf{S}_{|\,v}$ یک تابعی از $(\mathfrak{m}+1-\mathfrak{k})$ متغیر است. متغیرها یِ v^1 تا $v^{\mathfrak{k}}$ جدا شده اند.

سرانجام، گیرم H تابع ِ t و $\mathfrak{k}$ تا از مختصات ِ $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ نیست. این مختصات را با v^1 تا $v^{\mathfrak{k}}$ نشان میدهم. با ترکیب ِ حالتها یِ قبلی، S را میشود چنین گرفت.

$$\mathsf{S}(t, \mathrm{q}) = -E\,t + \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}_i\,v^i + \mathsf{S}_{|\,(t,v)}(\mathrm{q}_{|\,v}). \tag{3627}$$

که E و $\mathfrak{c}_1$ تا $\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}$ ثابت َند. مفصلتر (با در-نظر-گرفتن ِ بستگی به ثابتها)،

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{b}) = -E\,t + \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}_i\,\upsilon^i + \mathsf{S}_{|\,(t,\upsilon)}(\mathrm{q}_{|\,\upsilon},\mathfrak{b}). \tag{3628}$$

یا،

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{b}) = -E\,t + \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}_i\,\upsilon^i + \mathsf{S}_{|\,(t,\upsilon)}(\mathrm{q}_{|\,\upsilon},E,\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{|\,(E,\mathfrak{c})}). \tag{3629}$$

که،

$$\mathfrak{b} = (E,\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}},\mathfrak{b}_{|\,(E,\mathfrak{c})}). \tag{3630}$$

معادله یِ (3566) هم چنین میشود.

$$0 = \mathsf{p}(\mathrm{q}_{|\,\upsilon},\mathfrak{c},\nabla_{|\,\upsilon}\,\mathsf{S}_{|\,(t,\upsilon)},-E). \tag{3631}$$

مفصلتر،

$$0 = \mathsf{p}(\mathrm{q}_{|\,\upsilon},\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}},\nabla_{|\,\upsilon}\,\mathsf{S}_{|\,(t,\upsilon)},-E). \tag{3632}$$

اینها یعنی،

$$E = H(\mathrm{q}_{|\,\upsilon},\mathfrak{c},\nabla_{|\,\upsilon}\,\mathsf{S}_{|\,(t,\upsilon)}). \tag{3633}$$

یا،

$$E = H(\mathrm{q}_{|\,\upsilon},\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}},\nabla_{|\,\upsilon}\,\mathsf{S}_{|\,(t,\upsilon)}). \tag{3634}$$

با ترکیب ِ حالتها یِ قبلی، دیده میشود (3567) همئرز است با

$$\mathfrak{m} - 1 - \mathfrak{k} = \mathsf{rank}[(\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(4)}\,\mathsf{S}_{|\,(t,\upsilon)})(\mathrm{q}_{|\,\upsilon},E,\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{|\,(E,\mathfrak{c})})]. \tag{3635}$$

دیده میشود اینجا هم نتیجه آن است که هسته یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\mathfrak{b})$ بدیهی ست، اگر و تنها اگر رتبه یِ $(\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(4)}\,\mathsf{S}_{|\,\upsilon})(\mathrm{q}_{|\,\upsilon},E,\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})$ کامل باشد.

در معادله یِ (3631) متغیرها یِ t و υ^1 تا $\upsilon^{\mathfrak{k}}$ ظاهر نشده اند. تعداد ِ متغیرها، نسبت به معادله یِ (3566)، $(\mathfrak{k}+1)$ تا کم شده: وقت ی بُعد ِ فضا-یِ-فاز $(2\,\mathfrak{m})$ است، S یک تابعی از $(\mathfrak{m}+1)$ متغیر است، و $\mathsf{S}_{|\,(t,\upsilon)}$ یک تابعی از $(\mathfrak{m}-\mathfrak{k})$ متغیر است. متغیرها یِ t و υ^1 تا $\upsilon^{\mathfrak{k}}$ جدا شده اند.

92 هَمیلتِن-یاکُبی بر فضا-زمان- ِ-فاز

فرمول-بندی یِ هَمیلتِن-یاکُبی بر فضا-زمان- ِ-فاز هم شبیه ِ فرمول-بندی یِ هَمیلتِن-یاکبی بر فضا-یِ-فاز است. معادله یِ هَمیلتِن یاکُبی بر فضا-یِ-فاز این است.

$$0=\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t}+H(t,\mathrm{q},\nabla\,\mathsf{S}). \tag{3564}$$

معادله یِ متناظر بر فضا-زمان- ِ-فاز چنین میشود.

$$0=\frac{\partial\,\mathsf{S}_\tau}{\partial\,\tau}+H_\tau\left(t,\mathrm{q},\nabla\,\mathsf{S}_\tau,\frac{\partial\,\mathsf{S}_\tau}{\partial\,t}\right). \tag{3636}$$

بسته،

$$0=\frac{\partial\,\mathsf{S}_\tau}{\partial\,\tau}+H_\tau(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S}_\tau). \tag{3637}$$

$\underset{\sim}{\nabla}$ هم ان ∇ است، که فقط ترتیب ِ مئلفِها یَ ش عوض شده:

$$\underset{\sim}{\nabla}\,\mathfrak{X}=\left(\nabla\,\mathfrak{X},\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t}\right). \tag{3638}$$

در حال ی که

$$\underset{\sim}{\nabla}\,\mathfrak{X}=\left(\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,t},\nabla\,\mathfrak{X}\right). \tag{3639}$$

با چشم-پوشی از این تفاوت، در (3637) به جا یِ $\underset{\sim}{\nabla}$ هم ان ∇ را به کار میبرم و (3637) را چنین مینویسم.

$$0=\frac{\partial\,\mathsf{S}_\tau}{\partial\,\tau}+H_\tau(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S}_\tau). \tag{3640}$$

H_τ (هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی) به این شکل است.

$$H_\tau(t,x,p_0)=\mathfrak{H}[t,\mathsf{p}(t,x,p_0)]. \tag{3641}$$

یا،

$$H_\tau(t,\mathrm{q},\mathrm{p},p_0)=\mathfrak{H}[t,\mathsf{p}(t,\mathrm{q},\mathrm{p},p_0)]. \tag{3642}$$

که،

$$\mathsf{p}=p_0+H(t,x). \tag{1822}$$

به این ترتیب،

$$H_\tau\left(t,\mathrm{q},\nabla\mathsf{S}_\tau,\frac{\partial\mathsf{S}_\tau}{\partial t}\right)=\mathfrak{H}\left[t,\mathsf{p}\left(t,\mathrm{q},\nabla\mathsf{S}_\tau,\frac{\partial\mathsf{S}_\tau}{\partial t}\right)\right]. \tag{3643}$$

و معادله یِ (3636) چنین میشود.

$$0=\frac{\partial\mathsf{S}_\tau}{\partial\tau}+\mathfrak{H}\left[t,\mathsf{p}\left(t,\mathrm{q},\nabla\mathsf{S}_\tau,\frac{\partial\mathsf{S}_\tau}{\partial t}\right)\right]. \tag{3644}$$

H_τ بستگی یِ صریح به τ ندارد:

$$\frac{\partial H_\tau}{\partial\tau}=0. \tag{3330}$$

پس میشود متغیر ِ τ را جدا کرد:

$$\mathsf{S}_\tau(\tau,t,\mathrm{q})=-E_\tau\,\tau+\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}(t,\mathrm{q}). \tag{3645}$$

مفصلتر (با در-نظر-گرفتن ِ بستگی به ثابتها)،

$$\mathsf{S}_\tau(\tau,t,\mathrm{q},\mathfrak{b}_\tau)=-E_\tau\,\tau+\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}(t,\mathrm{q},\mathfrak{b}). \tag{3646}$$

یا،

$$\mathsf{S}_\tau(\tau, t, \mathrm{q}, \underset{\sim}{\mathfrak{b}}) = -E_\tau\,\tau + \mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}(t, \mathrm{q}, E_\tau, \underset{\sim}{\mathfrak{b}}_{|\,E_\tau}). \tag{3647}$$

تعداد ِ مئلفِها یِ $\underset{\sim}{\mathfrak{b}}$ برابر با $(\mathfrak{m}+1)$ است، که $(2\,\mathfrak{m}+2)$ بُعد ِ فضا-زمان- ِ-فاز است. $\mathfrak{b}_{\tau\,|\,E_\tau}$ هم چنین تعریف شده.

$$\underset{\sim}{\mathfrak{b}} = (E_\tau, \underset{\sim}{\mathfrak{b}}_{|\,E_\tau}). \tag{3648}$$

معادله یِ (3644) چنین میشود.

$$E_\tau = \mathfrak{H}\left[t, \mathsf{p}\left(t, \mathrm{q}, \nabla\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}, \frac{\partial\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}}{\partial\,t}\right)\right]. \tag{3649}$$

مشتق ِ $\mathfrak{H}$ نسبت به p صفر نیست:

$$\frac{\partial\,[\mathfrak{H}(t, \mathsf{p})]}{\partial\,\mathsf{p}} \neq 0. \tag{3650}$$

پس، از (3649) میشود p را (مُضعَن) به دست آورد. یعنی یک تابع یِ $\mathfrak{A}$ هست که

$$\mathfrak{A}(t, E_\tau) = \mathsf{p}\left(t, \mathrm{q}, \nabla\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}, \frac{\partial\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}}{\partial\,t}\right). \tag{3651}$$

یا،

$$\mathfrak{A}(t, E_\tau) = \frac{\partial\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}}{\partial\,t} + H(t, \mathrm{q}, \nabla\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}). \tag{3652}$$

یک تابعی یِ $\mathfrak{B}$ از t و E_τ هست که مشتق ِ آن نسبت به t برابر با $\mathfrak{A}$ است:

$$\mathfrak{A}(t, E_\tau) = \frac{\partial\,[\mathfrak{B}(t, E_\tau)]}{\partial\,t}. \tag{3653}$$

برا یِ $\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}$ این نهاده را به کار میبَرم.

$$\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}(t, \mathrm{q}, E_\tau, \mathfrak{b}) = \mathfrak{B}(t, E_\tau) + \mathsf{S}(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b}). \tag{3654}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial \mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}}{\partial t} = \mathfrak{A}(t, E_\tau) + \frac{\partial \mathsf{S}}{\partial t}. \tag{3655}$$

$$\nabla \mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau} = \nabla \mathsf{S}. \tag{3656}$$

و معادله یِ (3652) هم ان معادله یِ (3564) میشود:

$$0 = \frac{\partial \mathsf{S}}{\partial t} + H(t, \mathrm{q}, \nabla \mathsf{S}). \tag{3564}$$

معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی معادله یِ (3637) است. البته H_τ بستگی یِ صریح به τ ندارد. پس میشود متغیر ِ τ را جدا کرد:

$$S_\tau(\tau, \underset{\sim}{\mathrm{q}}) = -E_\tau\,\tau + S_{\tau\,|\,\tau}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}). \tag{3657}$$

مفصلتر (با در-نظر-گرفتن ِ بستگی به ثابتها)،

$$\mathsf{S}_\tau(\tau, \underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{p}}) = -E_\tau\,\tau + \mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{p}}). \tag{3658}$$

یا،

$$\mathsf{S}_\tau(\tau, \underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{p}}) = -E_\tau\,\tau + \mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, E_\tau, \underset{\sim}{\mathfrak{p}}_{|\,E_\tau}). \tag{3659}$$

و معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی، برا یِ $\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}$، چنین میشود.

$$E_\tau = H_\tau(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}). \tag{3660}$$

تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی باید این شرط را هم براورَد:

$$\{0\} = \mathsf{ker}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \mathsf{S}_\tau)\,(\tau, \underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathfrak{p}})]. \tag{3661}$$

با روشی ی مشابه با هم ان که برا یِ مسئله در فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته به کار رفت، دیده میشود رابطه یِ (3661) همئرز است با

$$\mathfrak{m} = \mathsf{rank}[(\mathbf{D}_{(1)}\, \mathbf{D}_{(3)}\, \mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, E_\tau, \underset{\sim}{\mathfrak{p}}_{|\,E_\tau})]. \tag{3662}$$

هسته یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S}_\tau)(\tau,\underset{\sim}{\mathfrak{q}},\underset{\sim}{\mathfrak{p}})$ بدیهی ست، یعنی رتبه یِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S}_\tau)(\tau,\underset{\sim}{\mathfrak{q}},\underset{\sim}{\mathfrak{p}})$ کامل است، اگر و تنها اگر رتبه یِ $(\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(3)}\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau})(\underset{\sim}{\mathfrak{q}},E_\tau,\underset{\sim}{\mathfrak{p}}_{|\,E_\tau})$ کامل باشد.

اینجا هم، وقت ی H_τ تابع ِ بعض ی از مختصات ِ $\underset{\sim}{\mathfrak{q}}$ نیست میشود آن مختصات را جدا کرد. گیرم H_τ صریحَن تابع ِ $(\mathfrak{k}+1)$ تا از مختصات ِ $\underset{\sim}{\mathfrak{q}}$ نیست. این مختصات را با υ^0 تا $\upsilon^{\mathfrak{k}}$ نشان میدهم:

$$\frac{\partial\,H_\tau}{\partial\,\upsilon^\alpha}=0. \tag{3663}$$

با روش ی مشابه با هم ان که برا یِ مسئله در فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته به کار رفت، این نهاده پیشنهاد میشود.

$$\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}(\underset{\sim}{\mathfrak{q}})=\sum_{\alpha=0}^{\mathfrak{k}}\mathfrak{c}_\alpha\,\upsilon^\alpha+\mathsf{S}_{\tau\,|\,(\tau,\upsilon)}(\underset{\sim}{\mathfrak{q}}_{|\,\upsilon}). \tag{3664}$$

مفصلتر (با در-نظر-گرفتن ِ بستگی به ثابتها)،

$$\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}(\underset{\sim}{\mathfrak{q}},\underset{\sim}{\mathfrak{p}})=\sum_{\alpha=0}^{\mathfrak{k}}\mathfrak{c}_\alpha\,\upsilon^\alpha+\mathsf{S}_{\tau\,|\,(\tau,\upsilon)}(\underset{\sim}{\mathfrak{q}}_{|\,\upsilon},\underset{\sim}{\mathfrak{p}}). \tag{3665}$$

که $\mathfrak{c}_0$ تا $\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}$ ثابت َند، و $\underset{\sim}{\mathfrak{q}}_{|\,\upsilon}$ چنین تعریف شده.

$$\underset{\sim}{\mathfrak{q}}=(\upsilon^0,\ldots,\upsilon^{\mathfrak{k}},\underset{\sim}{\mathfrak{q}}_{|\,\upsilon}). \tag{3666}$$

$\underset{\sim}{\nabla}_{|\,\upsilon}$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$\underset{\sim}{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial\,\upsilon^0},\ldots,\frac{\partial}{\partial\,\upsilon^{\mathfrak{k}}},\underset{\sim}{\nabla}_{|\,\upsilon}\right). \tag{3667}$$

البته اینجا هم هم ان ملاحظات ِ مربوط به ترتیب ِ مئلفِها هست. از (3664) دیده میشود

$$\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,\tau}=(\mathfrak{c}_0,\ldots,\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}},\underset{\sim}{\nabla}_{|\,\upsilon}\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,(\tau,\upsilon)}). \tag{3668}$$

و معادله یِ (3660) میشود

$$E_\tau=H_\tau(\underset{\sim}{\mathfrak{q}}_{|\,\upsilon},\mathfrak{c},\underset{\sim}{\nabla}_{|\,\upsilon}\,\mathsf{S}_{\tau\,|\,(\tau,\upsilon)}). \tag{3669}$$

مفصلتر،

$$E_\tau = H_\tau(\underset{\sim}{\mathsf{q}}_{|\,\upsilon}, \mathfrak{c}_0, \ldots, \mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}, \underset{\sim}{\nabla}_{|\,\upsilon}\, \mathsf{S}_{\tau\,|\,(\tau,\upsilon)}). \tag{3670}$$

همچنین، دیده میشود رابطه ی ِ (3662) همئرز است با

$$\mathfrak{m} - \mathfrak{k} - 1 = \mathsf{rank}[(\mathbf{D}_{(1)\,(4)}\, \mathsf{S}_{\tau\,|\,(\tau,\upsilon)})(\underset{\sim}{\mathsf{q}}_{|\,\upsilon}, E_\tau, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})]. \tag{3671}$$

که یعنی (3661) با (3671) همئرز است: هسته ی ِ $(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \mathsf{S}_\tau)(\tau, \underset{\sim}{\mathsf{q}}, \mathfrak{b})$ بدیهی ست، اگر و تنها اگر رتبه ی ِ $(\mathbf{D}_{(1)\,(4)}\, \mathsf{S}_{\tau\,|\,(\tau,\upsilon)})(\underset{\sim}{\mathsf{q}}_{|\,\upsilon}, E_\tau, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})$ کامل باشد.

پس حل ِ معادله ی ِ (3637) و براورده-شدن ِ شرط ِ (3661) به حل ِ معادله ی ِ (3670) و براورده-شدن ِ شرط ِ (3671) تحویل میشود. تعداد ِ متغیرها، نسبت به معادله ی ِ (3660) به اندازه ی ِ $(\mathfrak{k}+1)$ تا و نسبت به معادله ی ِ (3637) به اندازه ی ِ $(\mathfrak{k}+2)$ تا، کم شده. متغیرها ی ِ υ_0 تا $\upsilon_{\mathfrak{k}}$ جدا شده اند (و البته τ هم جدا شده).

93 جدا-کردن ِ متغیر بر اساس ِ ثابت- ِ-حرکت

گیرم I یک تابعی ی ِ مستقل با دامنه ی ِ فضا-ی ِ-فاز است. مختصات- ِ-کانُنیک ی هستند (مختصات ِ پریم-دار) که I یک ی از آنها ست. بدون ِ کاستن از کلیت، میشود آن مختصه را مئلفه ی ِ اول ِ تکانه گرفت:

$$p'_1 = I. \tag{3672}$$

q'^1 را با υ نشان میدهم:

$$q'^1 = \upsilon. \tag{3673}$$

گیرم I بر-لاک ثابت است. در این صورت مشتق ِ هَمیلتنی نسبت به υ (در p' و بقیه ی ِ q'^i ها ثابت) صفر است:

$$\frac{\partial H}{\partial \upsilon} = 0. \tag{3674}$$

پس میشود در تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی مختصه یِ υ را جدا کرد:

$$\mathsf{S}(t,q') = \mathfrak{c}\,\upsilon + \mathsf{S}_{|\,\upsilon}(t,q'_{|\,\upsilon}). \tag{3675}$$

مفصلتر (با در-نظر-گرفتن ِ بستِگی به ثابتها)،

$$\mathsf{S}(t,q',\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\,\upsilon + \mathsf{S}_{|\,\upsilon}(t,q'_{|\,\upsilon},\mathfrak{b}). \tag{3676}$$

یک مثال ِ ساده این است که بُعد ِ فضا-یِ-فاز 2 است، و هَمیلتنی بستگی یِ صریح به زمان ندارد. حالت ِ بدیهی یِ هَمیلتِنی یِ ثابت را کنار میگذارم. در این صورت مشتق ِ هَیلتنی نسبت به q یا p ناصفر است. پس میشود (q,p) را یک جایگشت- ِ-کانُنیک ِ (q,p) گرفت، چنان که مشتق ِ هَمیلتِنی نسبت به p ناصفر است:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}} \neq 0. \tag{3677}$$

پس p را میشود (مُضعَن) بر حسب ِ (q,H) حساب کرد:

$$\mathrm{p} = \mathfrak{p}(\mathrm{q},H). \tag{3678}$$

p' را خُد ِ H میگیرم:

$$p' = H. \tag{3679}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{p} = \mathfrak{p}(\mathrm{q},p'). \tag{3483}$$

تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با تبدیل- ِ-کانُنیک ی که (q,p) را به (q',p')، یا هم ان (q',H)، تبدیل میکند را با $\tilde{\Upsilon}$ نشان میدهم. $\tilde{\Upsilon}$ را مستقل از زمان میگیرم. دیده میشود

$$\mathrm{p} = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}}\right)_{p'}. \tag{3680}$$

$$q' = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,p'}\right)_{\mathrm{q}}. \tag{3681}$$

از (3680) دیده میشود یک جواب برا یِ $\tilde{\Upsilon}$ چنین است.

$$\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}, p') = \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\, \mathfrak{p}(\mathfrak{q}, p'). \tag{3682}$$

که q_0 یک ثابت است. البته میشود q_0 را تابع ِ p' گرفت، یا یک تابعی از p' هم به جواب افزود. اما هدف به-دست-آوردن ِ کلیترین-جواب برا یِ $\tilde{\Upsilon}$ نیست. اینجا q_0 را ثابت میگیرم. (3682) را در (3681) میگذارم:

$$q' = \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\, \frac{\partial\,[\mathfrak{p}(\mathfrak{q}, p')]}{\partial\, p'}. \tag{3683}$$

از (3679) دیده میشود

$$\frac{\partial\, H}{\partial\, q'} = 0. \tag{3684}$$

اصولَن تبدیل- ِ-کانُنیک چنان گرفته شده بود که H مستقل از q' شود. تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی را با S' نشان میدهم. معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial\, \mathsf{S}'}{\partial\, t} + H\left(\frac{\partial\, \mathsf{S}'}{\partial\, q'}\right). \tag{3685}$$

که یعنی،

$$0 = \frac{\partial\, \mathsf{S}'}{\partial\, t} + \frac{\partial\, \mathsf{S}'}{\partial\, q'}. \tag{3686}$$

مختصه یِ q' را جدا میکنم:

$$\frac{\partial\, \mathsf{S}'}{\partial\, q'} = \mathfrak{c}. \tag{3687}$$

که $\mathfrak{c}$ یک ثابت است. از (3687) نتیجه میشود

$$\mathsf{S}'(t, q') = \mathfrak{c}\, q' + \mathsf{S}'_{|\,q'}(t). \tag{3688}$$

مفصلتر، (با در-نظر-گرفتن ِ بستِگی به ثابت)،

$$\mathsf{S}'(t, q', \mathfrak{c}) = \mathfrak{c}\, q' + \mathsf{S}'_{|\,q'}(t, \mathfrak{c}). \tag{3689}$$

پس،

$$\frac{\partial \mathsf{S}^{\prime}}{\partial t} = \frac{\partial \mathsf{S}^{\prime}_{|\,q'}}{\partial t}. \tag{3690}$$

معادله یِ (3686) چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial \mathsf{S}^{\prime}}{\partial t} + \mathfrak{c}. \tag{3691}$$

و با استفاده از (3690)،

$$0 = \frac{\partial \mathsf{S}^{\prime}_{|\,q'}}{\partial t} + \mathfrak{c}. \tag{3692}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{S}^{\prime}_{|\,q'}(t) = -\mathfrak{c}\,t + \mathfrak{c}'. \tag{3693}$$

$\mathfrak{c}'$ یک ثابت ِ دیگر است. اما $\mathfrak{c}'$ یک ثابت ِ جمعی ست: مشتق ِ دوم ِ $\mathsf{S}^{\prime}_{|\,q'}$ نسبت به $\mathfrak{c}'$ و q' صفر است. که نتیجه میدهد مشتق ِ دوم ِ $\mathsf{S}^{\prime}$ نسبت به $\mathfrak{c}'$ و q' یا t صفر است. پس $\mathfrak{c}'$ مهم نیست. از جمله میشود آن را صفر گذاشت:

$$\mathsf{S}^{\prime}_{|\,q'}(t) = -\mathfrak{c}\,t. \tag{3694}$$

مفصلتر، (با در-نظر-گرفتن ِ بستِگی به ثابت)،

$$\mathsf{S}^{\prime}_{|\,q'}(t,\mathfrak{c}) = -\mathfrak{c}\,t. \tag{3695}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{S}^{\prime}(t,q',\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}\,q' - \mathfrak{c}\,t. \tag{3696}$$

میشد از این که H بستگی یِ صریح به t ندارد (و در نتیجه بر-لاک ثابت است) استفاده کرد و t را جدا کرد. تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی را با $\mathsf{S}^{\prime\prime}$ نشان میدهم. معادله یِ هَمیلتِن یاکُبی این است.

$$0 = \frac{\partial \mathsf{S}^{\prime\prime}}{\partial t} + H\left(\mathrm{q}, \frac{\partial \mathsf{S}^{\prime\prime}}{\partial \mathrm{q}}\right). \tag{3697}$$

چون H بستگی یِ صریح به t ندارد، میشود مشتق ِ $\mathsf{S}^{\backprime}$ نسبت به t را ثابت گرفت:

$$\frac{\partial\,[\mathsf{S}^{\backprime}(t,\mathrm{q})]}{\partial\,t}=-E. \tag{3698}$$

که E یک ثابت است. به این ترتیب،

$$\mathsf{S}^{\backprime}(t,\mathrm{q})=-E\,t+\mathsf{S}^{\backprime}_{|\,t}(\mathrm{q}). \tag{3699}$$

مفصلتر، (با در-نظر-گرفتن ِ بستِگی به ثابت)،

$$\mathsf{S}^{\backprime}(t,\mathrm{q},E)=-E\,t+\mathsf{S}^{\backprime}_{|\,t}(\mathrm{q},E). \tag{3700}$$

پس،

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}^{\backprime}}{\partial\,\mathrm{q}}=\frac{\partial\,\mathsf{S}^{\backprime}_{|\,t}}{\partial\,\mathrm{q}}. \tag{3701}$$

معادله یِ (3697) چنین میشود.

$$E=H\left(\mathrm{q},\frac{\partial\,\mathsf{S}^{\backprime}}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3702}$$

و، با استفاده از (3701)،

$$E=H\left(\mathrm{q},\frac{\partial\,\mathsf{S}^{\backprime}_{|\,t}}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3703}$$

با استفاده از این میشود (مُضعَن)مشتق ِ $\mathsf{S}^{\backprime}_{|\,t}$ نسبت به q را حساب کرد:

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}^{\backprime}_{|\,t}}{\partial\,\mathrm{q}}=\mathfrak{p}(\mathrm{q},E). \tag{3704}$$

پس،

$$\mathsf{S}^{\backprime}_{|\,t}(\mathrm{q})=\int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},E). \tag{3705}$$

که q_0 یک ثابت است. مفصلتر، (با در-نظر-گرفتن ِ بستِگی به ثابت ِ E)،

$$\mathsf{S}^{\text{II}}_{|t}(\mathrm{q},E)=\int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},E). \tag{3706}$$

اینجا هم مشتق ِ دوم ِ $\mathsf{S}^{\text{II}}_{|t}(\mathrm{q},E)$ نسبت به q_0 و q صفر است. که نتیجه میدهد مشتق ِ دوم ِ S^{II} نسبت به q_0 و q یا t صفر است. پس ثابت ِ q_0 مهم نیست. از (3706) نتیجه میشود

$$\mathsf{S}^{\text{II}}(t,\mathrm{q},E)=-E\,t+\int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},E). \tag{3707}$$

آبا S^{II} هم ان S^{I} است؟ برا یِ مقایسه یِ اینها باید مختصات ی (و ثابتها یی) که در S^{II} و S^{I} به کار رفته اند را به هم مربوط کنم. تبدیل- ِ-کانُنیک ی که (q',p') را به (q,p) مربوط میکند مستقل از زمان است. H هم تابع ی از فقط q و p است (به زمان وابسته نیست). پس تبدیل ی که (q',p') را به (q,H) مربوط میکند هم مستقل از زمان است. این یعنی (q',p')-ثابت هم ان (q,H)-ثابت است. پس برا یِ این که S^{II} هم ان S^{I} باشد، لازم است

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}^{\text{II}}}{\partial\,t}=\frac{\partial\,\mathsf{S}^{\text{I}}}{\partial\,t}. \tag{3708}$$

از (3696) دیده میشود

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}^{\text{I}}}{\partial\,t}=-\mathfrak{c}. \tag{3709}$$

از مقایسه یِ این با (3698) دیده میشود شرط ِ برقراری یِ (3708) این است که

$$E=\mathfrak{c}. \tag{3710}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{S}^{\text{II}}=-\mathfrak{c}\,t+\int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},\mathfrak{c}). \tag{3711}$$

و البته،

$$\mathsf{S}^{\text{I}}=-\mathfrak{c}\,t+\mathfrak{c}\int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\frac{\partial\,[\mathfrak{p}(\mathfrak{q},\mathfrak{c})]}{\partial\,\mathfrak{c}}. \tag{3712}$$

در رابطه یِ اخیر (3683) به کار رفته، و در آن p' با $\mathfrak{c}$ جایگزین شده. از (3711) و (3712) دیده میشود

$$\frac{\partial \mathsf{S}''}{\partial \mathrm{q}} = \mathfrak{p}(\mathrm{q}, \mathfrak{c}). \tag{3713}$$

$$\frac{\partial \mathsf{S}'}{\partial \mathrm{q}} = \mathfrak{c}\,\frac{\partial\,[\mathfrak{p}(\mathrm{q}, \mathfrak{c})]}{\partial\,\mathfrak{c}}. \tag{3714}$$

طرف- ِ-راستها با هم برابر نیستند، مگر $\mathfrak{p}(\mathrm{q}, \mathfrak{c})$ نسبت به $\mathfrak{c}$ خطی باشد. یعنی یک تابعی یِ $\mathfrak{d}$ باشد که،

$$\mathfrak{p}(\mathrm{q}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{c}\,\mathfrak{d}(\mathrm{q}). \tag{3715}$$

و در حالت ِ کلی چنین نیست.

پس S'' لزومَن هم ان S' نیست. اما میشود دید معادله-یِ-حرکت ِ حاصل از اینها یکسان است. معادله-یِ-حرکت ِ حاصل از S' این است.

$$\mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial\,[\mathsf{S}'(t, q', \mathfrak{c})]}{\partial\,\mathfrak{c}}. \tag{3716}$$

که $\mathfrak{a}$ یک ثابت است. (3716) میشود

$$\mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} q' - t. \tag{3717}$$

که، با استفاده از (3683)، چنین میشود.

$$\mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} -t + \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\frac{\partial\,[\mathfrak{p}(\mathfrak{q}, \mathfrak{c})]}{\partial\,\mathfrak{c}}. \tag{3718}$$

که در آن p' با $\mathfrak{c}$ جایگزین شده. معادله-یِ-حرکت ِ حاصل از S'' هم این است.

$$\mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial\,[\mathsf{S}''(t, \mathrm{q}, E)]}{\partial\,E}. \tag{3719}$$

که $\mathfrak{a}$ یک ثابت است. (3719) میشود

$$\mathfrak{a} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} -t + \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\frac{\partial\,[\mathfrak{p}(\mathfrak{q}, E)]}{\partial\,E}. \tag{3720}$$

و دیده میشود، با شرطِ (3710)، معادلاتِ (3718) و (3720) یکسان َند.

آن چه رخ داده این است که، هر چند S'' با S' برابر نیست،

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S}'')(t,\mathrm{q},\mathfrak{c}) = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S}'')[t,q'(\mathrm{q},c),\mathfrak{c}]. \tag{3721}$$

در مثالِ بالا، جدا-کردنِ مختصه یک بار بر اساسِ مختصات-ِ-کانُنیکِ جدید ی انجام شد که یک ی از آنها در هَمیلتِنی ظاهر نشده بود، و یک بار بر اساسِ هم ان مختصاتِ اولیه. در شکلِ دوم، میشد مستقیمَن این را به کار برد که H بر-لاک ثابت است. تابعِ هَمیلتِن-یاکُبی را با S نشان میدهم. جدا کردنِ متغیر به این شکل میشود.

$$\mathfrak{c} = H\left(\mathrm{q},\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3722}$$

که $\mathfrak{c}$ یک ثابت است. رُشن است که (3722) هم ان (3702) است، که البته در آن S'' با S، و E با $\mathfrak{c}$ جایگزین شده. معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی این است.

$$0 = \frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t} + H\left(\mathrm{q},\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3723}$$

از این و (3722) دیده میشود

$$0 = \frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t} + \mathfrak{c}. \tag{3724}$$

و رُشن است که این هم ان (3698) است، (که همچنان در آن S'' با S، و E با $\mathfrak{c}$ جایگزین شده).

تک-معادله-یِ-هَمیلتِن-یاکُبی یِ اولیه با دُ معادله یِ (3722) و (3724) جایگزین شده، که با استفاده از آنها میشود مشتقها یِ S نسبت به t و q را جداگانه حساب کرد. (3722) میشود

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}} = \mathfrak{p}(\mathrm{q},\mathfrak{c}). \tag{3725}$$

و البته (3724) هم میشود

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t} = -\mathfrak{c}. \tag{3726}$$

از (3725) نتیجه میشود

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{c}) = \mathsf{S}_{|\,\mathrm{q}}(t,\mathfrak{c}) + \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},\mathfrak{c}). \tag{3727}$$

که q_0 یک ثابت است. این را در (3726) میگذارم:

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}_{|\,\mathrm{q}}}{\partial\,t} = -\mathfrak{c}. \tag{3728}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{S}_{|\,\mathrm{q}}(t,\mathfrak{c}) = -\mathfrak{c}\,t + \mathfrak{c}'. \tag{3729}$$

$\mathfrak{c}'$ یک ثابت ِ دیگر است. تابع ِ هَمیلتِن-یاکُبی چنین میشود.

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{c}) = -\mathfrak{c}\,t + \mathfrak{c}' + \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},\mathfrak{c}). \tag{3730}$$

ثابتها یِ q_0 و $\mathfrak{c}'$ جمعی یَند و مهم نیستند: مشتق ِ دوم ِ S نسبت به (q_0 یا $\mathfrak{c}'$) و (t یا q) صفر است. از جمله میشود $\mathfrak{c}'$ را صفر (و q_0 را هر چیز ی) گذاشت:

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{c}) = -\mathfrak{c}\,t + \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},\mathfrak{c}). \tag{3731}$$

یک ترتیب ِ دیگر این است که اول (3726) حل شود. از (3726) نتیجه میشود

$$\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{c}) = -\mathfrak{c}\,t + \mathsf{S}_{|\,t}(\mathrm{q},\mathfrak{c}). \tag{3732}$$

این را در (3725) میگذارم:

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}_{|\,t}}{\partial\,\mathrm{q}} = \mathfrak{p}(\mathrm{q},\mathfrak{c}). \tag{3733}$$

از این نتیجه میشود

$$\mathsf{S}_{|\,t}(\mathrm{q},\mathfrak{c}) = \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{q})\,\mathfrak{p}(\mathfrak{q},\mathfrak{c}). \tag{3734}$$

که q_0 یک ثابت است. رُشن است که (3732) و (3734) هم ان (3731) را میدهند، چنان که انتظار میرفت. اما ترتیب ِ اول و دوم برا یِ محاسبه یِ S شبیه ِ محاسبه یِ، به ترتیب، S' و S'' است. و البته (3731) هم ان (3707) است، در آن S'' با S، و E با $\mathfrak{e}$ جایگزین شده.

اینها را میشود به جدا-کردن ِ مختصات بر اساس ِ بیش از یک ثابت- ِ-حرکت گسترش داد. گیرم I_1 تا $I_{\mathfrak{k}}$ تابعیها یی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند، که پُؤَسُنی یَند و بر-لاک ثابت َند. پس

$$0 = \{I_m, I_n\}_\tau. \tag{3735}$$

و

$$0 = \frac{\partial I_n}{\partial t} + \{I_n, H\}. \tag{3736}$$

یا،

$$0 = \{I_n, \mathsf{p}\}_\tau. \tag{3737}$$

یعنی،

$$0 = \frac{\partial I_n}{\partial t} + \frac{\partial I_n}{\partial \mathrm{q}^i}\,\frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}_i} - \frac{\partial I_n}{\partial \mathrm{p}_i}\,\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^i}. \tag{3738}$$

یا،

$$0 = \frac{\partial I_n}{\partial \mathrm{q}^\alpha}\,\frac{\partial \mathsf{p}}{\partial \mathrm{p}_\alpha} - \frac{\partial I_n}{\partial \mathrm{p}_\alpha}\,\frac{\partial \mathsf{p}}{\partial \mathrm{q}^\alpha}. \tag{3739}$$

البته،

$$\mathrm{q}^0 = t. \tag{2737}$$

$$\mathrm{p}_0 = p_0. \tag{2741}$$

رابطه یِ (3739) نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} 0 = {} & [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\,[(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, \mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})] \\ & - [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\,[(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\, \mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})]. \end{aligned} \tag{3740}$$

معادله ی ِ هَمیلتِن-یاکُبی (3566) است، که از آن نتیجه میشود.

$$0 = \{\mathsf{p}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S}), I_n(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})\}_\tau. \tag{3741}$$

یعنی،

$$0 = [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\, \frac{\partial\,[\mathsf{p}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}}. \tag{3742}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,[\mathsf{p}(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}} &= [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})] \\ &\quad + [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\beta}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\, \frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}\,\partial\,\mathrm{q}^{\beta}}.\end{aligned} \tag{3743}$$

پس (3742) چنین میشود

$$\begin{aligned}0 &= [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\, [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})] \\ &\quad [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\, [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\beta}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\, \frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}\,\partial\,\mathrm{q}^{\beta}}.\end{aligned} \tag{3744}$$

در طرف ِ راست، جمله ی ِ اول را با استفاده از (3740) به شکل ی دیگر مینویسم:

$$\begin{aligned}0 &= [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\, [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})] \\ &\quad [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\, [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\beta}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\, \frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}\,\partial\,\mathrm{q}^{\beta}}.\end{aligned} \tag{3745}$$

در جمله ی ِ دوم ِ طرف ِ راست هم، این را به کار میبَرم که مشتق ِ دوم ِ S متقارن است. پس در ضریب ِ آن، میشود جا ی ِ شاخصها ی ِ α و β را عوض کرد. به این ترتیب، (3745) چنین میشود.

$$\begin{aligned}0 &= [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\, [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})] \\ &\quad [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\beta}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\mathrm{p}})]\, [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\, \frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}\,\partial\,\mathrm{q}^{\beta}}.\end{aligned} \tag{3746}$$

پس،

$$\begin{aligned}0 &= [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\, [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})] \\ &\quad [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\beta}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\, [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\, \frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}^{\alpha}\,\partial\,\mathrm{q}^{\beta}}.\end{aligned} \tag{3747}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial\,[I_n(\underset{\sim}{\mathsf{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}=[(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,I_n)(\underset{\sim}{\mathsf{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]$$
$$+\,[(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\beta}\,I_n)(\underset{\sim}{\mathsf{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\,\frac{\partial^2\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha\,\partial\,\mathrm{q}^\beta}. \tag{3748}$$

پس (3747) چنین میشود

$$0=\frac{\partial\,[I_n(\underset{\sim}{\mathsf{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}\,[(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\,\mathsf{p})(\underset{\sim}{\mathsf{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]. \tag{3749}$$

یک شرط ِ کافی برا یِ این که (3749) براورده شود این است.

$$0=\frac{\partial\,[I_n(\underset{\sim}{\mathsf{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}. \tag{3750}$$

که همئرز است با این که I_n ها ثابت َند:

$$I_n(\underset{\sim}{\mathsf{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})=\mathfrak{c}_n. \tag{3751}$$

که $\mathfrak{c}_n$ ها ثابت َند.

به این ترتیب $(\mathfrak{k}+1)$ معادله برا یِ S هست: (3566) (خُد ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی)، و معادلات ِ (3751) (که بر اساس ِ وجود ِ ثابت- ِ-حرکتها یِ I_1 تا $I_\mathfrak{k}$ نوشته شده اند). جواب ِ این دستگاه- ِ-معادلات برا یِ S، البته خاصتر از جواب ِ فقط معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی ست. اما، چنان که قبلَن بررسی شد، هدف از حل ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی این نیست که کلیترین جواب برا یِ S به دست آید.

نکته ای که میمانَد تحقیق ِ سازگاری یِ دستگاه- ِ-معادلات ِ (3566) و (3751) است. یعنی تحقیق ِ این که این دستگاه- ِ-معادلات جواب دارد. بخش ی از این سازگاری آن است که تابعیها یِ p و I_1 تا $I_\mathfrak{k}$ مستقل-از-هم باشند. معادلات ِ (3566) و (3751) را چنین مینویسم.

$$I_\nu(\underset{\sim}{\mathsf{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})=\mathfrak{c}_\nu. \tag{3752}$$

که I_0 و $\mathfrak{c}_0$ چنین تعریف شده اند:

$$I_0=\mathsf{p}. \tag{3753}$$

$$\mathfrak{c}_0=0. \tag{3754}$$

با این نمادها، این که تابعیها یِ p و I_1 تا $I_{\mathfrak{k}}$ مستقل-از-هم باشند، یعنی این که تابعیها یِ I_0 تا $I_{\mathfrak{k}}$ مستقل-از-هم باشند. این هم یعنی $\{(\nu, \mathbf{d}\, I_\nu) \mid 0 \leq \nu \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل باشد. که یعنی اگر یک ترکیب- ِ-خطی از $\{(\nu, \mathbf{d}\, I_\nu) \mid 0 \leq \nu \leq \mathfrak{k}\}$ صفر باشد، نتیجه شود ضریبها یِ آن ترکیب- ِ-خطی صفر است. گیرم یک ترکیب ِ خطی از $\{(\nu, \mathbf{d}\, I_\nu) \mid 0 \leq \nu \leq \mathfrak{k}\}$ صفر است:

$$0 = \mathfrak{d}^\nu\, \mathbf{d}\, I_\nu. \tag{3755}$$

که $\mathfrak{d}^0$ و $\mathfrak{d}^{\mathfrak{k}}$ ثابت َند. (3755) یعنی

$$0 = \mathfrak{d}^\nu\, \frac{\partial\, I_\nu}{\partial\, x^{\mathsf{a}}}. \tag{3756}$$

از جمله،

$$0 = \mathfrak{d}^\nu\, \frac{\partial\, I_\nu}{\partial\, p_0}. \tag{3757}$$

مشتق ِ p نسبت به p_0 یک است، رابطه یِ (1912)، و I_1 تا $I_{\mathfrak{k}}$ تابعیها یی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند. پس به p_0 بستگی ندارند:

$$\frac{\partial\, I_n}{\partial\, p_0} = 0. \tag{3758}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\partial\, I_\nu}{\partial\, p_0} = \delta^0_\nu. \tag{3759}$$

پس رابطه یِ (3757) یعنی

$$0 = \mathfrak{d}^0. \tag{3760}$$

و (3755) میشود

$$0 = \mathfrak{d}^n\, \mathbf{d}\, I_n. \tag{3761}$$

شرط ِ این که از این رابطه نتیجه شود $\mathfrak{d}^1$ تا $\mathfrak{d}^{\mathfrak{k}}$ صفر َند، این است که $\{(n, \mathbf{d}\, I_n) \mid 1 \leq n \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل باشد، که یعنی I_1 تا $I_{\mathfrak{k}}$ مستقل-از-هم باشند.

از (3751) همچنین نتیجه میشود

$$\frac{\partial\, [I_n(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})]}{\partial\, \mathfrak{c}_m} = \delta_n^m. \tag{3762}$$

مفصلتر، با در-نظر-گرفتن ِ بستگی به ثابتها)

$$\frac{\partial\, \{I_n[\underset{\sim}{\mathrm{q}}, (\underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})]\}}{\partial\, \mathfrak{c}_m} = \delta_n^m. \tag{3763}$$

پس،

$$[(\mathbf{D}_{(2)}{}^{\alpha}\, I_n)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})]\, [(\mathbf{D}_{(2)}{}^{m}\, \mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\, \mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})] = \delta_n^m. \tag{3764}$$

که فرض شده $\mathfrak{c}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ مستقل-از-هم َند. (3764) نتیجه میدهد

$$\mathsf{rank}(\mathbf{D}_{(2)}\, I) = \mathfrak{k}. \tag{3765}$$

این رابطه یعنی (مُضعَن) میشود $\mathfrak{k}$ تا از p_i ها را بر حسب ِ I_n ها (و بقیه یِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته) حساب کرد. اگر (3765) برقرار نباشد، $\mathfrak{c}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ مستقل-از-هم نیستند: بین ِ شان $[\mathfrak{k} - \mathsf{rank}(\mathbf{D}_{(2)}\, I)]$ رابطه هست.

پس گیرم (3765) برقرار است. در این صورت $\mathfrak{c}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{q}}$ مستقل-از-هم َند و (3764) برقرار است و از آن، علاوه بر (3765)، نتیجه میشود

$$\mathsf{rank}[(\mathbf{D}_{(2)}\, \mathbf{D}_{(1)}\, \mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}_{|\,\mathfrak{c}})] = \mathfrak{k}. \tag{3766}$$

رُشن است که (3765) این را در بر دارد که I_1 تا $I_{\mathfrak{k}}$ مستقل-از-هم َند.

بخش ِ دیگر ی از سازگاری یِ دستگاه ِ (3566) و (3751)، سازگاری یِ این دستگاه با تقارن ِ مشتق- ِ-دوم ِ است. معادلات ی که بر مشتق ِ دوم ِ S حاکم َند، با مشتق-گیری از (3566) و (3751) به دست میئایند. معادلات ِ (3566) و (3751) هم ان معادلات ِ (3752) اند. دیده میشود .

$$\frac{\partial\, [I_\nu(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})]}{\partial\, \underset{\sim}{\mathrm{q}}} = \mathfrak{U}_\nu + \mathfrak{V}_\nu{}^{\beta}\, \frac{\partial^2\, \mathsf{S}}{\partial\, \underset{\sim}{\mathrm{q}}\, \partial\, \mathrm{q}^\beta}. \tag{3767}$$

که،

$$\mathfrak{U}_\nu = (\mathbf{D}_{(1)}\, I_\nu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S}). \tag{3768}$$

$$\mathfrak{V}_\nu = (\mathbf{D}_{(2)}\, I_\nu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S}). \tag{3769}$$

رابطه ی ِ (3767) نشان میدهد با مشتق-گیری از I_ν ها، $(\mathfrak{k}+1)$ ترکیب- ِ-خطی از مشتق- ِ-دوم ِ S نتیجه میشود. ترکیب- ِ-خطیها یی که ضریبها ی ِشان $\mathfrak{V}_0$ تا $\mathfrak{V}_\mathfrak{k}$ است.

رابطه ی ِ (3752) همئرز است با

$$0 = \frac{\partial\, [I_\nu(\underset{\sim}{\mathrm{q}}, \underset{\sim}{\nabla}\, \mathsf{S})]}{\partial\, \underset{\sim}{\mathrm{q}}}. \tag{3770}$$

این هم، با استفاده از (3767)، همئرز است با

$$0 = \mathfrak{U}_\nu + \mathfrak{V}_\nu{}^\beta\, \frac{\partial^2\, \mathsf{S}}{\partial\, \underset{\sim}{\mathrm{q}}\, \partial\, \mathrm{q}^\beta}. \tag{3771}$$

مفصلتر،

$$0 = \mathfrak{U}_{\nu\,\alpha} + \mathfrak{V}_\nu{}^\beta\, \frac{\partial^2\, \mathsf{S}}{\partial\, \mathrm{q}^\alpha\, \partial\, \mathrm{q}^\beta}. \tag{3772}$$

این که مشتق ِ دوم ِ S متقارن است، نتیجه میدهد

$$0 = (\mathfrak{V}_\mu{}^\beta\, \mathfrak{V}_\nu{}^\alpha - \mathfrak{V}_\mu{}^\alpha\, \mathfrak{V}_\nu{}^\beta)\, \frac{\partial^2\, \mathsf{S}}{\partial\, \mathrm{q}^\alpha\, \partial\, \mathrm{q}^\beta}. \tag{3773}$$

از (3772) دیده میشود (3773) همئرز است با

$$0 = \mathfrak{U}_{\mu\,\alpha}\, \mathfrak{V}_\nu{}^\alpha - \mathfrak{V}_\mu{}^\alpha\, \mathfrak{U}_{\nu\,\alpha}. \tag{3774}$$

این شرط ِ سازگاری ی ِ معادلات ِ (3752) است.

این که I_1 تا $I_\mathfrak{k}$ پُوَسُنی یَند و بر-لاک ثابت َند، با روابط ِ (3735) و (3737) همئرز است. و اینها را میشود چنین نوشت.

$$0 = \{I_\mu, I_\nu\}_\tau. \tag{3775}$$

که یعنی،

$$0 = \frac{\partial\,[I_\mu(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{p}})]}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}\,\frac{\partial\,[I_\nu(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{p}})]}{\partial\,\mathrm{p}_\alpha} - \frac{\partial\,[I_\mu(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{p}})]}{\partial\,\mathrm{p}_\alpha}\,\frac{\partial\,[I_\nu(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{p}})]}{\partial\,\mathrm{q}^\alpha}. \tag{3776}$$

یا،

$$\begin{aligned} 0 = {} & [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,I_\mu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{p}})]\,[(\mathbf{D}_{(2)}{}^\alpha\,I_\nu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{p}})] \\ & - [(\mathbf{D}_{(2)}{}^\alpha\,I_\mu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{p}})]\,[(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,I_\nu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\mathrm{p}})]. \end{aligned} \tag{3777}$$

از این هم نتیجه میشود

$$\begin{aligned} 0 = {} & [(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,I_\mu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\,[(\mathbf{D}_{(2)}{}^\alpha\,I_\nu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})] \\ & - [(\mathbf{D}_{(2)}{}^\alpha\,I_\mu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]\,[(\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,I_\nu)(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\,\mathsf{S})]. \end{aligned} \tag{3778}$$

و این هم ان شرط-ِ-سازگاری یِ (3774) است. پس این که I_1 تا $I_{\mathfrak{k}}$ پُؤَسُنی یَند و بر-لاک ثابت َند، شرط-ِ-سازگاری یِ (3774) برا یِ معادلات ِ (3752) را تئمین میکند.

94 هَمیلتِن-یاکُبی و انتگرال-پذیری

سیستم ی را بررسی میکنم که بُعد ِ فضا-یِ-فاز ِ متناظر با آن $(2\,\mathfrak{m})$، و هَمیلتِنی یِ متناظر با آن H است. میخاهم نشان بدهم اگر این سیستم انتگرال-پذیر باشد معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی یک جواب ِ کامل دارد؛ و، بر عکس، اگر معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی یک جواب ِ کامل داشته باشد، سیستم انتگرال-پذیر است.

گیرم (q,p) یک جایگشت-ِ-کانُنیک ِ (q,p) است و هَمیلتِنی مستقل از q است:

$$\frac{\partial\,[H(t,\mathrm{q},\mathrm{p})]}{\partial\,\mathrm{q}} = 0. \tag{3779}$$

این یک حالت ِ خاص از انتگرال-پذیری ست. در این حالت p_i ها بر-لاک ثابت َند. تابع-ِ-هَمیلتِن-یاکُبی یِ S را چنین میگیرم.

$$\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}^i} = \mathfrak{b}_i. \tag{3780}$$

که $\mathfrak{b}_i$ ها ثابت َند. معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial \mathsf{S}}{\partial t} + H(t, \mathfrak{b}). \tag{3781}$$

جواب ِ (3780) میشود

$$\mathsf{S}(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_i \, \mathrm{q}^i + \mathsf{S}_{|\,\mathrm{q}}(t, \mathfrak{b}). \tag{3782}$$

پس،

$$\frac{\partial \mathsf{S}}{\partial t} = \frac{\partial \mathsf{S}_{|\,\mathrm{q}}}{\partial t}. \tag{3783}$$

و معادله یِ (3781) چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial \mathsf{S}_{|\,\mathrm{q}}}{\partial t} + H(t, \mathfrak{b}). \tag{3784}$$

از اینجا،

$$\mathsf{S}_{|\,\mathrm{q}}(t, \mathfrak{b}) = -\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,\mathfrak{t})\, H(\mathfrak{t}, \mathfrak{b}). \tag{3785}$$

که t_0 یک ثابت است. به این ترتیب،

$$\mathsf{S}(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_i \, \mathrm{q}^i - \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,\mathfrak{t})\, H(\mathfrak{t}, \mathfrak{b}). \tag{3786}$$

ثابت ِ t_0 جمعی ست و مهم نیست: مشتق ِ دوم ِ S نسبت به t_0 و q صفر است.

نشان میدهم S کامل است. این که S کامل است، یعنی S تعداد ِ کافی $(\mathfrak{m})$ ثابت، $\mathfrak{b}_1$ تا $\mathfrak{b}_\mathfrak{m}$، دارد و

$$\{0\} = \mathsf{ker}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \mathsf{S})(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b})]. \tag{3567}$$

یا، همئرز با آن،

$$\mathfrak{m} = \mathsf{rank}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \mathsf{S})(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b})]. \tag{3568}$$

رُشن است که S تعداد ِ کافی ثابت دارد. از (3786) هم نتیجه میشود

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,j}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}{}^{i}\,\mathsf{S})(t,\mathrm{q},\mathfrak{b}) = \delta^i_j. \tag{3787}$$

یا،

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S})(t,\mathrm{q},\mathfrak{b}) = \mathbf{1}_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}. \tag{3788}$$

که (3567) یا، همئرز با آن، (3568) را نتیجه میدهد.

حالت ِ کلی یِ انتگرال-پذیری این است که تابعیها یِ I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته هستند که مستقل-از-هم َند، پُؤَسُنی یَند، و بر-لاک ثابت َند. این حالت ِ خاص ِ جدا-کردن ِ متغیرها بر اساس ِ ثابت- ِ-حرکتها ست. گیرم (q,p) یک جایگشت- ِ-کانُنیک ِ (q,p) است. به معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی اینها را اضافه میکنم که $I_1(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\nabla\mathsf{S})$ تا $I_{\mathfrak{m}}(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\nabla\mathsf{S})$ ثابت َند. نتیجه میشود

$$I_\nu(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\underset{\sim}{\nabla}\mathsf{S}) = \mathfrak{c}_\nu. \tag{3752}$$

که I_0 و $\mathfrak{c}_0$ چنین تعریف شده اند:

$$I_0 = \mathsf{p}. \qquad ($$

$$\mathfrak{c}_0 = 0.. \qquad ($$

معلوم شد این معادلات سازگار َند، و

$$\mathsf{rank}[(\mathbf{D}_{(2)}\,\mathbf{D}_{(1)}\,\mathsf{S})(\underset{\sim}{\mathrm{q}},\mathfrak{c})] = \mathfrak{m}. \tag{3789}$$

البته به شرط ی که p_i ها را بشود بر حسب ِ I_j ها (و بقیه یِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته) حساب کرد. بقیه یِ مختصات ِ فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته t و q^i ها یَند. به این ترتیب معلوم میشود وقت ی سیستم انتگرال-پذیر است، و مشتق ِ ثابت- ِ-حرکتها یَ ش نسبت به تکانِها ناتکین است، معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی یک جواب ِ کامل دارد. شرط ِ این که مشتق ِ ثابت- ِ-حرکتها نسبت به تکانِها ناتکین است را هم میشود بر داشت: چنان که قبلَن ثابت شد، یک جایگشت- ِ-کانُنیک هست که

q^1 تا q^{m} و I_1 تا I_{m} (در هر زمان ِ t) مستقل-از-هم َند. این که q^1 تا q^{m} و I_1 تا I_{m} (در هر زمان ِ t) مستقل-از-هم َند، نتیجه میدهد (مُضعَن) میشود p را بر حسب ِ (t, q, I) نوشت. پس وقت ی سیستم انتگرال-پذیر است، (یک جایگشت- ِ-کانُنیک هست که با آن) معادله ی ِ هَمیلتِن-یاکُبی یک جواب ِ کامل دارد.

وجود ِ یک جواب ِ کامل برا ی ِ معادله ی ِ هَمیلتِن-یاکُبی را میشود بر حسب ِ مختصات- ِ-کانُنیک ی که تکانِها یَ ش ثابت- ِ-حرکتها یَند هم بررسی کرد. سیستم ی را بررسی میکنم که بُعد ِ فضا-یِ-فاز ِ متناظر با آن $(2\,\mathfrak{m})$، و هَمیلتِنی ی ِ متناظر با آن H است. گیرم I_1 تا I_{m} تابعیها یی از فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته اند که مستقل-از-هم َند، پُؤَسُنی یَند، و بر-لاک ثابت َند. پس q'^i ها یی هستند که $(q'^1, \ldots, q'^{\mathrm{m}}, I_1, \ldots, I_{\mathrm{m}})$ کانُنیک است. یا $(q'^1, \ldots, q'^{\mathrm{m}}, p'_1, \ldots, p'_{\mathrm{m}})$ کانُنیک است، که p' هم ان I تعریف شده:

$$p'_i = I_i. \tag{3224}$$

این که p'_i بر-لاک ثابت است، یعنی

$$\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, t} + \{p'_i, H\} = 0. \tag{3239}$$

و این را میشود چنین نوشت.

$$\{p'_i, H'\} = 0. \tag{3320}$$

که

$$H' = H + \left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}'}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q}, p'}. \tag{3790}$$

که $\tilde{\Upsilon}'$ تابعی-یِ-مولد ِ تبدیل- ِ-کانُنیک ی ست که (q, p) را به (q', p') تبدیل میکند:

$$\mathrm{p}_i = \left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}'}{\partial\, \mathrm{q}^i}\right)_{t, p'}. \tag{3791}$$

$$q'^i = \left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}'}{\partial\, p'_i}\right)_{t, \mathrm{q}}. \tag{3792}$$

و البته (q,p) یک جایگشت-ِ-کانُنیک ِ (q,p) است، چنان که q^1 تا q^{m} و p'_1 تا p'_{m} مستقل-از-هم َند. پس (مُضعَن) یک $\mathfrak{p}$ هست که

$$\mathrm{p}=\mathfrak{p}(t,\mathrm{q},p'). \tag{3793}$$

رُشن است که q^1 تا q^{m} و p_1 تا p_{m} هم مستقل-از-هم َند. پس p' هم (مُضعَن) تابع ی از $(t,\mathrm{q},\mathrm{p})$ است: $\mathfrak{p}(t,\mathrm{q},\cdot)$ (مُضعَن) وارون-پذیر است و

$$p'=[\mathfrak{p}(t,\mathrm{q},\cdot)]^{-1}(\mathrm{p}). \tag{3794}$$

با استفاده از این که در (t,q) یِ ثابت، (مُضعَن) p تابع ِ p' و p' تابع ِ p است،

$$\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}=\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,p'_k}\right)_{t,\mathrm{q}}\left(\frac{\partial\,p'_k}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3795}$$

رُشن است که

$$\delta_i^j=\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3796}$$

پس،

$$\delta_i^j=\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,p'_k}\right)_{t,\mathrm{q}}\left(\frac{\partial\,p'_k}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3797}$$

این نشان میدهد

$$\{0\}=\mathsf{ker}\left[\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,p'_k}\right)_{t,\mathrm{q}}\right]. \tag{3798}$$

که همئرز است با

$$\mathfrak{m}=\mathsf{rank}\left[\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,p'_k}\right)_{t,\mathrm{q}}\right]. \tag{3799}$$

البته

$$\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_i}{\partial\,p'_k}\right)_{t,\mathrm{q}}=\left(\frac{\partial}{\partial\,p'_k}\right)_{t,\mathrm{q}}\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{q}^i}\right)_{t,p'}[\tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},p')]. \tag{3800}$$

پس رابطه یِ (3798) چنین میشود.

$$\{0\} = \mathsf{ker}(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon}^{\backprime}). \tag{3801}$$

که همئرز است با

$$\mathfrak{m} = \mathsf{rank}(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon}^{\backprime}). \tag{3802}$$

H' هم تابع ی از (t, q', p') است، و (3320) یعنی

$$-\frac{\partial\, H'}{\partial\, q'^i} = 0. \tag{3321}$$

جواب ِ معادلات- ِ-حرکت چنین میشود.

$$p'(t) \overset{\mathrm{ns}}{=} p'(t_0). \tag{3323}$$

$$q'(t) \overset{\mathrm{ns}}{=} q'(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v'[s, p'(t_0)]. \tag{3324}$$

که،

$$v'^i = \frac{\partial\, H'}{\partial\, p'_i}. \tag{3325}$$

یعنی

$$v'^i = \left(\frac{\partial\, H'}{\partial\, p'_i}\right)_{t,q'}. \tag{3326}$$

این که H'، به عنوان ِ تابع ی از t و q' و p'، مستقل از q' است، یعنی یک η هست که

$$H' = \eta(t, p'). \tag{3803}$$

پس،

$$v'^i(t, p') = \frac{\partial\, [\eta(t, p')]}{\partial\, p'^i}. \tag{3804}$$

q'' را چنین تعریف میکنم.

$$q''^i = q'^i - \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v'^i(s, p'). \tag{3805}$$

که، با استفاده از (3804)، چنین میشود.

$$q''^i = q'^i - \frac{\partial}{\partial\, p'^i} \left[\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \eta(s, p') \right]. \tag{3806}$$

$\tilde{\Upsilon}''$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\Upsilon}''(t, \mathrm{q}, p') = \tilde{\Upsilon}'(t, \mathrm{q}, p') - \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \eta(s, p'). \tag{3807}$$

دیده میشود

$$\left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}''}{\partial\, p'_i} \right)_{t,\mathrm{q}} = \left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}'}{\partial\, p'_i} \right)_{t,\mathrm{q}} - \frac{\partial}{\partial\, p'^i} \left[\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \eta(s, p') \right]. \tag{3808}$$

پس

$$q''^i = \left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}''}{\partial\, p'_i} \right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3809}$$

که نشان میدهد $\tilde{\Upsilon}''$ تابعی-یِ-مولد ِ تبدیل- ِ-کانُنیک ی ست که (q, p) را به (q'', p') تبدیل میکند، یا تبدیل- ِ-کانُنیک ی که (q, p) را به (q'', p'') تبدیل میکند، که p'' هم ان p' است:

$$p'' = p'. \tag{3810}$$

از (3807) هم دیده میشود

$$\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \tilde{\Upsilon}'' = \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \tilde{\Upsilon}'. \tag{3811}$$

از این و (3801) هم نتیجه میشود

$$\{0\} = \mathsf{ker}(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \tilde{\Upsilon}''). \tag{3812}$$

که همئرز است با

$$\mathfrak{m} = \mathsf{rank}(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}). \tag{3813}$$

هَمیلتِنی یِ متناظر با (q'', p'') را با H'' نشان میدهم:

$$H'' = H + \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p''}. \tag{3814}$$

دیده میشود

$$\left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p''} = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱}}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p''} - H'. \tag{3815}$$

پس،

$$H'' = H + \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱}}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p''} - H'. \tag{3816}$$

که نشان میدهد

$$H'' = 0. \tag{3817}$$

پس،

$$0 = H + \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p''}. \tag{3818}$$

S را هم ان $\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}$ تعریف میکنم:

$$\mathsf{S}(t, \mathrm{q}, p'') = \tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}(t, \mathrm{q}, p''). \tag{3819}$$

از جمله،

$$\mathsf{S}(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b}) = \tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}(t, \mathrm{q}, \mathfrak{b}). \tag{3820}$$

پس (3818) چنین میشود.

$$0 = \frac{\partial\,[\mathsf{S}(t, \mathrm{q}, p'')]}{\partial\,t} + H(t, \mathrm{q}, \mathrm{p}). \tag{3821}$$

که، با استفاده از (3791) و (3819)، میشود

$$0=\frac{\partial\,[\mathsf{S}(t,\mathrm{q},p'')]}{\partial\,t}+H\left(t,\mathrm{q},\frac{\partial\,[\mathsf{S}(t,\mathrm{q},p'')]}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3822}$$

در این رابطه p'' را با $\mathfrak{b}$ جایگزین میکنم:

$$0=\frac{\partial\,[\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{b})]}{\partial\,t}+H\left(t,\mathrm{q},\frac{\partial\,[\mathsf{S}(t,\mathrm{q},\mathfrak{b})]}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3823}$$

دیده میشود این هم ان معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی ست:

$$0=\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,t}+H\left(t,\mathrm{q},\frac{\partial\,\mathsf{S}}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3824}$$

از (3812) و (3820) هم دیده میشود

$$\{0\}=\mathsf{ker}(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S}). \tag{3825}$$

که همئرز است با

$$\mathfrak{m}=\mathsf{rank}(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\mathsf{S}). \tag{3826}$$

اینها هم ان روابط ِ همئرز-با-هم ِ (3567) و (3569) اند.

رابطه یِ (3824)، یا مفصلتر (3823)، یعنی S یک جواب ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی ست. روابط ِ همئرز-با-هم ِ (3825) و (3826) هم یعنی این جواب کامل است. پس اگر سیستم انتگرال-پذیر باشد، معادله-یِ-هَمیلتِن-یاکُبی یِ متناظر یک جواب ِ کامل دارد.

بر عکس، گیرم معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی یک جواب ِ کامل دارد. میخاهم نشان دهم سیستم ِ متناظر انتگرال-پذیر است. جواب ِ کامل ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی را با S نشان میدهم. این که S یک جواب ِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی ست، یعنی S رابطه یِ (3824)، یا مفصلتر (3823)، را برمیئاورَد. این که این جواب کامل است، یعنی S روابط ِ همئرز-با-هم ِ (3825) و (3826) را برمیئاورَد. $\tilde{\Upsilon}$ را هم ان S تعریف میکنم:

$$\tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},p')=\mathsf{S}(t,\mathrm{q},p'). \tag{3827}$$

از این و (3825) دیده میشود

$$\{0\} = \mathsf{ker}(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\Upsilon}). \tag{3563}$$

پس $\tilde{\Upsilon}$ را میشود تابعی-یِ-مولد ِ یک تبدیل ِ کانُنیک گرفت، تبدیل ی که (q,p) را به (q',p') تبدیل میکند:

$$\mathrm{p}_i = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}^i}\right)_{t,p'}. \tag{3241}$$

$$q'^i = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3242}$$

روابط ِ (3824) و (3827) نتیجه میدهند

$$0 = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t} + H\left(t,\mathrm{q},\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}}\right). \tag{3538}$$

مفصلتر،

$$0 = \left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'} + H\left[t,\mathrm{q},\left(\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}}\right)_{t,p'}\right]. \tag{3828}$$

یا،

$$0 = \frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},p')]}{\partial\,t} + H\left\{t,\mathrm{q},\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(t,\mathrm{q},p')]}{\partial\,\mathrm{q}}\right\}. \tag{3829}$$

طرف ِ راست، هَمیلتِنی یِ متناظر با (q',p') است. این که این هَمیلتِنی صفر است، نتیجه میدهد q'^i ها و p'_i ها بر-لاک ثابت َند. اما این نتیجه را مستقیم هم میشود به دست آورد:

$$\dot{p}'_i \overset{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}} + \{p'_i,H\}. \tag{3830}$$

برا یِ جمله یِ اول ِ طرف ِ راست،

$$\left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}} = -\left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}\left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_j}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'}. \tag{3253}$$

برا یِ جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست،

$$\{p'_i, H\} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^j}\right)_{t,\mathrm{p}} \{p'_i, \mathrm{q}^j\} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \{p'_i, \mathrm{p}_j\}. \tag{3831}$$

همچنین،

$$\{p'_i, \mathrm{p}_j\} = \left(\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \{p'_i, \mathrm{q}^k\} + \left(\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial p'_k}\right)_{t,\mathrm{q}} \{p'_i, p'_k\}. \tag{3832}$$

p'_i ها پُوَسُنی یَند:

$$\{p'_i, p'_j\} = 0. \tag{3245}$$

پس،

$$\{p'_i, \mathrm{p}_j\} = \left(\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \{p'_i, \mathrm{q}^k\}. \tag{3833}$$

و رابطه یِ (3831) چنین میشود.

$$\{p'_i, H\} = \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,\mathrm{p}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'}\right] \{p'_i, \mathrm{q}^k\}. \tag{3834}$$

اما،

$$\{p'_i, \mathrm{q}^j\} = -\left(\frac{\partial p'_i}{\partial \mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3247}$$

پس،

$$\{p'_i, H\} = -\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,\mathrm{p}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'}\right] \left(\frac{\partial p'_i}{\partial \mathrm{p}_k}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3835}$$

دیده میشود

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,\mathrm{p}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'}. \tag{3836}$$

پس،

$$\{p'_i, H\} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial p'_i}{\partial \mathrm{p}_k}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3837}$$

از (3253) و (3837) نتیجه میشود

$$\left(\frac{\partial p'_i}{\partial t}\right)_{\mathrm{q,p}} + \{p'_i, H\} = -\left[\left(\frac{\partial \mathrm{p}_k}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'}\right] \left(\frac{\partial p'_i}{\partial \mathrm{p}_k}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3838}$$

همچنین،

$$\left(\frac{\partial \mathrm{p}_k}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'}\right]. \tag{3839}$$

پس،

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathrm{p}_k}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \tilde{\Upsilon}, \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} \tilde{\Upsilon}.\end{aligned} \tag{3840}$$

یعنی،

$$\left(\frac{\partial \mathrm{p}_k}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'}\right]. \tag{3841}$$

پس،

$$\left(\frac{\partial \mathrm{p}_k}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'}\right] + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'}. \tag{3842}$$

یعنی،

$$\left(\frac{\partial \mathrm{p}_k}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} + H\right]. \tag{3843}$$

معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی این است که کروشه یِ طرف ِ راست صفر است. پس مشتق ِ آن نسبت به q هم صفر است:

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}^k}\right)_{t,p'} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} + H\right]. \tag{3844}$$

به این ترتیب،

$$0 = \left(\frac{\partial\,\mathrm{p}_k}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,\mathrm{q}^k}\right)_{t,p'}. \tag{3845}$$

که نتیجه میدهد

$$0 = \left(\frac{\partial\,p'_i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},\mathrm{p}} + \{p'_i, H\}. \tag{3846}$$

و این، همراه با (3830)، میدهد

$$0 \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \dot{p}'_i. \tag{3847}$$

پس تابعیها یِ پُوَسُنی و مستقل-از-هم ِ p'_1 تا p'_{m}، بر-لاک ثابت َند، که $(2\,\mathrm{m})$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. این نشان میدهد سیستم انتگرال-پذیر است.

تا هم ین جا هم انتگرال-پذیری ثابت شده. اما ضمنَن میشود (مستقیمَن) نشان داد q'^i ها هم بر-لاک ثابت َند:

$$\dot{q}'^i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \dot{\mathrm{q}}^j + \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,p'_j}\right)_{t,\mathrm{q}} \dot{p}'_j. \tag{3848}$$

جمله یِ سوم ِ طرف ِ راست صفر است. برا یِ جمله یِ دوم هم،

$$\dot{\mathrm{q}}^i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \{\mathrm{q}^i, H\}. \tag{3279}$$

پس (3848) چنین میشود.

$$\dot{q}'^i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \{\mathrm{q}^j, H\}. \tag{3849}$$

یعنی،

$$\dot{q}'^i \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,t}\right)_{\mathrm{q},p'} + \left(\frac{\partial\,q'^i}{\partial\,\mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,\mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3850}$$

برا یِ جمله یِ اول ِ طرف ِ راست،

$$\left(\frac{\partial\, q'^i}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'} = \left(\frac{\partial}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'} \left[\left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}}\right]. \tag{3851}$$

پس،

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\, q'^i}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'} &= \left(\frac{\partial}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'} \left(\frac{\partial}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \tilde{\Upsilon},\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'} \tilde{\Upsilon}.\end{aligned} \tag{3852}$$

یعنی،

$$\left(\frac{\partial\, q'^i}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'} = \left(\frac{\partial}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left[\left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}}{\partial\, t}\right)_{\mathrm{q},p'}\right]. \tag{3853}$$

برا یِ جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (3850) هم،

$$\left(\frac{\partial\, q'^i}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \left[\left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}}\right]. \tag{3854}$$

پس،

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\, q'^i}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} &= \left(\frac{\partial}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \left(\frac{\partial}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \tilde{\Upsilon},\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} \tilde{\Upsilon}.\end{aligned} \tag{3855}$$

یعنی،

$$\left(\frac{\partial\, q'^i}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left[\left(\frac{\partial\, \tilde{\Upsilon}}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'}\right]. \tag{3856}$$

یا،

$$\left(\frac{\partial\, q'^i}{\partial\, \mathrm{q}^j}\right)_{t,p'} = \left(\frac{\partial\, \mathrm{p}_j}{\partial\, p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3857}$$

با استفاده از (3853) و (3857)، رابطه یِ (3850) چنین میشود.

$$\dot{q}'^i \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'}\right] + \left(\frac{\partial \mathrm{p}_j}{\partial p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}_j}\right)_{t,\mathrm{q}}. \tag{3858}$$

یعنی،

$$\dot{q}'^i \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial p'_i}\right)_{t,\mathrm{q}} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} + H\right]. \tag{3859}$$

معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی این است که کروشه یِ طرف ِ راست صفر است. پس مشتق ِ آن نسبت به p' هم صفر است:

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial p'_i}\right)_{t,p'} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Upsilon}}{\partial t}\right)_{\mathrm{q},p'} + H\right]. \tag{3860}$$

و این نتیجه میدهد

$$0 \stackrel{\text{ns}}{=} \dot{q}'^i. \tag{3861}$$

نتیجه:

وجود ِ یک جواب ِ کامل برا یِ معادله یِ هَمیلتِن-یاکُبی، با انتگرال-پذیری همئرز است.

11

متغیرها یِ کنش و زاویه

95 مدار

$\mathfrak{u}$ یک میدان ِ برداری ست، و $\mathsf{fl}(\centerdot\,\mathfrak{u})$ شارش ِ میدان ِ برداری یِ $\mathfrak{u}$ است. متناظر با هر نقطه یِ x، تابع ِ $[\mathsf{fl}(\centerdot\,\mathfrak{u})](x)$ یک خم است. پس مجموعه یِ مقدارها یِ $[\mathsf{fl}(\centerdot\,\mathfrak{u})](x)$، یک مجموعه یِ یک-بُعدی ست (مگر $\mathfrak{u}$ در x صفر باشد، که در آن صورت این مجموعه فقط یک نقطه، خُد ِ x، میشود، پس صفر-بُعدی ست). به مقدار ِ خم ِ $[\mathsf{fl}(\centerdot\,\mathfrak{u})](x)$ مدار ِ x با $\mathfrak{u}$ میگوییم و آن را با $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ نشان میدهم:

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) = \mathsf{img}\{[\mathsf{fl}(\centerdot\,\mathfrak{u})](x)\}. \tag{3862}$$

یا،

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) = \{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})](x) \mid \mathfrak{t}\}. \tag{3863}$$

دیده میشود اگر $\mathfrak{a}$ یک تابعی (میدان ِ اسکالر) باشد که مجموعه یِ مقدارها یَ ش و مجموعه یِ وارون ِ مقدارها یَ ش کران-دار است،

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{u})](x) = [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x). \tag{3864}$$

با $\mathbb{O}(\mathfrak{u})$ یک رابطه تعریف میکنم. رابطه یِ متناظر با $\mathbb{O}(\mathfrak{u})$ را با $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ نشان میدهم:

$$x_1 \; \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} \; x_2. \tag{3865}$$

این یعنی

$$x_2 \in \{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x_1)\}. \tag{3866}$$

دیده میشود

$$x = [\mathsf{fl}(0\,\mathfrak{u})](x). \tag{3867}$$

پس هر نقطه یِ x در مدار ِ x با $\mathfrak{u}$ هست:

$$x \; \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} \; x. \tag{3868}$$

این یعنی $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ بازتابی ست.

همچنین، گیرم x_2 در مدار ِ x_1 با $\mathfrak{u}$ است. پس یک $\mathfrak{t}$ هست که

$$x_2 = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})](x_1). \tag{3869}$$

در نتیجه،

$$x_1 = [\mathsf{fl}(-\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})](x_2). \tag{3870}$$

که یعنی x_1 در مدار ِ x_2 با $\mathfrak{u}$ است:

$$x_2 \; \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} \; x_1. \tag{3871}$$

به این ترتیب،

$$x_1 \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} x_2. \quad \Rightarrow$$
$$x_2 \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} x_1. \tag{3872}$$

این یعنی $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ متقارن است.

سرانجام، گیرم x_2 در مدارِ x_1 با $\mathfrak{u}$ است، و x_3 در مدارِ x_2 با $\mathfrak{u}$ است:

$$x_2 \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} x_3. \tag{3873}$$

رابطه یِ (3873) یعنی یک $\mathfrak{t}'$ هست که

$$x_3 = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})](x_2). \tag{3874}$$

رابطه یِ (3865) هم یعنی یک $\mathfrak{t}$ هست که با آن (3869) براورده میشود. (3869) را در (3874) میگذارم:

$$x_3 = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})]\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})](x_1)\}. \tag{3875}$$

که نتیجه میدهد

$$x_3 = \{\mathsf{fl}[(\mathfrak{t}+\mathfrak{t}')\,\mathfrak{u}]\}(x_1). \tag{3876}$$

و این یعنی x_3 در مدارِ x_1 با $\mathfrak{u}$ است:

$$x_1 \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} x_3. \tag{3877}$$

به این ترتیب،

$$\{[x_1 \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} x_2] \wedge [x_2 \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} x_3]\}. \quad \Rightarrow$$
$$x_1 \boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} x_3. \tag{3878}$$

این یعنی $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ ترایا ست.

رابطه یِ $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ بازتابی، متقارن، و ترایا ست. پس رابطه یِ $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ یک رابطه یِ همئرزی ست. از جمله نتیجه میشود هر دُ-رده-یِ-همئرزی یِ متناظر با $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ ، یا یکسان َند یا اشتراک ِ شان تهی ست. هر رده-یِ-همنرزی یِ متناظر با $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ مدار ِ یک ی از اعضا یِ آن رده با $\mathfrak{u}$ است. خمینه ای که میدان ِ برداری یِ $\mathfrak{u}$ بر آن تعریف شده را با $\mathbb{M}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{M}/\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})} = \{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) \mid x \in \mathbb{M}\}. \tag{3879}$$

$$\mathbb{M} = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} \{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\}. \tag{3880}$$

و متناظر با هر دُ-نقطه یِ x_1 و x_2، یک ی از روابط ِ زیر برقرار است.

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x_2) = [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x_1). \tag{3881}$$

یا،

$$\{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x_1)\} \cap \{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x_2)\} = \varnothing. \tag{3882}$$

تعریف ِ مدار را میشود به بیش از یک میدان ِ برداری هم گسترش داد. گیرم $\mathfrak{u}_i$ ها میدانها یی برداری یَند، و جا-به-جاگر ِ هر دُ-تا از این میدانها یک ترکیب ِ خطی (احتمالَن با ضریبها یِ تابعی) از این میدانها ست. یعنی یک $\mathfrak{f}$ هست که

$$\mathfrak{u}_i \diamond \mathfrak{u}_j = \mathfrak{f}^k{}_{i\,j}\,\mathfrak{u}_k. \tag{3883}$$

در حالت ِ کلی، $\mathfrak{f}^k{}_{i\,j}$ ها ممکن است تابعی باشند. به $\mathfrak{f}^k{}_{i\,j}$ ها ضریب- ِ-ساختارها، و اگر ثابت (عدد) باشند، ثابت- ِ-ساختارها میگویند. دیده میشود اگر ${\sigma_1}^i$ ها و ${\sigma_2}^i$ ها تابعی باشند،

$$({\sigma_1}^i\,\mathfrak{u}_i) \diamond ({\sigma_2}^j\,\mathfrak{u}_j) = {\sigma_3}^k\,\mathfrak{u}_k. \tag{3884}$$

که ${\sigma_3}^i$ ها هم تابعی یَند. در واقع،

$${\sigma_3}^k = \mathfrak{f}^k{}_{i\,j}\,{\sigma_1}^i\,{\sigma_2}^j. \tag{3885}$$

پس مجموعه یِ ترکیب- ِ-خطیها یِ $\{(i,\mathfrak{u}_i) \mid i\}$ (با ضریبها یِ تابعی) هم تحت ِ جا-به-جاگر بسته است. رُشن است که اگر $\mathfrak{f}^k{}_{i,j}$ ها ثابت باشند و $\sigma_1{}^i$ ها و $\sigma_2{}^i$ ها هم ثابت باشند، $\sigma_3{}^i$ ها هم ثابت َند.

مدار ِ x با $(\mathfrak{u}_1,\dots)$ را با $[\mathbb{O}(\mathfrak{u}_1,\dots)](x)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u}_1,\dots)](x) = \{[\mathfrak{fl}(\mathfrak{t}^i\,\mathfrak{u}_i)](x) \mid (\mathfrak{t}^1,\dots)\}. \tag{3886}$$

مختصرتر، $\{(i,\mathfrak{u}_i) \mid i\}$ را با خُد ِ $\mathfrak{u}$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{u} = \{(i,\mathfrak{u}_i) \mid i\}. \tag{3887}$$

با یک نماد-گذاری یِ سادِتر، چندتایی یِ متناظر با $\mathfrak{u}$ را هم با خُد ِ $\mathfrak{u}$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}_1,\dots). \tag{3888}$$

مانسته یِ اینها را برا یِ چیزها یی که شاخص ِ بالا دارند، یا بیش از یک شاخص دارند، هم به کار میبَرم؛ همراه با این قرارداد که

$$\mathfrak{t}\,\mathfrak{u} = \mathfrak{t}^i\,\mathfrak{u}_i. \tag{3889}$$

به این ترتیب، (3883) چنین میشود.

$$\mathfrak{u} \diamond \mathfrak{u} = \mathfrak{f}\,\mathfrak{u}. \tag{3890}$$

رابطه یِ (3884) هم چنین میشود.

$$(\sigma_1\,\mathfrak{u}) \diamond (\sigma_2\,\mathfrak{u}) = \sigma_3\,\mathfrak{u}. \tag{3891}$$

و رابطه یِ (3884) هم میشود

$$\sigma_3 = \mathfrak{f}\,\sigma_1\,\sigma_2. \tag{3892}$$

به این ترتیب رابطه یِ (3886) به هم ان شکل ِ رابطه یِ (3863) در میئاید. همچنین، دیده میشود اگر $\mathfrak{a}$ یک تابع با مقدار ِ ماتریسی باشد که مجموعه یِ مقدارها یَ ش و مجموعه یِ وارون ِ مقدارها یَ ش کران-دار است،

$$\{\mathbb{O}[(\mathfrak{a}\,\mathfrak{u})_1,\dots\}(x) = [\mathbb{O}(\mathfrak{u})_1,\dots](x). \tag{3893}$$

که،

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{u})_i = \mathfrak{a}^j{}_i\,\mathfrak{u}_j. \tag{3894}$$

با نماد-گذاریها یِ مختصر، رابطه یِ (3893) شبیه ِ هم ان رابطه یِ (3864) میشود.

اینجا هم، با $\mathbb{O}(\mathfrak{u})$ یک رابطه تعریف میکنم. مانسته یِ (3865) چنین میشود.

$$x_1\,\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u}_1,\dots)}\,x_2 \tag{3895}$$

$\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u}_1,\dots)}$ را هم با $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ نشان میدهم. رابطه یِ (3895) یعنی $\mathfrak{t}^i$ ها یی هستند که

$$x_2 = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}^i\,\mathfrak{u}_i)](x_1). \tag{3896}$$

اینجا هم دیده میشود $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ بازتابی ست، متقارن است، و ترایا ست. اثبات ِ دُ-ویژگی یِ اول کاملَن مشابه با حالت ِ یک-میدان- ِ-برداری ست. اثبات ِ این که $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ ترایا ست، کم ی با اثبات برا یِ حالت ِ یک-میدان- ِ-برداری متفاوت است.

گیرم x_2 در مدار ِ x_1 با $\mathfrak{u}$ است، رابطه یِ (3869)؛ و x_3 در مدار ِ x_2 با $\mathfrak{u}$ است، رابطه یِ (3874). این که مجموعه یِ ترکیب- ِ-خطیها یِ $\mathfrak{u}$ تحت ِ جا-به-جاگر بسته است، نتیجه میدهد یک $\mathfrak{t}''$ هست که

$$\mathsf{fl}(\mathfrak{t}''\,\mathfrak{u}) = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})]\circ[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})]. \tag{3897}$$

البته $\mathfrak{t}''$ لزومَن با $(\mathfrak{t}'+\mathfrak{t})$ برابر نیست:

$$\mathfrak{t}'' = \mathfrak{t}' + \mathfrak{t} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{t}'\,\mathfrak{t} + o[(\mathfrak{t}',\mathfrak{t})^2]. \tag{3898}$$

به این ترتیب، از این که x_2 در مدار ِ x_1 با $\mathfrak{u}$ است و x_3 در مدار ِ x_2 با $\mathfrak{u}$ است نتیجه میشود یک $\mathfrak{t}''$ هست که

$$x_3 = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}''\,\mathfrak{u})](x_1). \tag{3899}$$

و این یعنی x_3 در مدار ِ x_1 با $\mathfrak{u}$ است. (3865) و (3873) رابطه یِ (3877) را نتیجه میدهند. یعنی $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ ترایا ست.

مثل ِ حالت ِ یک-میدان- ِ-برداری، رابطه یِ $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ بازتابی، متقارن، و ترایا ست. پس رابطه یِ $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ یک رابطه یِ همئرزی ست. خمینه تقسیم بر $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ مجموعه یِ رده-یِ-همئرزیها یِ متناظر با $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ است: رابطه یِ (3879)؛ خمینه اجتماع ِ رده-یِ-همئرزیها یِ متناظر با $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ است: رابطه یِ (3880)؛ و هر دُ-رده-یِ-همئرزی یِ متناظر با $\boxed{\mathbb{O}(\mathfrak{u})}$ ، یا یکسان َند یا اشتراک ِ شان تهی ست: روابط ِ (3881) و (3882).

یک حالت ِ خاص این است که میدان- ِ-برداریها ($\mathfrak{u}_i$ ها) با هم جا-به-جا میشوند:

$$\mathfrak{u}_i \diamond \mathfrak{u}_j = 0. \tag{3900}$$

چون $\mathfrak{u}_i$ ها با هم جا-به-جا میشوند،

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})] = \mathsf{fl}[(\mathfrak{t}+\mathfrak{t}')\,\mathfrak{u})]. \tag{3901}$$

و

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})] = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})]. \tag{3902}$$

همچنین،

$$(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u}) \diamond (\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}) = 0. \tag{3903}$$

پس،

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})]_*(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}) = \mathfrak{t}\,\mathfrak{u}. \tag{3904}$$

متناظر با وابرریختی یِ $\mathfrak{f}$،

$$[\mathfrak{f}_*(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})][\mathfrak{f}(x)] = [(\mathbf{D}\,\mathfrak{f})(x)]\,[(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})(x)]. \tag{3905}$$

این را با $\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})$ به جا یِ $\mathfrak{f}$ مینویسم:

$$\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})]_*(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})\}\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})](x)\} = \Big(\{\mathbf{D}\,[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})]\}(x)\Big)[(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})(x)]. \tag{3906}$$

که، با استفاده از (3904)چنین میشود

$$(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})](x)\} = \Big(\{\mathbf{D}\,[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})]\}(x)\Big)[(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})(x)]. \tag{3907}$$

از جمله نتیجه میشود $(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})$ در x صفر است، اگر و تنها اگر $(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})$ در $[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})](x)$ صفر باشد. پس

$$(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})(x) = 0. \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathsf{res}\{(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = 0. \tag{3908}$$

یک نتیجه یِ اینها آن است که هر زیرمجموعه از پهنه یِ $\mathfrak{u}$، در x خطی- مستقل (خطی- وابسته) است اگر و تنها اگر در هر نقطه یِ مدار ِ x با $\mathfrak{u}$ خطی- مستقل (خطی- وابسته) باشد. همئرز با آن، هر زیرمجموعه از پهنه یِ $\mathfrak{u}(x)$ خطی- مستقل (خطی- وابسته) است، اگر و تنها اگر زیرمجموعه یِ متناظر از پهنه یِ $\mathfrak{u}$ خطی- مستقل (خطی- وابسته) باشد.

96 شبکه

گیرم $\mathfrak{u}(x)$ صفر نیست. در این صورت مدار ِ x با $\mathfrak{u}$، یک مجموعه یِ یک-بُعدی ست. یک حالت این است که دُ مقدار ِ متمایز ِ $\mathfrak{t}_1$ و $\mathfrak{t}_2$ هستند، چنان که

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_2\,\mathfrak{u})](x) = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{u})](x). \tag{3909}$$

$(\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{t}_1)$ را با $\mathfrak{t}_0$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{t}_1. \tag{3910}$$

رابطه یِ (3909) همئرز است با

$$x = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})](x). \tag{3911}$$

گیرم x' یک عضو ِ $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ است. یعنی یک $\mathfrak{t}'$ هست که

$$x' = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})](x). \tag{3912}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned}
[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})](x') &= [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})]\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})](x)\},\\
&= \{\mathsf{fl}[(\mathfrak{t}_0+\mathfrak{t}')]\,\mathfrak{u})\}(x),\\
&= [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})]\{[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0)\,\mathfrak{u})](x)\},\\
&= [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})](x).
\end{aligned} \tag{3913}$$

که نتیجه میدهد

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})](x') = x'. \tag{3914}$$

پس (3909) همئرز است با

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3915}$$

دیده میشود

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})]^a(x) = x^a + \mathfrak{t}\,\mathfrak{u}^a(x) + o(\mathfrak{t}). \tag{3916}$$

پس وقت ی $\mathfrak{u}(x)$ صفر نیست، یک همسایگی از صفر هست که اگر $\mathfrak{t}$ در آن باشد و صفر نباشد،

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})](x) \neq x. \tag{3917}$$

در این صورت، وقت ی یک $\mathfrak{t}_0$ هست که (3911) برقرار است؛ مجموعه یِ $\mathfrak{t}_0$ ها یی که با آنها (3911)، یا همئرز با آن (3915)، برقرار است یک کوچکترین-مقدار- ِ-مثبت دارد. این را با $\mathfrak{t}_x$ نشان میدهم. رُشن است که اگر x' یک عضو ِ $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ باشد،

$$\mathfrak{t}_{x'} = \mathfrak{t}_x. \tag{3918}$$

همچنین، $\mathsf{res}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,\mathfrak{u})](x); [0, \mathfrak{t}_x)\}$ یک-به-یک است.

در این حالت، که دُ مقدار ِ متمایز ِ $\mathfrak{t}_1$ و $\mathfrak{t}_2$ هستند، چنان که (3909) برقرار است، مدار ِ x با $\mathfrak{u}$ با یک دایره همانریخت است. سادِتر، میگویم مدار ِ x با $\mathfrak{u}$ یک دایره است.

وقت ی چنین نیست که دُ مقدار ِ متمایز ِ $\mathfrak{t}_1$ و $\mathfrak{t}_2$ هستند، چنان که (3909) برقرار است، مدار ِ x با $\mathfrak{u}$ با یک خط همانریخت است. سادِتر، میگویم مدار ِ x با $\mathfrak{u}$ یک خط است.

دُره یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ با $\mathfrak{u}$ را کوچکترین مقدار ِ مثبت ِ $\mathfrak{t}$ تعریف میکنم که

$$\mathsf{res}[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}); \mathbb{S}] = \mathbf{1}_{\mathbb{S}}. \tag{3919}$$

رُشن است که فقط وقت ی $\mathfrak{t}$ یی باشد که (3919) براورده شود. دُره یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ با $\mathfrak{u}$ را با $[\mathsf{pe}(\mathfrak{u})](\mathbb{S})$ نشان میدهم. دیده میشود وقت ی مدار ِ x با $\mathfrak{u}$ یک دایره است،

$$[\mathsf{pe}(\mathfrak{u})]\{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathfrak{t}_x. \tag{3920}$$

از (3864) دیده میشود اگر $\mathfrak{b}$ یک ثابت ِ ناصفر باشد،

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{u})](x) = [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x). \tag{3921}$$

از تعریف ِ دُره هم معلوم است

$$[\mathsf{pe}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{u})]\{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \frac{1}{|\mathfrak{b}|}\,[\mathsf{pe}(\mathfrak{u})]\{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\}. \tag{3922}$$

از جمله،

$$\left[\mathsf{pe}\left(\frac{[\mathsf{pe}(\mathfrak{u})]\{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\}}{2\,\pi}\,\mathfrak{u}\right)\right]\{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = 2\,\pi. \tag{3923}$$

اینها را به حالت ِ چند میدان ِ برداری که با هم جا-به-جا میشوند گسترش میدهم. گیرم میدان-ِ-برداریها یِ $\mathfrak{u}_i$ با هم جا-به-جا میشوند.

$$\mathfrak{u}_i \diamond \mathfrak{u}_j = 0. \tag{3900}$$

ممکن است یک $\mathfrak{t}_0$ باشد که $(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})$ صفر نباشد:

$$\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u} \neq 0. \tag{3924}$$

ولی $[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})](x)$ برابر با x باشد: رابطه یِ (3911). چون $\mathfrak{u}_i$ ها با هم جا-به-جا میشوند،

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})] = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'\,\mathfrak{u})] \circ [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})]. \tag{3925}$$

و استدلال ی مشابه با آن چه برا یِ یک میدان ِ برداری به کار رفت نتیجه میدهد متناظر با هر x' که در مجموعه یِ $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ است، $[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})](x')$ برابر با x' است: رابطه یِ (3914). این برا یِ هر عضو ِ $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ درست است. پس تحدید ِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})$ به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی ست: رابطه یِ (3915). رُشن است که در این صورت، متناظر با هر عدد ِ صحیح ِ $\mathfrak{n}$ هم،

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{n}\,\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3926}$$

اما ممکن است (3926) با یک مقدار ِ نَ-لزومَن-صحیح ِ $\mathfrak{b}$ به جا یِ $\mathfrak{n}$ هم برقرار باشد:

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3927}$$

چون $(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})$ صفر نیست، مجموعه یِ $\mathfrak{b}$ ها یِ مثبت ی که با آنها (3927) برقرار است یک کوچکترین مقدار دارد. حاصل-ِ-ضرب ِ این کوچکترین-مقدار ِ $\mathfrak{b}$ در $(\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{u})$ را با $\tilde{\mathfrak{u}}_1$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{u}}_1); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3928}$$

و متناظر با هر عدد $\tilde{\mathfrak{b}}$،

$$\tilde{\mathfrak{b}} \in \mathbb{Z}. \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{b}}\,\tilde{\mathfrak{u}}_1); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3929}$$

که $\mathbb{Z}$ مجموعه یِ عددها یِ صحیح است.

این کار را استقرایی ادامه میدهم. گیرم میدان- ِ-برداریها یِ $\tilde{\mathfrak{u}}_1$ تا $\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{k}}$ چنان َند که $\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل است و

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{u}}_i);[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}, \quad i \leq \mathfrak{k}. \tag{3930}$$

و متناظر با هر عدد $\tilde{\mathfrak{b}}$،

$$\tilde{\mathfrak{b}} \in \mathbb{Z}. \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{b}}\,\tilde{\mathfrak{u}}_i);[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}, \quad i \leq \mathfrak{l}. \tag{3931}$$

ممکن است یک $\mathfrak{t}'_0$ باشد که $(\mathfrak{t}'_0\,\mathfrak{u})$ در پهنه یِ $\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ نیست و

$$x = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}'_0\,\mathfrak{u})](x). \tag{3932}$$

مشابه با آن چه برا یِ ساختن ِ $\tilde{\mathfrak{u}}_1$ به کار رفت، $\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{k}+1}$ را میسازم، که در پهنه یِ $\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ نیست و

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{k}+1});[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3933}$$

و متناظر با هر عدد $\tilde{\mathfrak{b}}$،

$$\tilde{\mathfrak{b}} \in \mathbb{Z}. \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{b}}\,\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{k}+1});[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3934}$$

این کار جا یی تمام میشود. یعنی یک عدد ِ صحیح ِ نامنفی یِ $\mathfrak{l}$ هست، و میدان- ِ-برداریها یِ $\tilde{\mathfrak{u}}_1$ تا $\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{l}}$ هستند، چنان َند که $\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}$ خطی-مستقل است و

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{u}}_i);[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}, \quad i \leq \mathfrak{l}. \tag{3935}$$

و متناظر با هر عدد $\tilde{\mathfrak{b}}$،

$$\tilde{\mathfrak{b}} \in \mathbb{Z}. \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{b}}\,\tilde{\mathfrak{u}}_i);[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}, \quad i \leq \mathfrak{l}. \tag{3936}$$

همچنین؛ اگر $(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})$ در پهنه یِ $\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}$ نباشد، آنگاه تحدیدِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})$ به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی نیست:

$$(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}) \notin \mathsf{span}\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}. \quad \Rightarrow$$
$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} \neq \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3937}$$

به شکل ی همئرز؛ اگر تحدیدِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})$ به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی باشد، آنگاه $(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u})$ در پهنه یِ $\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}$ است:

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \quad \Rightarrow$$
$$(\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}) \in \mathsf{span}\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}. \tag{3938}$$

میدان-ِ-برداریها یِ $\tilde{\mathfrak{u}}_1$ تا $\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{l}}$ با ویژگیها یِ بالا، لزومَن یکتا نیستند. اما میشود نشان داد تعدادِ شان (یعنی $\mathfrak{l}$) یکتا ست. برا یِ اثباتِ این، گیرم دُ دسته از این میدان-ِ-برداریها هست: $\tilde{\mathfrak{u}}_1$ تا $\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{l}}$، و $\tilde{\mathfrak{u}}'_1$ تا $\tilde{\mathfrak{u}}'_{\mathfrak{l}'}$. مانسته یِ (3935) برا یِ $\tilde{\mathfrak{u}}'_i$ ها چنین میشود.

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\tilde{\mathfrak{u}}'_i); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}, \qquad i \leq \mathfrak{l}'. \tag{3939}$$

به این ترتیب، (3938) نتیجه میدهد

$$\tilde{\mathfrak{u}}'_i \in \mathsf{span}\{(j,\tilde{\mathfrak{u}}_j) \mid j \leq \mathfrak{l}\}, \quad i \leq \mathfrak{l}'. \tag{3940}$$

$\{(i,\tilde{\mathfrak{u}}'_i) \mid i \leq \mathfrak{l}'\}$ خطی-مستقل است، و $\tilde{\mathfrak{u}}'_i$ ها در پهنه یِ $\{(j,\tilde{\mathfrak{u}}_j) \mid j \leq \mathfrak{l}\}$ اند. پس تعدادِ $\tilde{\mathfrak{u}}'_i$ ها نابزرگتر از تعدادِ $\tilde{\mathfrak{u}}_j$ ها ست:

$$\mathfrak{l}' \leq \mathfrak{l}. \tag{3941}$$

به شکل ی مشابه، دیده میشود

$$\mathfrak{l} \leq \mathfrak{l}'. \tag{3942}$$

و اینها نتیجه میدهد

$$\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}. \tag{3943}$$

از (3940) و مانسته اَ ش، که در آن جا یِ $\tilde{\mathfrak{u}}'_i$ ها و $\tilde{\mathfrak{u}}_i$ ها با هم عوض شده، همچنین نتیجه میشود

$$\mathsf{span}\{(i, \tilde{\mathfrak{u}}'_i) \mid i \leq \mathfrak{l}'\} = \mathsf{span}\{(i, \tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}. \tag{3944}$$

پهنه یِ $\{(i, \mathfrak{u}_i) \mid i\}$ را با $\mathbb{H}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{H} = \mathsf{span}\{(i, \mathfrak{u}_i) \mid i\}. \tag{3945}$$

نتیجه شد یک $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ هست:

$$\mathbb{H}\mathfrak{c} = \mathsf{span}\{(i, \tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}. \tag{3946}$$

که $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{H}$ است:

$$\mathbb{H}\mathfrak{c} \sqsubseteq \mathbb{H}. \tag{3947}$$

با این ویژگی که اگر $\mathfrak{v}$ در $\mathbb{H}$ باشد و $\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{v}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\}$ همانی باشد، آنگاه $\mathfrak{v}$ در $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ است:

$$\begin{gathered}\Big[(\mathfrak{v} \in \mathbb{H}) \wedge \\ \Big(\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{v}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}\Big)\Big]. \quad \Rightarrow \\ \mathfrak{v} \in \mathbb{H}\mathfrak{c}.\end{gathered} \tag{3948}$$

همچنین، یک تابع- ِ-برداری یِ خطی-مستقل ِ $\tilde{\mathbb{B}}\mathfrak{c}$ هست:

$$\tilde{\mathbb{B}}\mathfrak{c} = \{(i, \tilde{\mathfrak{u}}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}. \tag{3949}$$

که $\mathfrak{l}$ عضو دارد، که $\mathfrak{l}$ بُعد ِ $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ است:

$$\mathfrak{l} = \mathsf{dim}(\mathbb{H}\mathfrak{c}). \tag{3950}$$

تصویر ِ $\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}$ زیرمجموعه یِ $\mathbb{H}\mathrm{c}$ است:

$$\mathsf{img}(\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}) \subseteq \mathbb{H}\mathrm{c}. \tag{3951}$$

و اگر $\mathfrak{w}$ در $\mathsf{img}(\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c})$ باشد، $\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{w}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\}$ همانی ست:

$$\mathfrak{w} \in \mathsf{img}(\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}). \quad \Rightarrow$$
$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{w}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}. \tag{3952}$$

البته از این که $\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}$ خطی-مستقل است، تصویر َش زیرمجموعه یِ $\mathbb{H}\mathrm{c}$ است، و تعداد ِ اعضا یَش برابر با بُعد ِ $\mathbb{H}\mathrm{c}$ است، نتیجه میشود $\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}$ یک پایه برا یِ $\mathbb{H}\mathrm{c}$ است. از جمله رُشن است که

$$\mathbb{H}\mathrm{c} = \mathsf{span}(\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}). \tag{3953}$$

همچنین، از این که $\mathbb{H}\mathrm{c}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{H}$ است نتیجه میشود بُعد ِ $\mathbb{H}\mathrm{c}$ نابزرگتر از بُعد ِ $\mathbb{H}$ است:

$$\mathsf{dim}(\mathbb{H}\mathrm{c}) \leq \mathsf{dim}(\mathbb{H}). \tag{3954}$$

سرانجام؛ $\mathbb{H}\mathrm{c}$ یکتا ست، اما $\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}$ یکتا نیست.

$\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}$ یک پایه برا یِ $\mathbb{H}\mathrm{c}$ است، و این ویژگی را دارد که اگر $\mathfrak{w}$ یک ترکیب- ِ-خطی از $\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}$ با ضریبها یِ صحیح باشد، آنگاه تحدید ِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{w})$ به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی ست. اما عکس ِ این لزومَن درست نیست: ممکن است $\mathfrak{w}$ یک ترکیب- ِ-خطی از $\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}$ باشد و تحدید ِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{w})$ به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی باشد، ولی همه یِ ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی صحیح نباشد. نشان میدهم $\mathbb{H}\mathrm{c}$ یک پایه یِ $\mathbb{B}\mathrm{c}$ دارد که برا یِ هر $\mathfrak{w}$ که یک ترکیب- ِ-خطی از $\mathbb{B}\mathrm{c}$ است؛ تحدید ِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{w})$ به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی ست، اگر و تنها اگر همه یِ ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی صحیح باشند. برا یِ اثبات، $\mathbb{B}\mathrm{c}$ را از رو یِ $\tilde{\mathbb{B}}\mathrm{c}$ میسازم. اینجا به ابزارها یی میپردازم که در این اثبات (ساختار) به کار میروند.

بر $\mathbb{H}\mathrm{c}$ یک ضرب- ِ-درونی تعریف میکنم. این همئرز با تعریف ِ یک پایه یِ یکه-متعامد است: برا یِ $\mathbb{H}\mathrm{c}$ یک پایه یِ $\mathfrak{e}$ میگیرم و تعریف میکنم این پایه یکه-متعامد است:

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_j = \delta_{i\,j}. \tag{3955}$$

که حاصل- ِ-ضرب- ِ-درونی یِ $\mathfrak{w}_1$ و $\mathfrak{w}_2$ با $(\mathfrak{w}_1 \cdot \mathfrak{w}_2)$ نشان داده شده. به این ترتیب،

$$\mathfrak{w}_1 \cdot \mathfrak{w}_2 = \sum_{i=1}^{\mathfrak{l}} \mathfrak{w}_1^i \, \mathfrak{w}_2^i. \tag{3956}$$

که مئلفِها با پایه یِ $\mathfrak{e}$ تعریف شده:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}^i \, \mathfrak{e}_i. \tag{3957}$$

با این ضرب- ِ-درونی یک طول تعریف میکنم:

$$|\mathfrak{w}| = (\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{w})^{1/2}. \tag{3958}$$

که طول ِ $\mathfrak{w}$ با $|\mathfrak{w}|$ نشان داده شده. به این ترتیب،

$$|\mathfrak{w}| = \left[\sum_{i=1}^{\mathfrak{l}} (\mathfrak{w}^i)^2\right]^{1/2}. \tag{3959}$$

رُشن است که این طول ویژگیها یِ معمول ِ طول را دارد. از جمله،

$$|\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2| \leq |\mathfrak{w}_1| + |\mathfrak{w}_2|. \tag{3960}$$

که در آن برابری برقرار است؛ اگر و تنها اگر $\mathfrak{w}_2$ یک مضرب ِ مثبت از $\mathfrak{w}_1$ باشد، یا $\mathfrak{w}_1$ یک مضرب ِ مثبت از $\mathfrak{w}_2$ باشد. همچنین، متناظر با هر عدد ِ $\mathfrak{a}$،

$$|\mathfrak{a}\, \mathfrak{w}| = |\mathfrak{a}| \, |\mathfrak{w}|. \tag{3961}$$

و طول ِ بردار ِ صفر برابر با صفر، و طول ِ هر بردار ِ ناصفر مثبت است:

$$|\mathfrak{w}| \begin{cases} = 0, & \mathfrak{w} = 0 \\ > 0 & \mathfrak{w} \neq 0 \end{cases}. \tag{3962}$$

فاصله یِ بردار ِ $\mathfrak{w}$ از فضا یِ خطی یِ $\mathbb{U}$ را با $|\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$|\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}} = \min\{|\mathfrak{w} - \mathfrak{w}'| \mid \mathfrak{w}' \in \mathbb{U}\}. \tag{3963}$$

دیده میشود متناظر با هر عدد ِ $\mathfrak{a}$،

$$|\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}}. \tag{3964}$$

همچنین،

$$\forall\,\mathfrak{w}' \in \mathbb{U}:$$
$$|\mathfrak{w} + \mathfrak{w}'|_{\mathbb{U}} = |\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}}. \tag{3965}$$

بردار ِ $\mathfrak{w}$ را به این شکل مینویسم.

$$\mathfrak{w} = \mathsf{PJ}^{\parallel}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w}) + \mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w}). \tag{3966}$$

که،

$$[\mathsf{PJ}^{\parallel}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w})] \in \mathbb{U}. \tag{3967}$$
$$[\mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w})] \in \mathbb{U}^{\perp}. \tag{3968}$$

و $\mathbb{U}^{\perp}$ مجموعه یِ بردارها یِ عمود بر $\mathbb{U}$ است:

$$\mathbb{U}^{\perp} = \{\mathfrak{w} \mid \forall\,\mathfrak{w}' \in \mathbb{U} : \mathfrak{w}\cdot\mathfrak{w}' = 0\}. \tag{3969}$$

بردارها یِ $\mathsf{PJ}^{\parallel}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w})$ و $\mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w})$ بر هم عمود َند، و تجزیه یِ $\mathfrak{w}$ به دُ بردار، یک ی در $\mathbb{U}$ و یک ی در $\mathbb{U}^{\perp}$، یکتا ست، که یعنی $\mathsf{PJ}^{\parallel}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w})$ و $\mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w})$ خُش-تعریف َند. دیده میشود

$$|\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}} = |\mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{U}}(\mathfrak{w})|. \tag{3970}$$

پس،

$$|\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}} \begin{cases} = 0, & \mathfrak{w} \in \mathbb{U} \\ > 0, & \mathfrak{w} \notin \mathbb{U} \end{cases}. \tag{3971}$$

و البته،

$$|\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}} \leq |\mathfrak{w}|. \tag{3972}$$

و برابری برقرار است، اگر و تنها اگر $\mathfrak{w}$ در $\mathbb{U}^{\perp}$ باشد:

$$|\mathfrak{w}|_{\mathbb{U}} \begin{cases} = |\mathfrak{w}|, & \mathfrak{w} \in \mathbb{U}^{\perp} \\ < |\mathfrak{w}|, & \mathfrak{w} \notin \mathbb{U}^{\perp} \end{cases}. \tag{3973}$$

همسایگی یِ $\mathfrak{w}_0$ به شعاع ِ ε را با $\mathsf{nei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_0)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{nei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_0) = \{\mathfrak{w} \in \mathbb{H}\mathrm{c} \mid |\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0| < \varepsilon\}. \tag{3974}$$

همسایگی یِ بی-مرکز ِ $\mathfrak{w}_0$ به شعاع ِ ε را هم با $\mathsf{oei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_0)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{oei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_0) = \{\mathfrak{w} \in \mathbb{H}\mathrm{c} \mid 0 < |\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0| < \varepsilon\}. \tag{3975}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 : \\ &\mathsf{nei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_0) = \{\mathfrak{w}_0\} \cup [\mathsf{oei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_0)]. \end{aligned} \tag{3976}$$

و البته،

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 : \\ &\mathsf{oei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_0) = [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_0)] \backslash \{\mathfrak{w}_0\}. \end{aligned} \tag{3977}$$

مجموعه یِ $\mathbb{H}\mathrm{d}$ را مجموعه یِ $\mathfrak{w}$ ها یی در $\mathbb{H}\mathrm{c}$ تعریف میکنم که تحدید ِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{w})$ به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی ست:

$$\mathbb{H}\mathrm{d} = \Big\{\mathfrak{w} \in \mathbb{H}\mathrm{c} \mid \mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{w}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}\Big\}. \tag{3978}$$

رُشن است که ضمنَن،

$$\mathbb{H}\mathrm{d} = \Big\{\mathfrak{w} \in \mathbb{H} \mid \mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{w}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}\Big\}. \tag{3979}$$

دیده میشود

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{w})]^a(x) = x^a + \mathfrak{w}^i\, \mathfrak{e}_i{}^a(x) + o(\mathfrak{w}). \tag{3980}$$

پس، چون $\mathfrak{e}$ خطی-مستقل است، یک همسایگی یِ صفر هست که اگر $\mathfrak{w}$ در آن باشد و صفر نباشد،

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{w})](x) \neq x. \tag{3981}$$

یعنی یک همسایگی یِ صفر هست که اشتراکِ $\mathbb{H}\mathrm{d}$ با آن همسایگی فقط یک نقطه (هم ان صفر) است:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ni$$
$$\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{nei}_\varepsilon(0)] = \{0\}. \tag{3982}$$

تعدادِ اعضا یِ مجموعه یِ $\mathfrak{X}$ را با $\mathsf{car}(\mathfrak{X})$ نشان میدهم. از (3982) نتیجه میشود

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ni$$
$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{nei}_\varepsilon(0)]\} = 1. \tag{3983}$$

همچنین، گیرم $\mathfrak{w}_0$ در $\mathbb{H}\mathrm{c}$ است. یک همسایگی یِ صفر هست که اگر $(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0)$ در آن باشد و صفر نباشد،

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0)](x) \neq x. \tag{3984}$$

که یعنی،

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{w})](x) \neq [\mathsf{fl}(\mathfrak{w}_0)](x). \tag{3985}$$

پس یک همسایگی یِ $\mathfrak{w}_0$ هست که اگر $\mathfrak{w}$ در آن باشد و برابر با $\mathfrak{w}_0$ نباشد، (3985) برقرار است. اگر

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{w}_0)](x) \neq x, \tag{3986}$$

آنگاه پیوستگی یِ $[\mathsf{fl}(\boldsymbol{\cdot})](x)$ نتیجه میدهد یک همسایگی یِ $\mathfrak{w}_0$ هست که اگر $\mathfrak{w}$ در آن باشد (3981) برقرار است. اگر

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{w}_0)](x) = x, \tag{3987}$$

آنگاه (3985) هم ان (3981) است. پس یک همسایگی یِ $\mathfrak{w}_0$ هست که اگر $\mathfrak{w}$ در آن باشد و برابر با $\mathfrak{w}_0$ نباشد، (3981) برقرار است.

اینها یعنی متناظر با هر عضو ِ $\mathfrak{w}_0$ از $\mathbb{Hc}$، یک همسایگی یِ آن عضو هست که اشتراک ِ $\mathbb{Hd}$ با آن همسایگی دست- ِ-بالا یک عضو دارد. این اشتراک تهی ست اگر $\mathfrak{w}_0$ عضو ِ $\mathbb{Hd}$ نباشد، و $\{\mathfrak{w}_0\}$ است اگر $\mathfrak{w}_0$ عضو ِ $\mathbb{Hc}$ باشد:

$$\begin{aligned}&\forall\, \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hc}:\ \exists\, \varepsilon > 0\ \ni \\ &\mathbb{Hd} \cap [\mathsf{nei}_\varepsilon(\mathfrak{w}_0)] = \begin{cases} \varnothing, & \mathfrak{w}_0 \notin \mathbb{Hd} \\ \{\mathfrak{w}_0\}, & \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hd} \end{cases}.\end{aligned} \tag{3988}$$

یا،

$$\begin{aligned}&\forall\, \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hc}:\ \exists\, \varepsilon > 0\ \ni \\ &\mathbb{Hd} \cap [\mathsf{nei}_\varepsilon(\mathfrak{w}_0)] = \mathbb{Hd} \cap \{\mathfrak{w}_0\}.\end{aligned} \tag{3989}$$

دیده میشود

$$\mathbb{Hd} \cap \{0\} = \{0\}. \tag{3990}$$

پس (3982) یک حالت ِ خاص ِ (3989) است. همچنین، از (3988) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}&\forall\, \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hc}:\ \exists\, \varepsilon > 0\ \ni \\ &\mathsf{car}\{\mathbb{Hd} \cap [\mathsf{nei}_\varepsilon(\mathfrak{w}_0)]\} = \begin{cases} 0, & \mathfrak{w}_0 \notin \mathbb{Hd} \\ 1, & \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hd} \end{cases}.\end{aligned} \tag{3991}$$

و این، یا (3989)، نتیجه میدهد

$$\forall \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hc} : \exists \varepsilon > 0 \ni$$
$$\mathsf{car}\{\mathbb{Hd} \cap [\mathsf{nei}_\varepsilon(\mathfrak{w}_0)]\} \leq 1. \tag{3992}$$

پس (3983) یک حالت ِ خاص ِ (3992) است.

همچنین، بر حسب ِ همسایگی ی ِ بی-مرکز، (3989) چنین میشود.

$$\forall \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hc} : \exists \varepsilon > 0 \ni$$
$$\mathbb{Hd} \cap [\mathsf{oei}_\varepsilon(\mathfrak{w}_0)] = \varnothing. \tag{3993}$$

و (3992) میشود

$$\forall \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hc} : \exists \varepsilon > 0 \ni$$
$$\mathsf{car}\{\mathbb{Hd} \cap [\mathsf{oei}_\varepsilon(\mathfrak{w}_0)]\} = 0. \tag{3994}$$

یک زیرمجموعه ی ِ $\mathbb{Hc}$ کران-دار است، وقتی مجموعه ی ِ طول ِ اعضا ی ِ آن کران-دار باشد. یعنی یک زیرمجموعه ی ِ $\mathbb{S}$ از $\mathbb{Hc}$ کران-دار است، وقت ی

$$\exists \varepsilon > 0 \ni$$
$$\forall \mathfrak{w} \in \mathbb{S} :$$
$$|\mathfrak{w}| < \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3995}$$

یا،

$$\exists \varepsilon 0 \ni$$
$$\mathbb{S} \subseteq [\mathsf{nei}_{1/\varepsilon}(0)]. \tag{3996}$$

میگویم زیرمجموعه ی ِ $\mathbb{S}$ از $\mathbb{Hc}$ یک مکعب به ضلع ِ ℓ است، وقت ی

$$\exists \mathfrak{w}_0 \in \mathbb{Hc} \ni$$
$$\mathbb{S} = \{\mathfrak{w} \in \mathbb{Hc} \mid \forall i : 0 \leq (\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0)^i \leq \ell\}. \tag{3997}$$

این مجموعه $(\mathbb{S})$ را با $\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)$ نشان میدهم:

$$\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0) = \{\mathfrak{w} \in \mathbb{H}\mathfrak{c} \mid \forall\, i : 0 \leq (\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0)^i \leq \ell\}. \tag{3998}$$

به $\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)$ مکعب ِ به مبدئ ِ $\mathfrak{w}_0$ و به ضلع ِ ℓ میگویم. دیده میشود

$$\begin{aligned} &\forall\, (\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2) \in \{[\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)] \times [\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)]\} : \\ &|\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1| \leq \sqrt{\mathfrak{l}}\,\ell. \end{aligned} \tag{3999}$$

از جمله،

$$\begin{aligned} &\forall\, \mathfrak{w} \in [\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)] : \\ &|\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0| \leq \sqrt{\mathfrak{l}}\,\ell. \end{aligned} \tag{4000}$$

متناظر با هر زیرمجموعه یِ کران-دار ِ $\mathbb{S}$ از $\mathbb{H}\mathfrak{c}$، یک ℓ هست و یک مکعب به ضلع ِ ℓ هست که $\mathbb{S}$ را در بر دارد: ℓ و $\mathfrak{w}_0$ را چنین میگیرم.

$$\ell = \frac{2}{\varepsilon}. \tag{4001}$$

$$\mathfrak{w}_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\mathfrak{l}} \mathfrak{e}_i. \tag{4002}$$

دیده میشود

$$[\mathsf{nei}_{1/\varepsilon}(0)] \subseteq [\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)]. \tag{4003}$$

همچنین، هر مکعب با هر ضلع (ِ محدود) کران-دار است: با هر $\mathfrak{w}_0$ و هر ℓ، یک ε هست که

$$\frac{1}{\varepsilon} > |\mathfrak{w}_0| + \sqrt{\mathfrak{l}}\,\ell. \tag{4004}$$

دیده میشود

$$[\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)] \subseteq [\mathsf{nei}_{1/\varepsilon}(0)]. \tag{4005}$$

نشان میدهم اشتراک ِ $\mathbb{H}\mathrm{d}$ با هر زیرمجموعه یِ کران-دار از $\mathbb{H}\mathrm{c}$ محدود-عضوی ی ست. برا یِ اثبات، گیرم $\mathbb{S}$ زیرمجموعه یِ کران-دار از $\mathbb{H}\mathrm{c}$ است. پس (3996) برقرار است. گیرم حکم نادرست است. یعنی

$$\mathsf{car}(\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{S}) = \infty. \tag{4006}$$

از این که $\mathbb{S}$ کران-دار است، نتیجه میشود یک $\mathfrak{w}_0$ و یک ℓ هست که

$$\mathbb{S} \subseteq [\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)]. \tag{4007}$$

از روابط ِ (4006) و (4007) نتیجه میشود

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)]\} = \infty. \tag{4008}$$

$\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)$ اجتماع ِ $2^{\mathfrak{l}}$ مکعب، هر یک به ضلع ِ $(2^{-1}\,\ell)$ است:

$$\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0) = \bigcup_{\mathfrak{a}^1=0}^{1} \cdots \bigcup_{\mathfrak{a}^{\mathfrak{l}}=0}^{1} [\mathsf{cub}_{2^{-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_0 + 2^{-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)]. \tag{4009}$$

$\mathsf{cub}_{2^{-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_0 + 2^{-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)$ یک مکعب به ضلع ِ $(2^{-1}\,\ell)$ است، که مبدئ َ ش به اندازه یِ $(2^{-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)$ نسبت به مبدئ ِ $\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)$ متنقل شده، یعنی مبدئ ِ $\mathsf{cub}_{2^{-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_0 + 2^{-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)$ نسبت به مبدئ ِ $\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)$، در جهت ِ هر یک از $\mathfrak{e}_i$ ها به اندازه یِ صفر (وقت ی $\mathfrak{a}^i$ صفر است) یا $(2^{-1}\,\ell)$ (وقت ی $\mathfrak{a}^i$ یک است) منتقل شده. رابطه یِ (4009) را بسته چنین مینویسم.

$$\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0) = \bigcup_{\mathfrak{a}} [\mathsf{cub}_{2^{-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_0 + 2^{-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)]. \tag{4010}$$

که هر یک از $\mathfrak{a}^i$ ها در مجموعه یِ $\{0,1\}$ مقدار میگیرد. از روابط ِ (4008) و (4010) نتیجه میشود یک $\mathfrak{a}$ هست که اشتراک ِ $\mathbb{H}\mathrm{d}$ با $\mathsf{cub}_{2^{-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_0 + 2^{-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)$ بینهایت عضو دارد:

$$\exists\,\mathfrak{a} \ \ni \tag{4011}$$

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{cub}_{2^{-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_0 + 2^{-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)]\} = \infty. \tag{4012}$$

این $\mathfrak{a}$، یا اگر بیش از یک $\mathfrak{a}$ با این ویژگی بود یک ی از آنها، را برمیگزینم و آن را با $\mathfrak{a}_1$ نشان میدهم. $\mathfrak{w}_1$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_0 + 2^{-1}\,\ell\,{\mathfrak{a}_1}^i\,\mathfrak{e}_i. \tag{4013}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{cub}_{2^{-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_1)]\} = \infty. \tag{4014}$$

$$[\mathsf{cub}_{2^{-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_1)] \subseteq [\mathsf{cub}_{\ell}(\mathfrak{w}_0)]. \tag{4015}$$

این کار را ادمه میدهم. استقرایی، گیرم $\mathfrak{w}_j$ و $\mathfrak{a}_j$ تعریف شده و

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)]\} = \infty. \tag{4016}$$

$\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)$ اجتماعِ $2^{\mathfrak{l}}$ مکعب، هر یک به ضلعِ $(2^{-j-1}\,\ell)$ است:

$$\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j) = \bigcup_{\mathfrak{a}} [\mathsf{cub}_{2^{-j-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_j + 2^{-j-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)]. \tag{4017}$$

که هر یک از $\mathfrak{a}^i$ ها در مجموعه یِ $\{0,1\}$ مقدار میگیرد. از روابطِ (4016) و (4017) نتیجه میشود یک $\mathfrak{a}$ هست که اشتراکِ $\mathbb{H}\mathrm{d}$ با $\mathsf{cub}_{2^{-j-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_j + 2^{-j-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)$ بینهایت عضو دارد:

$$\exists\,\mathfrak{a}\ \ni \tag{4018}$$

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{cub}_{2^{-j-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_j + 2^{-j-1}\,\ell\,\mathfrak{a}^i\,\mathfrak{e}_i)]\} = \infty. \tag{4019}$$

این $\mathfrak{a}$، یا اگر بیش از یک $\mathfrak{a}$ با این ویژگی بود یک ی از آنها، را برمیگزینم و آن را با $\mathfrak{a}_{j+1}$ نشان میدهم. $\mathfrak{w}_{j+1}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{w}_{j+1} = \mathfrak{w}_j + 2^{-j-1}\,\ell\,{\mathfrak{a}_{j+1}}^i\,\mathfrak{e}_i. \tag{4020}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{cub}_{2^{-j-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_{j+1})]\} = \infty. \tag{4021}$$

$$[\mathsf{cub}_{2^{-j-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_{j+1})] \subseteq [\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)]. \tag{4022}$$

پس، با استقرا، معلوم میشود

$$\forall j :$$

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)]\} = \infty. \tag{4023}$$

$$\forall j :$$

$$[\mathsf{cub}_{2^{-j-1}\,\ell}(\mathfrak{w}_{j+1})] \subseteq [\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)]. \tag{4024}$$

که $\mathfrak{w}_j$ ها، استقرایی، با (4020) تعریف شده اند.

نشان میدهم دنباله یِ $\mathfrak{w}$ همگرا ست، که

$$\mathfrak{w} = \{(1, \mathfrak{w}_1), (2, \mathfrak{w}_2), \dots\}. \tag{4025}$$

برا یِ این کار، دنباله یِ ${\mathfrak{w}}^i$ را بررسی میکنم، که

$$\mathfrak{w}^i = \{(1, {\mathfrak{w}_1}^i), (2, {\mathfrak{w}_2}^i), \dots\}. \tag{4026}$$

مقدار ِ ${\mathfrak{w}}^i$ مئلفه یِ i ِ مقدار ِ $\mathfrak{w}$ است:

$$(\mathfrak{w}^i)_j = {\mathfrak{w}_j}^i. \tag{4027}$$

از (4020) دیده میشود

$$(\mathfrak{w}^i)_{j+1} = (\mathfrak{w}^i)_j + 2^{-j-1}\,\ell\,{\mathfrak{a}_{j+1}}^i. \tag{4028}$$

از این، همراه با این که ${\mathfrak{a}_{j+1}}^i$ برابر با 0 یا 1 است، نتیجه میشود

$$(\mathfrak{w}^i)_{j+1} \geq (\mathfrak{w}^i)_j. \tag{4029}$$

$$(\mathfrak{w}^i)_{j+1} \leq (\mathfrak{w}^i)_j + 2^{-j-1}\,\ell. \tag{4030}$$

رابطه یِ (4029) یعنی دنباله یِ ${\mathfrak{w}}^i$ صعودی ست. از (4030) هم نتیجه میشود

$$(\mathfrak{w}^i)_j \leq (\mathfrak{w}^i)_0 + \sum_{k=1}^{j} 2^{-k}\,\ell. \tag{4031}$$

دیده میشود

$$\sum_{k=1}^{j} 2^{-k} = 1 - 2^{-j}. \tag{4032}$$

که نتیجه میدهد

$$\sum_{k=1}^{j} 2^{-k} \leq 1. \tag{4033}$$

روابط ِ (4031) و (4033) نتیجه میدهند

$$(\mathfrak{w}^i)_j \leq (\mathfrak{w}^i)_0 + \ell. \tag{4034}$$

پس دنباله یِ $\mathfrak{w}^i$ از بالا کران-دار است. البته این از آنجا هم معلوم بود که، از (4024) نتیجه میشود،

$$[\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)] \subseteq [\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)]. \tag{4035}$$

پس،

$$\mathfrak{w}_j \in [\mathsf{cub}_\ell(\mathfrak{w}_0)]. \tag{4036}$$

این هم نتیجه میدهد

$${\mathfrak{w}_j}^i \leq {\mathfrak{w}_0}^i + \ell. \tag{4037}$$

که هم ان (4034) است.

از این که دنباله یِ $\mathfrak{w}^i$ صعودی و از-بالا-کران-دار است، نتیجه میشود این دنباله همگرا ست. حد ِ این دنباله را با $(\mathfrak{w}^i)_\infty$ نشان میدهم:

$$(\mathfrak{w}^i)_\infty = \lim_{j\to\infty} (\mathfrak{w}^i)_j. \tag{4038}$$

مقدار ِ $\mathfrak{w}^i$ مئلفه یِ i ِ مقدار ِ $\mathfrak{w}$ است. پس این که $\mathfrak{w}^i$ ها همگرا یَند نتیجه میدهد $\mathfrak{w}$ همگرا ست. حد ِ دنباله یِ $\mathfrak{w}$ را با $\mathfrak{w}_\infty$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{w}_\infty = \lim_{j\to\infty} \mathfrak{w}_j. \tag{4039}$$

و رُشن است که

$$(\mathfrak{w}_\infty)^i = (\mathfrak{w}^i)_\infty. \tag{4040}$$

یک همسایگی یِ $\mathfrak{w}_\infty$ هست که اشتراکِ $\mathbb{H}\mathrm{d}$ با آن دست-ِ-بالا یک عضو دارد:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ni$$

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{nei}_\varepsilon(\mathfrak{w}_\infty)]\} \leq 1. \tag{4041}$$

دیده میشود

$$\exists\, n_1 \ \ni$$

$$2^{-n_1}\, \sqrt{\mathfrak{l}}\, \ell < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4042}$$

به این ترتیب،

$$\forall\, j > n_1 :$$

$$\forall\, \mathfrak{w} \in [\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)] :$$

$$|\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_j| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4043}$$

همچنین، از این که $\mathfrak{w}_\infty$ حدِ دنباله یِ $\mathfrak{w}$ است، نتیجه میشود

$$\exists\, n_2 \ \ni$$

$$\forall\, j > n_2 :$$

$$|\mathfrak{w}_j - \mathfrak{w}_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4044}$$

پس،

$$\forall\, j > \max(n_1, n_2) :$$

$$\forall\, \mathfrak{w} \in [\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)] :$$

$$|\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_\infty| < \varepsilon. \tag{4045}$$

این یعنی

$$\forall\, j > \max(n_1, n_2) :$$
$$[\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)] \subseteq [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(\mathfrak{w}_\infty)]. \tag{4046}$$

از روابط ِ (4041) و (4046) نتیجه میشود

$$\forall\, j > \max(n_1, n_2) :$$
$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap [\mathsf{cub}_{2^{-j}\,\ell}(\mathfrak{w}_j)]]\} \leq 1. \tag{4047}$$

اما این با (4023) ناسازگار است. پس فرض ِ (4006) که به نتیجه یِ (4047) انجامید نادرست است. که یعنی اگر $\mathbb{S}$ کران-دار باشد، اشتراک ِ $\mathbb{H}\mathrm{d}$ با $\mathbb{S}$ محدود-عضوی ست:

$$\mathsf{car}(\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{S}) < \infty. \tag{4048}$$

به مسئله یِ اصلی برمیگردم: نشان-دادن ِ این که $\mathbb{H}\mathrm{c}$ یک پایه یِ $\mathbb{B}\mathrm{c}$ دارد که برا یِ هر $\mathfrak{w}$ که یک ترکیب- ِ-خطی از $\mathbb{B}\mathrm{c}$ است؛ تحدید ِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{w})$ به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی ست، اگر و تنها اگر همه یِ ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی صحیح باشند. این پایه را استقرایی میسازم. اگر

$$\mathbb{H}\mathrm{d} = \{0\}, \tag{4049}$$

آنگاه،

$$\mathbb{B}\mathrm{c} = \varnothing. \tag{4050}$$

و حکم ثابت شده است. در غیر ِ این صورت، گیرم $\mathfrak{v}_1$ تا $\mathfrak{v}_\mathfrak{k}$ چنان َند که $\{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل است؛ و هر ترکیب ِ خطی از $\{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ در $\mathbb{H}\mathrm{d}$ است، اگر و تنها اگر ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی صحیح باشند. (این برا یِ $\mathfrak{k} = 0$ بدیهی ست.) پهنه یِ $\{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ را با $\mathbb{W}_\mathfrak{k}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{W}_\mathfrak{k} = \mathsf{span}\{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}. \tag{4051}$$

یک حالت این است که

$$\mathbb{H}\mathfrak{c} = \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}. \tag{4052}$$

در این صورت،

$$\mathbb{B}\mathfrak{c} = \{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}. \tag{4053}$$

و حکم ثابت شده است. در غیر ِ این صورت، $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ دست- ِ-کم یک عضو دارد که در $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ نیست. یک عضو ِ $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ را برمیگزینم که در $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ نیست و آن را با $\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1}$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1} \in \mathbb{H}\mathfrak{d}. \tag{4054}$$

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1} \notin \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}. \tag{4055}$$

رُشن است که

$$|\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} > 0. \tag{4056}$$

پهنه ی ِ $\{(1, \mathfrak{v}_1), \ldots, (\mathfrak{k}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}), (\mathfrak{k}+1, \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1})\}$ را با $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} = \mathsf{span}\{(1, \mathfrak{v}_1), \ldots, (\mathfrak{k}, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}}), (\mathfrak{k}+1, \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1})\}. \tag{4057}$$

دیده میشود

$$\exists \varepsilon \ \ni \ \varepsilon > |\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1}| + \sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{k}} |\mathfrak{v}_{\mathfrak{i}}|. \tag{4058}$$

$\mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ یک زیرمجموعه ی ِ کران- دار از $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ است. پس،

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathfrak{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}\} < \infty. \tag{4059}$$

همچنین،

$$\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1} \in \{\mathbb{H}\mathfrak{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}\}. \tag{4060}$$

که نتیجه میدهد

$$\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}\} \neq \varnothing. \tag{4061}$$

پس،

$$\mathsf{car}\{\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}\} > 0. \tag{4062}$$

به این ترتیب مجموعه یِ $\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ تعداد ی محدود و ناصفر عضو دارد. از این نتیجه میشود فاصله از $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$، بر مجموعه یِ $\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ یک کمینه یِ مطلق دارد. عضو ِ متناظر با این کمینه (یا اگر بیش از یک عضو با این کمینه متناظر بود یک ی از این اعضا) را برمیگزینم و آن را با $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ نشان میدهم. $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ در $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ نیست:

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1} \notin \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}. \tag{4063}$$

پس،

$$|\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} > 0. \tag{4064}$$

از این، از جمله، نتیجه میشود

$$|\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}| > 0. \tag{4065}$$

رُشن است که پهنه یِ $(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}+1)$ هم ان $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}$ است:

$$\mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} = \mathsf{span}\{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}+1)\}. \tag{4066}$$

همچنین،

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1} \in \mathbb{H}\mathrm{d}. \tag{4067}$$

و البته،

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1} \in \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}. \tag{4068}$$

که یعنی عددها یِ $\mathfrak{c}^1$ تا $\mathfrak{c}^{\mathfrak{k}}$ و $\tilde{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{k}+1}$ یی هستند که

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1} = \left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}^i\, \mathfrak{v}_i\right) + \tilde{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{k}+1}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1}. \tag{4069}$$

دیده میشود

$$|\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} = |\tilde{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{k}+1}\, \mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4070}$$

پس،

$$|\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} = |\tilde{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{k}+1}|\, |\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4071}$$

از این که $\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1}$ و $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ هر-دُ در $\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ اند و $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ فاصله تا $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ را بر مجموعه یِ $\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \cap [\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)] \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ کمینه میکند نتیجه میشود

$$|\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} \leq |\mathfrak{w}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4072}$$

از (4071) و (4072) نتیجه میشود

$$|\tilde{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{k}+1}| \leq 1. \tag{4073}$$

نشان میدهم $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ فاصله از $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ را بر کل ِ $\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ کمینه میکند. برا یِ این کار، گیرم یک $\mathfrak{w}$ در $\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ هست که فاصله اَ ش از $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ کمتر از فاصله یِ $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ از $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ است:

$$\exists\, \mathfrak{w} \in (\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}) :$$
$$|\mathfrak{w}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} < |\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4074}$$

عددها یِ $\mathfrak{d}^1$ تا $\mathfrak{d}^{\mathfrak{k}}$ یی هستند که

$$\mathsf{PJ}^{\parallel}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}(\mathfrak{w}) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{d}^i\, \mathfrak{v}_i. \tag{4075}$$

پس،

$$\mathfrak{w} = \left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{d}^i\, \mathfrak{v}_i\right) + \mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}(\mathfrak{w}). \tag{4076}$$

و البته،

$$|\mathfrak{w}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} = |\mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}(\mathfrak{w})|. \tag{4077}$$

پس،

$$|\mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}(\mathfrak{w})| < |\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4078}$$

مانده-از-کف ِ $\mathfrak{x}$ را با $\mathsf{remf}(\mathfrak{x})$ نشان میدهم، و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{remf}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} - \mathsf{floor}(\mathfrak{x}). \tag{4079}$$

و $\mathsf{floor}(\mathfrak{x})$ کف ِ (یا بخش- ِ-صحیح ِ) $\mathfrak{x}$ است: بزرگترین عدد- ِ-صحیح ی که از $\mathfrak{x}$ بزرگتر نیست. مقدار ِ مانده-از-کف نامنفی و کوچکتر از یک است.

$$\mathsf{remf}(\mathfrak{x}) \geq 0. \tag{4080}$$

$$\mathsf{remf}(\mathfrak{x}) < 1. \tag{4081}$$

دیده میشود

$$\left(\left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} [\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\, \mathfrak{v}_i\right\} + \mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}(\mathfrak{w})\right) \in (\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}). \tag{4082}$$

همچنین،

$$\left|\left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} [\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\, \mathfrak{v}_i\right\} + \mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}(\mathfrak{w})\right| \leq \left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} [\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\, |\mathfrak{v}_i|\right\} + |\mathsf{PJ}^{\perp}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}(\mathfrak{w})|. \tag{4083}$$

پس،

$$\left|\left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}}[\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\,\mathfrak{v}_i\right\}+\mathsf{PJ}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}^{\perp}(\mathfrak{w})\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}}|\mathfrak{v}_i|\right)+|\mathfrak{w}|. \tag{4084}$$

که نتیجه میدهد

$$\left|\left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}}[\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\,\mathfrak{v}_i\right\}+\mathsf{PJ}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}^{\perp}(\mathfrak{w})\right|<\varepsilon. \tag{4085}$$

یعنی،

$$\left(\left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}}[\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\,\mathfrak{v}_i\right\}+\mathsf{PJ}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}^{\perp}(\mathfrak{w})\right)\in[\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)]. \tag{4086}$$

پس،

$$\left(\left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}}[\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\,\mathfrak{v}_i\right\}+\mathsf{PJ}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}^{\perp}(\mathfrak{w})\right)\in\{\mathbb{Hd}\cap\mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}\cap[\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)]\backslash\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}\}. \tag{4087}$$

دیده میشود

$$\left|\left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}}[\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\,\mathfrak{v}_i\right\}+\mathsf{PJ}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}^{\perp}(\mathfrak{w})\right|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}=|\mathsf{PJ}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}^{\perp}(\mathfrak{w})|. \tag{4088}$$

پس،

$$\left|\left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}}[\mathsf{remf}(\mathfrak{d}^i)]\,\mathfrak{v}_i\right\}+\mathsf{PJ}_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}^{\perp}(\mathfrak{w})\right|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}<|\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4089}$$

روابطِ (4087) و (4089) یعنی یک بردار در $\mathbb{Hd}\cap\mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}\cap[\mathsf{nei}_{\varepsilon}(0)]\backslash\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ هست که فاصله اَش از $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ کمتر از فاصله یِ $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ از $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ است. این نتیجه نادرست است. پس فرضِ (4074) که به این نتیجه انجامید نادرست است. این یعنی $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ فاصله از $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ را بر کلِ $\mathbb{Hd}\cap\mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}\backslash\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ کمینه میکند.

گیرم $\mathfrak{b}^1$ تا $\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1}$ چنان َند که

$$\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}+1}\mathfrak{b}^i\,\mathfrak{v}_i\right)\in\mathbb{Hd}. \tag{4090}$$

رُشن است که

$$\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}+1} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right) \in (\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}). \tag{4091}$$

که نتیجه میدهد

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right) + [\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1})]\, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}\right\} \in (\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}). \tag{4092}$$

همچنین،

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right) + [\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1})]\, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}\right|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} = |[\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1})]\, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4093}$$

که نتیجه میدهد

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right) + [\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1})]\, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}\right|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} = [\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1})]\, |\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4094}$$

پس،

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right) + [\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1})]\, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}\right|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}} < |\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}|_{\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4095}$$

از این، همراه با این که $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ فاصله از $\mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ را بر $\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}$ کمینه میکند، نتیجه میشود

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right) + [\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1})]\, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}\right\} \notin (\mathbb{H}\mathrm{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1} \backslash \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}). \tag{4096}$$

از روابط ِ (4092) و (4096) هم نتیجه میشود

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right) + [\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1})]\, \mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}\right\} \in \mathbb{W}_{\mathfrak{k}}. \tag{4097}$$

پس،

$$\mathsf{remf}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1}) = 0. \tag{4098}$$

یا،

$$\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1} = \mathsf{floor}(\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1}). \tag{4099}$$

که یعنی $\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1}$ صحیح است. از (4092) و (4098) نتیجه میشود

$$\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right) \in (\mathbb{H}\mathfrak{d} \cap \mathbb{W}_{\mathfrak{k}+1}). \tag{4100}$$

پس $\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right)$ در $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ است. این هم نتیجه میدهد $\mathfrak{b}^1$ تا $\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}}$ صحیح َند. پس معلوم شد اگر $\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}+1} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right)$ در $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ باشد، $\mathfrak{b}^1$ تا $\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1}$ صحیح َند. بر عکس هم، چون $\mathfrak{v}_1$ تا $\mathfrak{v}_{\mathfrak{k}+1}$ در $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ اند، رُشن است که اگر $\mathfrak{b}^1$ تا $\mathfrak{b}^{\mathfrak{k}+1}$ صحیح باشند، $\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{k}+1} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i\right)$ در $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ است.

پس $\{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}+1\}$ خطی-مستقل است؛ و هر ترکیب ِ خطی از $\{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}+1\}$ در $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ است، اگر و تنها اگر ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی صحیح باشند.

به این روش، $\mathfrak{v}_1$ تا $\mathfrak{v}_{\mathfrak{l}}$ ساخته میشوند. $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ را چنین میگیرم.

$$\mathbb{B}\mathfrak{c} = \{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}. \tag{4101}$$

رُشن است که $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ خطی-مستقل است و

$$\mathbb{H}\mathfrak{c} = \mathsf{span}(\mathbb{B}\mathfrak{c}). \tag{4102}$$

پس $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ یک پایه برا یِ $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ است. همچنین، هر ترکیب ِ خطی از $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ در $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ است، اگر و تنها اگر ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی صحیح باشند. در واقع $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ برابر است با مجموعه یِ همه یِ ترکیب- ِ-خطیها یِ $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ که ضریبها یِ شان صحیح است:

$$\mathbb{H}\mathfrak{d} = \left\{\sum_{i=1}^{\mathfrak{l}} \mathfrak{b}^i\, \mathfrak{v}_i \;\middle|\; (\mathfrak{b}^1, \ldots, \mathfrak{b}^{\mathfrak{l}}) \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{l}}\right\}. \tag{4103}$$

به $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ شبکه یِ $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ میگویم. به پایه یِ $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ هم مولد ِ شبکه یِ $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ میگویم.

97 استوانه

گیرم میدان- ِ-برداریها یِ $\mathfrak{u}_i$ با هم جا-به-جا میشوند:

$$\mathfrak{u}_i \diamond \mathfrak{u}_j = 0. \tag{3900}$$

پهنه یِ $\{(i, \mathfrak{u}_i) \mid i\}$ را با $\mathbb{H}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{H} = \mathsf{span}\{(\mathfrak{i}, \mathfrak{u}_\mathfrak{i}) \mid \mathfrak{i}\}. \tag{3945}$$

فضا یِ $\mathbb{H}$ یک زیرمجموعه یِ $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ دارد: مجموعه یِ میدان- ِ-برداریها یی که تحدید ِ شارش ِ آنها به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی ست:

$$\mathbb{H}\mathfrak{d} = \Big\{\mathfrak{w} \in \mathbb{H} \mid \mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{w}); [\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)}\Big\}. \tag{3979}$$

یک تابع- ِ-برداری یِ خطی-مستقل ِ $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ هست که در $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ مقدار میگیرد و شامل ِ $\mathfrak{l}$ عضو است:

$$\mathbb{B}\mathfrak{c} = \{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i \leq \mathfrak{l}\}. \tag{4101}$$

چنان که یک میدان ِ برداری عضو ِ $\mathbb{H}\mathfrak{d}$ است، اگر و تنها اگر یک ترکیب- ِ-خطی از $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ با ضریبها یِ صحیح باشد. پهنه یِ $\mathbb{B}\mathfrak{c}$ فضایِ $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ است:

$$\mathbb{H}\mathfrak{c} = \mathsf{span}(\mathbb{B}\mathfrak{c}). \tag{4102}$$

و البته رُشن است که $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ یک زیرفضا یِ $\mathbb{H}$ است، و بُعد ِ $\mathbb{H}\mathfrak{c}$ برابر با $\mathfrak{l}$ است::

$$\mathbb{H}\mathfrak{c} \sqsubseteq \mathbb{H}. \tag{3947}$$

$$\mathfrak{l} = \mathsf{dim}(\mathbb{H}\mathfrak{c}). \tag{3950}$$

$\mathbb{Bc}$ خطی- مستقل است و در $\mathbb{H}$ مقدار میگیرد. پس $\mathbb{H}$ یک پایه دارد که شامل ِ $\mathbb{Bc}$ است. $\mathbb{B}$ را یک پایه برا یِ $\mathbb{H}$ میگیرم که شامل ِ $\mathbb{Bc}$ است:

$$\mathbb{B} = \{(i, \underline{\mathfrak{v}}_i) \mid i \leq \mathfrak{n}\}. \tag{4104}$$

$$\forall i \leq \mathfrak{l}:$$

$$\underline{\mathfrak{v}}_i = \mathfrak{v}_i. \tag{4105}$$

$$\mathbb{H} = \mathsf{span}(\mathbb{B}). \tag{4106}$$

که $\mathfrak{n}$ بُعد ِ $\mathbb{H}$ است:

$$\mathfrak{n} = \mathsf{dim}(\mathbb{H}). \tag{4107}$$

و هر ترکیب- ِ-خطی یی از $(\mathbb{B}\backslash\mathbb{Bc})$؛ تحدید ِ شارش َ ش به $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانی ست، اگر و تنها اگر این که آن ترکیب- ِ-خطی صفر باشد:

$$\mathbb{Hd} \cap [\mathsf{span}(\mathbb{B}\backslash\mathbb{Bc})] = \{0\}. \tag{4108}$$

در واقع،

$$\mathbb{Hd} \cap \{\mathbb{H}\backslash[\mathsf{span}(\mathbb{Bc})]\} = \{0\}. \tag{4109}$$

$$\mathbb{Hc} \cap \{\mathbb{H}\backslash[\mathsf{span}(\mathbb{Bc})]\} = \{0\}. \tag{4110}$$

با استفاده از $\mathfrak{v}_i$ ها، برا یِ $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ مختصات میسازم. برا یِ y در $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$، یک $\underline{\mathfrak{t}}$ هست که

$$y = [\mathsf{fl}(\underline{\mathfrak{t}}\,\underline{\mathfrak{v}})](x). \tag{4111}$$

با معلوم-بودن ِ y (و البته x)، عددها یِ $\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{l}+1}$ تا $\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{n}}$ یکتا یَند. اما $\underline{\mathfrak{t}}^{1}$ تا $\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{l}}$ چنین نیستند: میشود به هر یک از عددها یِ $\underline{\mathfrak{t}}^{1}$ تا $\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{l}}$ یک عدد ِ صحیح (و فقط یک عدد ِ صحیح) افزود، بی آن که $[\mathsf{fl}(\underline{\mathfrak{t}}\,\underline{\mathfrak{v}})](x)$ تغییر کند. در واقع میشود به هر یک از عددها یِ $\underline{\mathfrak{t}}^{1}$ تا $\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{l}}$ یک عدد ِ صحیح (و فقط یک عدد ِ صحیح) افزود، بی آن که $\mathsf{fl}(\underline{\mathfrak{t}}\,\underline{\mathfrak{v}})$ تغییر کند:

$$\mathfrak{b} \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{l}}. \quad \Leftrightarrow$$
$$\mathsf{fl}\left[\sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{l}}(\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{i}}+\mathfrak{b}^{\mathfrak{i}})\,\underline{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{i}}+\sum_{\mathfrak{i}=\mathfrak{l}+1}^{\mathfrak{n}}\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{i}}\,\underline{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{i}}\right]=\mathsf{fl}\left(\sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{n}}\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{i}}\,\underline{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{i}}\right). \tag{4112}$$

یعنی

$$\mathfrak{b} \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{l}}. \quad \Leftrightarrow$$
$$\mathsf{fl}\left[\sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{l}}(\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{i}}+\mathfrak{b}^{\mathfrak{i}})\,\underline{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{i}}+\sum_{\mathfrak{i}=\mathfrak{l}+1}^{\mathfrak{n}}\underline{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{i}}\,\underline{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{i}}\right]=\mathsf{fl}(\underline{\mathfrak{t}}\,\underline{\mathfrak{v}}). \tag{4113}$$

y^i ها (مختصات ِ y) را هم ان $\underline{\mathfrak{t}}^i$ ها تعریف میکنم.

$$y^i = \underline{\mathfrak{t}}^i. \tag{4114}$$

رُشن است که

$$y = [\mathsf{fl}(y^i\,\underline{\mathfrak{v}}_i)](x). \tag{4115}$$

به این ترتیب $y^{\mathfrak{l}+1}$ تا $y^{\mathfrak{n}}$ یکتا یَند. y^1 تا $y^{\mathfrak{l}}$ یکتا نیستند، اما $\mathsf{remf}(y^1)$ تا $\mathsf{remf}(y^{\mathfrak{l}})$ یکتا یند. برا یِ خُد ِ x هم، x^1 تا $x^{\mathfrak{l}}$ صحیح َند، و $x^{\mathfrak{l}+1}$ تا $x^{\mathfrak{n}}$ صفر َند:

$$x^i \in \mathbb{Z}, \quad i \le \mathfrak{l}. \tag{4116}$$

$$x^i = 0, \quad i > \mathfrak{l}. \tag{4117}$$

از جمله میشود همه یِ x^i ها را صفر گرفت.

رُشن است که میشود به این مختصات اعداد ِ ثابت افزود. این متناظر با جا-به-جا-کردن ِ مبدئ ِ مختصات است:

$$\phi^i(y) = \phi^i_0 + y^i. \tag{4118}$$

در نتیجه،

$$y = \Big(\mathsf{fl}\{[\phi^i(y) - \phi^i_0]\,\underline{\mathfrak{v}}_i\}\Big)(x). \tag{4119}$$

و البته،

$$\mathbf{L}_{\underline{\mathfrak{v}}_j}\,\phi^i = \delta^i_j. \tag{4120}$$

و معلوم است که

$$\phi^i(x) = \phi^i_0. \tag{4121}$$

پس،

$$y = \Big(\mathsf{fl}\{[\phi^i(y) - \phi^i(x)]\,\underline{\mathfrak{v}}_i\}\Big)(x). \tag{4122}$$

به ϕ^i ها مختصات ِ زاویِئی میگویم. در واقع فقط ϕ^1 تا $\phi^{\mathfrak{l}}$ اند که شبیه ِ زاویه اند، یعنی دِرِئی یَند: با افزایش ِ مقدار ی معین (یک) به آنها نقطه عوض نمیشود.

به این ترتیب هر نقطه از $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ با $\mathfrak{n}$ مختصه مشخص میشود، که از اینها $\mathfrak{l}$ تا دُرِئی ست (با افزایش ِ مقدار ی معین به آن نقطه عوض نمیشود) و $(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})$ تا ی ِبقیه نادُرِئی یَند (با عوض-کردن ِ شان به هر مقدار، نقطه عوض میشود). این یعنی $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ همانریخت است با حاصل- ِ-ضرب- ِ-دِکَرتی ی ِ $\mathfrak{l}$ دایره در $(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})$ خط:

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) \stackrel{\mathrm{h}}{=} \overbrace{\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}}^{\mathfrak{l}}\times\overbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}}. \tag{4123}$$

$\mathbb{K}$ دایره و $\mathbb{R}$ خط است، و $\mathfrak{Y} \stackrel{\mathrm{h}}{=} \mathfrak{X}$ یعنی $\mathfrak{Y}$ با $\mathfrak{X}$ همانریخت است. رابطه ی ِ (4123) را چنین هم مینویسند.

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) \stackrel{\mathrm{h}}{=} \mathbb{K}^{\mathfrak{l}}\times\mathbb{R}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}}. \tag{4124}$$

سادِتر، میگویم $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ حاصل- ِ-ضرب- ِ-دِکَرتی ی ِ $\mathfrak{l}$ دایره در $(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})$ خط است:

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) = \overbrace{\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}}^{\mathfrak{l}}\times\overbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}}. \tag{4125}$$

یا،

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) = \mathbb{K}^{\mathfrak{l}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}}. \tag{4126}$$

$\mathbb{K}^{\mathfrak{l}}$ چنبره یِ $\mathfrak{l}$ بُعدی ست. $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{l}}$ هم فضا یِ خطی یِ $(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})$ بُعدی ست. و $[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x)$ یک استوانه است، با $\mathfrak{l}$ بُعد ِ فشرده و $(\mathfrak{n}-\mathfrak{l})$ بُعد ِ نافشرده.

یک حالت ِ خاص این است که $\mathfrak{l}$ صفر است:

$$\mathfrak{l} = 0. \tag{4127}$$

در این حالت استوانه فضا یِ خطی میشود:

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) \stackrel{\mathrm{h}}{=} \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}. \tag{4128}$$

سادِتر،

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) = \mathbb{R}^{\mathfrak{n}}. \tag{4129}$$

یک حالت ِ خاص هم این است که $\mathfrak{l}$ هم ان $\mathfrak{n}$ است:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{n}. \tag{4130}$$

در این حالت استوانه چنبره میشود:

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) \stackrel{\mathrm{h}}{=} \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}. \tag{4131}$$

سادِتر،

$$[\mathbb{O}(\mathfrak{u})](x) = \mathbb{K}^{\mathfrak{n}}. \tag{4132}$$

استوانه چنبره میشود، اگر و تنها اگر در همه یِ بُعدها یَ ش فشرده باشد. یعنی استوانه چنبره میشود، اگر و تنها اگر فشرده باشد.

98 استوانه-یِ فاز

یک فضا-یِ-فاز ِ $(2\,\mathfrak{m})$ بُعدی را بررسی میکنم. گیرم $\mathfrak{m}$ تابعی از فضا-یِ-فاز هستند که پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، یعنی تابعیها یِ I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ از فضا-یِ-فاز هستند که مستقل-از-هم َند و

$$\{I_i, I_j\} = 0. \tag{3222}$$

پهنه یِ $\{(i, J_{I_i}) \mid i\}$ را با $\mathbb{H}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{H} = \mathsf{span}\{(i, J_{I_i}) \mid i\}. \tag{4133}$$

از این که I_i ها مستقل-از-هم َند، نتیجه میشود $\{(i, J_{I_i}) \mid i\}$ خطی-مستقل است. به این ترتیب،

$$\mathsf{dim}(\mathbb{H}) = \mathfrak{m}. \tag{4134}$$

دیده میشود متناظر با هر x در فضا-یِ-فاز، $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ یک مجموعه یِ $\mathfrak{m}$ بُعدی از فضا-یِ-فاز است. در واقع $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ یک استوانه یِ $\mathfrak{m}$ بُعدی ست. به هر یک از $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ ها یک استوانه یِ فاز میگویم.

از رابطه یِ (3222) نتیجه میشود

$$J_{I_i} \diamond J_{I_j} = 0. \tag{4135}$$

از رابطه یِ (3222)، یا (4135)، هم نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_{J_{I_i}} I_j = 0. \tag{4136}$$

یا،

$$\mathbf{L}_{J_{I_i}} I = 0. \tag{4137}$$

این نتیجه میدهد، برا یِ هر عدد ِ $\mathfrak{t}$،

$$[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}\, J_{I_i})]_* I = I. \tag{4138}$$

که یعنی،

$$I \circ \{[\mathsf{fl}(\mathsf{t}\, J_{I_i})]^{-1}\} = I. \tag{4139}$$

یا،

$$I \circ [\mathsf{fl}(\mathsf{t}\, J_{I_i})] = I. \tag{4140}$$

پس I بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ ثابت میمانَد:

$$\mathsf{res}\{I; [\mathbb{O}(J_I)](x)\} = \text{constant}. \tag{4141}$$

از جمله،

$$\mathbf{D}\left(\mathsf{res}\{I; [\mathbb{O}(J_I)](x)\}\right) = 0. \tag{4142}$$

به این ترتیب، مدار ِ هر نقطه با J_I یک استوانه است، که بر آن I ثابت است، و البته یک عدد ِ (صحیح ِ نامنفی یِ) $\mathfrak{l}$ هست که (از $\mathfrak{m}$ بزرگتر نیست و)

$$[\mathbb{O}(J_I)](x) = \mathbb{K}^{\mathfrak{l}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{m}-\mathfrak{l}}. \tag{4143}$$

یعنی $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ حاصل- ِ-ضرب- ِ-دِکَرتی یِ یک چنبره یِ $\mathfrak{l}$ بُعدی در یک فضا-یِ-خطی یِ $(\mathfrak{m}-\mathfrak{l})$ بُعدی ست.

از این که مقدار ِ I بر مجموعه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ برابر با $I(x)$ است، نتیجه میشود

$$\{[\mathbb{O}(J_I)](x)\} \subseteq \{I^{-1}[I(x)]\}. \tag{4144}$$

طبق ِ تعریف،

$$I^{-1}[I(x)] = \{y \mid I(y) = I(x)\}. \tag{4145}$$

رابطه یِ $I(y) = I(x)$ یک دستگاه ِ $\mathfrak{m}$ معادله برا یِ y است. و چون I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ مستقل-از-هم َند، معادلات ِ این دستگاه مستقل-از-هم َند. به این ترتیب، بُعد ِ $I^{-1}[I(x)]$ برابر با بُعد ِ فضا-یِ-فاز منها یِ $\mathfrak{m}$ است:

$$\mathsf{dim}\{I^{-1}[I(x)]\} = 2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{m}. \tag{4146}$$

پس،

$$\mathsf{dim}\{I^{-1}[I(x)]\} = \mathfrak{m}. \tag{4147}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{dim}\{I^{-1}[I(x)]\} = \mathsf{dim}\{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4148}$$

از (4144) و (4148) نتیجه میشود $I^{-1}[I(x)]$ مُضعَن هم ان $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است. از جمله بردارها یِ مماس بر $I^{-1}[I(x)]$ و بردارها یِ مماس بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$، مُضعَن یکسان َند. J_{I_i} بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ مماس است. پس J_{I_i} بر $I^{-1}[I(x)]$ مماس است. که نتیجه میدهد

$$\mathbf{D}_{J_{I_i}}\, I = 0. \tag{4149}$$

که هم ان (4137) است. مفصلتر،

$$\mathbf{D}_{J_{I_i}}\, I_j = 0. \tag{4150}$$

که هم ان (4136) است.

مجموعه یِ $\{(i, J_{I_i}) \mid i\}$ خطی-مستقل است و $\mathfrak{m}$ عضو دارد:

$$\mathsf{car}\{(i, J_{I_i}) \mid i\} = \mathfrak{m}. \tag{4151}$$

هر یک از J_{I_i} ها هم بر $I^{-1}[I(x)]$ مماس َند. پس چون بُعد ِ فضا یِ مماس بر $I^{-1}[I(x)]$ در هر نقطه $\mathfrak{m}$ است، $\{(i, J_{I_i}) \mid i\}$ یک پایه برا یِ فضا یِ مماس بر $I^{-1}[I(x)]$ است. پس،

$$\mathrm{T}\,\{I^{-1}[I(x)]\} = \mathsf{span}\{(i, J_{I_i}) \mid i\}. \tag{4152}$$

به هم ین ترتیب، $\{(i, J_{I_i}) \mid i\}$ یک پایه برا یِ فضا یِ مماس بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است. پس،

$$\mathrm{T}\,\{[\mathbb{O}(J_I)](x)\} = \mathsf{span}\{(i, J_{I_i}) \mid i\}. \tag{4153}$$

سادِتر؛ میگویم J_I یک پایه برا یِ فضا یِ مماس بر $I^{-1}[I(x)]$، و البته یک پایه برا یِ فضا یِ مماس بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$، است. پس،

$$\mathrm{T}\,\{I^{-1}[I(x)]\} = \mathsf{span}(J_I). \tag{4154}$$

$$\mathrm{T}\,\{[\mathbb{O}(J_I)](x)\} = \mathsf{span}(J_I). \tag{4155}$$

گیرم $\mathfrak{u}_i$ ها در فضا یِ مماس بر $I^{-1}[I(x)]$ اند. J_I یک پایه برا یِ این فضا ست. پس عددها یِ $\mathfrak{c}_i{}^j$ ی هستند که

$$\mathfrak{u}_\mathfrak{i} = \mathfrak{c}_\mathfrak{i}^j\, J_{I_j}. \tag{4156}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{u}_\mathfrak{i}, \mathfrak{u}_\mathfrak{j}) &= \mathfrak{c}_\mathfrak{i}^k\, \mathfrak{c}_\mathfrak{j}^l\, J(J_{I_i}, J_{I_j}), \\ &= \mathfrak{c}_\mathfrak{i}^k\, \mathfrak{c}_\mathfrak{j}^l\, \{I_i, I_j\}. \end{aligned} \tag{4157}$$

که، چون I_i ها پُوَسُنی یَند، نتیجه میدهد

$$J(\mathfrak{u}_\mathfrak{i}, \mathfrak{u}_\mathfrak{j}) = 0. \tag{4158}$$

یعنی اثر ِ دُ- فرم ِ همتافته بر هر دُ- بردار ِ فضا یِ مماس بر $I^{-1}[I(x)]$، یا فضا یِ مماس بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$، صفر است.

بر اساس ِ آن چه در بخش ِ پیش به دست آمد، فضا یِ مماس بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ یک پایه یِ $\{(i, \mathfrak{v}_i) \mid i\}$ دارد، با این ویژگی که

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{t}^i\, \mathfrak{v}_i); [\mathbb{O}(J_I)](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(J_I)](x)}. \tag{4159}$$

اگر و تنها اگر

$$\mathsf{remf}(\mathfrak{t}^i) = 0, \qquad i \leq \mathfrak{l}. \tag{4160}$$

$$\mathfrak{t}^i = 0, \qquad i > \mathfrak{l}. \tag{4161}$$

با استفاده از $\mathfrak{v}_i$ ها، برا یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ مختصات میسازم. گیرم y در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است. پس یک $(\mathfrak{t}^1, \ldots, \mathfrak{t}^\mathfrak{m})$ هست که

$$2y = [\mathsf{fl}(\mathfrak{t}^i\, \mathfrak{v}_i)](x). \tag{4162}$$

با معلوم-بودن ِ y (و البته x)، عددها یِ $\mathfrak{t}^{\mathfrak{l}+1}$ تا $\mathfrak{t}^\mathfrak{m}$ یکتا یَند. اما $\mathfrak{t}^1$ تا $\mathfrak{t}^\mathfrak{l}$ چنین نیستند: میشود به هر یک از عددها یِ $\mathfrak{t}^1$ تا $\mathfrak{t}^\mathfrak{l}$ یک عدد ِ صحیح (و فقط یک عدد ِ صحیح) افزود، بی آن که $[\mathsf{fl}(\mathfrak{t}^i\, \mathfrak{v}_i)](x)$ تغییر کند. در واقع میشود به هر یک از عددها یِ $\mathfrak{t}^1$ تا $\mathfrak{t}^\mathfrak{l}$ یک عدد ِ صحیح (و فقط یک عدد ِ صحیح) افزود، بی آن که $\mathsf{fl}(\mathfrak{t}^i\, \mathfrak{v}_i$ تغییر کند:

$$\mathsf{fl}\left[\sum_{i=1}^{\mathfrak{l}} (\mathfrak{t}^i + \mathfrak{b}^i)\, \mathfrak{v}_i + \sum_{i=\mathfrak{l}+1}^{\mathfrak{m}} \mathfrak{t}^i\, \mathfrak{v}_i\right] = \mathsf{fl}\left(\sum_{i=1}^{\mathfrak{m}} \mathfrak{t}^i\, \mathfrak{v}_i\right). \tag{4163}$$

که $\mathfrak{b}^i$ ها صحیح َند. y^i ها (مختصات ِ y) را هم ان $\mathfrak{t}^i$ ها تعریف میکنم.

$$y^i = \mathfrak{t}^i. \tag{4164}$$

رُشن است که

$$y = [\mathsf{fl}(y^i\, \mathfrak{v}_i)](x). \tag{4165}$$

به این ترتیب $y^{\mathfrak{l}+1}$ تا $y^\mathfrak{m}$ یکتا یَند. y^1 تا $y^\mathfrak{l}$ یکتا نیستند، اما $\mathsf{remf}(y^1)$ تا $\mathsf{remf}(y^\mathfrak{l})$ یکتا یند. برا یِ خُد ِ x هم، x^1 تا $x^\mathfrak{l}$ صحیح َند، و $x^{\mathfrak{l}+1}$ تا $x^\mathfrak{m}$ صفر َند:

$$x^i \in \mathbb{Z}, \quad i \leq \mathfrak{l}. \tag{4116}$$

$$x^i = 0, \quad i > \mathfrak{l}. \tag{4117}$$

از جمله میشود همه یِ x^i ها را صفر گرفت.

رُشن است که میشود به این مختصات اعداد ِ ثابت افزود. این متناظر با جا-به-جا-کردن ِ مبدئ ِ مختصات است:

$$\phi^i(y) = \phi_0^i + y^i. \tag{4118}$$

در نتیجه،

$$y = \Big(\mathsf{fl}\{[\phi^i(y) - \phi_0^i]\,\mathfrak{v}_i\}\Big)(x). \tag{4166}$$

و البته،

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{v}_j}\,\phi^i = \delta_j^i. \tag{4167}$$

و معلوم است که

$$\phi^i(x) = \phi_0^i. \tag{4121}$$

پس،

$$y = \Big(\mathsf{fl}\{[\phi^i(y) - \phi^i(x)]\,\mathfrak{v}_i\}\Big)(x). \tag{4168}$$

به ϕ^i ها مختصات ِ زاویِئی میگویم. در واقع فقط ϕ^1 تا ϕ^{l} اند که شبیه ِ زاویه اند، یعنی درِئی یَند: با افزایش ِ مقدار ی معین (یک) به آنها نقطه عوض نمیشود.

I_1 تا I_{m} پُؤَسُنی و مستقل-از-هم َند. پس یک جایگشت- ِ-کانُنیک ِ (q,p) از مختصات-ِکانُنیک ِ (q,p) هست که q^1 تا q^{m} و I_1 تا I_{m} مستقل-از-هم َند. از این که I_1 تا I_{m} پُؤَسُنی و مستقل-از-هم َند، ضمنَن نتیجه میشود یک دسته مختصات ِ کانُنیک هست که I_1 تا I_{m} تکانِها یِ متناظر با آن َند. گیرم I'_1 تا I'_{m} تابعیها یِ مستقل-از-هم، از I_1 تا I_{m} اند. رُشن است که I'_1 تا I'_{m} هم پُؤَسُنی یَند:

$$\{I'_i, I'_j\} = 0. \tag{4169}$$

از این که I'_1 تا I'_{m} تابعِ فقط I_1 تا I_{m} اند نتیجه میشود $\mathfrak{a}_i{}^j$ ها یی هستند که

$$\mathbf{d}\, I'_j = \mathfrak{a}^i{}_j\, \mathbf{d}\, I_j. \tag{4170}$$

این که I'_1 تا I'_{m} مستقل-از-هم َند، نتیجه میدهد $\mathfrak{a}$ وارون-پذیر است. نشان میدهم q^1 تا q^{m} و I'_1 تا I'_{m} مستقل-از-هم َند. برا یِ این کار، گیرم یک دسته ضریب ($\mathfrak{c}'^i$ ها و $\mathfrak{d}_i$ ها) هستند که

$$\mathfrak{c}'^i\, \mathbf{d}\, I'_i + \mathfrak{d}_i\, \mathbf{d}\, \mathrm{q}^i = 0. \tag{4171}$$

پس،

$$\mathfrak{c}^i\, \mathbf{d}\, I_i + \mathfrak{d}_i\, \mathbf{d}\, \mathrm{q}^i = 0. \tag{4172}$$

که

$$\mathfrak{c}^i = \mathfrak{a}^i{}_j\, \mathfrak{c}'^j. \tag{4173}$$

چون q^1 تا q^{m} و I_1 تا I_{m} مستقل-از-هم َند، ضریبها یِ دیفرانسیلها در (4172) صفر َند:

$$\mathfrak{c}^i = 0. \tag{4174}$$

$$\mathfrak{d}_i = 0. \tag{4175}$$

از (4173) و (4174)، همراه با این که $\mathfrak{a}$ وارون-پذیر است، نتیجه میشود $\mathfrak{c}'^i$ ها هم صفر َند:

$$\mathfrak{c}'^i = 0. \tag{4176}$$

پس (4171) نتیجه میدهد $\mathfrak{c}'^i$ ها و $\mathfrak{d}_i$ ها صفر َند. این هم یعنی q^1 تا q^{m} و I'_1 تا I'_{m} مستقل-از-هم َند. البته از این که I'_1 تا I'_{m} پُؤَسُنی و مستقل-از-هم َند، ضمنَن نتیجه میشود یک دسته مختصاتِ کانُنیک هست که I'_1 تا I'_{m} تکانِها یِ متناظر با آن َند.

پس اگر هدف ساختنِ $\mathfrak{m}$ تابعی باشد که q^1 تا q^{m} و آنها مستقل-از-هم َند و آن $\mathfrak{m}$ تابعی بتوانند تکانِها یِ متناظر با یک دسته مختصاتِ کانُنیک باشند، میشود هر دسته یِ $\mathfrak{m}$ تایی از تابعیها یِ مستقل-از-هم از I_1 تا I_{m} را به جا یِ خُدِ I_1 تا I_{m} به کار برد.

یک دسته از تابعیها یی که تابع ِ فقط I_1 تا I_{m} اند را چنین میسازم. کنش ِ متناظر با خم ِ γ را با $\mathsf{A}(\gamma)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{A}(\gamma) = \int_{\mathsf{dom}(\gamma)} (\mathrm{d}\,t)\,\mathbf{\Xi}[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]. \tag{4177}$$

که،

$$\mathbf{\Xi} = \mathrm{p}_i\,\mathbf{d}\,\mathrm{q}^i. \tag{4178}$$

و البته $\mathsf{dom}(\gamma)$ یک بازه یِ سمت-دار در نظر گرفته شده. رابطه یِ (4177) چنین میشود.

$$\mathsf{A}(\gamma) = \int_{\gamma[\mathsf{dom}(\gamma)]} \mathbf{\Xi}. \tag{4179}$$

یا،

$$\mathsf{A}(\gamma) = \int_{\mathsf{img}(\gamma)} \mathbf{\Xi}. \tag{4180}$$

و این را، سادِتر، چنین مینویسم.

$$\mathsf{A}(\gamma) = \int_{\gamma} \mathbf{\Xi}. \tag{4181}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,\mathbf{\Xi} = (\mathbf{d}\,\mathrm{p}_i) \wedge (\mathbf{d}\,\mathrm{q}^i). \tag{4182}$$

اما (q,p) کانُنیک است. پس،

$$(\mathbf{d}\,\mathrm{p}_i) \wedge (\mathbf{d}\,\mathrm{q}^i) = (\mathbf{d}\,p_i) \wedge (\mathbf{d}\,q^i). \tag{4183}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{d}\,\mathbf{\Xi} = (\mathbf{d}\,p_i) \wedge (\mathbf{d}\,q^i). \tag{4184}$$

که یعنی،

$$\mathbf{d}\,\Xi = -J. \tag{4185}$$

گیرم γ_1 و γ_2 چنان َند که یک سطح ِ (سمت-دار ِ) $\mathbb{S}$ هست که مرز ِ آن تفاضل ِ γ_1 از γ_2 است:

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \mathbf{b}(\mathbb{S}). \tag{4186}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(\gamma_2) - \mathsf{A}(\gamma_1) &= \int_{\gamma_2} \Xi - \int_{\gamma_1} \Xi, \\ &= \int_{\mathbf{b}(\mathbb{S})} \Xi, \\ &= \int_{\mathbb{S}} \mathbf{d}\,\Xi. \end{aligned} \tag{4187}$$

یا،

$$\mathsf{A}(\gamma_2) - \mathsf{A}(\gamma_1) = -\int_{\mathbb{S}} J. \tag{4188}$$

از جمله، گیرم

$$\int_{\mathbb{S}} J = 0. \tag{4189}$$

در این صورت،

$$\mathsf{A}(\gamma_2) = \mathsf{A}(\gamma_1). \tag{4190}$$

با یک نقطه یِ y که در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است، و یک عدد ِ صحیح ِ مثبت ِ i (که از I بزرگتر نیست)، یک خم ِ $\gamma_{i,y}$ میسازم:

$$y \in \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4191}$$

$$\mathsf{dom}(\gamma_{i,y}) = [0,1]. \tag{4192}$$

$$\gamma_{i,y}(t) = [\mathsf{fl}(t\,\mathfrak{v}_i)](y). \tag{4193}$$

دیده میشود

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{v}_i);[\mathbb{O}(J_I)](x)\}=\mathbf{1}_{[\mathbb{O}(J_I)](x)}. \tag{4194}$$

$\gamma_{i,y}$ یک خم ِ بسته است:

$$\gamma_{i,y}(0)=y. \tag{4195}$$

$$\gamma_{i,y}(1)=y. \tag{4196}$$

و (جز در ابتدا و انتها) خُد َش را قطع نمیکند. کنش ِ متناظر با $\gamma_{i,y}$ را با $\mathsf{A}_{i,y}$ نشان میدهم:

$$\mathsf{A}_{i,y}=\mathsf{A}(\gamma_{i,y}). \tag{4197}$$

که یعنی

$$\mathsf{A}_{i,y}=\oint_{\gamma_{i,y}}\Xi. \tag{4198}$$

نماد ِ انتگرال-گیری بر حلقه به کار رفته، چون $\gamma_{i,y}$ یک حلقه (خم ِ بسته) است. نشان میدهم این انتگرال به y بستگی ندارد. یعنی گیرم y' یک نقطه در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است.

$$y'\in\{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4199}$$

در این صورت،

$$\mathsf{A}_{i,y'}=\mathsf{A}_{i,y}. \tag{4200}$$

برا یِ اثبات، از اینجا شروع میکنم که از (4191) و (4199) نتیجه میشود یک $\mathfrak{w}$ هست که

$$\mathfrak{w}\in[\mathsf{span}(J_I)]. \tag{4201}$$

$$y'=[\mathsf{fl}(\mathfrak{w})](y). \tag{4202}$$

تابع ِ $\mathfrak{x}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{dom}(\mathfrak{x}) = [0,1] \times [0,1]. \tag{4203}$$

$$\mathfrak{x}(s,t) = [\mathsf{fl}(t\,\mathfrak{v}_i)]\{[\mathsf{fl}(s\,\mathfrak{w})](y)\}. \tag{4204}$$

البته $\mathfrak{w}$ و $\mathfrak{v}_i$ با هم جا-به-جا میشوند:

$$\mathfrak{w} \diamond \mathfrak{v}_i = 0. \tag{4205}$$

که نتیجه میدهد

$$[\mathsf{fl}(t\,\mathfrak{v}_i)] \circ [\mathsf{fl}(s\,\mathfrak{w})] = \mathsf{fl}(s\,\mathfrak{w} + t\,\mathfrak{v}_i). \tag{4206}$$

پس (4204) را میشود چنین نوشت.

$$\mathfrak{x}(s,t) = [\mathsf{fl}(s\,\mathfrak{w} + t\,\mathfrak{v}_i)](y). \tag{4207}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{x}(0,\cdot) = \gamma_{i,y}. \tag{4208}$$

$$\mathfrak{x}(1,\cdot) = \gamma_{i,y'}. \tag{4209}$$

کلیتر،

$$\mathfrak{x}(s,\cdot) = \gamma_{i,[\mathsf{fl}(s\,\mathfrak{w})](y)}. \tag{4210}$$

همچنین،

$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathfrak{v}_i); [\mathbb{O}(J_I)](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(J_I)](x)}. \tag{4211}$$

پس،

$$\mathfrak{x}(\cdot,1) = \mathfrak{x}(\cdot,0). \tag{4212}$$

ناحیه یِ سمت-دار ِ $\mathbb{S}$ را تصویر ِ $\mathfrak{x}$ تعریف میکنم:

$$\mathbb{S} = \mathsf{img}(\mathfrak{x}). \tag{4213}$$

دیده میشود

$$(s\,\mathfrak{w}) \in [\mathsf{span}(J_I)]. \tag{4214}$$

$$(t\,\mathfrak{v}_i) \in [\mathsf{span}(J_I)]. \tag{4215}$$

از اینها، همراه با این که y در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است، و تعریف ِ $\mathfrak{x}$، نتیجه میشود

$$\mathbb{S} \subseteq \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4216}$$

همچنین، دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(\mathbb{S}) &= \mathsf{img}[\mathfrak{x}(1,\cdot)] - \mathsf{img}[\mathfrak{x}(0,\cdot)] \\ &\quad - \{\mathsf{img}[\mathfrak{x}(\cdot,1)] - \mathsf{img}[\mathfrak{x}(\cdot,0)]\}.\end{aligned} \tag{4217}$$

از (4212) نتیجه میشود

$$\mathsf{img}[\mathfrak{x}(\cdot,1)] = \mathsf{img}[\mathfrak{x}(\cdot,0)]. \tag{4218}$$

پس،

$$\mathbf{b}(\mathbb{S}) = \mathsf{img}[\mathfrak{x}(1,\cdot)] - \mathsf{img}[\mathfrak{x}(0,\cdot)]. \tag{4219}$$

که یعنی،

$$\mathbf{b}(\mathbb{S}) = \mathsf{img}(\gamma_{i,y'}) - \mathsf{img}(\gamma_{i,y}). \tag{4220}$$

سادتِر،

$$\mathbf{b}(\mathbb{S}) = \gamma_{i,y'} - \gamma_{i,y}. \tag{4221}$$

که یعنی

$$\int_{\mathbf{b}(\mathbb{S})} = \int_{\gamma_{i,y'}} - \int_{\gamma_{i,y}} . \tag{4222}$$

از جمله،

$$\int_{\mathbf{b}(\mathbb{S})} \mathbf{\Xi} = \int_{\gamma_{i,y'}} \mathbf{\Xi} - \int_{\gamma_{i,y}} \mathbf{\Xi}. \tag{4223}$$

یا،

$$\int_{\mathbf{b}(\mathbb{S})} \mathbf{\Xi} = \mathsf{A}_{i,y'} - \mathsf{A}_{i,y}. \tag{4224}$$

از این که $\mathbb{S}$ زیرمجموعه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است، نتیجه میشود اثر ِ دُ-فرم ِ همتافته بر هر دُ-بردار ِ فضا یِ مماس بر $\mathbb{S}$ صفر است. پس انتگرال ِ دُ-فرم ِ همتافته بر $\mathbb{S}$ صفر است. در نتیجه،

$$\int_{\mathbf{b}(\mathbb{S})} \mathbf{\Xi} = 0. \tag{4225}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{A}_{i,y'} - \mathsf{A}_{i,y} = 0. \tag{4226}$$

و این هم ان (4200) است.

به بیان ی دیگر، $\mathfrak{q}(s,t)$ و $\mathfrak{p}(s,t)$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{q}^j(s,t) = \mathrm{q}^j[\mathfrak{r}(s,t)]. \tag{4227}$$

$$\mathfrak{p}_j(s,t) = \mathrm{p}_j[\mathfrak{r}(s,t)]. \tag{4228}$$

$\mathfrak{A}_i(s)$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{A}_i(s) = \int_0^1 (\mathrm{d}\,t)\,(\mathfrak{p}_j\,\mathbf{D}_2\,\mathfrak{q}^j)(s,t). \tag{4229}$$

دیده میشود

$$\mathsf{A}_{i,y} = \mathfrak{A}_i(0). \tag{4230}$$

$$\mathsf{A}_{i,y'} = \mathfrak{A}_i(1). \tag{4231}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{A}_{i,y'} - \mathsf{A}_{i,y} = \int_0^1 (\mathrm{d}\, s)\, (\mathbf{D}\, \mathfrak{A}_i)(s). \tag{4232}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{A}_{i,y'} - \mathsf{A}_{i,y} = \int_0^1 (\mathrm{d}\, s) \int_0^1 (\mathrm{d}\, t)\, [(\mathbf{D}_1\, \mathfrak{p}_j)\, \mathbf{D}_2\, \mathfrak{q}^j + \mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_1\, \mathbf{D}_2\, \mathfrak{q}^j](s,t). \tag{4233}$$

همچنین،

$$\int_0^1 (\mathrm{d}\, t)\, (\mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_1\, \mathbf{D}_2\, \mathfrak{q}^j)(s,t) = \int_0^1 (\mathrm{d}\, t)\, (\mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_2\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j)(s,t). \tag{4234}$$

و با انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ،

$$\int_0^1 (\mathrm{d}\, t)\, (\mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_2\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j)(s,t) = (\mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j)(s,1) - (\mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j)(s,0) - \int_0^1 (\mathrm{d}\, t)\, [(\mathbf{D}_2\, \mathfrak{p}_j)\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j](s,t). \tag{4235}$$

تحدید ِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{v}_i)$ به $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ همانی ستاز این و تعریف ِ $\mathfrak{x}$، (و البته تعریف ِ $\mathfrak{q}$ و $\mathfrak{p}$) نتیجه میشود

$$(\mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j)(s,1) - (\mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j)(s,0) = 0. \tag{4236}$$

پس،

$$\int_0^1 (\mathrm{d}\, t)\, (\mathfrak{p}_j\, \mathbf{D}_2\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j)(s,t) = -\int_0^1 (\mathrm{d}\, t)\, [(\mathbf{D}_2\, \mathfrak{p}_j)\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j](s,t). \tag{4237}$$

به این ترتیب، (4233) چنین میشود.

$$\mathsf{A}_{i,y'} - \mathsf{A}_{i,y} = \int_0^1 (\mathrm{d}\, s) \int_0^1 (\mathrm{d}\, t)\, [(\mathbf{D}_1\, \mathfrak{p}_j)\, \mathbf{D}_2\, \mathfrak{q}^j - (\mathbf{D}_2\, \mathfrak{p}_j)\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j](s,t). \tag{4238}$$

یا،

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_{i,y'} - \mathsf{A}_{i,y} &= \int_{[0,1]\times[0,1]} (\mathbf{d}\, s) \wedge (\mathbf{d}\, t) \\
&\quad [(\mathbf{D}_1\, \mathfrak{p}_j)\, \mathbf{D}_2\, \mathfrak{q}^j - (\mathbf{D}_2\, \mathfrak{p}_j)\, \mathbf{D}_1\, \mathfrak{q}^j](s,t), \\
&= \int_{[0,1]\times[0,1]} [(\mathbf{d}\, \mathfrak{p}_j) \wedge (\mathbf{d}\, \mathfrak{q}^j)](s,t), \\
&= - \int_{[0,1]\times[0,1]} J(\mathfrak{x}), \\
&= - \int_{[0,1]\times[0,1]} \mathfrak{x}^*\, J, \\
&= - \int_{\mathfrak{x}([0,1]\times[0,1])} J. \qquad (4239)
\end{aligned}$$

یا،

$$\mathsf{A}_{i,y'} - \mathsf{A}_{i,y} = - \int_{\mathbb{S}} J. \qquad (4240)$$

انتگرال ِ J بر $\mathbb{S}$ صفر است. پس (4240) هم ان (4226)، یا (4200)، است.

این نتیجه را میشود به حالت ی گسترش داد که γ_i' خم ی ست که با تبدیل ی پیوسته از γ_i به دست میئاید. گیرم یک تابع ِ پیوسته یِ $\mathfrak{x}'$ هست، با این شرطها

$$\mathsf{dom}(\mathfrak{x}') = [0,1] \times [0,1]. \qquad (4241)$$

$$\mathsf{img}(\mathfrak{x}') \subseteq \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \qquad (4242)$$

$$\mathfrak{x}'(\cdot, 1) = \mathfrak{x}'(\cdot, 0). \qquad (4243)$$

$$\mathfrak{x}'(0, \cdot) = \gamma_{i,y}. \qquad (4244)$$

$$\mathfrak{x}'(1, \cdot) = \gamma_i'. \qquad (4245)$$

کاملَن مشابه با آن چه در بالا آمد، نتیجه میشود

$$\mathsf{A}(\gamma_i') = \mathsf{A}_{i,y}. \qquad (4246)$$

نتیجه در واقع این است که اگر خم ِ γ' چنان باشد که

$$\gamma' - \gamma_{i,y} = \mathbf{b}(\mathbb{S}'), \tag{4247}$$

که ناحیه یِ سمت-دار ِ $\mathbb{S}'$ زیرمجموعه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است، آنگاه

$$\mathsf{A}(\gamma') = \mathsf{A}_{i,y}. \tag{4248}$$

البته رُشن است که یک شرط ِ لازم برا یِ (4247) این است که γ' بسته باشد. و اگر قرار باشد $\mathbb{S}'$ زیرمجموعه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ باشد، تصویر ِ γ' هم باید زیرمجموعه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ باشد:

$$\mathsf{img}(\gamma') \subseteq \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4249}$$

سادِتر،

$$\gamma' \subseteq \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4250}$$

رابطه یِ (4200) هم نشان میدهد $\mathsf{A}_{i,y}$ به y بستگی ندارد، رُشن است که برا یِ y ها یی که در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ اند. به این ترتیب، کنش برا یِ هر خم ِ (بسته یِ) γ' که در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است، و چنان است که $(\gamma' - \gamma_{i,y})$ مرز ِ یک زیرمجموعه یِ سمت-دار ِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است، مستقل از γ' است، از جمله برابر با کنش برا یِ $\gamma_{i,y}$ است، که خُد ِ این هم به y بستگی ندارد (برا یِ y ها یی که در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ اند).

مجموعه یِ $\mathbb{EC}_{i,x}$ را مجموعه یِ همه یِ خمها یِ (بسته یِ) γ' تعریف میکنم که $(\gamma' - \gamma_{i,x})$ مرز ِ یک زیرمجموعه یِ سمت-دار ِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است:

$$\mathbb{EC}_{i,x} = \{\gamma' \mid (\gamma' - \gamma_{i,x}) = \mathbf{b}(\mathbb{S}'_{i,x})\}. \tag{4251}$$

$$\mathbb{S}'_{i,x} \subseteq \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4252}$$

تابعی یِ A_i را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{A}_i(x) = \mathsf{A}(\gamma_{i,x}). \tag{4253}$$

دیده میشود برا یِ هر γ' که (4247) را براورَد،

$$\mathsf{A}(\gamma') = \mathsf{A}_i(x). \tag{4254}$$

از جمله،

$$\forall\, y \in \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\} :$$
$$\mathsf{A}_{i,y} = \mathsf{A}_i(x). \tag{4255}$$

و البته،

$$\forall\, y \in \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\} :$$
$$\mathsf{A}_{i,y} = \mathsf{A}_i(y). \tag{4256}$$

پس،

$$\forall\, y \in \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\} :$$
$$\mathsf{A}_i(y) = \mathsf{A}_i(x). \tag{4257}$$

که یعنی،

$$\mathsf{A}_i \circ [\mathsf{fl}(t^j\, J_{I_j})] = \mathsf{A}_i. \tag{4258}$$

این همئرز است با

$$[\mathsf{fl}(t^j\, J_{I_j})]_*\, \mathsf{A}_i = \mathsf{A}_i. \tag{4259}$$

و این هم همئرز است با

$$\forall\, j :$$
$$\mathbf{L}_{J_{I_j}}\, \mathsf{A}_i = 0. \tag{4260}$$

که همئرز است با

$$\forall j :$$
$$\{\mathsf{A}_i, I_j\} = 0. \tag{4261}$$

نشان میدهم A_i و I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ مستقل-از-هم نیستند. برا یِ این کار، این قضیه را ثابت میکنم.

قضیه یِ C: گیرم $\mathfrak{e}_1$ تا $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}}$ میدان- ِ-بردارها یی بر فضا-یِ-فاز َند، چنان که

$$J(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j\} = 0. \quad [(i \leq \mathfrak{k}) \wedge (j \leq \mathfrak{k})] \tag{4262}$$

و $\mathfrak{k}$ بزرگتر از $\mathfrak{m}$ است:

$$\mathfrak{k} > \mathfrak{m}. \tag{4263}$$

که $\mathfrak{m}$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. در این صورت $\{(i, \mathfrak{e}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل نیست.

برا یِ اثبات، گیرم حکم درست نیست. یعنی $\mathfrak{e}_1$ تا $\mathfrak{e}_{\mathfrak{k}}$ مستقل-از-هم َند. این یعنی مجموعه یِ $\{(i, \mathfrak{e}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل است. با این مجموعه یک پایه ($\mathfrak{e}$) برا یِ فضا یِ مماس بر فضا-یِ-فاز میسازم، چنان که

$$\mathfrak{e} = \{(i, \mathfrak{e}_i) \mid i \leq (2\,\mathfrak{m})\}. \tag{4264}$$

$$\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}'_i, \qquad i \leq \mathfrak{k}. \tag{4265}$$

$$\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}''_{i-\mathfrak{k}}, \qquad i > \mathfrak{k}. \tag{4266}$$

$(2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{k})$ را با $\tilde{\mathfrak{k}}$ نشان میدهم:

$$\tilde{\mathfrak{k}} = 2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{k}. \tag{4267}$$

رُشن است که

$$\tilde{\mathfrak{k}} < \mathfrak{k}. \tag{4268}$$

و

$$\mathfrak{e} = \{(i, \mathfrak{e}^{\backslash}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\} \cup \{(j, \mathfrak{e}^{\backslash\backslash}_j) \mid j \leq \tilde{\mathfrak{k}}\} \tag{4269}$$

به این ترتیب،

$$J_{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} (J^{\backslash\backslash})_{\cdot\cdot} & (J^{\backslash\backslash\backslash})_{\cdot\cdot} \\ (J^{\backslash\backslash\backslash})_{\cdot\cdot} & (J^{\backslash\backslash\backslash\backslash})_{\cdot\cdot} \end{pmatrix}. \tag{4270}$$

از (4262)، همراه با این که تعداد ِ $\mathfrak{e}^{\backslash}_i$ ها برابر با $\mathfrak{k}$ است، دیده میشود

$$(J^{\backslash\backslash})_{\cdot\cdot} = \mathbf{0}_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}. \tag{4271}$$

$J^{\backslash\backslash\backslash}$ یک ماتریس ِ $(\tilde{\mathfrak{k}} \times \mathfrak{k})$ است. پس چون $\tilde{\mathfrak{k}}$ کوچکتر از $\mathfrak{k}$ است، رابطه یِ (4268)، رتبه یِ $J^{\backslash\backslash\backslash}$ نابزرگتر از $\tilde{\mathfrak{k}}$ است:

$$\mathsf{rank}(J^{\backslash\backslash\backslash}) \leq \tilde{\mathfrak{k}}. \tag{4272}$$

این یعنی دست- ِ-کم $(\mathfrak{k} - \tilde{\mathfrak{k}})$ تا از ستونها یِ $J^{\backslash\backslash\backslash}$ ترکیب- ِ-خطیها یی از بقیه یِ ستونها یِ $J^{\backslash\backslash\backslash}$ اند. $(\mathfrak{k} - \tilde{\mathfrak{k}})$ مثبت است. پس دست- ِ-کم یک ی از ستونها یِ $J^{\backslash\backslash\backslash}$ یک ترکیب ِ خطی از بقیه یِ ستونها یِ $J^{\backslash\backslash\backslash}$ است. بی این که از کلیت کاسته شود، میشود این ستون را (با جا-به-جا-کردن ِ ستونها) ستون ِ اول کرد. پس

$$\begin{aligned} &\exists\,(\mathfrak{c}^2, \ldots, \mathfrak{c}^{\mathfrak{k}}) \ \ni \\ &\forall\, j \leq \tilde{\mathfrak{k}}: \\ &J(\mathfrak{e}^{\backslash\backslash}_j, \mathfrak{e}^{\backslash}_1) = \sum_{i=2}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}^i\, J(\mathfrak{e}^{\backslash\backslash}_j, \mathfrak{e}^{\backslash}_i). \end{aligned} \tag{4273}$$

$\tilde{\mathfrak{e}}^{\backslash}_1$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\mathfrak{e}}^{\backslash}_1 = \mathfrak{e}^{\backslash}_1 - \sum_{i=2}^{\mathfrak{k}} \mathfrak{c}^i\, \mathfrak{e}^{\backslash}_i. \tag{4274}$$

دیده میشود

$$\forall j \leq \tilde{\mathfrak{k}}:$$
$$J(\mathfrak{e}_j^{\text{۱۱}}, \tilde{\mathfrak{e}}_1^{\text{۱}}) = 0. \tag{4275}$$

از (4262) و تعریف ِ $\tilde{\mathfrak{e}}_1^{\text{۱}}$ هم نتیجه میشود

$$\forall i \leq \mathfrak{k}:$$
$$J(\mathfrak{e}_i^{\text{۱}}, \tilde{\mathfrak{e}}_1^{\text{۱}}) = 0. \tag{4276}$$

از تعریف ِ $\mathfrak{e}$، همراه با روابط ِ (4275) و (4276)، نتیجه میشود

$$\forall i \leq (2\,\mathfrak{m}):$$
$$J(\mathfrak{e}_i, \tilde{\mathfrak{e}}_1^{\text{۱}}) = 0. \tag{4277}$$

که یعنی،

$$J(\text{۰}, \tilde{\mathfrak{e}}_1^{\text{۱}}) = 0. \tag{4278}$$

ماتریس ِ J ناتکین است. پس (4278) نتیجه میدهد $\tilde{\mathfrak{e}}_1^{\text{۱}}$ صفر است:

$$\tilde{\mathfrak{e}}_1^{\text{۱}} = 0. \tag{4279}$$

از (4274) و (4279) هم نتیجه میشود $\{(i, \mathfrak{e}_i^{\text{۱}}) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-وابسته است، که این هم یعنی $\{(i, \mathfrak{e}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-وابسته است. این فرض که $\{(i, \mathfrak{e}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-مستقل است به نتیجه یِ خلاف ِ خُد َش انجامیده، پس نادرست است.

به این ترتیب قضیه یِ **C** ثابت شد. برمیگردم به اثبات ِ این که A_i و I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ مستقل-از-هم نیستند. با A_i و I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$، میدان- ِ-برداریها یِ $\mathfrak{e}_1$ تا $\mathfrak{e}_{\mathfrak{m}+\text{۱}}$ را چنین میسازم:

$$\mathfrak{e}_j = J_{I_j}, \quad j \leq \mathfrak{m}. \tag{4280}$$

$$\mathfrak{e}_{\mathfrak{m}+1} = J_{\mathsf{A}_i}. \tag{4281}$$

دیده میشود (4262) برقرار است. که

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{m} + 1. \tag{4282}$$

و رُشن است که با این $\mathfrak{k}$، رابطه یِ (4263) هم برقرار است. به این ترتیب فرض ِ قضیه یِ **C** برقرار است. پس حکم ِ قضیه نتیجه میشود، که $\{(i, \mathfrak{e}_i) \mid i \leq \mathfrak{k}\}$ خطی-وابسته است. این هم یعنی $J[(\mathbf{d}\, I) \cup \{(\mathfrak{m}+1, \mathbf{d}\, \mathsf{A}_i)\}]$ خطی-وابسته است، که

$$\{(i, \mathbf{d}\, I_i) \mid i \leq \mathfrak{m}\} \tag{4283}$$

از این که $J[(\mathbf{d}\, I) \cup \{(\mathfrak{m}+1, \mathbf{d}\, \mathsf{A}_i)\}]$ خطی-وابسته است، همراه با این که J ناتکین است، نتیجه میشود $(\mathbf{d}\, I) \cup \{(\mathfrak{m}+1, \mathbf{d}\, \mathsf{A}_i)\}$ خطی-وابسته است. این هم یعنی A_i و I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ مستقل-از-هم نیستند.

نشان میدهم A_i (مُضعَن) تابع ِ فقط I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ است. I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ مستقل-از-هم َند. پس $(\mathbf{d}\, I)$ خطی-مستقل است. از این که $(\mathbf{d}\, I) \cup \{(\mathfrak{m}+1, \mathbf{d}\, \mathsf{A}_i)\}$ خطی-وابسته است و $(\mathbf{d}\, I)$ خطی-مستقل است، نتیجه میشود $(\mathbf{d}\, \mathsf{A}_i)$ در پهنه یِ $(\mathbf{d}\, I)$ است:

$$(\mathbf{d}\, \mathsf{A}_i) \in \mathsf{span}(\mathbf{d}\, I). \tag{4284}$$

پس $(\mathbf{d}\, \mathsf{A}_i)$ یک ترکیب ِ خطی از $(\mathbf{d}\, I)$ است. یعنی یک $(\mathfrak{c}_i{}^1, \ldots, \mathfrak{c}_i{}^{\mathfrak{m}})$ هست که

$$\mathbf{d}\, \mathsf{A}_i = \mathfrak{c}_i{}^j\, \mathbf{d}\, I_j. \tag{4285}$$

و این هم یعنی A_i (مُضعَن) تابع ِ فقط I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ است. در واقع،

$$\mathfrak{c}_i{}^j = \frac{\partial\, \mathsf{A}_i}{\partial\, I_j}. \tag{4286}$$

$$\mathbf{d}\, \mathsf{A}_i = \frac{\partial\, \mathsf{A}_i}{\partial\, I_j}\, \mathbf{d}\, I_j. \tag{4287}$$

از جمله،

$$\{\mathsf{A}_i, \mathsf{A}_j\} = \frac{\partial\, \mathsf{A}_j}{\partial\, I_k}\, \{\mathsf{A}_i, I_k\}. \tag{4288}$$

و این هم، با استفاده از (4261)، نتیجه میدهد

$$\{\mathsf{A}_i, \mathsf{A}_j\} = 0. \tag{4289}$$

یعنی A_i ها پُؤَسُنی یَند.

99 چنبره-یِ فاز

یک فضا-یِ-فاز ِ $(2\,\mathfrak{m})$ بُعدی را بررسی میکنم. گیرم $\mathfrak{m}$ تابعی از فضا-یِ-فاز هستند که پُؤَسُنی و مستقل-از-هم َند، یعنی تابعیها یِ I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ از فضا-یِ-فاز هستند که مستقل-از-هم َند و

$$\{I_i, I_j\} = 0. \tag{3222}$$

متناظر با هر x در فضا-یِ-فاز، $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ یک استوانه یِ $\mathfrak{m}$ بُعدی ست. حالت ی را بررسی میکنم که این استوانه-یِ-فاز چنبره است:

$$[\mathbb{O}(J_I)](x) = \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}. \tag{4290}$$

در این صورت به این استوانه-یِ-فاز یک چنبره یِ فاز میگویم. در این حالت، که استوانه-یِ-فاز چنبره است، $\mathfrak{m}$ تابعی یِ A_1 تا $\mathsf{A}_{\mathfrak{m}}$ هستند:

$$\mathsf{A}_i(x) = \mathsf{A}(\gamma_{i,x}). \tag{4253}$$

که هر کدام تابع ِ فقط I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ اند. از جمله پُؤَسُنی یَند:

$$\{\mathsf{A}_i, \mathsf{A}_j\} = 0. \tag{4289}$$

$(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_{\mathfrak{m}})$ را با A نشان میدهم:

$$\mathsf{A} = (\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_{\mathfrak{m}}). \tag{4291}$$

گیرم مشتق ِ A نسبت به I ناتکین است:

$$\ker(\mathbf{D}_I\,\mathsf{A}) = \{0\}. \tag{4292}$$

یا، همئرز با آن،

$$\mathsf{rank}(\mathbf{D}_I\,\mathsf{A}) = \mathfrak{m}. \tag{4293}$$

در این صورت A_1 تا $\mathsf{A}_\mathfrak{m}$ مستقل-از-هم َند. هر $\mathfrak{m}$ تابعی از فضا یِ فاز که پُؤَسُنی و مستقل-از-هم باشند را میشود تکانِها یِ متناظر با یک دسته مختصات ِ کانُنیک گرفت. پس A_1 تا $\mathsf{A}_\mathfrak{m}$ را میشود تکانِها یِ متناظر با دسته مختصات ِ کانُنیک گرفت. به اینها متغیرها یِ کنش میگویم.

از این که A_1 تا $\mathsf{A}_\mathfrak{m}$ تکانِها یِ متناظر با یک دسته مختصات ِ کانُنیک َند، نتیجه میشود $\mathfrak{m}$ تابعی یِ ϑ^1 تا $\vartheta^\mathfrak{m}$ از فضا-یِ-فاز هستند، چنان که (ϑ, A) کانُنیک است. همچنین، یک جایگشت- ِ-کانُنیک ِ (q, p) از (q, p) هست، چنان که q^1 تا $\mathrm{q}^\mathfrak{m}$ و A_1 تا $\mathsf{A}_\mathfrak{m}$ مستقل-از-هم َند. پس تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با تبدیل- ِ-کانُنیک ی که (q, p) را به (ϑ, A) تبدیل میکند را میشود تابع ِ (q, A) گرفت. چنین میکنم و این تابعی-یِ-مولد را با $\tilde{\Upsilon}$ نشان میدهم:

$$\mathrm{p}_i = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathrm{q}^i}. \tag{2746}$$

$$\vartheta^i = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathsf{A}_i}. \tag{4294}$$

مفصلتر،

$$\mathrm{p}_i(\mathrm{q}, \mathsf{A}) = \frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}, \mathsf{A})]}{\partial\,\mathrm{q}^i}. \tag{4295}$$

$$\vartheta^i(\mathrm{q}, \mathsf{A}) = \frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}, \mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_i}. \tag{4296}$$

دیده میشود

$$\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}, \mathsf{A}) = \tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0, \mathsf{A}) + \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\mathsf{q}, \mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{q}^i}. \tag{4297}$$

که، با استفاده از رابطه یِ (4295)، میشود

$$\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}, \mathsf{A}) = \tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0, \mathsf{A}) + \int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}} (\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q}, \mathsf{A}). \tag{4298}$$

انتگرال ِ طرف ِ راست، به مسیر بستگی دارد. پس $\tilde{\Upsilon}$ در رابطه یِ بالا واقعَن خُش-تعریف نیست. و (4298) را باید چنین نوشت:

$$\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0, \mathsf{A}, \gamma) = \tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0, \mathsf{A}) + \int_\gamma (\mathrm{d}\,\mathbf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathbf{q}, \mathsf{A}). \tag{4299}$$

که γ یک خم است که ابتدا یِ آن q_0 و انتها یِ آن q است، و بر کل ِ آن A ثابت است. دیده میشود

$$\int_\gamma (\mathrm{d}\,\mathbf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathbf{q}, \mathsf{A}) = \mathsf{A}(\gamma). \tag{4300}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0, \mathsf{A}, \gamma) = \tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0, \mathsf{A}) + \mathsf{A}(\gamma). \tag{4301}$$

اما میشود نشان داد $\tilde{\Upsilon}$ در طرف ِ چپ ِ رابطه یِ (4298) مُضعَن خُش-تعریف است. گیرم γ_1 و γ_2 دُ خم در یک استوانه-یِ-فاز َند، که ابتدا یِ شان یکسان است و انتها یِ شان هم یکسان است. مُضعَن یک سطح ِ (سمت-دار ِ) $\mathbb{S}$ هست که زیرمجموعه یِ آن استوانه-یِ-فاز است، و $(\gamma_2 - \gamma_1)$ مرز ِ $\mathbb{S}$ است:

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \mathbf{b}(\mathbb{S}). \tag{4186}$$

دقیقتر این که متناظر با هر نقطه در یک استوانه-یِ-فاز، یک همسایگی از آن نقطه هست که برا یِ خمها یِ γ_1 و γ_2 که در آن همسایگی یَند (و ابتدا یِ شان یکسان است و انتها یِ شان هم یکسان است) یک سطح ِ (سمت-دار ِ) $\mathbb{S}$ هست که زیرمجموعه یِ آن استوانه-یِ-فاز است، و $(\gamma_2 - \gamma_1)$ مرز ِ $\mathbb{S}$ است. از (4186)، همراه با این که $\mathbb{S}$ زیرمجموعه یِ یک استوانه-یِ-فاز است، نتیجه میشود

$$\mathsf{A}(\gamma_2) = \mathsf{A}(\gamma_1). \tag{4190}$$

پس جمله یِ دوم در طرف ِ راست ِ (4301)، مُضعَن، اگر q_0 و q و A ثابت بمانند و γ تغییر کند عوض نمیشود. یعنی، مُضعَن، این جمله تابع ِ فقط q_0 و q و A است، که نتیجه میدهد $\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}, \mathsf{A}, \gamma)$ تابع ِ فقط q و A است (به γ وابسته نیست). پس $\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0, \mathsf{A}, \gamma)$ را با هم ان $\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}, \mathsf{A})$ نشان میدهم:

$$\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0, \mathsf{A}, \gamma) = \tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}, \mathsf{A}). \tag{4302}$$

و، مُضعَن، میشود هم ان (4298) را به کار برد.

از (4298) نسبت به A_j مشتق میگیرم:

$$\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q},\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_j}=\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\mathrm{q}_0,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_j}+\frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}_j}\,\left[\int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A})\right]. \tag{4303}$$

این هم، با استفاده از (4296)، نتیجه میدهد

$$\vartheta^j(\mathrm{q},\mathsf{A})=\vartheta^j(\mathrm{q}_0,\mathsf{A})+\frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}_j}\,\left[\int_{\mathrm{q}_0}^{\mathrm{q}}(\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A})\right]. \tag{4304}$$

البته تابعی-یِ-مولد ِ $\tilde{\Upsilon}$ فقط مُضعَن خُش-تعریف است، و (4298) هم فقط مُضعَن برقرار است. به هم ین ترتیب، ϑ^j ها هم فقط مُضعَن خُش-تعریف َند و (4304) فقط مُضعَن برقرار است. نقطه یِ متناظر با مختصات ِ $(\mathrm{q}_0,\mathsf{A})$ را با x نشان میدهم. از (4304)، از جمله نتیجه میشود

$$\vartheta^j[\gamma_{k,x}(t)]=\vartheta^j(\mathrm{q}_0,\mathsf{A})+\frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}_j}\,\left[\int_{\gamma_{k,x,t}}(\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A})\right]. \tag{4305}$$

که $\gamma_{k,x,t}$ تحدید ِ $\gamma_{k,x}$ به $[0,t]$ است:

$$\gamma_{k,x,t}=\mathsf{res}\{\gamma_{k,x};[0,t]\}. \tag{4306}$$

رابطه یِ (4305) را چنین هم مینویسم.

$$\vartheta^j[\gamma_{k,x}(t)]=\vartheta^j(x)+\frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}_j}\,\left[\int_{\gamma_{k,x,t}}(\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A})\right]. \tag{4307}$$

که نقطه یِ x با خُد ِ $(\mathrm{q}_0,\mathsf{A})$ نمایش داده شد. البته رُشن است که تصویر ِ خم ِ $\gamma_{k,x,t}$ در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است. یعنی $\gamma_{k,x}(s)$، برا یِ هر s در $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است. پس تغییر-دادن ِ s (متغیر ِ $\gamma_{k,x}$)، مقدار ِ A را عوض نمیکند:

$$\mathsf{A}[\gamma_{k,x}(s)]=\mathsf{A}(x). \tag{4308}$$

و فقط q را تغییر میدهد.

رابطه یِ (4307) فقط مُضعَن برقرار است، یعنی فقط برا یِ t هایی که در یک همسایگی از 0 اند برقرار است. اگر (4307) سراسری برقرار میبود، طرف ِ چپ به ازا یِ $t = 1$ هم ان جمله یِ اول ِ طرف ِ راست میشد، چون

$$\gamma_{k,x}(1) = x \tag{4309}$$

اما $\vartheta^j[\gamma_{k,x}(1)]$ را میشود مستقیمَن حساب کرد:

$$\vartheta^j[\gamma_{k,x}(1)] = \vartheta^j(x) + \frac{\partial}{\partial \mathsf{A}_j}\left[\int_{\gamma_{k,x,1}} (\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A})\right]. \tag{4310}$$

همچنین،

$$\int_{\gamma_{k,x,1}} (\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A}) = \oint_{\gamma_{k,x}} (\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A}). \tag{4311}$$

که نتیجه میدهد

$$\int_{\gamma_{k,x,1}} (\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A}) = \mathsf{A}_k. \tag{4312}$$

پس،

$$\vartheta^j[\gamma_{k,x}(1)] = \vartheta^j(x) + \frac{\partial\,\mathsf{A}_k}{\partial\,\mathsf{A}_j}. \tag{4313}$$

یا،

$$\vartheta^j[\gamma_{k,x}(1)] = \vartheta^j(x) + \delta^j_k. \tag{4314}$$

$(\Delta_k\,\vartheta^j)$ را چنین تعریف میکنم.

$$\Delta_k\,\vartheta^j = \vartheta^j[\gamma_{k,x}(1)] - \vartheta^j(x). \tag{4315}$$

رابطه یِ (4314) چنین میشود.

$$\Delta_k\,\vartheta^j = \delta^j_k. \tag{4316}$$

$(\Delta_k\,\vartheta^j)$ تغییر ِ ϑ^j را نشان میدهد، وقت ی نقطه رو یِ خم ِ $\gamma_{k,x}$ از ابتدا یِ خم به انتها یِ خم برود. البته $\gamma_{k,x}$ یک خم ِ بسته است. پس ابتدا و انتها یِ آن یکسان َند (هر-دُ هم ان x اند). اما (4316)، که هم ان (4314) است، نشان میدهد وقت ی نقطه بر خم ِ $\gamma_{k,x}$ حرکت میکند و از ابتدا به انتها (که هم ان ابتدا ست) میرسد، ϑ^k به اندازه یِ 1 تغییر میکند. پس ϑ سراسری تابع نیست. در واقع $\vartheta[\gamma_{k,x}(t)]$ نماد ِ دقیق ی نیست، چون از آن بر میئاید ϑ تابع ِ فقط $\gamma_{k,x}(t)$ است. در حال ی که ϑ تابع ِ x و γ (خم ی با ابتدای یِ x) است.

شبیه ِ رابطه یِ (4299)، یک شکل ِ دقیقتر برا یِ ϑ چنین است.

$$\vartheta^j(\mathrm{q}_0,\mathsf{A},\gamma)=\vartheta^j(\mathrm{q}_0,\mathsf{A})+\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}_j}\right)_{\mathrm{q}}\left[\int_\gamma(\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i(\mathsf{q},\mathsf{A})\right]. \tag{4317}$$

که γ یک خم است که ابتدا یِ آن q_0 و انتها یِ آن q است، و بر کل ِ آن A ثابت است. این رابطه را برا یِ یک خم ِ خاص مینویسم:

$$\vartheta^j(x,t)=\vartheta^j(x,0)+\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}_j}\right)_{\mathrm{q}}\left[\int_{\gamma_{x,t}}(\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i\right]. \tag{4318}$$

خم با t مشخص شده، که یک $\mathfrak{m}$ تایی ست. $\vartheta(x,\gamma_{x,t})$ هم با $\vartheta(x,t)$ نشان داده شده. انتگرال بر $\gamma_{x,t}$ چنین تعریف میشود.

$$\int_{\gamma_{x,t}}=\sum_{k=1}^{\mathfrak{m}}\int_{\gamma_{k,x_{k-1},t^k}}. \tag{4319}$$

که،

$$x_0=x. \tag{4320}$$

$$x_k=\gamma_{k,x_{k-1}}(t^k),\quad k>0. \tag{4321}$$

در واقع $\gamma_{x,t}$ یک خم ِ $\mathfrak{m}$ تکه است: تکه یِ kُم γ_{k,x_{k-1},t^k} است، که انتها یَ ش x_k است. وقت ی t^k صحیح باشد تکه یِ kُم ِ خم ِ $\gamma_{x,t}$ یک خم ِ بسته است. اما انتگرال بر این خم ِ بسته لزومَن صفر نیست. از جمله،

$$\int_{\gamma_{x,t}}(\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i=\mathsf{A}_i\,\mathsf{floor}(t^i)+\int_{\gamma_{x,\mathsf{remf}(t)}}(\mathrm{d}\,\mathsf{q}^i)\,\mathrm{p}_i. \tag{4322}$$

نمادها یِ $\mathsf{floor}(t)$ و $\mathsf{remf}(t)$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{floor}(t) = [\mathsf{floor}(t^1), \dots, \mathsf{floor}(t^{\mathrm{m}})]. \tag{4323}$$

$$\mathsf{remf}(t) = [\mathsf{remf}(t^1), \dots, \mathsf{remf}(t^{\mathrm{m}})]. \tag{4324}$$

به این ترتیب،

$$\int_{\gamma_{x,t}} (\mathrm{d}\,\mathsf{q})\,\mathrm{p} = \mathsf{A}\,\mathsf{floor}(t) + \int_{\gamma_{x,\mathsf{remf}(t)}} (\mathrm{d}\,\mathsf{q})\,\mathrm{p}. \tag{4325}$$

$$\vartheta(x,t) = \mathsf{floor}(t) + \vartheta[x, \mathsf{remf}(t)]. \tag{4326}$$

ϑ^i ها شبیه ِ زاویه اند: با حرکت بر خمها یِ بسته، مقدار ِ شان به اندازه یِ یک عدد ِ صحیح تغییر میکند. این یعنی ϑ' و ϑ، وقت ی همه یِ $(\vartheta'^i - \vartheta^i)$ صحیح َند، با نقطه ای یکسان بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ متناظر َند. به ϑ^i ها متغیرها یِ (مختصات ِ) زاویه میگویند.

از این پس هم ان نماد-گذاری یِ سادِتر (ولی نادقیقتر) را به کار میبَرم، که ϑ را مثل ِ یک تابع نشان میدهد، هر چند در واقع ϑ تابع نیست (یا تابع ی چند-مقداری ست).

(ϑ, A) کانُنیک است. پس کروشه-یِ-پُؤَسُنها یِ این مختصات چنین است.

$$\{\vartheta^i, \vartheta^j\} = 0. \tag{4327}$$

$$\{\vartheta^i, \mathsf{A}_j\} = \delta^i_j. \tag{4328}$$

$$\{\mathsf{A}_i, \mathsf{A}_j\} = 0. \tag{4289}$$

مجموعه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ یک چنبره-یِ-فاز است، که با اثر ِ $\mathsf{fl}(t\,J_I)$ ها بر x ساخته میشود:

$$[\mathbb{O}(J_I)](x) = \{[\mathsf{fl}(t\,J_I)](x) \mid t\}. \tag{4329}$$

میشود به جا یِ I_i ها، خُد ِ متغیرها یِ کنش (A_i ها) را هم به کار برد:

$$[\mathbb{O}(J_I)](x) = \{[\mathsf{fl}(t\,J_{\mathsf{A}})](x) \mid t\}. \tag{4330}$$

البته (4330) را میشود چنین نوشت.

$$[\mathbb{O}(J_{\mathsf{A}})](x) = \{[\mathsf{fl}(t\,J_{\mathsf{A}})](x) \mid t\}. \tag{4331}$$

رُشن است که

$$[\mathbb{O}(J_{\mathsf{A}})](x) = [\mathbb{O}(J_I)](x). \tag{4332}$$

از (4289) نتیجه میشود

$$J_{\mathsf{A}_i} \diamond J_{\mathsf{A}_j} = 0. \tag{4333}$$

از (4328) هم نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_{J_{\mathsf{A}_j}} \vartheta^i = \delta^i_j. \tag{4334}$$

روابط ِ (4333) و (4334) نتیجه میدهند

$$\frac{\partial \left(\vartheta^i\{[\mathsf{fl}(t\, J_{\mathsf{A}})](x)\}\right)}{\partial\, t^j} = \delta^i_j. \tag{4335}$$

و این هم نتیجه میدهد

$$\vartheta^i\{[\mathsf{fl}(t\, J_{\mathsf{A}})](x)\} = \vartheta^i(x) + t^i. \tag{4336}$$

از جمله، $[\mathsf{fl}(\mathsf{t}\, J_{\mathsf{A}})](x)$ هم ان x است، اگر و تنها اگر همه یِ $\left(\vartheta^i\{[\mathsf{fl}(t\, J_{\mathsf{A}})](x)\} - \vartheta^i(x)\right)$ ها صحیح باشند. پس $[\mathsf{fl}(\mathsf{t}\, J_{\mathsf{A}})](x)$ هم ان x است، اگر و تنها اگر همه یِ t^i ها صحیح باشند:

$$\forall\, i : t^i \in \mathbb{Z}. \quad \Leftrightarrow$$
$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathsf{t}\, J_{\mathsf{A}}); [\mathbb{O}(J_{\mathsf{A}})](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(J_{\mathsf{A}})](x)}. \tag{4337}$$

یا،

$$\forall\, i : t^i \in \mathbb{Z}. \quad \Leftrightarrow$$
$$\mathsf{res}\{\mathsf{fl}(\mathsf{t}\, J_{\mathsf{A}}); [\mathbb{O}(J_I)](x)\} = \mathbf{1}_{[\mathbb{O}(J_I)](x)}. \tag{4338}$$

از جمله خمها یِ $\gamma_{k,x}$ را میشود چنین گرفت.

$$\gamma_{k,x}(t) = [\mathsf{fl}(t\,J_{\mathsf{A}_k})](x). \tag{4339}$$

دیده میشود

$$\vartheta^i[\gamma_{k,x}(t)] = \vartheta^i(x) + t\,\delta^i_k. \tag{4340}$$

$$\mathsf{A}_i[\gamma_{k,x}(t)] = \mathsf{A}_i(x). \tag{4341}$$

برا یِ ساختن ِ A، چنبره-یِ-فازها یی به کار رفت که با I ساخته شده. برا یِ ساختن ِ ϑ هم، این چنبره-یِ-فازها، A، و یک دسته مختصات- ِ-کانُنیک به کار رفت. این مختصات- ِ-کانُنیک، (q,p)، چنان َند که q^1 تا q^{m} و A_1 تا A_{m} مستقل-از-هم َند، و جز این کاملَن دلبخاه َند.

میشود I را با خُد ِ A جایگزین کرد. از (4332) دیده میشود چنیره-یِ-فازها عوض نمیشوند. میشود مختصات- ِ-کانُنیک ِ (q,p) را هم با خُد ِ (ϑ,A) جایگزین کرد: رُشن است که ϑ^1 تا ϑ^{m} (به جا یِ q^1 تا q^{m}) و A_1 تا A_{m} مستقل-از-هم َند. به این ترتیب، برا یِ ساختن ِ (ϑ,A) چیزها یِ اضافی (I و q و p) لازم نیست. البته ساختن ِ مختصات- ِ-کانُنیک ِ (ϑ,A) از خُد ِ (ϑ,A) بدیهی ست. تبدیل- ِ-کانُنیک ی که (ϑ,A) را به (ϑ,A) تبدیل میکند همانی ست. تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با این تبدیل- ِ-کانُنیک (ِ بدیهی) را تابع ِ (ϑ,A) میگیرم و این تابعی-یِ-مولد را با $\tilde{\Upsilon}$ نشان میدهم:

$$\mathsf{A}_i = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\vartheta^i}. \tag{4342}$$

$$\vartheta^i = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathsf{A}_i}. \tag{4343}$$

مفصلتر،

$$\mathsf{A}_i(\vartheta,\mathsf{A}) = \frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\vartheta,\mathsf{A})]}{\partial\,\vartheta^i}. \tag{4344}$$

$$\vartheta^i(\vartheta,\mathsf{A}) = \frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\vartheta,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_i}. \tag{4345}$$

دیده میشود

$$\tilde{\Upsilon}(\vartheta,\mathsf{A}) = \tilde{\Upsilon}(\vartheta_0,\mathsf{A}) + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} (\mathrm{d}\,\mathfrak{s}^i)\,\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\mathfrak{s},\mathsf{A})]}{\partial\,\mathfrak{s}^i}. \tag{4346}$$

که، با استفاده از رابطه یِ (4342)، میشود

$$\tilde{\Upsilon}(\vartheta,\mathsf{A})=\tilde{\Upsilon}(\vartheta_0,\mathsf{A})+\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}(\mathrm{d}\,\mathfrak{s}^i)\,\mathsf{A}_i(\mathfrak{s},\mathsf{A}). \tag{4347}$$

این هم، با استفاده از (4343)، نتیجه میدهد

$$\vartheta^j=\vartheta_0^j+\frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}_j}\left[\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}(\mathrm{d}\,\mathfrak{s}^i)\,\mathsf{A}_i(\mathfrak{s},\mathsf{A})\right]. \tag{4348}$$

البته رُشن است که $\mathsf{A}_i(\vartheta,\mathsf{A})$ تابع ِ فقط A است. از جمله $\mathsf{A}_i(\mathfrak{s},\mathsf{A})$ تابع ِ فقط A است. پس A_i از انتگرال ِ طرف- ِ-راست ِ (4347) بیرون میئاید و نتیجه میشود

$$\tilde{\Upsilon}(\vartheta,\mathsf{A})=\tilde{\Upsilon}(\vartheta_0,\mathsf{A})+\mathsf{A}\,\vartheta-\mathsf{A}\,\vartheta_0. \tag{4349}$$

از این نتیجه میشود یک $\tilde{\Upsilon}'$ هست که

$$\tilde{\Upsilon}(\vartheta,\mathsf{A})=\mathsf{A}\,\vartheta+\tilde{\Upsilon}'(\mathsf{A}). \tag{4350}$$

از (4349) نسبت به A_i مشتق میگیرم:

$$\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(\vartheta,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_i}=\vartheta^i+\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}'(\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_i}. \tag{4351}$$

که، با استفاده از (4343)، نتیجه میدهد

$$\vartheta^i=\vartheta^i+\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}'(\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_i}. \tag{4352}$$

پس،

$$\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}'(\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_i}=0. \tag{4353}$$

که یعنی $\tilde{\Upsilon}'$ ثابت است. از جمله میشود آن را صفر گرفت. چنین میکنم:

$$\tilde{\Upsilon}'=0. \tag{4354}$$

پس،

$$\tilde{\Upsilon}(\vartheta, \mathsf{A}) = \mathsf{A}\,\vartheta. \tag{4355}$$

تبدیل- ِ-کانُنیک ی که (ϑ, A) را به (ϑ, A) تبدیل میکند همانی ست. پس این نتیجه دور از انتظار نیست.

البته تابعی-یِ-مولد ِ $\tilde{\Upsilon}$ فقط مُضعَن خُش-تعریف است، و (4347) هم فقط مُضعَن برقرار است. به هم ین ترتیب، ϑ^j ها هم فقط مُضعَن خُش-تعریف َند. یک شکل ِ دقیقتر برا یِ ϑ چنین است.

$$\vartheta^j(x,t) = {\vartheta_0}^j + \int_{\gamma_{x,t}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{s}^i)\,\frac{\partial\,[\mathsf{A}_i(\mathfrak{s}, \mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_j}. \tag{4356}$$

که نقطه یِ متناظر با مختصات ِ $(\vartheta_0, \mathsf{A})$ با x نشان داده شده، و انتگرال بر $\gamma_{x,t}$ با (4319) تا (4321) تعریف شده. $\gamma_{k,x}$ ها را به شکل ِ (4339) میگیرم. به این ترتیب، مسیر ِ انتگرال-گیری در (4356) چنین میشود که در تکه یِ k ُم $\mathfrak{s}^k$ از 0 تا t^k تغییر میکند و بقیه یِ $\mathfrak{s}^i$ ها ثابت َند. البته انتگرال-ده مستقل از $\mathfrak{s}$ است و میشود ترتیب ِ تغییر-دادن ِ $\mathfrak{s}^i$ ها را عوض کرد. در واقع،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{A}_i(\mathfrak{s}, \mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_j} = \delta_i^j. \tag{4357}$$

به این ترتیب، رابطه یِ (4356) چنین میشود.

$$\vartheta^j(x,t) = {\vartheta_0}^j + \int_0^{t^1} (\mathrm{d}\,\mathfrak{s}^1)\,\delta_1^j + \cdots + \int_0^{t^{\mathrm{m}}} (\mathrm{d}\,\mathfrak{s}^{\mathrm{m}})\,\delta_{\mathrm{m}}^j. \tag{4358}$$

یعنی،

$$\vartheta(x,t) = \vartheta_0 + t. \tag{4359}$$

از جمله دیده میشود

$$\vartheta(x,t) = \mathsf{floor}(t) + \vartheta_0 + \mathsf{remf}(t). \tag{4360}$$

که هم ان (4326) است.

تغییرِ هر یک از ϑ^i ها به اندازه یِ یک عددِ صحیح نقطه را عوض نمیکند. پس برا یِ هر تابعِ $\mathfrak{X}$ با دامنه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$، وقت ی $\mathfrak{X}$ بر حسبِ ϑ^i ها نوشته شود، تغییرِ هر یک از ϑ^i ها به اندازه یِ یک عددِ صحیح مقدارِ $\mathfrak{X}$ را عوض نمیکند. یعنی، گیرم

$$\mathsf{dom}(\mathfrak{X}) = \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4361}$$

در این صورت،

$$\forall\, i : \mathfrak{b}^i \in \mathbb{Z}. \quad \Rightarrow$$
$$\mathfrak{X}(\vartheta + \mathfrak{b}) = \mathfrak{X}(\vartheta). \tag{4362}$$

پس هر تابعِ $\mathfrak{X}$ با دامنه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$، وقت ی بر حسبِ ϑ^i ها نوشته شود، نسبت به هر یک از ϑ^i ها دُرِئی با دُره یِ 1 است. از جمله نتیجه میشود چنین-تابع ی (اگر یک تابعِ برداری باشد) یک سری یِ فوریه دارد:

$$\mathfrak{X}(\vartheta) = \sum_n \mathfrak{X}^n \, \exp(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\vartheta). \tag{4363}$$

تابعی یِ Θ_n را چنین تعریف میکنم.

$$\Theta_n(\vartheta) = \exp(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\vartheta). \tag{4364}$$

رابطه یِ (4363) چنین میشود.

$$\mathfrak{X}(\vartheta) = \sum_n \mathfrak{X}^n\,\Theta_n(\vartheta). \tag{4365}$$

بسته،

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^n\,\Theta_n. \tag{4366}$$

رُشن است که در طرفِ راست، قراردادِ جمع-بندی به کار رفته.

برا یِ دُ تابعی (یا یک تابعی و یک تابعِ برداری) که متغیرِ شان ϑ است و نسبت به ϑ^i ها دُرِئی یَند، یک حاصل-ِ-ضرب-ِ-درونی تعریف میکنم. حاصل-ِ-ضرب-ِ-درونی یِ $\mathfrak{X}$ در $\mathfrak{Y}$ را با $\mathsf{ip}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$

نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم:

$$\mathsf{ip}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) = \int_0^1 (\mathrm{d}\,\vartheta^1)\cdots\int_0^1 (\mathrm{d}\,\vartheta^{\mathrm{m}})\,[\mathfrak{X}(\vartheta)]^\star\,[\mathfrak{Y}(\vartheta)]. \tag{4367}$$

که $\mathfrak{X}^\star$ مزدوج-ِ-مختلط ِ $\mathfrak{X}$ است. برا یِ انتگرال-گیری این نماد ِ بسته را به کار میبَرم.

$$\int (\mathrm{d}\,\vartheta)\,\mathfrak{X}(\theta) = \int_0^1 (\mathrm{d}\,\vartheta^1)\cdots\int_0^1 (\mathrm{d}\,\vartheta^{\mathrm{m}})\,\mathfrak{X}(\theta). \tag{4368}$$

با اینها، رابطه یِ (4367) چنین میشود.

$$\mathsf{ip}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) = \int (\mathrm{d}\,\vartheta)\,[\mathfrak{X}(\vartheta)]^\star\,[\mathfrak{Y}(\vartheta)]. \tag{4369}$$

دیده میشود

$$\int (\mathrm{d}\,\vartheta)\,[\Theta_m(\vartheta)]^\star\,[\Theta_n(\vartheta)] = \delta_{m\,n}. \tag{4370}$$

رابطه یِ (4370) یعنی Θ_n ها (با آن حاصل-ِ-ضرب-ِ-درونی) یکه-متعامد َند:

$$\mathsf{ip}(\Theta_m,\Theta_n) = \delta_{m\,n}. \tag{4371}$$

با استفاده از این تعامد، میشود ضریبها یِ بسط ِ $\mathfrak{X}$ بر حسب ِ Θ_n ها در رابطه یِ (4366) را به دست آورد:

$$\mathsf{ip}(\Theta_m,\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_n\,\mathsf{ip}(\Theta_m,\Theta_n). \tag{4372}$$

پس،

$$\mathsf{ip}(\Theta_m,\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^n\,\delta_{m\,n}. \tag{4373}$$

یا،

$$\mathfrak{X}_m = \mathsf{ip}(\Theta_m,\mathfrak{X}). \tag{4374}$$

که شاخص با δ پایین آمده:

$$\mathfrak{X}_m = \delta_{m\,n}\,\mathfrak{X}^n. \tag{4375}$$

شاخص با وارون ِ δ هم بالا میرود:

$$\mathfrak{X}^n = \delta^{m\,n}\,\mathfrak{X}_m. \tag{4376}$$

و البته،

$$\delta_{n\,k}\,\delta^{m\,k} = \delta^m_n. \tag{4377}$$

رابطه یِ (4374) را هم میشود چنین نوشت.

$$\mathfrak{X}^n = \mathsf{ip}(\Theta^n, \mathfrak{X}). \tag{4378}$$

البته وقت ی شاخصها با δ پایین-ُ-بالا میروند، پایین-ُ-بالا-بردن ِ شاخصها کمیتها را عوض نمیکند:

$$\mathfrak{X}^n = \mathfrak{X}_n. \tag{4379}$$

از جمله،

$$\mathfrak{X}^n = \mathsf{ip}(\Theta_n, \mathfrak{X}). \tag{4380}$$

میانگین ِ تابع- ِ-برداری یِ $\mathfrak{X}$ (که متغیر َ ش ϑ است و نسبت به ϑ^i ها دُرِئی ست) را با $\mathsf{mn}(\mathfrak{X})$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{mn}(\mathfrak{X}) = \int (\mathrm{d}\,\vartheta)\,\mathfrak{X}(\vartheta). \tag{4381}$$

دیده میشود

$$\mathsf{mn}(\Theta_n) = \delta^0_n. \tag{4382}$$

$$\mathfrak{X}^0 = \mathsf{mn}(\mathfrak{X}). \tag{4383}$$

$$\mathfrak{X}^n = \mathsf{mn}[(\Theta^n)^\star\,\mathfrak{X}]. \tag{4384}$$

رابطه یِ (4383) حالت ِ خاص ی از (4384) است. همچنین،

$$\mathsf{mn}(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}) = \sum_n \mathfrak{X}^{-n}\,\mathfrak{Y}^n. \tag{4385}$$

گیرم $\mathfrak{X}$ یک تابع با دامنه یِ فضا-یِ-فاز است:

$$\mathsf{dom}(\mathfrak{X}) = \mathbb{P}. \tag{4386}$$

در این صورت تحدید ِ $\mathfrak{X}$ به $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ یک تابع با دامنه یِ $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است، و برا یِ آن مانسته یِ (4362) برقرار است:

$$\forall\, i : \mathfrak{b}^i \in \mathbb{Z}. \quad \Rightarrow$$
$$\Big(\mathsf{res}\{\mathfrak{X}; [\mathbb{O}(J_I)](x)\}\Big)(\vartheta + \mathfrak{b}) = \Big(\mathsf{res}\{\mathfrak{X}; [\mathbb{O}(J_I)](x)\}\Big)(\vartheta). \tag{4387}$$

یا،

$$\forall\, i : \mathfrak{b}^i \in \mathbb{Z}. \quad \Rightarrow$$
$$\mathfrak{X}\{\vartheta + \mathfrak{b}, [\mathbb{O}(J_I)](x)\} = \mathfrak{X}\{\vartheta, [\mathbb{O}(J_I)](x)\}. \tag{4388}$$

مقدار ِ A بر هر یک از چنبری-یِ-فازها ثابت است. پس هر یک از $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ ها یک مقدار برا یِ A میدهد. گیرم این تناظر یک-به-یک است. یعنی هر دُ-چنبره-یِ-فاز ِ متمایز دُ مقدار ِ متمایز برا یِ A میدهند. در این صورت در رابطه یِ بالا، میشود $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ را بر حسب ِ A نوشت.

$$\forall\, i : \mathfrak{b}^i \in \mathbb{Z}. \quad \Rightarrow$$
$$\mathfrak{X}\Big(\vartheta + \mathfrak{b}, \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}(\mathsf{A})\Big) = \mathfrak{X}\Big(\vartheta, \{[\mathbb{O}(J_I)](x)\}(\mathsf{A})\Big). \tag{4389}$$

یا، با یک نماد-گذاری یِ سادِتر،

$$\forall\, i : \mathfrak{b}^i \in \mathbb{Z}. \quad \Rightarrow$$
$$\mathfrak{X}(\vartheta + \mathfrak{b}, \mathsf{A}) = \mathfrak{X}(\vartheta, \mathsf{A}). \tag{4390}$$

از این پس فرض میکنم تناظرِ بینِ چنبره-یِ-فازها و مقدارها یِ A یک-به-یک است.

گیرم $\mathfrak{X}$ یک تابعِ برداری با دامنه یِ فضا-یِ-فاز است. پس برا یِ $\mathfrak{X}$ مانسته یِ (4365) برقرار است:

$$\mathfrak{X}(\vartheta, \mathsf{A}) = [\mathfrak{X}^n(\mathsf{A})]\, \Theta_n(\vartheta). \tag{4391}$$

و البته $\mathfrak{X}^n$ ها چنین میشوند.

$$\mathfrak{X}^n(\mathsf{A}) = \mathsf{ip}[\Theta^n, \mathfrak{X}(\cdot, \mathsf{A})]. \tag{4392}$$

همچنین،

$$\mathfrak{X}^0(\mathsf{A}) = \mathsf{mn}[\mathfrak{X}(\cdot, \mathsf{A})]. \tag{4393}$$

$$\mathfrak{X}^n(\mathsf{A}) = \mathsf{mn}[(\Theta^n)^\star\, \mathfrak{X}(\cdot, \mathsf{A})]. \tag{4394}$$

رابطه یِ (4393) حالتِ خاص ی از (4394) است. همچنین،

$$\mathsf{mn}\{[\mathfrak{X}(\cdot, \mathsf{A})]\, [\mathfrak{Y}(\cdot, \mathsf{A})]\} = \sum_n [\mathfrak{X}^{-n}(\mathsf{A})]\, [\mathfrak{Y}^{-n}(\mathsf{A})]. \tag{4395}$$

100 کنش-ُ-زاویه و انتگرال-پذیری

یک سیستم را بررسی میکنم که فضا-یِ-فازِ متناظر با آن $(2\,\mathfrak{m})$ بُعدی ست. گیرم $\mathfrak{m}$ تابعی از فضا-یِ-فاز هستند که پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، یعنی تابعیها یِ I_1 تا $I_\mathfrak{m}$ از فضا-یِ-فاز هستند که مستقل-از-هم َند و

$$\{I_i, I_j\} = 0. \tag{3222}$$

گیرم I_i ها با H (هَمیلتِنی یِ متناظر با سیستم) پُوسُنی یَند:

$$\{I_i, H\} = 0. \tag{3223}$$

پس سیستم انتگرال-پذیر است. از جمله نتیجه میشود هَمیلتِنی تابع ِ فقط I (و احتمالَن زمان) است.

متناظر با هر x در فضا-یِ-فاز، $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ یک استوانه یِ $\mathfrak{m}$ بُعدی ست. از این که هَمیلتنی تابع ِ فقط I (و احتمالَن زمان) است، نتیجه میشود

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial I_i}\,\{x^a, I_i\}. \tag{4396}$$

یا،

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial I_i}\,(J_{I_i})^a. \tag{4397}$$

بسته،

$$\dot{x} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial I_i}\,J_{I_i}. \tag{4398}$$

طرف ِ راست بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ مماس است. پس مسیر ِ حرکت بر $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ مماس است. در واقع (4398) نشان میدهد مسیر ِ حرکت در $[\mathbb{O}(J_I)][x(t_0)]$ میمانَد:

$$[x(t)] \in \{[\mathbb{O}(J_I)][x(t_0)]\}. \tag{4399}$$

به این خاطر، وقت ی سیستم انتگرال-پذیر است (و ثابت- ِ-حرکتها تابع ِ فقط فضا-یِ-فاز َند) به هر استوانه-یِ-فاز یک استوانه یِ ناوردا میگویند؛ و اگر استوانه-یِ-فاز چنبره باشد، به آن چنبره-یِ-فاز چنبره یِ ناوردا میگویند.

حالت ی را بررسی میکنم که استوانه-یِ-فازها چنبره اند:

$$[\mathbb{O}(J_I)](x) = \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}. \tag{4290}$$

متغیر- ِ-کنشها یِ متناظر با A نشان میدهم. گیرم مشتق ِ A نسبت به I ناتکین است:

$$\ker(\mathbf{D}_I\,\mathsf{A}) = \{0\}. \tag{4292}$$

در این صورت (مُضعَن) I تابع ِ A است، و هَمیلتنی را هم میشود (مُضعَن) بر حسب ِ فقط A (و احتمالَن زمان) نوشت. مقدار ِ A تابع ِ فقط I است: هر مقدار ِ I با فقط یک مقدار برا یِ A متناظر

است. اگر این تناظر یک-به-یک باشد، یعنی هر مقدارِ A هم با فقط یک مقدار برا یِ I متناظر باشد، I تابعِ فقط A است، و هَمیلتِنی را هم میشود بر حسبِ فقط A (و احتمالَن زمان) نوشت. از این پس فرض میکنم چنین است.

متغیر-ِ-زاویِها یِ متناظر را با ϑ نشان میدهم. نتایجِ کلی برا یِ سیستمها یِ انتگرال-پذیر را بر حسبِ متغیرها یِ کنش و زاویه مینویسم. بر حسبِ متغیرها یِ کنش و زاویه، معادلات-ِ-حرکتِ متناظر با هَمیلتِنی یِ H اینها یَند.

$$\dot{\vartheta}^i \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial H}{\partial \mathsf{A}_i}. \tag{4400}$$

$$\dot{\mathsf{A}}_i \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial H}{\vartheta^i}. \tag{4401}$$

این که هَمیلتِنی را میشود (مُضعَن) بر حسبِ فقط A و زمان (t) نوشت، نتیجه میدهد مشتقِ هَمیلتِنی نسبت به متغیرها یِ زاویه صفر است:

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta^i} = 0. \tag{4402}$$

با این، معادله-یِ-حرکتِ (4401) چنین میشود

$$\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4403}$$

این یعنی A_i ها بر-لاک ثابت َند:

$$\mathsf{A}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{A}(t_0). \tag{4404}$$

مشتقِ H نسبت به A_i را با ν^i نشان میدهم:

$$\nu^i = \frac{\partial H}{\partial \mathsf{A}_i}. \tag{4405}$$

چون H تابعِ فقط A و t است، مشتقِ H نسبت به A_i هم چنین است. یعنی ν^i تابعِ فقط A و t است. معادله-یِ-حرکتِ (4400) چنین میشود.

$$\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu[t, \mathsf{A}(t)]. \tag{4406}$$

از (4404) نتیجه میشود

$$\nu[t,\mathsf{A}(t)]\stackrel{\text{ns}}{=}\nu[t,\mathsf{A}(t_0)]. \tag{4407}$$

به این ترتیب (4406) چنین میشود.

$$\dot{\vartheta}(t)\stackrel{\text{ns}}{=}\nu[t,\mathsf{A}(t_0)]. \tag{4408}$$

که نتیجه میدهد

$$\vartheta(t)\stackrel{\text{ns}}{=}\vartheta(t_0)+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,\nu[s,\mathsf{A}(t_0)]. \tag{4409}$$

گیرم H تابع ِ فقط A است، یعنی به زمان هم وابسته نیست:

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,t}=0. \tag{3202}$$

در این صورت ν هم تابع ِ فقط A میشود، یعنی مستقل از زمان میشود:

$$\frac{\partial\,\nu^i}{\partial\,t}=0. \tag{4410}$$

و (4407) چنین میشود.

$$\nu[\mathsf{A}(t)]\stackrel{\text{ns}}{=}\nu[\mathsf{A}(t_0)]. \tag{4411}$$

که یعنی ν بر-لاک ثابت میشود:

$$\dot{\nu}\stackrel{\text{ns}}{=}0. \tag{4412}$$

در این صورت (4409) چنین میشود.

$$\vartheta(t)\stackrel{\text{ns}}{=}\vartheta(t_0)+\{\nu[\mathsf{A}(t_0)]\}\,(t-t_0). \tag{4413}$$

روابط ِ (4404) و (4409)، جواب ِ معادلات- ِ-حرکت َند در حالت ی که مشتق ِ هَمیلتِنی نسبت به متغیرها یِ زاویه صفر است. اگر، علاوه بر این، مشتق ِ هَمیلتِنی نسبت به زمان هم صفر باشد، جواب ِ معادلات- ِ-حرکت (4404) و (4413) میشود.

این روابط شکل ِ خاص ی از روابط ی یَند که برا یِ سیستمها یِ حل-پذیر نتیجه میشوند. ویژگی یِ خاص ی که اینجا (وقت ی استوانه-یِ-فازها چنبره اند) ظاهر میشود، شبه- ِ-دُرِئی-بودن ِ حرکت است. این ویژگی از آنجا میئاید که ϑ^i ها شبیه ِ زاویه اند: با تغییر ِ شان به اندازه یِ یک عدد ِ صحیح، نقطه تغییر نمیکند. حالت ی را بررسی میکنم که هَمیلتِنی مستقل-از-زمان است. در این صورت معادله یِ حرکت برا یِ مختصات ِ زاویه (4413) است. از (4413) دیده میشود برا یِ هر i، اگر ν^i صفر نباشد، یک زمان هست که ϑ^i به اندازه یِ یک تغییر میکند. C_i را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{C}_i(\mathsf{A}) = \frac{1}{\nu^i(\mathsf{A})} \qquad \nu^i(\mathsf{A}) \neq 0. \tag{4414}$$

رُشن است که

$$\vartheta^i\{t_0 + \mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]\} = \vartheta^i(t_0) + 1, \quad \nu^i(\mathsf{A}) \neq 0. \tag{4415}$$

و $|\mathsf{C}_i|$ دُره یِ حرکت برا یِ ϑ^i است: $|\mathsf{C}_i|$ کوچکترین زمان ِ مثبت ی ست که به ازا یِ آن ϑ^i به اندازه یِ یک عدد ِ صحیح تغییر میکند.

البته در حالت ِ کلی جواب ِ معادله یِ حرکت دُرِئی نیست: نقطه تکرار میشود، اگر تغییر ِ همه یِ ϑ^iصحیح باشد. شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که تغییر ِ ϑ^i صحیح باشد، این است که زمان به اندازه یِ مضرب ی صحیح از C_i تغییر کند:

$$[\vartheta^i(t) - \vartheta^i(t_0)] \in \mathbb{Z}. \tag{4416}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{t - t_0}{\mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]} \in \mathbb{Z}. \tag{4417}$$

شرط ِ این که نقطه تکرار شود این است که (4416) برا یِ همه یِ i ها برقرار باشد. چنین میشود، اگر و تنها اگر

$$\forall\, i \mid \nu^i[\mathsf{A}(t_0)] \neq 0 : \\ \frac{t-t_0}{\mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]} \in \mathbb{Z}. \tag{4418}$$

این هم یعنی $(t-t_0)$ یک مضرب ِ مشترک ِ همه یِ $\mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]$ ها ست (برا یِ آن i ها که ν^i صفر نیست). یک مقدار ِ ناصفر برا یِ $(t-t_0)$ هست که چنین-شرط ی را براورَد، اگر و تنها اگر برا یِ هر i و j (که ν^i و ν^j هر-دُ ناصفر َند) نسبت ِ $\mathsf{C}_j[\mathsf{A}(t_0)]$ به $\mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]$ برابر با نسبت ِ دُ عدد ِ صحیح باشد، یعنی نسبت ِ $\mathsf{C}_j[\mathsf{A}(t_0)]$ به $\mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]$ گویا باشد:

$$\forall\,(i,j) \mid \{\nu^i[\mathsf{A}(t_0)] \neq 0\} \wedge \{\nu^j[\mathsf{A}(t_0)] \neq 0\} : \\ \frac{\mathsf{C}_j[\mathsf{A}(t_0)]}{\mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]} \in \mathbb{Q}. \tag{4419}$$

که $\mathbb{Q}$ مجموعه یِ عددها یِ گویا ست. البته (4419) همئرز است با این که برا یِ هر i و j (که ν^i و ν^j هر-دُ ناصفر َند) نسبت ِ $\nu^j[\mathsf{A}(t_0)]$ به $\nu^i[\mathsf{A}(t_0)]$ برابر با نسبت ِ دُ عدد ِ صحیح باشد، یعنی نسبت ِ $\nu^j[\mathsf{A}(t_0)]$ به $\nu^i[\mathsf{A}(t_0)]$ گویا باشد:

$$\forall\,(i,j) \mid \{\nu^i[\mathsf{A}(t_0)] \neq 0\} \wedge \{\nu^j[\mathsf{A}(t_0)] \neq 0\} : \\ \frac{\nu^j[\mathsf{A}(t_0)]}{\nu^i[\mathsf{A}(t_0)]} \in \mathbb{Q}. \tag{4420}$$

گیرم چنین است. در این صورت عددها یی هستند که مضرب ِ مشترک ِ (باضریبها-یِ-صحیح ِ) همه یِ $\mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]$ ها (برا یِ i ها یی که ν^i ناصفر است) هستند. کوچکترین مقدار ِ مثبت بین ِ این عددها، کوچکترین مضرب ِ مشترک ِ $\mathsf{C}_i[\mathsf{A}(t_0)]$ ها (برا یِ i ها یی که ν^i ناصفر است) است. کوچکترین مضرب ِ مشترک ِ اعضا یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ را با $\mathsf{lcm}(\mathbb{S})$ نشان میدهم. $\mathbf{C}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{C} = \mathsf{lcm}\{\mathsf{C}_i \mid \nu^i \neq 0\}. \tag{4421}$$

با یک نماد-گذاری یِ سادِتر، رابطه یِ بالا را چنین مینویسم.

$$\mathbf{C} = \mathsf{lcm}\{\mathsf{C}_i \mid i\}. \tag{4422}$$

در این نماد-گذاری، اگر بعض ی از ν^i ها صفر بودند، C_i ِ متناظر حذف میشود: به شکل ی نَ چندان دقیق، C_i ِ متناظر بینهایت است و نسبت ِ هر عدد به بینهایت صفر است، که عدد ی صحیح است. سرانجام، (4421) یا (4422) را به این شکل هم مینویسم.

$$\mathbf{C} = \mathsf{lcm}(\mathsf{C}). \tag{4423}$$

یا،

$$\mathbf{C} = \mathsf{lcm}\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{4424}$$

که $(1/\nu)$ چنین تعریف شده.

$$\frac{1}{\nu} = \left(\frac{1}{\nu^1}, \ldots, \frac{1}{\nu^{\mathrm{m}}}\right). \tag{4425}$$

مفصلتر،

$$\mathbf{C}(\mathsf{A}) = \mathsf{lcm}[\mathsf{C}(\mathsf{A})]. \tag{4426}$$

یا،

$$\mathbf{C}(\mathsf{A}) = \mathsf{lcm}\left[\frac{1}{\nu(\mathsf{A})}\right]. \tag{4427}$$

ν^i (یا قدر- ِ-مطلق ِ آن) بسامد ِ حرکت برا یِ ϑ^i است. C_i (یا قدر- ِ-مطلق ِ آن) هم دُره یِ حرکت برا یِ ϑ^i است. اگر ν^i صفر باشد، دُره یِ حرکت برا یِ ϑ^i خُش-تعریف نیست: با همه یِ تغییر- ِ-زمانها تغییر ِ ϑ^i صحیح (صفر) است. اگر نسبت ِ همه یِ جفت- ِ-بسامدها (یا جفت- ِ-دُرِها) گویا باشد، $\mathbf{C}$ خُش-تعریف است و دُره یِ حرکت است. در این حالت بسامد ِ حرکت وارون ِ دُره تعریف میشود. بسامد ِ حرکت را با $\boldsymbol{\nu}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\mathbf{C}}. \tag{4428}$$

مفصلتر،

$$\boldsymbol{\nu}(\mathsf{A}) = \frac{1}{\mathbf{C}(\mathsf{A})}. \tag{4429}$$

به این ترتیب،

$$\frac{1}{\boldsymbol{\nu}} = \mathsf{lcm}\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{4430}$$

مفصلتر،

$$\frac{1}{\boldsymbol{\nu}(\mathsf{A})} = \mathsf{lcm}\left[\frac{1}{\nu(\mathsf{A})}\right]. \tag{4431}$$

البته در وجود و محاسبه یِ دُره یا بسامد، بسامدها یِ صفر کنار گذاشته میشوند. حالت ِ بدیهی یِ متناظر با این که همه یِ بسامدها صفر باشند، حرکت ی ست که در آن نقطه ثابت میمانَد.

حالت ِ کلیتر ِ انتگرال-پذیری این است که تابعیها یی که بر-لاک ثابت َند، دامنه یِ شان فضا-یِ-فاز- ِ-گسترش-یافته است. یعنی احتمالَن وابستگی یِ صریح به زمان هم دارند. در این صورت میشود به I_1 تا I_{m} یک ثابت- ِ-حرکت ِ دیگر (I_0) افزود:

$$I_0 = H_\tau. \tag{4432}$$

که H_τ هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی یِ متناظر با سیستم است. I_0 بر-لاک ثابت است و کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ (گسترش-یافته یِ) آن با I_1 تا I_{m} هم صفر است:

$$\{I_0, I_i\}_\tau = 0. \tag{4433}$$

به این ترتیب،

$$\{I_\alpha, I_\beta\}_\tau = 0. \tag{3214}$$

و البته،

$$\{I_\alpha, H_\tau\}_\tau = 0. \tag{3215}$$

و مسئله شبیه ِ حالت ِ خاص میشود، که I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ تابعیها یی از فضا-یِ-فاز بودند. از جمله، میشود هَمیلتِنی یِ فضا-زمانی را خُد ِ p گرفت:

$$H_\tau = \mathsf{p}. \tag{4434}$$

در این صورت،

$$I_0 = \mathsf{p}. \tag{3753}$$

البته استوانه-یِ-ناورداها یِ فضا-زمان- ِ-فاز نمیتوانند چنبره باشند: طی ِ تحول، خُد ِ زمان تکرار نمیشود و کران-دار نمیمانَد. پس استوانه-یِ-فاز فشرده نیست.

101 کنش-ُ-زاویه و اَبَرانتگرال-پذیری

یک سیستم را بررسی میکنم که فضا-یِ-فاز ِ متناظر با آن $(2\,\mathfrak{m})$ بُعدی ست. گیرم $\mathfrak{m}$ تابعی از فضا-یِ-فاز هستند که پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، یعنی تابعیها یِ I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ از فضا-یِ-فاز هستند که مستقل-از-هم َند و

$$\{I_i, I_j\} = 0. \tag{3222}$$

گیرم I_i ها با H (هَمیلتِنی یِ متناظر با سیستم) پُوسُنی یَند:

$$\{I_i, H\} = 0. \tag{3223}$$

پس سیستم انتگرال-پذیر است. از جمله نتیجه میشود هَمیلتِنی تابع ِ فقط I (و احتمالَن زمان) است.

متناظر با هر x در فضا-یِ-فاز، $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ یک استوانه یِ $\mathfrak{m}$ بُعدی ست. حالت ی را بررسی میکنم که استوانه-یِ-فاز-ها چنبره اند:

$$[\mathbb{O}(J_I)](x) = \mathbb{K}^{\mathfrak{m}}. \tag{4290}$$

متغیر- ِ-کنشها یِ متناظر با A نشان میدهم. گیرم مشتق ِ A نسبت به I ناتکین است:

$$\ker(\mathbf{D}_I\,\mathsf{A}) = \{0\}. \tag{4292}$$

در این صورت (مُضعَن) I تابع ِ A است، و هَمیلتنی را هم میشود (مُضعَن) بر حسب ِ فقط A (و احتمالَن زمان) نوشت. مقدار ِ A تابع ِ فقط I است: هر مقدار ِ I با فقط یک مقدار برا یِ A متناظر است. اگر این تناظر یک-به-یک باشد، یعنی هر مقدار ِ A هم با فقط یک مقدار برا یِ I متناظر باشد، I تابع ِ فقط A است، و هَمیلتِنی را هم میشود بر حسب ِ فقط A (و احتمالَن زمان) نوشت. از این پس فرض میکنم چنین است.

متغیر- ِ-زاویِها یِ متناظر با ϑ نشان میدهم. شرط ِ لازم برا یِ این که این سیستم اَبَرانتگرال-پذیر باشد، این است که دست- ِ-کم یک تابعی یِ I' از فضا-یِ-فاز باشد، چنان که I' و I_1 تا $I_{\mathfrak{m}}$ مستقل-از-هم َند، و I' بر-لاک ثابت است. کلیتر، گیرم $\mathfrak{l}$ ثابت- ِ-حرکت ِ اضافی هست: I'_1 تا $I'_{\mathfrak{l}}$ تابعیها یی از فضا-یِ-فاز َند، I'_1 تا $I'_{\mathfrak{l}}$ و A_1 تا $\mathsf{A}_{\mathfrak{m}}$ مستقل-از-هم َند، و I'_1 تا $I'_{\mathfrak{l}}$ بر-لاک ثابت َند. بسط ِ I' بر حسب ِ متغیرها یِ کنش و زاویه چنین است.

$$I' = I'^{m}\,\Theta_{m}. \tag{4435}$$

مفصلتر،

$$I'_{\mathfrak{k}}(\vartheta,\mathsf{A}) = [I'^{m}_{\mathfrak{k}}(\mathsf{A})]\,\Theta_{m}(\vartheta). \tag{4436}$$

این که I' و A مستقل-از-هم َند، همئرز است با این که یک مجموعه یِ خطی-مستقل ِ n هست که $\mathfrak{l}$ عضو دارد، و برا یِ هر $\mathfrak{k}$ مقدار ِ $I'^{n_{\mathfrak{k}}}_{\mathfrak{k}}$ ناصفر است:

$$n = \{(\mathfrak{k}, n_{\mathfrak{k}}) \mid 1 \le \mathfrak{k} \le \mathfrak{l}\}. \tag{4437}$$

$$\forall\,\mathfrak{k}:$$

$$I'^{n_{\mathfrak{k}}}_{\mathfrak{k}} \neq 0. \tag{4438}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial\,[\Theta_{m}(\vartheta)]}{\partial\,\vartheta^{i}} = 2\,\pi\,\mathrm{i}\,m_{i}\,\Theta_{m}(\vartheta). \tag{4439}$$

پس،

$$\dot{\Theta}_{m} \overset{\mathrm{ns}}{=} 2\,\pi\,\mathrm{i}\,(m\,\dot{\vartheta})\,\Theta_{m}. \tag{4440}$$

مشتق ِ I' نسبت به زمان چنین میشود.

$$\dot{I}' \stackrel{\text{ns}}{=} \sum_m \left\{ \frac{\partial\,[I'^m(\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}_k}\,\dot{\mathsf{A}}_k + 2\,\pi\,\mathrm{i}\,(m\,\dot{\vartheta})\,I'^m(\mathsf{A}) \right\}\,\Theta_m(\vartheta). \tag{4441}$$

از این که سیستم انتگرال-پذیر است، نتیجه میشود A بر-لاک ثابت است:

$$\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4442}$$

و مشتق ِ زمانی یِ ϑ تابع ِ فقط زمان و A است:

$$\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu(t,\mathsf{A}). \tag{4443}$$

به این ترتیب،

$$\dot{I}' \stackrel{\text{ns}}{=} 2\,\pi\,\mathrm{i}\,\sum_m (m\,\nu)\,I'^m\,\Theta_m. \tag{4444}$$

I' بر-لاک ثابت است:

$$\dot{I}' \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4445}$$

این، با استفاده از (4444)، همئرز است با این که

$$\forall\,m:$$

$$(m\,\nu)\,I'^m_{\mathfrak{k}} = 0. \tag{4446}$$

پس، با استفاده از (4438)،

$$n_{\mathfrak{k}}\,\nu = 0. \tag{4447}$$

مفصلتر،

$$n_{\mathfrak{k}\,i}\,\nu^i = 0. \tag{4448}$$

گیرم (4447) برقرار است. رُشن است که اگر $j_{\mathfrak{k}}$ صحیح باشند، آنگاه

$$j_{\mathfrak{k}}\, n_{\mathfrak{k}\, i}\, \nu^i = 0. \tag{4449}$$

البته برا یِ این که (4449) برقرار باشد، لازم نیست $j_{\mathfrak{k}}$ صحیح باشد. اما صحیح-بودن ِ $j_{\mathfrak{k}}$ تضمین میکند همه یِ $(j_{\mathfrak{k}}\, n_{\mathfrak{k}\, i})$ ها صحیح َند. گیرم $l_{\mathfrak{k}}$ یک شمارنده یِ مشترک ِ $n_{\mathfrak{k}\, i}$ ها ست:

$$\forall\, i :$$
$$\frac{n_{\mathfrak{k}\, i}}{l_{\mathfrak{k}}} \in \mathbb{Z}. \tag{4450}$$

رُشن است که

$$\frac{n_{\mathfrak{k}\, i}}{l_{\mathfrak{k}}}\, \nu^i = 0. \tag{4451}$$

باز، برا یِ این که (4451) برقرار باشد لازم نیست $l_{\mathfrak{k}}$ یک شمارنده یِ مشترک ِ $n_{\mathfrak{k}\, i}$ ها باشد. اما این که $l_{\mathfrak{k}}$ یک شمارنده یِ مشترک ِ $n_{\mathfrak{k}\, i}$ ها باشد تضمین میکند $(n_{\mathfrak{k}\, i}/l_{\mathfrak{k}})$ ها صحیح َند. از جمله، اگر $l_{\mathfrak{k}}$ بزرگترین شمارنده یِ مشترک ِ $n_{\mathfrak{k}\, i}$ ها باشد چنین است.

بزرگترین شمارنده یِ مشترک ِ اعضا یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ را با $\mathsf{gcd}(\mathbb{S})$ نشان میدهم. $\mathsf{gcd}\{n_{\mathfrak{k}\, i} \mid i\}$ را با $\underline{n}_{\mathfrak{k}}$ نشان میدهم:

$$\underline{n}_{\mathfrak{k}} = \mathsf{gcd}\{n_{\mathfrak{k}\, i} \mid i\}. \tag{4452}$$

$\mathsf{gcd}\{n_{\mathfrak{k}\, i} \mid i\}$ را با $\mathsf{gcd}(n_{\mathfrak{k}})$ هم نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\underline{n}_{\mathfrak{k}} = \mathsf{gcd}(n_{\mathfrak{k}}). \tag{4453}$$

نسبت ِ $(n_{\mathfrak{k}\, i}/\underline{n}_{\mathfrak{k}})$ را با $n'_{\mathfrak{k}\, i}$ نشان میدهم:

$$n'_{\mathfrak{k}\, i} = \frac{n_{\mathfrak{k}\, i}}{\underline{n}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4454}$$

به این ترتیب،

$$n'_{\mathfrak{k}} = \frac{n_{\mathfrak{k}}}{\underline{n}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4455}$$

رُشن است که

$$\forall i :$$
$$n'_{\mathfrak{k}\,i} \in \mathbb{Z}. \tag{4456}$$

و البته،

$$\mathsf{gcd}(n'_{\mathfrak{k}}) = 1. \tag{4457}$$

$n'_{\mathfrak{k}\,i}$ ها (برا یِ هر $\mathfrak{k}$) نسبت بهم اول َند: $n'_{\mathfrak{k}\,i}$ ها را نمیشود کوچکتر کرد، چنان که ضریبها یِ حاصل صحیح بمانند و با $n'_{\mathfrak{k}_i}$ ها متناسب باشند. یعنی، گیرم

$$\forall i :$$
$$\frac{n'_{\mathfrak{k}\,i}}{l_{\mathfrak{k}}} \in \mathbb{Z}. \tag{4458}$$

در این صورت،

$$|l_{\mathfrak{k}}| = 1. \tag{4459}$$

همچنین،

$$n'_{\mathfrak{k}\,i}\,\nu^i = 0. \tag{4460}$$

شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که ثابت- ِ-حرکتها یِ اضافی یی باشند (که تابع ِ A نیستند) این است که $n_{\mathfrak{k}}$ ها یِ ناصفر ی باشند که $(n_{\mathfrak{k}}\,\nu)$ صفر باشد. یعنی ثابت- ِ-حرکتها یِ اضافی یی هستند (که تابع ِ A نیست)، اگر و تنها اگر بسامدها با ضریبها یِ صحیح خطی-وابسته باشند.

اگر بسامدها با ضریبها یِ صحیح خطی-وابسته باشند، ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی را میشود در یک عدد ِ صحیح ضرب کرد، و ترکیب- ِ-خطی همچنان صفر میمانَد.

و اگر بسامدها با ضریبها یِ صحیح خطی-وابسته باشند، ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی را میشود بر یک شمارنده-یِ-مشترک ِشان تقسیم کرد، و نتیجه یک دسته ضریب ِ صحیح است. و البته ترکیب- ِ-خطی

همچنان صفر میمانَد. از جمله میشود ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی را بر بزرگترین شمارنده یِ مشترک ِ شان تقسیم کرد. نتیجه یک دسته ضریب ِ صحیح است. و البته ترکیب- ِ-خطی همچنان صفر میمانَد.

از این که بسامدها با ضریبها یِ صحیح خطی-وابسته اند، رابطه یِ (4460) به دست میئاید. از آن هم نتیجه میشود

$$\dot{\Theta}_{n'_{\mathfrak{k}}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4461}$$

همچنین،

$$j_{\mathfrak{k}} \in \mathbb{Z}. \quad \Rightarrow$$
$$\dot{\Theta}_{j_{\mathfrak{k}}\, n_{\mathfrak{k}}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4462}$$

و البته،

$$j_{\mathfrak{k}} \in \mathbb{Z}. \quad \Rightarrow$$
$$\dot{\Theta}_{j_{\mathfrak{k}}\, n'_{\mathfrak{k}}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4463}$$

به این ترتیب، وقت ی یک ثابت- ِ-حرکت ِ اضافی هست (که تابع ِ A نیست)، که یعنی بسامدها با ضریبها یِ صحیح خطی-وابسته اند، یک دسته ثابت- ِ-حرکت اضافی هست. البته این ثابت- ِ-حرکتها یِ اضافی مستقل-از-هم نیستند. دیده میشود

$$j_{\mathfrak{k}} \in \mathbb{Z}. \quad \Rightarrow$$
$$\Theta_{j_{\mathfrak{k}}\, n_{\mathfrak{k}}} = (\Theta_{n'_{\mathfrak{k}}})^{j_{\mathfrak{k}}\, \underline{n}_{\mathfrak{k}}}. \tag{4464}$$

گیرم رابطه یِ (4447) برقرار است، و n خطی-مستقل است. در حالت ِ کلی، $n_{\mathfrak{k}\,i}$ ها به t و A وابسته اند. گیرم این وابستگی پیوسته است، یعنی هر یک از $n_{\mathfrak{k}\,i}$ ها تابع ی پیوسته از (t, A) است. در این صورت هر یک از $n_{\mathfrak{k}\,i}$ ها، چون مقدار َش صحیح است، ثابت است. البته در واقع نسبت ِ $n_{\mathfrak{k}\,i}$ ها به هم است که مهم است. این که n خطی-مستقل است، یعنی رتبه یِ ماتریس ِ n برابر با $\mathfrak{l}$ است:

$$\mathsf{rank}(n) = \mathfrak{l}. \tag{4465}$$

و این یعنی n یک زیرماتریس ِ $(\mathfrak{l}\times\mathfrak{l})$ دارد که ناتکین است. بی آن که از کلیت کاسته شود (در صورت ِ لزوم با جا-به-جا-کردن ِ ستونها) چنین میگیرم که زیرماتریس ِ شامل ِ $\mathfrak{l}$ ستون ِ اول ناتکین است. متناظر با کمیت ِ شاخص-دار ِ $\mathfrak{X}$ که شاخصها یَ ش مقدارها یِ از 1 تا $\mathfrak{m}$ را میگیرند، $\mathfrak{X}_{\mathtt{i}}$ را تعریف میکنم که شاخصها یَ ش مقدارها یِ از 1 تا $\mathfrak{l}$ را میگیرند، و $\mathfrak{X}_{\mathtt{ii}}$ را تعریف میکنم، که شاخصها یَ ش مقدارها یِ از $(\mathfrak{l}+1)1$ تا $\mathfrak{m}$ را میگیرند؛ چنان که

$$\mathfrak{X}^i = (\mathfrak{X}_{\mathtt{i}})^i, \quad 1 \le i \le \mathfrak{l}. \tag{4466}$$

$$\mathfrak{X}^i = (\mathfrak{X}_{\mathtt{ii}})^i, \quad \mathfrak{l} < i \le \mathfrak{m}. \tag{4467}$$

این تعریف، برا یِ کمیتها یِ با شاخص ِ پایین هم مشابه است. از جمله n به $n_{\mathtt{i}}$ و $n_{\mathtt{ii}}$ تفکیک میشود، که $n_{\mathtt{i}}$ هم ان $\mathfrak{l}$ ستون ِ اول ِ n، و $n_{\mathtt{ii}}$ هم ان $(\mathfrak{m}-\mathfrak{l})$ ستون ِ آخر ِ n است.

ماتریس ِ k را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{k} = (n_{\mathtt{i}})^{-1}\, n. \tag{4468}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{k}_{\mathtt{i}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}}. \tag{4469}$$

$$\mathsf{k}_{\mathtt{ii}} = (n_{\mathtt{i}})^{-1}\, n_{\mathtt{ii}}. \tag{4470}$$

همچنین، دیده میشود

$$\mathsf{k}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\mathtt{i}} + \mathsf{k}_{\mathtt{ii}}\,\mathfrak{X}_{\mathtt{ii}} \tag{4471}$$

البته،

$$n = [\mathsf{diag}(\underline{n})]\, n'. \tag{4472}$$

که $\mathsf{diag}(\underline{n})$ یک ماتریس ِ قطری ست، که اعضا یِ رو-یِ-قطر َ ش مئلفِها یِ $\underline{n}$ اند:

$$[\mathsf{diag}(\underline{n})]_{\mathfrak{k}}{}^{\mathsf{j}} = \underline{n}_{\mathfrak{k}}\,\delta^{\mathsf{j}}_{\mathfrak{k}}. \tag{4473}$$

به این ترتیب،

$$(n_{\mathtt{i}})^{-1}\, n = (n'_{\mathtt{i}})^{-1}\, n'. \tag{4474}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{k} = (n'_{\mathtt{i}})^{-1}\, n'. \tag{4475}$$

دیده میشود رابطه یِ (4447) همئرز است با

$$\nu_{\mathtt{i}} = -\mathsf{k}_{\mathtt{ii}}\, \nu_{\mathtt{ii}}. \tag{4476}$$

از کروشه-یِ-پُوَسُنها یِ ϑ^i ها با A_j ها نتیجه میشود

$$\{\Theta_{n'_{\mathfrak{k}}}, \mathsf{A}\} = 2\,\pi\,\mathrm{i}\, n'_{\mathfrak{k}}\, \Theta_{n'_{\mathfrak{k}}}. \tag{4477}$$

روابط ِ (4475) و (4477) نتیجه میدهند

$$\{\Theta_{n'_{\mathfrak{k}}}, \mathsf{A} - \mathsf{A}_{\mathtt{i}}\mathsf{k}\} = 0. \tag{4478}$$

تابعیها یِ $\tilde{I}_1$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{l}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{I}_i = \Theta_{n'_i}, \qquad 1 \le i \le \mathfrak{l}. \tag{4479}$$

$$\tilde{I}_i = (\mathsf{A} - \mathsf{A}_{\mathtt{i}}\mathsf{k})_i, \qquad \mathfrak{l} < i \le \mathfrak{m}. \tag{4480}$$

$$\tilde{I}_i = \mathsf{A}_{i-\mathfrak{m}}, \qquad \mathfrak{m} < i \le (\mathfrak{m}+\mathfrak{l}). \tag{4481}$$

مفصلتر ِ (4480) این است.

$$\tilde{I}_i = \mathsf{A}_i - \sum_{j=1}^{\mathfrak{l}} \mathsf{k}^j{}_i\, \mathsf{A}_j, \qquad \mathfrak{l} < i \le \mathfrak{m}. \tag{4482}$$

وارون ِ روابط ِ (4479) تا (4481) هم چنین میشود.

$$\Theta_{n'_i} = \tilde{I}_i, \qquad 1 \le i \le \mathfrak{l}. \tag{4483}$$

$$\mathsf{A}_i = \tilde{I}_i + \sum_{j=1}^{\mathfrak{l}} \mathsf{k}^j{}_i\, \tilde{I}_{\mathfrak{m}+i}, \qquad \mathfrak{l} < i \le \mathfrak{m}. \tag{4484}$$

$$\mathsf{A}_i = \tilde{I}_{\mathfrak{m}+i}, \qquad 1 \le i \le \mathfrak{l}. \tag{4485}$$

$\Theta_{n'_1}$ تا $\Theta_{n'_\mathfrak{l}}$ و A_1 تا $\mathsf{A}_\mathfrak{m}$ مستقل-از-هم َند و تعداد ِ شان $(\mathfrak{m}+\mathfrak{l})$ است. $\Theta_{n'_1}$ تا $\Theta_{n'_\mathfrak{l}}$ و A_1 تا $\mathsf{A}_\mathfrak{m}$ بر حسب ِ $(\mathfrak{m}+\mathfrak{l})$ تابعی ی ِ $\tilde{I}_1$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{l}}$ نوشته شده اند. پس $\tilde{I}_1$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{l}}$ هم مستقل-از-هم َند.

همچنین، A_i ها بر-لاک ثابت َند. از این، همراه با (4480) و (4481)، نتیجه میشود

$$\dot{\tilde{I}}_i \overset{\mathrm{ns}}{=} 0, \quad \mathfrak{l} < i \le (\mathfrak{m}+\mathfrak{l}). \tag{4486}$$

از (4461) و (4479) هم دیده میشود

$$\dot{\tilde{I}}_i \overset{\mathrm{ns}}{=} 0, \quad 1 \le i \le \mathfrak{l}. \tag{4487}$$

به این ترتیب،

$$\dot{\tilde{I}}_i \overset{\mathrm{ns}}{=} 0, \quad 1 \le i \le (\mathfrak{m}+\mathfrak{l}). \tag{4488}$$

یعنی $\tilde{I}_1$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{l}}$، بر-لاک ثابت َند.

سرانجام، A_i ها پُؤَسُنی یَند. از این، همراه با (4480) و (4481)، نتیجه میشود $\tilde{I}_{\mathfrak{l}+1}$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{l}}$ پُؤَسُنی یَند:

$$\forall\,(i,j) \mid \{[\mathfrak{l} < i \le (\mathfrak{m}+\mathfrak{l})] \wedge [\mathfrak{l} < j \le (\mathfrak{m}+\mathfrak{l})]\} : \\ \{\tilde{I}_i, \tilde{I}_j\} = 0. \tag{4489}$$

از (4478) و (4479) و (4480) هم دیده میشود

$$\forall\,(i,j) \mid [(1 \le i \le \mathfrak{l}) \wedge (\mathfrak{l} < j \le \mathfrak{m})] : \\ \{\tilde{I}_i, \tilde{I}_j\} = 0. \tag{4490}$$

از این که ϑ^i ها پُؤَسُنی یَند، همراه با (4479)، نتیجه میشود

$$\forall\,(i,j)\mid[(1\le i\le \mathfrak{l})\wedge(1\le j\le \mathfrak{l})]:$$
$$\{\tilde{I}_i,\tilde{I}_j\}=0. \tag{4491}$$

و البته (4489) نتیجه میدهد

$$\forall\,(i,j)\mid[(\mathfrak{l}<i\le \mathfrak{m})\wedge(\mathfrak{l}<j\le \mathfrak{m})]:$$
$$\{\tilde{I}_i,\tilde{I}_j\}=0. \tag{4492}$$

به این ترتیب، از (4490) و (4491) و (4492) نتیجه میشود

$$\forall\,(i,j)\mid[(1\le i\le \mathfrak{m})\wedge(1\le j\le \mathfrak{m})]:$$
$$\{\tilde{I}_i,\tilde{I}_j\}=0. \tag{4493}$$

نتیجه این که $(\mathfrak{m}+\mathfrak{l})$ تابعی یِ $\tilde{I}_1$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{l}}$ مستقل-از-هم َند؛ بر-لاک ثابت َند؛ j هر چه باشد، $\mathfrak{m}$ تا از این تابعیها هستند که پُؤَسُنی یَند و یک ی از آنها $\tilde{I}_j$ است: اگر j بزرگتر از $\mathfrak{m}$ نباشد، اینها را $\tilde{I}_1$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}}$ میگیرم، و اگر j بزرگتر از $\mathfrak{l}$ باشد، اینها را $\tilde{I}_{\mathfrak{l}+1}$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{l}}$ میگیرم.

پس سیستم اَبَرانتگرال-پذیر است.

با استفاده از $\tilde{I}_1$ تا $\tilde{I}_{\mathfrak{m}}$، یک دسته مختصات ِ کانُنیک (مختصات ِ پریم-دار) میسازم، که تکانِها یِ متناظر با آن چنین َند.

$$p'_i=n'_i\,\vartheta,\qquad 1\le i\le \mathfrak{l}. \tag{4494}$$
$$p'_i=(\mathsf{A}-\mathsf{A_i}\mathsf{k})_i,\quad \mathfrak{l}<i\le \mathfrak{m}. \tag{4495}$$

اینها یعنی

$$\exp(2\,\pi\,\mathrm{i}\,p'_i)=\tilde{I}_i,\qquad 1\le i\le \mathfrak{l}. \tag{4496}$$
$$p'_i=\tilde{I}_i,\qquad \mathfrak{l}<i\le \mathfrak{m}. \tag{4497}$$

متغیرها یِ تابعی-یِ-مولد ِ $\tilde{\Upsilon}$ را، که مختصات- ِ-کانُنیک ِ (ϑ, A) را به مختصات- ِ-کانُنیک ِ (q', p') تبدیل میکند، $\mathsf{A}_{\mathtt{i}}$ و $\vartheta_{\mathtt{ii}}$ تا $\vartheta^{\mathfrak{m}}$، و p' میگیرم. به این ترتیب،

$$-\vartheta^i = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathsf{A}_i}, \qquad 1 \leq i \leq \mathfrak{l}. \tag{4498}$$

$$\mathsf{A}_i = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\vartheta^i}, \qquad \mathfrak{l} < i \leq \mathfrak{m}. \tag{4499}$$

$$q'^i = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,p'_i}. \tag{4500}$$

روابط ِ (4498) و (4499) چنین میشوند.

$$-\vartheta_{\mathtt{i}} = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathtt{i}}}. \tag{4501}$$

$$\mathsf{A}_{\mathtt{ii}} = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\vartheta_{\mathtt{ii}}}. \tag{4502}$$

رابطه یِ (4494) چنین است.

$$p'_{\mathtt{i}} = n'\,\vartheta. \tag{4503}$$

یا،

$$p'_{\mathtt{i}} = n'_{\mathtt{i}}\,\vartheta_{\mathtt{i}} + n'_{\mathtt{ii}}\,\vartheta_{\mathtt{ii}}. \tag{4504}$$

رابطه یِ (4495) هم میشود

$$p'_{\mathtt{ii}} = \mathsf{A}_{\mathtt{ii}} - \mathsf{A}_{\mathtt{i}}\,\mathsf{k}_{\mathtt{ii}}. \tag{4505}$$

از رابطه یِ (4504) نتیجه میشود

$$\vartheta_{\mathtt{i}} = (n'_{\mathtt{i}})^{-1}\,p'_{\mathtt{i}} - \mathsf{k}_{\mathtt{ii}}\,\vartheta. \tag{4506}$$

از (4501) و (4506) نتیجه میشود

$$\tilde{\Upsilon} = \mathsf{A}_i\,[-(n'_{\mathtt{i}})^{-1}\,p'_{\mathtt{i}} + \mathsf{k}_{\mathtt{ii}}\,\vartheta_{\mathtt{ii}}] + \tilde{\Upsilon}^{\backprime}. \tag{4507}$$

که $\tilde{\Upsilon}^{\text{۱}}$ تابع ِ فقط $\vartheta_{\mathtt{ii}}$ و p' است، یعنی مشتق َش نسبت به $\mathsf{A}_{\mathtt{i}}$ صفر است:

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱}}}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathtt{i}}}=0. \tag{4508}$$

از (4502) و (4505) نتیجه میشود

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,\vartheta_{\mathtt{ii}}}=p'_{\mathtt{ii}}+\mathsf{A}_{\mathtt{i}}\,\mathsf{k}_{\mathtt{ii}}. \tag{4509}$$

که، با استفاده از (4507)، نتیجه میدهد

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱}}}{\partial\,\vartheta_{\mathtt{ii}}}=p'_{\mathtt{ii}}. \tag{4510}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{\Upsilon}^{\text{۱}}=p'_{\mathtt{ii}}\,\vartheta_{\mathtt{ii}}+\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}. \tag{4511}$$

که $\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}$ تابع ِ فقط p' است، یعنی مشتق َش نسبت به $\mathsf{A}_{\mathtt{i}}$ و $\vartheta_{\mathtt{ii}}$ صفر است:

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathtt{i}}}=0. \tag{4512}$$

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}}{\partial\,\vartheta_{\mathtt{ii}}}=0. \tag{4513}$$

رابطه یِ (4511) را در (4507) میگذارم:

$$\tilde{\Upsilon}=\mathsf{A}_{\mathtt{i}}\,[-(n'_{\mathtt{i}})^{-1}\,p'_{\mathtt{i}}+\mathsf{k}_{\mathtt{ii}}\,\vartheta_{\mathtt{ii}}]+p'_{\mathtt{ii}}\,\vartheta_{\mathtt{ii}}+\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}. \tag{4514}$$

به این ترتیب، (4500) چنین میشود

$$q'_{\mathtt{i}}=-\mathsf{A}_{\mathtt{i}}\,(n'_{\mathtt{i}})^{-1}+\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}}{\partial\,p'_{\mathtt{i}}}. \tag{4515}$$

$$q'_{\mathtt{ii}}=\vartheta_{\mathtt{ii}}+\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}}{\partial\,p'_{\mathtt{ii}}}. \tag{4516}$$

$\tilde{\Upsilon}^{\text{۱۱}}$ دلبخاه است. یک انتخاب ِ ساده این است که آن را صفر بگیرم. با این انتخاب،

$$\tilde{\Upsilon}=\mathsf{A}_{\mathtt{i}}\,[-(n'_{\mathtt{i}})^{-1}\,p'_{\mathtt{i}}+\mathsf{k}_{\mathtt{ii}}\,\vartheta_{\mathtt{ii}}]+p'_{\mathtt{ii}}\,\vartheta_{\mathtt{ii}}. \tag{4517}$$

و روابطِ (4515) و (4516) چنین میشوند.

$$q'_{\mathtt{i}} = -\mathsf{A}_{\mathtt{i}}\,(n'_{\mathtt{i}})^{-1}. \tag{4518}$$

$$q'_{\mathtt{ii}} = \vartheta_{\mathtt{ii}}. \tag{4519}$$

بر اساسِ مختصات-ِ-کانُنیکِ پریم-دار، در واقع بر اساسِ تکانِها یِ پریم-دار، میشود یک دسته یِ دیگرِ استوانه-یِ-فاز ساخت. استوانه-یِ-فازِ جدیدِ (پریم-دارِ) متناظر با x هم ان $[\mathbb{O}(J_{\mathsf{A}})](x)$ است. استوانه-یِ-فازِ قدیمِ متناظر با x هم $[\mathbb{O}(J_I)](x)$ است، که هم ان $[\mathbb{O}(J_{p'})](x)$ است. استوانه-یِ-فازها یِ قدیم و جدید را با، به-ترتیب، $\mathbb{K}_1$ و $\mathbb{K}_2$، و اشتراکِ استوانه-یِ-فازها یِ قدیم و جدید را با $\mathbb{K}_{1,2}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{K}_1(x) = [\mathbb{O}(J_{\mathsf{A}})](x). \tag{4520}$$

$$\mathbb{K}_2(x) = [\mathbb{O}(J_{p'})](x). \tag{4521}$$

$$\mathbb{K}_{1,2}(x) = [\mathbb{K}_1(x)] \cap [\mathbb{K}_2(x)]. \tag{4522}$$

A بر $\mathbb{K}_1(x)$ ثابت است. p' هم بر $\mathbb{K}_2(x)$ ثابت است:

$$\mathsf{res}[\mathsf{A}; \mathbb{K}_1(x)] = \text{constant}. \tag{4523}$$

$$\mathsf{res}[p'; \mathbb{K}_2(x)] = \text{constant}. \tag{4524}$$

پس بر $\mathbb{K}_{1,2}(x)$، هم A و هم p' ثابت است:

$$\mathsf{res}[\mathsf{A}; \mathbb{K}_{1,2}(x)] = \text{constant}. \tag{4525}$$

$$\mathsf{res}[p'; \mathbb{K}_{1,2}(x)] = \text{constant}. \tag{4526}$$

از (4505) دیده میشود اگر A بر یک مجموعه ثابت باشد، $p'_{\mathtt{ii}}$ هم بر آن مجموعه ثابت است. پس (4523) و (4524) در این خلاصه میشوند که A بر $\mathbb{K}_{1,2}(x)$ ثابت است: رابطه یِ (4525)، و این که $p'_{\mathtt{i}}$ بر $\mathbb{K}_{1,2}(x)$ ثابت است:

$$\mathsf{res}[p'_{\mathtt{i}}; \mathbb{K}_{1,2}(x)] = \text{constant}. \tag{4527}$$

از (4505) همچنین دیده میشود اگر $\mathsf{A}_{\mathtt{i}}$ و $p'_{\mathtt{ii}}$ بر یک مجموعه ثابت باشند، A هم بر آن مجموعه ثابت َند. پس (4523) و (4524) در این خلاصه میشوند که $\mathsf{A}_{\mathtt{i}}$ بر $\mathbb{K}_{1,2}(x)$ ثابت است، و p' بر $\mathbb{K}_{1,2}(x)$ ثابت است. اولی این است:

$$\mathsf{res}[\mathsf{A}'_{\mathtt{i}};\mathbb{K}_{1,2}(x)]=\text{constant}. \tag{4528}$$

دومی هم (4526) است.

A و $p'_{\mathtt{i}}$ مستقل-از-هم َند و مجموعه ِ تعداد ِ مئلفِها یِ شان $(\mathfrak{m}+\mathfrak{l})$ است. $\mathbb{K}_{1,2}$ مجموعه یِ $(\mathsf{A},p'_{\mathtt{i}})$ -ثابت است. پس بُعد َ ش $[(2\,\mathfrak{m})-(\mathfrak{m}+\mathfrak{l})]$ است:

$$\mathsf{dim}[\mathbb{K}_{1,2}(x)]=\mathfrak{m}-\mathfrak{l}. \tag{4529}$$

البته $\mathsf{A}_{\mathtt{i}}$ و p' هم مستقل-از-هم َند و مجموعه ِ تعداد ِ مئلفِها یِ شان $(\mathfrak{m}+\mathfrak{l})$ است. و $\mathbb{K}_{1,2}$ ضمنَن مجموعه یِ $(\mathsf{A}_{\mathtt{i}},p')$ -ثابت است. که این هم هم ان (4529) را نتیجه میدهد.

$p'_{\mathtt{ii}}$ پُؤَسُنی ست. علاوه بر این، $(\mathsf{A}_{\mathtt{i}},p'_{\mathtt{ii}})$ هم پُؤَسُنی ست. و در نتیجه $(\mathsf{A},p'_{\mathtt{ii}})$ پُؤَسُنی ست:

$$\{\mathsf{A},p'_{\mathtt{ii}}\}=0. \tag{4530}$$

پس،

$$\mathbf{L}_{J_{p'_{\mathtt{ii}}}}\,\mathsf{A}=0. \tag{4531}$$

این یعنی $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_1)$ بر $\mathbb{K}_1$ مماس است.

به هم ین ترتیب، $(p',p'_{\mathtt{ii}})$ پُؤَسُنی ست:

$$\{p',p'_{\mathtt{ii}}\}=0. \tag{4532}$$

پس،

$$\mathbf{L}_{J_{p'_{\mathtt{ii}}}}\,p'=0. \tag{4533}$$

این هم یعنی $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_2)$ بر $\mathbb{K}_2$ مماس است.

از این که $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_1)$ بر $\mathbb{K}_1$ مماس است، نتیجه میشود $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_{1,2})$ بر $\mathbb{K}_1$ مماس است. از این که $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_2)$ بر $\mathbb{K}_2$ مماس است هم، نتیجه میشود $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_{1,2})$ بر $\mathbb{K}_2$ مماس است. پس $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_{1,2})$ بر $\mathbb{K}_{1,2}$ مماس است.

$p'_{\mathtt{ii}}$ پُوَسُنی ست:

$$\{(p'_{\mathtt{ii}})_i,(p'_{\mathtt{ii}})_j\}=0. \tag{4534}$$

پس،

$$J_{(p'_{\mathtt{ii}})_i}\diamond J_{(p'_{\mathtt{ii}})_j}=0. \tag{4535}$$

همچنین، مئلفِها یِ $p'_{\mathtt{ii}}$ مستقل-از-هم َند. پس $J_{p'_{\mathtt{ii}}}$ خطی-مستقل است. از جمله $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_{1,2})$ خطی-مستقل است. تعداد ِ اعضا یِ مجموعه یِ $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_{1,2})$ هم برابر با $(\mathfrak{m}-\mathfrak{l})$ است:

$$\mathsf{car}[\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_{1,2})]=\mathfrak{m}-\mathfrak{l}. \tag{4536}$$

و این تعداد هم ان بُعد ِ $\mathbb{K}_{1,2}$ است:

$$\mathsf{dim}(\mathbb{K}_{1,2})=\mathfrak{m}-\mathfrak{l}. \tag{4537}$$

به این ترتیب، $\mathsf{res}(J_{p'_{\mathtt{ii}}};\mathbb{K}_{1,2})$ یک پایه برا یِ فضا یِ مماس بر $\mathbb{K}_{1,2}$ است.

میدان- ِ-برداریها یِ $\mathfrak{u}_i$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{u}_i=\mathsf{res}[J_{(\mathsf{A}-\mathsf{A}_i\,\mathsf{k})_i};\mathbb{K}_{1,2}]. \tag{4538}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{u}_i=0,\qquad 1\le i\le\mathfrak{l}. \tag{4539}$$

$$\mathfrak{u}_i=\mathsf{res}[J_{(p'_{\mathtt{ii}})_i};\mathbb{K}_{1,2}],\qquad \mathfrak{l}<i\le\mathfrak{m}. \tag{4540}$$

مجموعه یِ $\{(i,\mathfrak{u}_i)\mid \mathfrak{l}<i\le\mathfrak{m}\}$ یک پایه برا یِ فضا یِ مماس بر $\mathbb{K}_{1,2}$ است. و از (4535)، همراه با این که هر یک از $\mathfrak{u}_i$ ها بر $\mathbb{K}_{1,2}$ مماس است، و البته (4539)، نتیجه میشود

$$\mathfrak{u}_i\diamond\mathfrak{u}_j=0. \tag{3900}$$

از تعریف ِ $\mathfrak{u}_i$ ها دیده میشود

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}_i}\,(\vartheta_{\mathtt{i}})^j = \delta_i^j - \mathsf{k}^j{}_i. \tag{4541}$$

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}_i}\,(\vartheta_{\mathtt{ii}})^j = \delta_i^j. \tag{4542}$$

$$\mathbf{L}_{\mathfrak{u}_i}\,\mathsf{A} = 0. \tag{4543}$$

به این ترتیب،

$$\vartheta_{\mathtt{i}}\{[\mathsf{fl}(t\,\mathfrak{u})](x)\} = [\vartheta(x) + t]_{\mathtt{i}} - \mathsf{k}\,t. \tag{4544}$$

$$\vartheta_{\mathtt{ii}}\{[\mathsf{fl}(t\,\mathfrak{u})](x)\} = [\vartheta(x) + t]_{\mathtt{ii}}. \tag{4545}$$

$$\mathsf{A}\{[\mathsf{fl}(t\,\mathfrak{u})](x)\} = \mathsf{A}(x). \tag{4546}$$

رابطه یِ (4544) هم چنین میشود.

$$\vartheta_{\mathtt{i}}\{[\mathsf{fl}(t\,\mathfrak{u})](x)\} = \vartheta_{\mathtt{i}}(x) - \mathsf{k}_{\mathtt{ii}}\,t_{\mathtt{ii}}. \tag{4547}$$

که نشان میدهد $t_{\mathtt{i}}$ در $\mathsf{fl}(\mathrm{t}\,\mathfrak{u})$ وارد نمیشوند، چنان که انتظار میرفت. در واقع،

$$t\,\mathfrak{u} = t_{\mathtt{ii}}\,\mathfrak{u}_{\mathtt{ii}}. \tag{4548}$$

از روابط ِ (4545) و (4545) و (4547) دیده میشود $\mathsf{fl}(t\,\mathfrak{u})$ همانی ست، اگر و تنها اگر

$$\mathsf{k}_{\mathtt{ii}}\,t_{\mathtt{ii}} \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{l}}. \tag{4549}$$

$$t_{\mathtt{ii}} \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{m}-\mathfrak{l}}. \tag{4550}$$

پهنه یِ $\{(i, \mathfrak{u}_i) \mid \mathfrak{l} < i \leq \mathfrak{m}\}$ را با $\mathbb{H}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{H} = \mathsf{span}\{(i, \mathfrak{u}_i) \mid \mathfrak{l} < i \leq \mathfrak{m}\}. \tag{4551}$$

از تعریف ِ $\mathfrak{u}$ معلوم میشود

$$\mathbb{K}_{1,2}(x) = [\mathbb{O}(\mathfrak{u}_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, \mathfrak{u}_{\mathfrak{m}})](x). \tag{4552}$$

دیده شد یک $\mathbb{Hc}$ هست که یک زیرفضا یِ $\mathbb{H}$ است، با این ویژگی که اگر $\mathfrak{v}$ در $\mathbb{H}$ باشد و

$$\mathsf{res}[\mathsf{fl}(\mathfrak{v}); \mathbb{K}_{1,2}(x)] = \mathbf{1}_{\mathbb{K}_{1,2}(x)}, \tag{4553}$$

آنگاه $\mathfrak{v}$ در $\mathbb{Hc}$ است. اینجا $\mathbb{Hc}$ هم ان $\mathbb{H}$ است:

$$\mathbb{Hc} = \mathbb{H}. \tag{4554}$$

همچنین،

$$\mathsf{dim}(\mathbb{H}) = \mathfrak{m} - \mathfrak{l}. \tag{4555}$$

دیده شد $\mathbb{H}$ یک زیرمجموعه دارد ($\mathbb{Hd}$، شبکه یِ $\mathbb{H}$) که مجموعه یِ میدان- ِ-برداریها یی ست که تحدید ِ شارش ِ آنها به $\mathbb{K}_{1,2}(x)$ همانی ست:

$$\mathbb{Hd} = \{\mathfrak{w} \in \mathbb{H} \mid \mathsf{res}[\mathsf{fl}(\mathfrak{w}); \mathbb{K}_{1,2}(x)] = \mathbf{1}_{\mathbb{K}_{1,2}(x)}\}. \tag{4556}$$

$\mathbb{Hc}$، که اینجا هم ان $\mathbb{H}$ است، یک پایه یِ $\mathbb{Bc}$ دارد (مولد ِ شبکه یِ $\mathbb{H}$) که برا یِ هر $\mathfrak{w}$ که یک ترکیب- ِ-خطی از $\mathbb{Bc}$ است؛ تحدید ِ $\mathsf{fl}(\mathfrak{w})$ به $\mathbb{K}_{1,2}(x)$ همانی ست، اگر و تنها اگر همه یِ ضریبها یِ ترکیب- ِ-خطی صحیح باشند. یعنی $\mathbb{Hd}$ برابر است با مجموعه یِ همه یِ ترکیب- ِ-خطیها یِ $\mathbb{Bc}$ که ضریبها یِ شان صحیح است:

$$\mathbb{H} = \mathsf{span}(\mathbb{Bc}). \tag{4557}$$

$$\mathbb{Bc} = \{(i, \mathfrak{v}_i) \mid \mathfrak{l} < i \leq \mathfrak{m}\}. \tag{4558}$$

$$\mathbb{Hd} = \left\{ \sum_{i=\mathfrak{l}+1}^{\mathfrak{m}} \mathfrak{b}^i \, \mathfrak{v}_i \;\middle|\; (\mathfrak{b}^{\mathfrak{l}+1}, \ldots, \mathfrak{b}^{\mathfrak{m}}) \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{m}-\mathfrak{l}} \right\}. \tag{4559}$$

بسته،

$$\mathbb{Hd} = \{\mathfrak{b}_{\mathfrak{ii}} \, \mathfrak{v}_{\mathfrak{ii}} \mid \mathfrak{b}_{\mathfrak{ii}} \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{m}-\mathfrak{l}}\}. \tag{4560}$$

میدان- ِ-برداریها یِ $\mathfrak{v}_{\mathfrak{l}+1}$ تا $\mathfrak{v}_{\mathfrak{m}}$ بر $\mathbb{K}_{1,2}$ مماس َند، و تعداد ِ شان $(\mathfrak{m} - \mathfrak{l})$ است، که هم ان بُعد ِ $\mathbb{K}_{1,2}$ است:

$$\mathsf{car}(\mathbb{Bc}) = \mathsf{dim}(\mathbb{K}_{1,2}). \tag{4561}$$

همچنین $\mathrm{fl}(\mathfrak{b}_{\mathtt{ii}}\ \mathfrak{v}_{\mathtt{ii}})$ همانی ست، اگر و تنها اگر همه یِ $\mathfrak{b}^i$ ها صحیح باشند. پس $\mathbb{K}_{1,2}$ با یک چنبره یِ $(\mathfrak{m}-\mathfrak{l})$ بُعدی همانریخت است. سادِتر، $\mathbb{K}_{1,2}$ یک چنبره یِ $(\mathfrak{m}-1)$ بُعدی ست:

$$\mathbb{K}_{1,2}=\mathbb{K}^{\mathfrak{m}-\mathfrak{l}}. \tag{4562}$$

البته $\mathbb{K}_{1,2}$ هم ان یک اشتراک ِ چنبره-یِ-فاز ِ جدید با یک چنبره-یِ-فاز ِ قدیم است. پس اشتراک ِ یک چنبره-یِ-فاز ِ جدید با یک چنبره-یِ-فاز ِ قدیم یک چنبره یِ $(\mathfrak{m}-1)$ بُعدی ست: :

$$\{[\mathbb{O}(J_{\mathsf{A}})](x)\}\cap\{[\mathbb{O}(J_{p'})](x)\}=\mathbb{K}^{\mathfrak{m}-\mathfrak{l}}. \tag{4563}$$

مسیر ِ حرکت در چنبره-یِ-فاز ِ قدیم میمانَد، و در چنبره-یِ-فاز ِ جدید هم میمانَد. پس مسیر ِ حرکت در اشتراک ِ اینها میمانَد، که یک چنبره یِ $(\mathfrak{m}-\mathfrak{l})$بُعدی ست.

نتیجه این که سیستم اَبَرانتگرال-پذیر است، اگر و تنها اگر بسامدها با ضریبها یِ صحیح خطی-وابسته باشند. وقت ی $\mathfrak{l}$ دسته ضریب ِ خطی-مستقل (با مئلفِها یِ صحیح) هست که بسامدها با آنها خطی-وابسته اند، مسیر ِ حرکت در یک چنبره یِ $(\mathfrak{m}-\mathfrak{l})$ بُعدی میمانَد.

یک حالت ِ خاص این است که

$$\mathfrak{l}=\mathfrak{m}-1. \tag{4564}$$

که یعنی $(\mathfrak{m}-1)$ ثابت- ِ-حرکت ِ اضافی هست. در این حالت مسیر ِ حرکت در یک چنبره یِ یک بُعدی میمانَد. چنبره یِ یک بُعدی (تپلژیکی) هم ان دایره است. پس در این حالت مسیر ِ حرکت در یک دایره میمانَد.

یک حالت ِ خاص هم این است که

$$\mathfrak{l}=\mathfrak{m}. \tag{4565}$$

که یعنی $\mathfrak{m}$ ثابت- ِ-حرکت ِ اضافی هست. در این حالت مسیر ِ حرکت در یک چنبره یِ صفر بُعدی میمانَد. چنبره یِ صفر بُعدی یک نقطه است. پس در این حالت مسیر ِ حرکت در یک نقطه میمانَد. یعنی تحول همانی ست.

12

اختلال ِ کانُنیک، وابسته-به-زمان

102 جواب ِ معادله-یِ-حرکت، و مختصات ِ کانُنیک

هَمیلتِنی یِ متناظر با یک سیستم H است، که در حالت ِ کلی یک تابعی از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته است. گیرم جواب ِ معادله-یِ-حرکت ِ متناظر به شکل ِ یک تابع ِ $\mathfrak{X}$ از زمان و شرط- ِ-اولیه (در زمان ِ t_0) معلوم است.

$$x(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{X}[t, x(t_0)]. \tag{4566}$$

از جمله، $\mathsf{X}(t_0, \cdot)$ همانی ست:

$$\mathsf{X}(t_0, \cdot) = \mathbf{1}. \tag{4567}$$

معادله-یِ-حرکت هم این است.

$$\frac{\partial \{\mathsf{X}[t, x(t_0)]\}}{\partial t} = J_H\{t, \mathsf{X}[t, x(t_0)]\}. \tag{4568}$$

البته این با هر $x(t_0)$ برقرار است. پس،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{X}(t,x)]}{\partial\,t} = J_H[t,\mathsf{X}(t,x)]. \tag{4569}$$

با استفاده از X یک تبدیل- ِ-مختصات ِ وابسته-به-زمان میسازم، که رابطه یِ مختصات ِ جدید (x'^a ها) با مختصات ِ قدیم (x^a ها) چنین است.

$$\mathsf{X}(t,x') = x. \tag{4570}$$

وارون ِ $\mathsf{X}(t,\cdot)$ را با $\mathsf{X}'(t,\cdot)$ نشان میدهم:

$$\mathsf{X}'(t,\cdot) - [\mathsf{X}(t,\cdot)]^{-1}. \tag{4571}$$

پس،

$$x' = \mathsf{X}'(t,x). \tag{4572}$$

رُشن است که رابطه یِ x با x' در زمان ِ t این است که x جواب ِ معادله-یِ-حرکت در زمان ِ t با شرط ِ اولیه (در زمان ِ t_0) برابر با x' است.

از این پس برا یِ سادگی، بین ِ X (تابع) و x (مقدار ِ تابع) فرق نمیگذارم. همچنین، بین ِ X' (تابع) و x' (مقدار ِ تابع) فرق نمیگذارم. به این ترتیب، x تابع ی از t و x' است، و x' تابع ی از t و x است. مانسته یِ روابط ِ (4567) و (4568) هم چنین میشود.

$$x(t_0,x') = x'. \tag{4573}$$

$$\left(\frac{\partial\,x}{\partial\,t}\right)_{x'} = J_H(t,x). \tag{4574}$$

و البته (4574) را میشود چنین نوشت.

$$\dot{x}^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x^a, H\}. \tag{4575}$$

و (4573) همئرز است با

$$x'(t_0,x) = x. \tag{4576}$$

نشان میدهم x' با تحول ثابت میمانند. دیده میشود

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial x'^a}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right)_t \dot{x}^b. \tag{4577}$$

همچنین،

$$\left(\frac{\partial x'^a}{\partial t}\right)_x = -\left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right)_t \left(\frac{\partial x^b}{\partial t}\right)_{x'}. \tag{4578}$$

از (4574) هم دیده میشود

$$\dot{x}^b \stackrel{\text{ns}}{=} \left(\frac{\partial x^b}{\partial t}\right)_{x'}. \tag{4579}$$

از (4577) و (4578) و (4579) نتیجه میشود

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4580}$$

که عجیب هم نیست. این یعنی شرط- ِ-اولیه، با تحول عوض نمیشود.

همچنین، (4575) و (4577) و (4580) نتیجه میدهند

$$0 = \left(\frac{\partial x'^a}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right)_t \{x^b, H\}. \tag{4581}$$

که یعنی،

$$0 = \left(\frac{\partial x'^a}{\partial t}\right)_x + \{x'^a, H\}. \tag{4582}$$

معادله یِ تحول برا یِ x'^a ها را بر حسب ِ یک هَمیلتِنی یِ H' (متناظر با مختصات ِ پریم-دار) هم میشود نوشت:

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x'^a, H'\}. \tag{3309}$$

که، با استفاده از (4580)، نتیجه میدهد

$$\{x'^a, H'\} = 0. \tag{4583}$$

و این یعنی هَمیلتِنی یِ H' تابع ِ فقط زمان است. پس میشود آن را صفر گذاشت:

$$H' = 0. \tag{3536}$$

نتیجه این که هَمیلتِنی یِ متناظر با مختصات ِ پریم-دار (همئرز با) صفر است.

x^a ها لزومَن کانُنیک نیستند، و $J^{a\,b}$ ها لزومَن ثابت نیستند. گیرم $J^{a\,b}$ ها تابع ِ فقط مختصات ِ فضا-یِ-فاز َند. در این صورت،

$$\{x^a, x^b\} = J^{a\,b}(x). \tag{4584}$$

دیده میشود

$$\{x'^a, x'^b\} = [J^{c\,d}(x)]\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}. \tag{4585}$$

طرف ِ راست را با $J^{a'\,b'}(t,x)$ نشان میدهم:

$$J^{a'\,b'}(t,x) = [J^{c\,d}(x)]\,\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}. \tag{4586}$$

از این نسبت به t مشتق میگیرم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,[J^{a'\,b'}(t,x)]}{\partial\,t} &= [J^{c\,d}(x)]\,\left(\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,t\,\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d} + \frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial^2\,x'^b}{\partial\,t\,\partial\,x^d}\right),\\ &= [J^{c\,d}(x)]\,\left(\frac{\partial^2\,x'^a}{\partial\,x^c\,\partial\,t}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d} + \frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial^2\,x'^b}{\partial\,x^d\,\partial\,t}\right).\end{aligned} \tag{4587}$$

که، با استفاده از (4582)، میشود

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,[J^{a'\,b'}(t,x)]}{\partial\,t} &= -[J^{c\,d}(x)]\,\left(\frac{\partial\,\{x'^a, H\}}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d} + \frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,\{x'^b, H\}}{\partial\,x^d}\right),\\ &= -(\{\{x'^a, H\}, x'^b\} + \{x'^a, \{x'^b, H\}\}).\end{aligned} \tag{4588}$$

کروشه-یِ-پُؤَسُن یاکُبی ست. پس

$$\{\{x'^a, x'^b\}, H\} = \{\{x'^a, H\}, x'^b\} + \{x'^a, \{x'^b, H\}\}. \tag{4589}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\partial\,[J^{a'\,b'}(t,x)]}{\partial\,t}=-\{\{x'^{a},x'^{b}\},H\}. \tag{4590}$$

که یعنی،

$$\frac{\partial\,[J^{a'\,b'}(t,x)]}{\partial\,t}=-\{J^{a'\,b'}(t,x),H\}. \tag{4591}$$

شرط- ِ-اولیه برا یِ $J^{a'\,b'}$ چنین است.

$$J^{a'\,b'}(t_0,x)=J^{a\,b}(x). \tag{4592}$$

به این ترتیب $J^{a'\,b'}$ جواب ِ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ (4591) همراه با شرط- ِ-اولیه یِ (4592) است.

همچنین،

$$\frac{\partial\,[J^{a\,b}(x')]}{\partial\,t}=\frac{\partial\,[J^{a\,b}(x')]}{\partial\,x'^{c}}\,\frac{\partial\,x'^{c}}{\partial\,t}. \tag{4593}$$

که، با استفاده از (4582)، چنین میشود

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,[J^{a\,b}(x')]}{\partial\,t}&=-\frac{\partial\,[J^{a\,b}(x')]}{\partial\,x'^{c}}\,\{x'^{c}\,H\},\\&=-\{J^{a\,b}(x'),H\}.\end{aligned} \tag{4594}$$

مفصلتر،

$$\frac{\partial\,\{J^{a\,b}[x'(t,x)]\}}{\partial\,t}=-\{J^{a\,b}[x'(t,x)],H\} \tag{4595}$$

از (4576) نتیجه میشود

$$J^{a\,b}[x'(t_0,x)]=J^{a\,b}(x). \tag{4596}$$

روابط ِ (4595) و (4596) معادله-یِ-دیفرانسیل و شرط- ِ-اولیه برا یِ $J^{a\,b}[x'(t,x)]$ اند. از مقایسه یِ اینها با (4591) و (4592)، دیده میشود معادله-یِ-دیفرانسیل و شرط- ِ-اولیه برا یِ $J^{a\,b}[x'(t,x)]$ و $J^{a'\,b'}(t,x)$ یکسان َند. پس $J^{a\,b}[x'(t,x)]$ و $J^{a'\,b'}(t,x)$ با هم برابر َند:

$$J^{a'\,b'}(t,x)=J^{a\,b}[x'(t,x)]. \tag{4597}$$

در حالت ِ خاص ی که x^a ها کانُنیک َند، $J^{a\,b}$ ها ثابت َند، و (4597) چنین میشود

$$J^{a'\,b'}(t,x) = J^{a\,b}. \tag{4598}$$

یا،

$$\{x'^a, x'^b\} = J^{a\,b}. \tag{1930}$$

که نشان میدهد (در این حالت- ِ-خاص) مختصات ِ پریم-دار کانُنیک َند. و البته رُشن است که (در این حالت- ِ-خاص) کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ مختصات- ِ-پریم-دار، برابر است با کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ مختصات- ِبی-پریم ِ متناظر:

$$\{x'^a, x'^b\} = \{x^a, x^b\}. \tag{1933}$$

103 هَمیلتِنی یِ مختل-شده

هَمیلتِنی یِ متناظر با یک سیستم H است، که در حالت ِ کلی یک تابعی از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته است، و

$$H = H_{\mathbf{0}} + \delta\,H. \tag{4599}$$

تفکیک ِ H به $H_{\mathbf{0}}$ و $(\delta\,H)$ اصولَن دلبخاه است. معمولَن منظور این است که حل ِ مسئله با $H_{\mathbf{0}}$ معلوم است و اثر ِ $(\delta\,H)$ بر جواب کوچک است. هدف محاسبه یِ این اثر به روش ِ اختلال است. این یعنی جواب به شکل ِ یک سری یِ توانی از $(\delta\,H)$ به دست آید. $(\delta\,H)$ یک تابع است. معمول این است که به جا یِ بسط بر حسب ِ $(\delta\,H)$، یک پارامتر ِ اختلال وارد میکنند و بسط را بر حسب ِ آن مینویسند. بسط ِ توانی یِ $\mathfrak{X}$ بر حسب ِ ε را چنین مینویسم.

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\mathbf{0}} + \delta\,\mathfrak{X}. \tag{4600}$$

$$\delta\,\mathfrak{X} = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\,\mathfrak{X}_{\boldsymbol{n}}. \tag{4601}$$

گیرم جوابِ معادله-یِ-حرکتِ متناظر با $H_{\mathbf{0}}$ به شکلِ یک تابعِ $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ از زمان و شرط-ِ-اولیه (در زمانِ t_0) معلوم است.

$$x_{\mathbf{0}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{X}_{\mathbf{0}}[t, x(t_0)]. \tag{4602}$$

و البته، $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t_0, \cdot)$ همانی ست:

$$\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t_0, \cdot) = \mathbf{1}. \tag{4603}$$

معادله-یِ-حرکت، با $H_{\mathbf{0}}$، هم این است.

$$\frac{\partial \{\mathsf{X}_{\mathbf{0}}[t, x(t_0)]\}}{\partial t} = J_{H_{\mathbf{0}}}\{t, \mathsf{X}_{\mathbf{0}}[t, x(t_0)]\}. \tag{4604}$$

البته این با هر $x(t_0)$ برقرار است. پس،

$$\frac{\partial [\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t, x)]}{\partial t} = J_{H_{\mathbf{0}}}[t, \mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t, x)]. \tag{4605}$$

جوابِ معادله-یِ-حرکتِ متناظر با H هم یک تابعِ X از زمان و شرط-ِ-اولیه (در زمانِ t_0) است؛ که هم ان معادلاتِ بالا، با X و H به جا ی، به ترتیب، $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ و $H_{\mathbf{0}}$ را برمیئاورَد.

104 اختلالِ مستقیم

در روشِ اختلال برا یِ محاسبه یِ X، خُدِ X را هم به شکلِ یک سری یِ توانی بر حسبِ ε (پارامترِ اختلال) مینویسم. شرط-ِ-اولیه، برا یِ X و $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ یکسان است:

$$\mathsf{X}(t_0, \cdot) = \mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t_0, \cdot). \tag{4606}$$

که یعنی،

$$(\delta \mathsf{X})(t_0, \cdot) = 0. \tag{4607}$$

یا،

$$\mathsf{X}_{\boldsymbol{n}}(t_0,\boldsymbol{\cdot}) = 0, \quad n > 0. \tag{4608}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial\,[(\delta\,\mathsf{X})(t,x)]}{\partial\,t} = -\frac{\partial\,[\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x)]}{\partial\,t} + \frac{\partial\,[\mathsf{X}(t,x)]}{\partial\,t}. \tag{4609}$$

و، با استفاده از معادله-یِ-دیفرانسیلها یِ حاکم بر X و $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$،

$$\frac{\partial\,[(\delta\,\mathsf{X})(t,x)]}{\partial\,t} = -J_{H_{\mathbf{0}}}[t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x)] + J_H[t,\mathsf{X}(t,x)]. \tag{4610}$$

که میشود.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,[(\delta\,\mathsf{X})(t,x)]}{\partial\,t} &= -J_{H_{\mathbf{0}}}[t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x)] + J_{H_{\mathbf{0}}}[t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x) + (\delta\,\mathsf{X})(t,x)]\\ &\quad + J_{\delta\,H}[t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x) + (\delta\,\mathsf{X})(t,x)].\end{aligned} \tag{4611}$$

از جمله دیده میشود اگر $(\delta\,H)$ صفر باشد، $(\delta\,\mathsf{X})$-برابر-با-صفر معادله-یِ-دیفرانسیل ِ (4611) و شرط- ِ-اولیه یِ (4607) را برمیئاورَد، پس جواب است. یعنی اگر $(\delta\,H)$ صفر باشد، $(\delta\,\mathsf{X})$ هم صفر است، چنان که انتظار میرود.

در معادله یِ (4611)، طرف ِ راست را بر حسب ِ $(\delta\,\mathfrak{X})$ بسط میدهم. دیده میشود

$$\mathfrak{Y}(\mathsf{X}+\delta\,\mathsf{X}) = \mathfrak{Y}(\mathsf{X}) + \sum_{n\geq 1}\frac{\{[(\delta\,\mathsf{X})\,\partial]^n\,\mathfrak{Y}\}(\mathsf{X})}{n!}. \tag{4612}$$

به این ترتیب معادله یِ (4611) چنین میشود.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,(\delta\,\mathsf{X})}{\partial\,t} &= \sum_{n\geq 1}\frac{\{[(\delta\,\mathsf{X})\,\partial]^n\,J_{H_{\mathbf{0}}}\}(t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}})}{n!}\\ &\quad + \sum_{n\geq 0}\frac{\{[(\delta\,\mathsf{X})\,\partial]^n\,J_{\delta\,H}\}(t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}})}{n!}.\end{aligned} \tag{4613}$$

برا یِ هر m، ضریب ِ ε^m در دُ-طرف ِ (4613) برابر است. پس، برا یِ $m > 0$،

$$\frac{\partial \mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}}{\partial t} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\{[(\delta\,\mathsf{X})\,\partial]^n\,J_{H_{\mathbf{0}}}\}(t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}})}{n!}\right)_{\boldsymbol{m}} + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\{[(\delta\,\mathsf{X})\,\partial]^n\,J_{\delta\,H}\}(t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}})}{n!}\right)_{\boldsymbol{m}}. \tag{4614}$$

$\mathfrak{Y}_{<\boldsymbol{m}}$ و $\mathfrak{Y}_{=\boldsymbol{m}}$ و $\mathfrak{Y}_{\leq\boldsymbol{m}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{Y}_{=\boldsymbol{m}} = \varepsilon^m\,\mathfrak{Y}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4615}$$

$$\mathfrak{Y}_{<\boldsymbol{m}} = \sum_{i<m}\varepsilon^i\,\mathfrak{Y}_{\boldsymbol{i}}. \tag{4616}$$

$$\mathfrak{Y}_{\leq\boldsymbol{m}} = \sum_{i\leq m}\varepsilon^i\,\mathfrak{Y}_{\boldsymbol{i}}. \tag{4617}$$

معادله یِ (4614) چنین میشود

$$\frac{\partial \mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}}{\partial t} = [(\mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}\,\partial)\,J_{H_{\mathbf{0}}}](t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}) + \mathfrak{Z}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4618}$$

که،

$$\mathfrak{Z}_{\boldsymbol{m}} = \sum_{n=2}^{m}\left(\frac{\{[(\delta\,\mathsf{X})_{<\boldsymbol{m}}\,\partial]^n\,J_{H_{\mathbf{0}}}\}(t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}})}{n!}\right)_{\boldsymbol{m}} + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\{[(\delta\,\mathsf{X})_{<\boldsymbol{m}}\,\partial]^n\,J_{(\delta\,H)_{<\boldsymbol{m}}}\}(t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}})}{n!}\right)_{\boldsymbol{m}}. \tag{4619}$$

و البته $\mathfrak{Z}_{\boldsymbol{m}}$ تابع ِ فقط t و $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ تا $\mathsf{X}_{\boldsymbol{m-1}}$ است.

به این ترتیب روابط ی بازگشتی برا یِ $\mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}$ ها به دست میئاید:

$$\frac{\partial \mathsf{X}_{\mathbf{0}}}{\partial t} = J_{H_{\mathbf{0}}}(t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}). \tag{4620}$$

$$\frac{\partial \mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}}{\partial t} = [(\mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}\,\partial)\,J_{H_{\mathbf{0}}}](t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}) + \mathfrak{Z}_{\boldsymbol{m}}(t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}},\ldots,\mathsf{X}_{\boldsymbol{m-1}}),\quad m\geq 1. \tag{4621}$$

و البته شرط- ِ-اولیه برا یِ $\mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}$ ها هم روابط ِ (4603) و (4608) اند.

ماتریس ِ $\mathcal{M}$ و بردار ِ $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{M}^a{}_b(t,x) = [\partial_b\,(J_{H_{\mathbf{0}}})^a][t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x)]. \tag{4622}$$

$$\mathcal{Z}^a{}_{\boldsymbol{m}}(t,x) = \mathfrak{Z}^a{}_{\boldsymbol{m}}[t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x),\ldots,\mathsf{X}_{\boldsymbol{m-1}}(t,x)]. \tag{4623}$$

با اینها، معادله یِ (4618) چنین میشود.

$$\frac{\partial\,\mathsf{X}^a{}_{\boldsymbol{m}}}{\partial\,t} = \mathcal{M}^a{}_b\,\mathsf{X}^b{}_{\boldsymbol{m}} + \mathcal{Z}^a{}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4624}$$

جواب ِ این معادله را میشود با استفاده از جواب ِ معادله یِ بدون- ِ-طرف- ِ-دوم، یعنی معادله یِ با $(\mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}} = 0)$، به دست آورد: ماتریس ِ $\mathcal{U}$ را چنان میگیرم که

$$\frac{\partial\,\mathcal{U}}{\partial\,t} = \mathcal{M}\,\mathcal{U}. \tag{4625}$$

برا یِ حل ِ (4624)، متغیر ِ $\mathcal{X}_{\boldsymbol{m}}$ را چنین تعریف میکنم:

$$\mathsf{X}_{\boldsymbol{m}} = \mathcal{U}\,\mathcal{X}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4626}$$

به این ترتیب، (4624) چنین میشود.

$$\mathcal{U}\,\frac{\partial\,\mathcal{X}_{\boldsymbol{m}}}{\partial\,t} = \mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4627}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathcal{X}_{\boldsymbol{m}}(t,x) = \mathcal{X}_{\boldsymbol{m}}(t_0,x) + \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[(\mathcal{U})^{-1}\,\mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}](s,x). \tag{4628}$$

از شرط- ِ-اولیه یِ (4608)، همراه با (4626)، دیده میشود.

$$\mathcal{X}_{\boldsymbol{m}}(t_0,x) = 0, \quad m > 0. \tag{4629}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}(t,x) = [\mathcal{U}(t,x)]\,\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[(\mathcal{U})^{-1}\,\mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}](s,x). \tag{4630}$$

این جواب ِ معادله یِ (4624)، بر حسب ِ جواب ِ معادله یِ (4625) است. نشان میدهم جواب ِ معادله یِ (4625) چنین است.

$$\mathcal{U}(t,x) = \left\{\left[\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\right]\,[\mathcal{M}(s,x)]\right\}\,\mathcal{U}(t_0,x). \tag{4631}$$

یا، با نماد-گذاری یِ بستِتر،

$$\mathcal{U}(t,x)=\left\{\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)[\mathcal{M}(\boldsymbol{\cdot},x)]\right\}\mathcal{U}(t_0,x). \tag{4632}$$

که $\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)$ نمایی یِ مرتب از t_0 تا t است. یک تعریف ِ آن چنین است.

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)(\mathfrak{Y})=&\lim_{(\Delta\, s)\to 0}\{[1+(s_n-s_{n-1})\,\mathfrak{Y}(\tilde{s}_{n-\varsigma})]\cdots\\&[1+(s_1-s_0)\,\mathfrak{Y}(\tilde{s}_{\varsigma})]\}.\end{aligned} \tag{4633}$$

در طرف ِ راست، n یک عدد ِ صحیح ِ مثبت است. همچنین،

$$\varsigma=\frac{1}{2}. \tag{927}$$

$$s_0=t_0. \tag{4634}$$

$$s_n=t. \tag{4635}$$

$$\Delta\, s=\max(|s_1-s_0|,\ldots,|s_n-s_{n-1}|). \tag{4636}$$

$$\forall\mathfrak{z}:\quad \tilde{s}_{\mathfrak{z}}\in[\![s_{\mathfrak{z}-\varsigma},s_{\mathfrak{z}+\varsigma}]\!]. \tag{4637}$$

و بازه یِ بی-سمت ِ $[\![\mathfrak{x},\mathfrak{y}]\!]$ چنین تعریف شده.

$$[\![\mathfrak{x},\mathfrak{y}]\!]=[\min(\mathfrak{x},\mathfrak{y}),\max(\mathfrak{x},\mathfrak{y})]. \tag{4638}$$

از تعریف ِ (4633) نتیجه میشود

$$\left(\mathrm{Texp}\int_{t_1}^{t_3}\right)(\mathfrak{Y})=\left[\left(\mathrm{Texp}\int_{t_2}^{t_3}\right)(\mathfrak{Y})\right]\left[\left(\mathrm{Texp}\int_{t_1}^{t_2}\right)(\mathfrak{Y})\right]. \tag{4639}$$

از جمله،

$$\left(\mathrm{Texp}\int_{t}^{t}\right)(\mathfrak{Y})=\mathbf{1}. \tag{4640}$$

پس،

$$\left[\left(\mathrm{Texp}\int_{t_1}^{t_2}\right)(\mathfrak{Y})\right]^{-1}=\left(\mathrm{Texp}\int_{t_2}^{t_1}\right)(\mathfrak{Y}). \tag{4641}$$

همچنین،

$$\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t+s}\right)(\mathfrak{Y}) = [\mathbf{1} + s\,\mathfrak{Y}(t) + o(s)]\,\left[\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)(\mathfrak{Y})\right]. \tag{4642}$$

دیده میشود

$$\left\{\left[\mathbf{D}\,\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{\cdot}\right)\right](t)\right\}(\mathfrak{Y}) = \left\{\left[\mathbf{D}\,\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t+\cdot}\right)\right](0)\right\}(\mathfrak{Y}). \tag{4643}$$

از (4642) و (4643) نتیجه میشود

$$\left\{\left[\mathbf{D}\,\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{\cdot}\right)\right](t)\right\}(\mathfrak{Y}) = [\mathfrak{Y}(t)]\,\left[\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)(\mathfrak{Y})\right]. \tag{4644}$$

که یعنی،

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\left[\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)(\mathfrak{Y})\right] = [\mathfrak{Y}(t)]\,\left[\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)(\mathfrak{Y})\right]. \tag{4645}$$

با استفاده از اینها، ادعا یِ (4632) را ثابت میکنم. برا یِ این کار $\mathcal{V}(t,x)$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{V}(t,x) = \left\{\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)[\mathcal{M}(\boldsymbol{\cdot},x)]\right\}\,\mathcal{U}(t_0,x). \tag{4646}$$

از (4645) نتیجه میشود

$$\frac{\partial\,\mathcal{V}}{\partial\,t} = \mathcal{M}\,\mathcal{V}. \tag{4647}$$

پس $\mathcal{V}$ هم ان معادله-یِ-دیفرانسیل و هم ان شرط- ِ-اولیه را برمیئاورَد که $\mathcal{U}$ برمیئاورَد. نتیجه این که $\mathcal{U}$ هم ان $\mathcal{V}$ است. این هم ان (4632) است.

نشان میدهم $\mathcal{U}(t_0,x)$ در رابطه یِ (4632)، از طرف ِ راست ِ (4630) حذف میشود. از (4632) نتیجه میشود

$$[\mathcal{U}(s,x)]^{-1} = [\mathcal{U}(t_0,x)]^{-1}\,\left\{\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{s}\right)[\mathcal{M}(\boldsymbol{\cdot},x)]\right\}^{-1}. \tag{4648}$$

به این ترتیب، رابطه یِ (4630) چنین میشود.

$$\begin{aligned}\mathsf{X}_{\boldsymbol{m}}(t,x) = &\left\{\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)[\mathcal{M}(\boldsymbol{\cdot},x)]\right\}\\ &\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,\left\{\left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{s}\right)[\mathcal{M}(\boldsymbol{\cdot},x)]\right\}^{-1}\,[\mathcal{Z}_{\boldsymbol{m}}(s,x)].\end{aligned} \tag{4649}$$

با استفاده از (4640) و (4645)، یک شکل ِ دیگر برا یِ نمایی-یِ-مرتب به دست میئاورم. $\mathfrak{U}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{U}(t) = \left(\mathrm{Texp}\int_{t_0}^{t}\right)(\mathfrak{Y}). \tag{4650}$$

از معادله یِ (4645) نتیجه میشود

$$\dot{\mathfrak{U}} = \mathfrak{Y}\,\mathfrak{U}. \tag{4651}$$

از معادله یِ (4640) هم نتیجه میشود

$$\mathfrak{U}(t_0) = \mathbf{1}. \tag{4652}$$

برا یِ حل ِ معادله یِ (4651) با شرط- ِ-اولیه یِ (4652) روش ِ پیکَر را به کار میبَرم، که یک روش ِ تکرار است. برا یِ این کار از معادله یِ (4651) انتگرال میگیرم:

$$\mathfrak{U}(t) = \mathfrak{U}(t_0) + \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\mathfrak{Y}(s)]\,\mathfrak{U}(s). \tag{4653}$$

که، با استفاده از (4652)، چنین میشود.

$$\mathfrak{U}(t) = \mathbf{1} + \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\mathfrak{Y}(s)]\,\mathfrak{U}(s). \tag{4654}$$

با اینها، یک معادله یِ بازگشتی میسازم:

$$\mathfrak{U}_{[i+1]}(t) = \mathbf{1} + \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\mathfrak{Y}(s)]\,\mathfrak{U}_{[i]}(s), \quad i \geq 0. \tag{4655}$$

$$\mathfrak{U}_{[0]}(t) = \mathbf{1}. \tag{4656}$$

حد ِ $\mathfrak{U}_{[i]}$ در $(i \to \infty)$ را (به شرط ِ وجود ِ آن) با $\mathfrak{U}_{[\infty]}$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{U}_{[\infty]} = \lim_{i\to\infty}\mathfrak{U}_{[i]}. \tag{4657}$$

از (4655) در $(i \to \infty)$ حد میگیرم. دیده میشود، اگر حد-گیری با انتگرال-گیری جا-به-جا شود،

$$\mathfrak{U}_{[\infty]}(t) = \mathbf{1} + \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\mathfrak{Y}(s)]\,\mathfrak{U}_{[\infty]}(s). \tag{4658}$$

پس $\mathfrak{U}_{[\infty]}$ هم ان $\mathfrak{U}$ است. میمانَد حل ِ معادله یِ بازگشتی. این کار را با اِعمال ِ تکرار انجام میدهم. با یک استقرا یِ ساده نتیجه میشود

$$\mathfrak{U}_{[i]}(t) = \sum_{j=0}^{i} \mathfrak{U}_{(j)}(t). \tag{4659}$$

که،

$$\mathfrak{U}_{(j)}(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s_j)\, [\mathfrak{Y}(s_j)] \int_{t_0}^{s_j} (\mathrm{d}\, s_{j-1})\, [\mathfrak{Y}(s_{j-1})] \cdots \int_{t_0}^{s_2} (\mathrm{d}\, s_1)\, [\mathfrak{Y}(s_1)]. \tag{4660}$$

به این ترتیب،

$$\left(\mathrm{Texp} \int_{t_0}^{t}\right)(\mathfrak{Y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s_j)\, [\mathfrak{Y}(s_j)] \int_{t_0}^{s_j} (\mathrm{d}\, s_{j-1})\, [\mathfrak{Y}(s_{j-1})] \cdots \int_{t_0}^{s_2} (\mathrm{d}\, s_1)\, [\mathfrak{Y}(s_1)] \right\}. \tag{4661}$$

105 اختلال با تغییر- ِ -متغیر

هَمیلتِنی یِ متناظر با یک سیستم H است، که مختل-شده یِ $H_{\mathbf{0}}$ (هَمیلتِنی یِ مختل-نشده) است. تابع ِ $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ جواب ِ معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با $H_{\mathbf{0}}$، با شرط- ِ-اولیه در t_0، و تابع ِ X جواب ِ معادله-یِ-حرکت ِ متناظر با H، با شرط- ِ-اولیه در t_0 است. تابع ِ $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}$ از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{X}(t, \boldsymbol{\cdot}) = \mathsf{X}_{\mathbf{0}}[t, \mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t, \boldsymbol{\cdot})]. \tag{4662}$$

یعنی،

$$\mathsf{X}(t, \boldsymbol{\cdot}) = [\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t, \boldsymbol{\cdot})] \circ [\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t, \boldsymbol{\cdot})]. \tag{4663}$$

از جمله،

$$\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t_0, \boldsymbol{\cdot}) = \mathbf{1}. \tag{4664}$$

اگر H هم ان $H_{\mathbf{0}}$ باشد، یعنی $(\delta\, H)$ صفر باشد، آنگاه X هم ان $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ است، یعنی $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t,\cdot)$ همانی ست.

$\mathsf{X}[t,x(t_0)]$ را با $x(t)$، و $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}[t,x(t_0)]$ را با $x'(t)$ نشان میدهم:

$$x(t)=\mathsf{X}[t,x(t_0)]. \tag{4665}$$

$$x'(t)=\mathsf{X}_{\mathbf{I}}[t,x(t_0)]. \tag{4666}$$

دیده میشود

$$x(t)=\mathsf{X}_{\mathbf{0}}[t,x'(t)]. \tag{4667}$$

معادله یِ تحول برا یِ $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}$ را مینویسم. از (4667) نتیجه میشود

$$\dot{x}(t)\stackrel{\text{ns}}{=}\Big(\mathbf{D}\,\{\mathsf{X}_{\mathbf{0}}[\cdot,x'(t)]\}\Big)(t)+\Big(\{\mathbf{D}_a\,[\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,\cdot)]\}[x'(t)]\Big)\,\dot{x}'^a(t). \tag{4668}$$

این هم، با استفاده از معادله یِ تحول برا یِ x و X_0، چنین میشود.

$$J_H(t,x)\stackrel{\text{ns}}{=}J_{H_{\mathbf{0}}}(t,x)+\frac{\partial\,[\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x')]}{\partial\,x'^b}\,\dot{x}'^b. \tag{4669}$$

یعنی،

$$\frac{\partial\,x^c}{\partial\,x'^b}\,\dot{x}'^b\stackrel{\text{ns}}{=}[J^{c\,d}(t,x)]\,\frac{\partial\,[(\delta\,H)(t,x)]}{\partial\,x^d}. \tag{4670}$$

که همئرز است با

$$\dot{x}'^a\stackrel{\text{ns}}{=}\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,[J^{c\,d}(t,x)]\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,\frac{\partial\,[(\delta\,H)(t,x)]}{\partial\,x'^b}. \tag{4671}$$

$J_{\mathbf{I}}$ و $(\delta\,H)_{\mathbf{I}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$J_{\mathbf{I}}^{a\,b}(t,x')=\frac{\partial\,x'^a}{\partial\,x^c}\,\frac{\partial\,x'^b}{\partial\,x^d}\,[J^{c\,d}(t,x)]. \tag{4672}$$

$$(\delta\,H)_{\mathbf{I}}(t,x')=(\delta\,H)(t,x). \tag{4673}$$

رابطه یِ (4671) چنین میشود.

$$\dot{x}'^a\stackrel{\text{ns}}{=}[J_{\mathbf{I}}^{a\,b}(t,x')]\,\frac{\partial\,[(\delta\,H)_{\mathbf{I}}(t,x')]}{\partial\,x'^b}. \tag{4674}$$

بسته،

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x'^a, (\delta\, H)_{\mathbf{I}}\}_{\mathbf{I}}. \tag{4675}$$

شاخص ِ $\mathbf{I}$ برا یِ کروشه-یِ-پُؤَسُن یعنی کروشه-یِ-پُؤَسُن با $J_{\mathbf{I}}$، به جا یِ J، تعریف شده. البته قبلَن معلوم شد اگر $J^{c\,d}(t,x)$ ها مستقل از t باشند،

$$J^{a\,b}(x') = \frac{\partial\, x'^a}{\partial\, x^c}\,\frac{\partial\, x'^b}{\partial\, x^d}\,[J^{c\,d}(x)]. \tag{4676}$$

پس اگر $J^{c\,d}(t,x)$ ها مستقل از t باشند،

$$J_{\mathbf{I}} = J. \tag{4677}$$

در این حالت (4675) چنین میشود

$$\dot{x}'^a \stackrel{\text{ns}}{=} \{x'^a, (\delta\, H)_{\mathbf{I}}\}. \tag{4678}$$

این نتیجه دور از انتظار نیست. معادله یِ تحول برا یِ x با هَمیلتِنی یِ H داده میشود. رابطه یِ x' با x از طریق ِ (4667) است. $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,\cdot)$ یک تبدیل ِ کانُنیک (با مولد- ِ-پُؤَسُنی یِ $H_{\mathbf{0}}$) است. از این که x' اثر ِ یک تبدیل ِ کانُنیک بر x است، نتیجه میشود یک هَمیلتِنی (H') هست که معادله یِ تحول ِ x' با آن داده میشود. دیده شد $(H' - H)$ به فقط رابطه یِ x' با x مربوط است، به H وابسته نیست. از جمله، اگر تحول ِ x با $H_{\mathbf{0}}$ داده شود هم تحول ِ x' با $H'_{\mathbf{0}}$ داده میشود، و

$$H'_{\mathbf{0}} - H_{\mathbf{0}} = H' - H. \tag{4679}$$

دیده شد اگر تحول ِ x با $H_{\mathbf{0}}$ باشد، x'^a ها بر-لاک ثابت میمانند. این یعنی

$$\{x'^a, H_{\mathbf{0}}\} = 0. \tag{4680}$$

از (4679) و (4680)، همراه با تعریف ِ $(\delta\, H)$، نتیجه میشود.

$$\{x'^a, H'\} = \{x'^a, \delta\, H\}. \tag{4681}$$

رابطه یِ (4681)، با توجه به (4673)، در واقع هم ان (4678) است. فقط در (4678) تئکید شده که متغیر ِ $(\delta\, H)_{\mathbf{I}}$ زُج ِ (t, x') است.

به معادله-یِ-حرکت برا یِ x' برمیگردم. رابطه یِ (4672) یعنی

$$\frac{\partial\,[\mathsf{X}^a{}_{\mathbf{0}}(t,x')]}{\partial\, x'^c}\,\frac{\partial\,[\mathsf{X}^b{}_{\mathbf{0}}(t,x')]}{\partial\, x'^d}\,J_{\mathbf{I}}^{c\,d}(t,x') = J^{a\,b}[t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x')]. \tag{4682}$$

در این رابطه (مئلفِها یِ) J معلوم است. پس، با فرض ِ این که $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ معلوم است، یعنی جواب ِ معادله-یِ-حرکت با $H_{\mathbf{0}}$ معلوم است، (مئلفِها یِ) $J_{\mathbf{I}}$ به دست میئاید. رابطه یِ (4673) هم یعنی

$$(\delta\, H)_{\mathbf{I}}(t,x') = (\delta\, H)[t,\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x')]. \tag{4683}$$

پس، با فرض ِ این که $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ معلوم است، یعنی جواب ِ معادله-یِ-حرکت با $H_{\mathbf{0}}$ معلوم است، $(\delta\, H)_{\mathbf{I}}$ به دست میئاید. سرانجام، معادله یِ (4674) چنین است.

$$\dot{x}' \stackrel{\text{ns}}{=} (J_{\mathbf{I}})_{(\delta\, H)_{\mathbf{I}}}(t,x'). \tag{4684}$$

این یعنی

$$\frac{\partial\,\{\mathsf{X}_{\mathbf{I}}[t,x(t_0)]\}}{\partial\, t} = (J_{\mathbf{I}})_{(\delta\, H)_{\mathbf{I}}}\{t,\mathsf{X}_{\mathbf{I}}[t,x(t_0)]\}. \tag{4685}$$

البته این معادله برا یِ هر شرط- ِ-اولیه یِ $x(t_0)$ برقرار است. یعنی (4685) در واقع این است.

$$\frac{\partial\,[\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t,x)]}{\partial\, t} = (J_{\mathbf{I}})_{(\delta\, H)_{\mathbf{I}}}[t,\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t,x)]. \tag{4686}$$

شرط ِ اولیه برا یِ $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}$ هم این است که $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t_0,\cdot)$ همانی ست: رابطه یِ (4664).

$(J_{\mathbf{I}})_{(\delta\, H)_{\mathbf{I}}}$ را با $\mathfrak{V}_{\mathbf{I}}$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{V}_{\mathbf{I}} = (J_{\mathbf{I}})_{(\delta\, H)_{\mathbf{I}}}. \tag{4687}$$

معادله-یِ-دیفرانسیل ِ (4686) چنین میشود.

$$\frac{\partial\,[\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t,x)]}{\partial\, t} = \mathfrak{V}_{\mathbf{I}}[t,\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t,x)]. \tag{4688}$$

معادله-یِ-دیفرانسیل ِ (4688)، همراه با شرط- ِ-اولیه یِ (4664)، همئرز است با

$$\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \mathfrak{V}_{\mathbf{I}}[s, \mathsf{X}_{\mathbf{I}}(s,x)]. \tag{4689}$$

البته اینها جواب ِ صریح برا یِ $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}$ نیستند، چون طرف ِ راست هم $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}$ دارد. اینجا هم، برا یِ به-دست-آوردن ِ جواب ِ صریح روش ِ بازگشتی یِ پیکَر را به کار میبَرم. معادله-یِ-بازگشتی یِ متناظر چنین است.

$$(\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[i+1]}(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \mathfrak{V}_{\mathbf{I}}\{s, (\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[i]}(s,x)\}, \quad i \geq 0. \tag{4690}$$

$$(\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[0]}(t,x) = x. \tag{4691}$$

حد ِ $(\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[i]}$ در $(i \to \infty)$ را (به شرط ِ وجود ِ آن) با $(\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[\infty]}$ نشان میدهم:

$$(\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[\infty]} = \lim_{i\to\infty} (\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[i]}. \tag{4692}$$

از (4690) در $(i \to \infty)$ حد میگیرم. دیده میشود، اگر حد-گیری با انتگرال-گیری جا-به-جا شود،

$$(\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[\infty]}(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \mathfrak{V}_{\mathbf{I}}\{s, (\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[\infty]}(s,x)\}. \tag{4693}$$

پس $(\mathsf{X}_{\mathbf{I}})_{[\infty]}$ هم ان $(\mathsf{X}_{\mathbf{I}})$ است:

$$\mathsf{X}_{\mathbf{I}} = (\mathfrak{X}_{\mathbf{I}})_{[\infty]}. \tag{4694}$$

106 اختلال برا یِ سیستمها یِ انتگرال-پذیر

گیرم سیستم ِ مختل-نشده انتگرال-پذیر است. پس $\mathfrak{m}$ ثابت- ِ-حرکت ِ پُوَسُنی هست که مستقل-از-هم َند، که $\mathfrak{m}$ بُعد ِ فضا-یِ-فاز است. این ثابت- ِ-حرکتها را میشود تکانِها یِ متناظر با یک دسته مختصات ِ کانُنیک گرفت. چنین میکنم و این مختصات- ِ-کانُنیک را با (q,p) نشان میدهم. برا یِ

سیستم ِ مختل-نشده، p بر-لاک ثابت است. پس $H_{\mathbf{0}}$ (هَمیلتِنی یِ سیستم ِ مختل-نشده) تابع ِ فقط (t,p) است. هَمیلتِنی یِ مختل-شده را با H نشان میدهم:

$$H(t,q,p)=H_{\mathbf{0}}(t,p)+(\delta\,H)(t,q,p). \tag{4695}$$

جواب ِ معادله-یِ-حرکت برا یِ $H_{\mathbf{0}}$ را با $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$، و بخشها یِ مکان و تکانه یِ $\mathsf{X}_{\mathbf{0}}$ را با، به ترتیب، $\mathsf{Q}_{\mathbf{0}}$ و $\mathsf{P}_{\mathbf{0}}$ نشان میدهم:

$$\mathsf{X}_{\mathbf{0}}=(\mathsf{Q}_{\mathbf{0}},\mathsf{P}_{\mathbf{0}}). \tag{4696}$$

به هم ین ترتیب، جواب ِ معادله-یِ-حرکت برا یِ H را با X، و بخشها یِ مکان و تکانه یِ X را با، به ترتیب، Q و P نشان میدهم:

$$\mathsf{X}=(\mathsf{Q},\mathsf{P}). \tag{4697}$$

همچنین، $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}$ را با (4663) تعریف میکنم:

$$\mathsf{X}(t,\cdot)=[\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,\cdot)]\circ[\mathsf{X}_{\mathbf{I}}(t,\cdot)]. \tag{4663}$$

و بخشها یِ مکان و تکانه یِ $\mathsf{X}_{\mathbf{I}}$ را با، به ترتیب، $\mathsf{Q}_{\mathbf{I}}$ و $\mathsf{P}_{\mathbf{I}}$ نشان میدهم:

$$\mathsf{X}_{\mathbf{I}}=(\mathsf{Q}_{\mathbf{I}},\mathsf{P}_{\mathbf{I}}). \tag{4698}$$

سرانجام، $(\delta\,H)_{\mathbf{I}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$(\delta\,H)_{\mathbf{I}}(t,x')=(\delta\,H)(t,x). \tag{4699}$$

که،

$$x=\mathsf{X}_{\mathbf{0}}(t,x'). \tag{4700}$$

در روش ِ اختلال ِ مستقیم، هدف محاسبه یِ $(\mathsf{Q}_m,\mathsf{P}_m)$ ها ست. دیده میشود

$$\mathsf{P}_{\mathbf{0}}(t,q',p') = p'. \tag{4701}$$

$$\mathsf{Q}_{\mathbf{0}}(t,q',p') = q' + (\Delta\, q)_{\mathbf{0}}(t,p'). \tag{4702}$$

که،

$$(\Delta\, q)_{\mathbf{0}}(t,p') = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v_{\mathbf{0}}(s,p'). \tag{4703}$$

$$v_{\mathbf{0}}(t,p') = \frac{\partial\,[H_{\mathbf{0}}(t,p')]}{\partial\, p'}. \tag{4704}$$

همچنین، برا یِ $(m>0)$،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{P}_{\boldsymbol{m}}(t,q',p')]}{\partial\, t} = -\mathfrak{Z}_{(1)\,\boldsymbol{m}}. \tag{4705}$$

$$\frac{\partial\,[\mathsf{Q}_{\boldsymbol{m}}(t,q',p')]}{\partial\, t} = [w_{\mathbf{0}}(t,p')]\,\mathsf{P}_{\boldsymbol{m}}(t,q',p') + \mathfrak{Z}_{(2)\,\boldsymbol{m}}. \tag{4706}$$

که،

$$w_{\mathbf{0}}(t,p') = \frac{\partial\,[v_{\mathbf{0}}(t,p')]}{\partial\, p'}. \tag{4707}$$

$$\mathfrak{Z}_{(\mathrm{i})\,\boldsymbol{m}} = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(\mathrm{i})}\,(\delta\, H)][t,\mathsf{Q}_{<\boldsymbol{m}}(t,q',p'),\mathsf{P}_{<\boldsymbol{m}}(t,q',p')]\}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4708}$$

رابطه یِ (4707) یعنی

$$w_{\mathbf{0}}(t,p') = \frac{\partial^2\,[H_{\mathbf{0}}(t,p')]}{(\partial\, p')^2}. \tag{4709}$$

که، از جمله، نشان میدهد $w_{\mathbf{0}}$ متقارن است.

روابط ِ (4701) و (4702) و (4705) و (4706)، معادلات ِ بازگشتی برا یِ $(\mathsf{Q}_{\boldsymbol{m}},\mathsf{P}_{\boldsymbol{m}})$ ها یَند. شرط ِ اولیه برا یِ (4705) و (4706) هم این است.

$$\mathsf{P}_{\boldsymbol{m}}(t_0,q',p') = 0, \quad m>0. \tag{4710}$$

$$\mathsf{Q}_{\boldsymbol{m}}(t_0,q',p') = 0, \quad m>0. \tag{4711}$$

دیده میشود

$$\mathsf{P}_{\mathbf{1}}(t,q',p') = -\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,H_{\mathbf{1}}][s,q'+(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p'),p']. \tag{4712}$$

$$\mathsf{Q}_{\mathbf{1}}(t,q',p') = \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[w_{\mathbf{0}}(s,p')]\,\mathsf{P}_{\mathbf{1}}(s,q',p') + \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,H_{\mathbf{1}}][s,q'+(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p'),p']. \tag{4713}$$

در روش ِ اختلال با تغییر- ِ-متغیر، هدف محاسبه یِ $(\mathsf{Q}_{\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}},\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}})$ ها ست. دیده میشود

$$(\delta\,H)_{\mathbf{I}}(t,q',p') = (\delta\,H)[t,q'+(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(t,p'),p']. \tag{4714}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\mathbf{0}}(t,q',p') = p'. \tag{4715}$$

$$\mathsf{Q}_{\mathbf{I}\,\mathbf{0}}(t,q',p') = q'. \tag{4716}$$

همچنین، برا یِ $(m>0)$،

$$\frac{\partial\,[\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}}(t,q',p')]}{\partial\,t} = -\mathfrak{Z}_{\mathbf{I}\,(1)\,\boldsymbol{m}}. \tag{4717}$$

$$\frac{\partial\,[\mathsf{Q}_{\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}}(t,q',p')]}{\partial\,t} = \mathfrak{Z}_{\mathbf{I}\,(2)\,\boldsymbol{m}}. \tag{4718}$$

که،

$$\mathfrak{Z}_{\mathbf{I}\,(\mathrm{i})\,\boldsymbol{m}} = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(\mathrm{i})}\,(\delta\,H)_{\mathbf{I}}][t,\mathsf{Q}_{\mathbf{I}<\boldsymbol{m}}(t,q',p'),\mathsf{P}_{\mathbf{I}<\boldsymbol{m}}(t,q',p')]\}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4719}$$

روابط ِ (4715) تا (4718)، معادلات ِ بازگشتی برا یِ $(\mathsf{Q}_{\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}},\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}})$ ها یَند. شرط ِ اولیه برا یِ (4717) و (4718) هم این است.

$$\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}}(t_0,q',p') = 0, \quad m>0. \tag{4720}$$

$$\mathsf{Q}_{\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}}(t_0,q',p') = 0, \quad m>0. \tag{4721}$$

دیده میشود

$$\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\mathbf{1}}(t,q',p') = -\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,H_{\mathbf{1}}][s,q'+(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p'),p']. \tag{4722}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}_{\mathbf{I}\,\mathbf{1}}(t,q',p') &= \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,\frac{\partial\,[(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p')]}{\partial\,p'}\,[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,H_{\mathbf{1}}][s,q'+(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p'),p']\\ &\quad+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,H_{\mathbf{1}}][s,q'+(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p'),p'].\end{aligned} \tag{4723}$$

از روابط ِ (4703) و (4707) دیده میشود

$$w_{\mathbf{0}}(s,p') = \frac{\partial}{\partial\,s}\,\left\{\frac{\partial\,[(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p')]}{\partial\,p'}\right\}. \tag{4724}$$

از رابطه یِ (4722) هم دیده میشود

$$\frac{\partial\,[\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\mathbf{1}}(s,q',p')]}{\partial\,s} = -[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,H_{\mathbf{1}}][s,q'+(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p'),p']. \tag{4725}$$

اینها را در جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (4723) میگذارم و در این جمله انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ به کار میبَرم. (4723) چنین میشود.

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}_{\mathbf{I}\,\mathbf{1}}(t,q',p') &= -[\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\mathbf{1}}(t,q',p')]\,\frac{\partial\,[(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(t,p')]}{\partial\,p'}\\ &\quad+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[w_{\mathbf{0}}(s,p')]\,\mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\mathbf{1}}(s,q',p')\\ &\quad+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,H_{\mathbf{1}}][s,q'+(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(s,p'),p'].\end{aligned} \tag{4726}$$

رابطه یِ (4663)، همراه با روابط ِ (4701) و (4702)، نتیجه میدهد

$$\mathsf{P}(t,q',p') = \mathsf{P}_{\mathbf{I}}(t,q',p'). \tag{4727}$$

$$\mathsf{Q}(t,q',p') = \mathsf{Q}_{\mathbf{I}}(t,q',p') + (\Delta\,q)_{\mathbf{0}}[t,\mathsf{P}_{\mathbf{I}}(t,q',p')]. \tag{4728}$$

مرتبه یِ صفر ِ روابط ِ (4727) و (4728) میشود

$$\mathsf{P}_{\mathbf{0}}(t,q',p') = \mathsf{P}_{\mathbf{I}\,\mathbf{0}}(t,q',p'). \tag{4729}$$

$$\mathsf{Q}_{\mathbf{0}}(t,q',p') = \mathsf{Q}_{\mathbf{I}\,\mathbf{0}}(t,q',p') + (\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(t,p'). \tag{4730}$$

برا یِ رسیدن به (4730)، رابطه یِ (4715) به کار رفته. روابط ِ (4701) و (4715) نشان میدهند (4729) درست است، چنان که باید. روابط ِ (4702) و (4716) هم نشان میدهند (4730) درست است، چنان که باید.

مرتبه یِ یک ِ روابط ِ (4727) و (4728) میشود

$$\mathsf{P}_{\mathbf{1}}(t,q',p') = \mathsf{P}_{\mathbf{I\,1}}(t,q',p'). \tag{4731}$$

$$\mathsf{Q}_{\mathbf{1}}(t,q',p') = \mathsf{Q}_{\mathbf{I\,1}}(t,q',p') + [\mathsf{P}_{\mathbf{I\,1}}(t,q',p')]\,\frac{\partial\,[(\Delta\,q)_{\mathbf{0}}(t,p')]}{\partial\,p'}. \tag{4732}$$

برا یِ رسیدن به (4732)، رابطه یِ (4715) به کار رفته. روابط ِ (4712) و (4722) نشان میدهند (4731) درست است، چنان که باید. روابط ِ (4713) و (4726) و (4731) هم نشان میدهند (4732) درست است، چنان که باید.

13

اختلال ِ کانُنیک، مستقل-از-زمان

107 اختلال ِ مختصات ِ کانُنیک

تبدیل ی از مختصات- ِ-کانُنیک ِ (q,p) به مختصات- ِ-کانُنیک ِ (q',p') را بررسی میکنم، که q' نزدیک به q و p' نزدیک به p است. یک حالت این است که یک خانواده از مختصات ِ کانُنیک هست که متناظر با یک پارامتر- ِ-اختلال ِ ε است، چنان که (q,p) متناظر با $(\varepsilon=0)$ است و (q',p') متناظر با یک مقدار ِ کوچک برا ی ِ ε اند.

انحراف ِ (q',p') از (q,p) را با $(\delta\,q,\delta\,p)$ نشان میدهم:

$$q' = q + \delta\,q. \tag{4733}$$

$$p' = p + \delta\,p. \tag{4734}$$

این که (q',p') نزدیک به (q,p) است را چنین نمایش میدهم.

$$\delta\,q = O(\varepsilon). \tag{4735}$$

$$\delta\,p = O(\varepsilon). \tag{4736}$$

که ε یک پارامتر ِ کوچک است.

q و p مستقل-از-هم َند. پس ماتریس ِ مشتق ِ (q,p) (نسبت به مختصات) ناتکین است. در واقع میشود مختصات را خُد ِ (q,p) گرفت و آن وقت ماتریس ِ مشتق ِ (q,p) نسبت به مختصات همانی میشود:

$$\frac{\partial\,(q,p)}{\partial\,(q,p)}=\mathbf{1}. \tag{4737}$$

از این که p' نزدیک به p است، نتیجه میشود ماتریس ِ مشتق ِ (q,p') نزدیک به ماتریس ِ مشتق ِ (q,p) است:

$$\frac{\partial\,(q,p')}{\partial\,(q,p)}=\mathbf{1}+\frac{\partial\,(q,\delta\,p)}{\partial\,(q,p)}. \tag{4738}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\partial\,(q,p')}{\partial\,(q,p)}=\mathbf{1}+O(\varepsilon). \tag{4739}$$

این هم نتیجه میدهد اگر انحراف ِ p' از p به حد ِ کافی کم باشد (ε به حد ِ کافی کوچک باشد)، ماتریس ِ مشتق ِ (q,p') نسبت به (q,p) ناتکین است. مثلَن،

$$\det\left[\frac{\partial\,(q,p')}{\partial\,(q,p)}\right]=1+O(\varepsilon). \tag{4740}$$

پس اگر ε به حد ِ کافی کوچک باشد،

$$\det\left[\frac{\partial\,(q,p')}{\partial\,(q,p)}\right]\neq 0. \tag{4741}$$

که یعنی ماتریس ِ مشتق ِ (q,p') نسبت به (q,p) ناتکین است.

این یعنی (q,p') (مُضعَن) مستقل-از-هم َند. پس میشود تابعی یِ-مولد ِ تبدیل از (q,p) به (q',p') را تابع ی از q و p' گرفت. تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با این تبدیل را با $\tilde{\Upsilon}$ نشان میدهم:

$$\tilde{\Upsilon}=p'_i\,q'^i+\Upsilon. \tag{4742}$$

و البته،

$$q' = \frac{\partial\,[(\tilde{\Upsilon})(q,p')]}{\partial\,p'}. \tag{4743}$$

$$p = \frac{\partial\,[(\tilde{\Upsilon})(q,p')]}{\partial\,q}. \tag{4744}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,p'} = q + O(\varepsilon). \tag{4745}$$

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}}{\partial\,q} = p' + O(\varepsilon). \tag{4746}$$

که نتیجه میدهد

$$\tilde{\Upsilon} = p'_i\,q^i + O(\varepsilon). \tag{4747}$$

از جمله،

$$\Upsilon = p'_i\,(q^i - q'^i) + O(\varepsilon). \tag{4748}$$

که نشان میدهد

$$\Upsilon = O(\varepsilon). \tag{4749}$$

چنان که انتظار میرفت.

انحراف ِ $\tilde{\Upsilon}$ از تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با تبدیل ِ همانی را با $(\delta\,\tilde{\Upsilon})$ نشان میدهم:

$$\tilde{\Upsilon}(q,p') = p'_i\,q^i + (\delta\,\tilde{\Upsilon})(q,p'). \tag{4750}$$

روابط ِ (4743) و (4744) چنین میشوند.

$$(\delta\,q)(q,p) = \frac{\partial\,[(\delta\,\tilde{\Upsilon})(q,p')]}{\partial\,p'}. \tag{4751}$$

$$-(\delta p)(q,p) = \frac{\partial\,[(\delta\,\tilde{\Upsilon})(q,p')]}{\partial\,q}. \tag{4752}$$

مختصات ی که در دُ-طرفِ این روابط به کار رفته یکسان نیستند: طرفِ چپ بر حسبِ (q,p) نوشته شده، و طرفِ راست بر حسبِ (q,p') نوشته شده.

میشود طرفِ راستِ (4751) و (4752) را بر حسبِ (q,p) نوشت:

$$(\delta\, q)(q,p) = \frac{\partial\,\{(\delta\,\tilde{\Upsilon})[q,p'(q,p)]\}}{\partial\, p'}. \tag{4753}$$

$$-(\delta p)(q,p) = \frac{\partial\,\{(\delta\,\tilde{\Upsilon})[q,p'(q,p)]\}}{\partial\, q} - \frac{\partial\,\{(\delta\,\tilde{\Upsilon})[q,p'(q,p)]\}}{\partial\, p'_i}\,\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, q}. \tag{4754}$$

رابطه یِ (4754)، با استفاده از 4753 چنین میشود.

$$\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, q}\,\delta\, q^i - \delta\, p = \frac{\partial\,\{(\delta\,\tilde{\Upsilon})[q,p'(q,p)]\}}{\partial\, q}. \tag{4755}$$

و اینها را میشود بر حسبِ $(\delta\,\tilde{\Upsilon}^\circ)$ نوشت:

$$(\delta\,\tilde{\Upsilon}^\circ)(q,p) = (\delta\,\tilde{\Upsilon})[q,p'(q,p)]. \tag{4756}$$

$$\delta\, q = \frac{\partial\, p_i}{\partial\, p'}\,\frac{\partial\,(\delta\,\tilde{\Upsilon}^\circ)}{\partial\, p_i}. \tag{4757}$$

$$\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, q}\,\delta\, q^i - \delta\, p = \frac{\partial\,(\delta\,\tilde{\Upsilon}^\circ)}{\partial\, q}. \tag{4758}$$

البته (4757) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\partial\, p'_i}{\partial\, p}\,\delta\, q^i = \frac{\partial\,(\delta\,\tilde{\Upsilon}^\circ)}{\partial\, p}. \tag{4759}$$

همچنین، روابطِ (4758) و (4759) را میشود چنین نوشت.

$$\frac{\partial\,(\delta\, p_i)}{\partial\, q}\,\delta\, q^i - \delta\, p = \frac{\partial\,(\delta\,\tilde{\Upsilon}^\circ)}{\partial\, q}. \tag{4760}$$

$$\frac{\partial\,(\delta\, p_i)}{\partial\, p}\,\delta\, q^i + \delta\, q = \frac{\partial\,(\delta\,\tilde{\Upsilon}^\circ)}{\partial\, p}. \tag{4761}$$

روابطِ (4760) و (4761) معادلات ی یَند که $(\delta\,\tilde{\Upsilon}^\circ)$ را میدهند. و البته در این روابط، همه چیز بر حسبِ (q,p) بیان شده.

همچنین، میشود طرف ِ چپ ِ (4751) و (4752) را بر حسب ِ (q,p') نوشت:

$$(\delta\, q)[q,p(q,p')] = \frac{\partial\,[(\delta\,\tilde{\Upsilon})(q,p')]}{\partial\, p'}. \tag{4762}$$

$$-(\delta p)[q,p(q,p')] = \frac{\partial\,[(\delta\,\tilde{\Upsilon})(q,p')]}{\partial\, q}. \tag{4763}$$

اینها یعنی باید بستگی ی ِ p' به p (و q) را وارون کرد و p را برحسب ِ p' (و q) به دست آورد و در طرف ِ چپ ِ (4751) و (4752) گذاشت. روابط ِ (4762) و (4763) معادلات ی یَند که $(\delta\,\tilde{\Upsilon})$ را میدهند. و البته در این روابط، همه چیز بر حسب ِ (q,p') بیان شده.

گیرم رابطه ی ِ (q',p') با (q,p) به شکل ِ یک سری ی ِ توانی بر حسب ِ ε است. پس تابعی-ی ِ-مولد را هم میشود بر حسب ِ ε داد. این بسطها را چنین مینویسم.

$$(\delta\, q)(q,p) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, q'_{\boldsymbol{n}}(q,p). \tag{4764}$$

$$(\delta\, p)(q,p) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, p'_{\boldsymbol{n}}(q,p). \tag{4765}$$

$$(\delta\,\tilde{\Upsilon})(q,p') = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, \tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n}}(q,p'). \tag{4766}$$

که،

$$\tilde{\Upsilon}(q,p') = p'_i\, q^i + (\delta\,\tilde{\Upsilon})(q,p'). \tag{4767}$$

$q_{\boldsymbol{n}}$ و $p_{\boldsymbol{n}}$ و $\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n}}$، برا ی ِ فقط $(n\geq 1)$ تعریف شده اند.

در روابط ِ (4760) و (4761)، دُ-طرف سری ی ِ توانی بر حسب ِ ε دارند. از جمله،

$$\delta\,\tilde{\Upsilon}^{\circ} = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, \tilde{\Upsilon}^{\circ}_{\boldsymbol{n}}. \tag{4768}$$

به این ترتیب، (4760) و (4761) نتیجه میدهند

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\circ}_{\boldsymbol{n}}}{\partial\, q} = -p_{\boldsymbol{n}} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial\, p_{i\,\boldsymbol{m}}}{\partial\, q}\, q^i{}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}. \tag{4769}$$

$$\frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^{\circ}_{\boldsymbol{n}}}{\partial\, p} = q_{\boldsymbol{n}} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial\, p_{i\,\boldsymbol{m}}}{\partial\, p}\, q^i{}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}. \tag{4770}$$

روابطِ (4769) و (4770) جملاتِ بسطِ $(\delta\,\tilde{\Upsilon}^{\circ})$ بر حسبِ ε را میدهند.

در روابطِ (4762) و (4763)، دُ-طرف سری یِ توانی بر حسبِ ε دارند. در طرفِ چپِ (4762) و (4763)، علاوه بر $(\delta\,q)$ و $(\delta\,p)$ باید $p(q,p')$ را هم بسط داد. این بسط را چنین مینویسم.

$$p(q,p') = p' + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, p'_{\boldsymbol{n}}(q,p'). \tag{4771}$$

البته،

$$p = p[q, p'(q,p)]. \tag{4772}$$

که یعنی،

$$p = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n\, p'_{\boldsymbol{n}} \left[q, \sum_{m\geq 0} \varepsilon^m\, p_{\boldsymbol{m}}(q,p)\right]. \tag{4773}$$

یا،

$$p = p + \sum_{l\geq 1} \varepsilon^l\, p_{\boldsymbol{l}}(q,p) + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, p'_{\boldsymbol{n}} \left[q, p + \sum_{m\geq 1} \varepsilon^m\, p_{\boldsymbol{m}}(q,p)\right]. \tag{4774}$$

پس،

$$0 = \sum_{l\geq 1} \varepsilon^l\, p_{\boldsymbol{l}}(q,p) + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, p'_{\boldsymbol{n}} \left[q, p + \sum_{m\geq 1} \varepsilon^m\, p_{\boldsymbol{m}}(q,p)\right]. \tag{4775}$$

این یک روشِ بازگشتی برا یِ محاسبه یِ $p_{\boldsymbol{l}}$ بر حسبِ $p'_{\boldsymbol{1}}$ تا $p'_{\boldsymbol{l}}$ میدهد:

$$p_{\boldsymbol{l}}(q,p) = -\left\{\sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\, p'_{\boldsymbol{n}} \left[q, p + \sum_{m\geq 1} \varepsilon^m\, p_{\boldsymbol{m}}(q,p)\right]\right\}_{\boldsymbol{l}}. \tag{4776}$$

در طرفِ راست، در واقع فقط $p_{\boldsymbol{1}}(q,p)$ تا $p_{\boldsymbol{l-1}}(q,p)$ ظاهر میشود:

$$p_{\boldsymbol{l}}(q,p) = -\sum_{n=1}^{l} \left\{p'_{\boldsymbol{n}} \left[q, p + \sum_{m=1}^{l-n} \varepsilon^m\, p_{\boldsymbol{m}}(q,p)\right]\right\}_{\boldsymbol{l-n}}. \tag{4777}$$

پس،

$$p_{\boldsymbol{l}}(q,p) = -p_{\boldsymbol{l}}^{\backslash}(q,p) - \sum_{n=1}^{l-1} \left\{ p_{\boldsymbol{n}}^{\backslash} \left[q, p + \sum_{m=1}^{l-n} \varepsilon^m \, p_{\boldsymbol{m}}(q,p) \right] \right\}_{\boldsymbol{l-n}} . \tag{4778}$$

از جمله،

$$p_{\mathbf{1}}(q,p) = -p_{\mathbf{1}}^{\backslash}(q,p). \tag{4779}$$

و،

$$p_{\mathbf{2}}(q,p) = -p_{\mathbf{2}}^{\backslash}(q,p) - \left\{ p_{\mathbf{1}}^{\backslash} \left[q, p + \varepsilon \, p_{\mathbf{1}}(q,p) \right] \right\}_{\mathbf{1}} . \tag{4780}$$

که یعنی،

$$p_{\mathbf{2}}(q,p) = -p_{\mathbf{2}}^{\backslash}(q,p) - \frac{\partial \left[p_{\mathbf{1}}^{\backslash}(q,p) \right]}{\partial \, p_i} \, p_{i\,\mathbf{1}}(q,p). \tag{4781}$$

به شکل ی مشابه،

$$p' = p'[q, p(q,p')]. \tag{4782}$$

که یعنی،

$$p' = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \, p_{\boldsymbol{n}}[q, p(q,p')]. \tag{4783}$$

یا،

$$p' = p' + \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l \, p_{\boldsymbol{l}}^{\backslash}(q,p') + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \, p_{\boldsymbol{n}} \left[q, p' + \sum_{m \geq 1} \varepsilon^m \, p_{\boldsymbol{m}}^{\backslash}(q,p') \right] . \tag{4784}$$

پس،

$$0 = \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l \, p_{\boldsymbol{l}}^{\backslash}(q,p') + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \, p_{\boldsymbol{n}} \left[q, p' + \sum_{m \geq 1} \varepsilon^m \, p_{\boldsymbol{m}}^{\backslash}(q,p') \right] . \tag{4785}$$

این یک روش ِ بازگشتی برا یِ محاسبه یِ $p_{\boldsymbol{l}}^{\backprime}$ بر حسب ِ $p_{\boldsymbol{1}}$ تا $p_{\boldsymbol{l}}$ میدهد:

$$p_{\boldsymbol{l}}^{\backprime}(q,p') = -\left\{\sum_{n\geq 1}\varepsilon^n\, p_{\boldsymbol{n}}\left[q,p' + \sum_{m\geq 1}\varepsilon^m\, p_{\boldsymbol{m}}^{\backprime}(q,p')\right]\right\}_{\boldsymbol{l}}. \tag{4786}$$

در طرف ِ راست، در واقع فقط $p_{\boldsymbol{1}}^{\backprime}(q,p')$ تا $p_{\boldsymbol{l-1}}^{\backprime}(q,p')$ ظاهر میشود:

$$p_{\boldsymbol{l}}^{\backprime}(q,p') = -\sum_{n=1}^{l}\left\{p_{\boldsymbol{n}}\left[q,p' + \sum_{m=1}^{l-n}\varepsilon^m\, p_{\boldsymbol{m}}^{\backprime}(q,p')\right]\right\}_{\boldsymbol{l-n}}. \tag{4787}$$

پس،

$$p_{\boldsymbol{l}}^{\backprime}(q,p) = -p_{\boldsymbol{l}}(q,p') - \sum_{n=1}^{l-1}\left\{p_{\boldsymbol{n}}\left[q,p' + \sum_{m=1}^{l-n}\varepsilon^m\, p_{\boldsymbol{m}}^{\backprime}(q,p')\right]\right\}_{\boldsymbol{l-n}}. \tag{4788}$$

از جمله،

$$p_{\boldsymbol{1}}^{\backprime}(q,p') = -p_{\boldsymbol{1}}(q,p'). \tag{4789}$$

و،

$$p_{\boldsymbol{2}}^{\backprime}(q,p') = -p_{\boldsymbol{2}}(q,p') - \left\{p_{\boldsymbol{1}}\left[q,p' + \varepsilon\, p_{\boldsymbol{1}}^{\backprime}(q,p')\right]\right\}_{\boldsymbol{1}}. \tag{4790}$$

که یعنی،

$$p_{\boldsymbol{2}}^{\backprime}(q,p') = -p_{\boldsymbol{2}}(q,p') - \frac{\partial\,[p_{\boldsymbol{1}}(q,p')]}{\partial\, p'_i}\, p_{i\,\boldsymbol{1}}^{\backprime}(q,p'). \tag{4791}$$

روابط ِ (4751) و (4752) را بر حسب ِ ε بسط میدهم:

$$\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n}}(q,p')]}{\partial\, p'} = \sum_{m=1}^{n}\{q_{\boldsymbol{m}}[q,p(q,p')]\}_{\boldsymbol{n-m}}. \tag{4792}$$

$$\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n}}(q,p')]}{\partial\, q} = -\sum_{m=1}^{n}\{p_{\boldsymbol{m}}[q,p(q,p')]\}_{\boldsymbol{n-m}}. \tag{4793}$$

یا،

$$\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n}}(q,p')]}{\partial\, p'} = \sum_{m=1}^{n}\left\{q_{\boldsymbol{m}}\left[q,p' + \sum_{l=1}^{n-m}\varepsilon^l\, p_{\boldsymbol{l}}^{\backprime}(q,p')\right]\right\}_{\boldsymbol{n-m}}. \tag{4794}$$

$$\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n}}(q,p')]}{\partial\, q} = -\sum_{m=1}^{n}\left\{p_{\boldsymbol{m}}\left[q,p' + \sum_{l=1}^{n-m}\varepsilon^l\, p_{\boldsymbol{l}}^{\backprime}(q,p')\right]\right\}_{\boldsymbol{n-m}}. \tag{4795}$$

در طرف ِ راست ِ این روابط، $p_{\grave{\imath}}$ را میشود با استفاده از رابطه ی ِ بازگشتی ی ِ (4788) حساب کرد. روابط ِ (4794) و (4795) جملات ِ بسط ِ $(\delta\,\tilde{\Upsilon})$ بر حسب ِ ε را میدهند.

108 اختلال ِ متغیرها ی ِ کنش-ُ-زاویه

تبدیل ی از متغیرها-ی ِ-کنش-ُ-زاویه ی ِ (ϑ, A) به متغیرها-ی ِ-کنش-ُ-زاویه ی ِ $(\vartheta', \mathsf{A}')$ را بررسی میکنم، که ϑ' نزدیک به ϑ و A' نزدیک به A است. البته چنین-تبدیل ی ِ یک تبدیل-ِ-مختصات ِ کائُنیک هم هست. پس این حالت ِ خاص ی از اختلال ِ مختصات ِ کائُنیک است.

از جمله، حالت ی را بررسی میکنم که یک خانواده از متغیرها ی ِ کنش-ُ-زاویه هست که متناظر با یک پارامتر-ِ-اختلال ِ ε است، چنان که (ϑ, A) متناظر با $(\varepsilon = 0)$ است و $(\vartheta', \mathsf{A}')$ متناظر با یک مقدار ِ کوچک برا ی ِ ε است.

البته ϑ و ϑ' تابع نیستند: $\vartheta^i(x)$ یک مجموعه عدد است، که برابر است با یک عدد به اضافه ی ِ مجموعه ی ِ عددها ی ِ صحیح:

$$\vartheta^i(x) = \{[\vartheta^i(x)]_0\} + \mathbb{Z}. \tag{4796}$$

که $[\vartheta^i(x)]_0$ یک عضو ِ $\vartheta^i(x)$ است. پیوستگی ی ِ ϑ^i در x هم یعنی برا ی ِ هر β ی ِ مثبت یک همسایگی از x هست که اگر y در آن باشد، برا ی ِ هر $[\vartheta^i(x)]_j$ در $\vartheta^i(x)$ یک $[\vartheta^i(y)]_k$ در $\vartheta^i(y)$ هست که،

$$|[\vartheta^i(y)]_k - [\vartheta^i(x)]_j| < \beta. \tag{4797}$$

رُشن است که مانسته ی ِ اینها برا ی ِ ϑ' هم هست.

ϑ و ϑ' تابع نیستند. اما وقت ی اختلال به حد ِ کافی کوچک باشد، $(\delta\,\vartheta)$ را میشود تابع کرد. برا ی ِ اثبات، توجه میکنم که $(\delta\,\vartheta^i)$ هم یک زاویه است، یعنی $(\delta\,\vartheta^i)(x)$ یک مجموعه عدد است، که مانسته ی ِ (4796) را برمیئاورَد. اگر ε صفر باشد، $(\delta\,\vartheta^i)$ همئرز با صفر میشود، که یعنی $(\delta\,\vartheta^i)(x)$ برا ی ِ هر x هم ان $\mathbb{Z}$ است. وقت ی ε به حد ِ کافی کوجک باشد، برا ی ِ هر x یک j هست که

$$|[(\delta\,\vartheta^i)(x)]_j| < \frac{1}{3}. \tag{4798}$$

رُشن است که $[(\delta\,\vartheta^i)(x)]_j$، برا یِ هر x یکتا ست. $[(\delta\,\vartheta^i)(x)]_j$ را، برا یِ هر x، با $\mathfrak{t}^i(x)$ نشان میدهم. پیوستگی یِ $(\delta\,\vartheta^i)$ در x نتیجه میدهد برا یِ هر β یِ مثبت یک همسایگی از x هست که اگر y در آن باشد یک $[(\delta\,\vartheta^i)(y)]_k$ در $(\delta\,\vartheta^i)(y)$ هست که،

$$|[(\delta\,\vartheta^i)(y)]_k - \mathfrak{t}^i(x)| < \beta. \tag{4799}$$

البته یک l هم در $\mathbb{Z}$ هست که

$$|[(\delta\,\vartheta^i)(y)]_k - l| < \frac{1}{3}. \tag{4800}$$

گیرم

$$\beta < \frac{1}{3}. \tag{4801}$$

از (4798) تا (4801)، همراه با این که $|[(\delta\,\vartheta^i)(x)]_j|$ هم ان $\mathfrak{t}^i(x)$ است، نتیجه میشود

$$|l| < 1. \tag{4802}$$

این، همراه با این که l صحیح است، نتیجه میدهد l صفر است. پس،

$$|[(\delta\,\vartheta^i)(y)]_k| < \frac{1}{3}. \tag{4803}$$

این هم یعنی $[(\delta\,\vartheta^i)(y)]_k$ هم ان $\mathfrak{t}^i(y)$ است. نتیجه این که برا یِ هر x، اگر (4801) برقرار باشد، یک همسایگی یِ x هست که اگر y در آن باشد

$$|\mathfrak{t}^i(y) - \mathfrak{t}^i(x)| < \beta. \tag{4804}$$

این یعنی $\mathfrak{t}^i$ پیوسته است. $\mathfrak{t}^i$ را با خُد ِ $(\delta\,\vartheta^i)$ نشان میدهم.

متغیر- ِ-کنشها تابع َند. پس اختلال ِ شان هم تابع است. برا یِ سادِگی، با متغیر- ِ-زاویِها هم مثل ِ عدد رفتار میکنم: یک عضو ِ $\vartheta^i(x)$ را با خُد ِ $\vartheta^i(x)$ نشان میدهم.

معلوم شد اگر اختلال کوچک باشد، ϑ و A' مستقل-از-هم َند (ϑ^i ها مکانها یِ قدیم و A'_i ها تکانِها یِ جدید َند). آن چه برا یِ اختلال ِ مختصات ِ کانُنیک به دست آمد تکرار میشود. نکته یِ

خاص این است که توابع بر حسب ِ ϑ بسط- ِ-فوریه دارند. دیده میشود

$$\tilde{\Upsilon} = \mathsf{A}'_i\,\vartheta^i + \delta\,\tilde{\Upsilon}. \tag{4805}$$

$$\delta\,\vartheta = \frac{\partial\,(\delta\,\tilde{\Upsilon})}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4806}$$

$$-\delta\,\mathsf{A} = \frac{\partial\,(\delta\,\tilde{\Upsilon})}{\partial\,\vartheta}. \tag{4807}$$

$(\delta\,\vartheta^i)$ ها و $(\delta\,\mathsf{A}_i)$ ها تابع َند. پس روابط ِ (4806) و (4807) نشان میدهند $(\delta\,\tilde{\Upsilon})$ هم تابع است: خُد ِ تابعی-یِ-مولد ِ $\tilde{\Upsilon}$ تابع نیست، اما $(\delta\,\tilde{\Upsilon})$ تابع است. $(\delta\,\vartheta^i)$ ها و $(\delta\,\mathsf{A}_i)$ ها و $(\delta\,\tilde{\Upsilon})$ تابع َند، پس بر حسب ِ ϑ بسط ِ فوریه دارند:

$$(\delta\,\vartheta)(\vartheta,\mathsf{A}') = [(\delta\,\vartheta)^n(\mathsf{A}')]\,\Theta_n(\vartheta). \tag{4808}$$

$$(\delta\,\mathsf{A})(\vartheta,\mathsf{A}') = [(\delta\,\mathsf{A})^n(\mathsf{A}')]\,\Theta_n(\vartheta). \tag{4809}$$

$$(\delta\,\tilde{\Upsilon})(\vartheta,\mathsf{A}') = [(\delta\,\tilde{\Upsilon})^n(\mathsf{A}')]\,\Theta_n(\vartheta). \tag{4810}$$

$$(\delta\,\vartheta)^n = \frac{\partial\,(\delta\,\tilde{\Upsilon})^n}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4811}$$

$$-(\delta\,\mathsf{A})^n = 2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,(\delta\,\tilde{\Upsilon})^n. \tag{4812}$$

از جمله،

$$(\delta\,\mathsf{A}_i)^n = 0, \quad n_i = 0. \tag{4813}$$

$$(\delta\,\mathsf{A})^0 = 0. \tag{4814}$$

گیرم تبدیل ِ (ϑ,A) به (ϑ',A') یک بسط ِ توانی بر حسب ِ پارامتر- ِ-تبدیل ِ ε دارد:

$$\delta\,\vartheta = \sum_{n\geq 1}\varepsilon^n\,\vartheta_{\boldsymbol{n}}. \tag{4815}$$

$$\delta\,\mathsf{A} = \sum_{n\geq 1}\varepsilon^n\,\mathsf{A}_{\boldsymbol{n}}. \tag{4816}$$

$$\delta\,\tilde{\Upsilon} = \sum_{n\geq 1}\varepsilon^n\,\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n}}. \tag{4817}$$

$\vartheta_{\boldsymbol{n}}$ و $\mathsf{A}_{\boldsymbol{n}}$ و $\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{n}}$، برا یِ فقط $(n \geq 1)$ تعریف شده اند. ترکیب ِ بسط- ِ-فوریه و بسط ِ توانی بر حسب ِ ε چنین میشود.

$$\delta\,\vartheta = \sum_{m\geq 1} \varepsilon^m\,\vartheta^n{}_{\boldsymbol{m}}\,\Theta_n. \tag{4818}$$

$$\delta\,\mathsf{A} = \sum_{m\geq 1} \varepsilon^m\,\mathsf{A}^n{}_{\boldsymbol{m}}\,\Theta_n. \tag{4819}$$

$$\delta\,\tilde{\Upsilon} = \sum_{m\geq 1} \varepsilon^m\,\tilde{\Upsilon}^n{}_{\boldsymbol{m}}\,\Theta_n. \tag{4820}$$

$$\vartheta^n{}_{\boldsymbol{m}} = \frac{\partial\,\tilde{\Upsilon}^n{}_{\boldsymbol{m}}}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4821}$$

$$-\mathsf{A}^n{}_{\boldsymbol{m}} = 2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\tilde{\Upsilon}^n{}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4822}$$

از جمله،

$$\mathsf{A}_i{}^n{}_{\boldsymbol{m}} = 0, \quad n_i = 0. \tag{4823}$$

$$\mathsf{A}^0{}_{\boldsymbol{m}} = 0. \tag{4824}$$

109 متغیرها یِ کنش-ُ-زاویه برا یِ سیستم ِ مختل-شده

هَمیلتِنی یِ متناظر با یک سیستم (ِ مختل-نشده) تابع ِ فقط متغیر- ِ-کنش (ِ مختل-نشده) است. این هَمیلتِنی را با $H_{\mathbf{0}}$، و متغیرها-یِ-کنش-ُ-زاویه (یِ مختل-نشده) را با (ϑ, A) نشان میدهم:

$$\left(\frac{\partial\,H_{\mathbf{0}}}{\partial\,\vartheta}\right)_{\mathsf{A}} = 0. \tag{4825}$$

هَمیلتِنی یِ مختل-شده را با H نشان میدهم. در حالت ِ کلی، H تابع ِ هم A و هم ϑ است. این را چنین نشان میدهم.

$$H(\vartheta, \mathsf{A}) = H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}) + (\delta\,H)(\vartheta, \mathsf{A}). \tag{4826}$$

دنبال ِ یک تبدیل- ِ-کانُنیک از متغیرها-یِ-کنش- ُ-زاویه یِ قدیم ِ (ϑ, A) به متغیرها-یِ-کنش- ُ-زاویه یِ جدید ِ $(\vartheta', \mathsf{A}')$ میگردم، که هَمیلتِنی یِ مختل-شده، تابع ِ فقط متغیر- ِ-کنش ِ جدید است. این یعنی یک H' هست که

$$H(\vartheta, \mathsf{A}) = H'(\mathsf{A}'). \tag{4827}$$

تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با تبدیل ی که (ϑ, A) را به $(\vartheta', \mathsf{A}')$ تبدیل میکند را با $\tilde{\Upsilon}$ نشان میدهم، و متغیرها یِ آن را متغیر- ِ-زاویه یِ قدیم (ϑ) و متغیر- ِ-کنش ِ جدید (A') میگیرم:

$$\tilde{\Upsilon}(\vartheta, \mathsf{A}') = \mathsf{A}'_i\,\vartheta^i + (\delta\,\tilde{\Upsilon})(\vartheta, \mathsf{A}'). \tag{4828}$$

$$(\delta\,\vartheta')(\vartheta, \mathsf{A}') = \frac{\partial\,[(\delta\,\tilde{\Upsilon})(\vartheta, \mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4829}$$

$$-(\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}') = \frac{\partial\,[(\delta\,\tilde{\Upsilon})(\vartheta, \mathsf{A}')]}{\partial\,\vartheta}. \tag{4830}$$

که،

$$(\delta\,\vartheta)(\vartheta, \mathsf{A}') = \vartheta'(\vartheta, \mathsf{A}') - \vartheta. \tag{4831}$$

$$(\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}') = \mathsf{A}' - \mathsf{A}(\vartheta, \mathsf{A}'). \tag{4832}$$

رابطه یِ (4827) بر حسب ِ (ϑ, A') و ϑ چنین میشود

$$H'(\mathsf{A}') = H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')] + (\delta\,H)[\vartheta, \mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')]. \tag{4833}$$

یا،

$$H'(\mathsf{A}') = H[\vartheta, \mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')]. \tag{4834}$$

$(\delta\,\vartheta^i)$ ها و $(\delta\,\mathsf{A}_i)$ ها و $(\delta\,\tilde{\Upsilon})$ تابع َند، پس بر حسب ِ ϑ بسط- ِ-فوریه دارند. بسط- ِ-فوریه یِ دُ-طرف ِ رابطه یِ (4833) را، با متغیرها یِ (ϑ, A')، مینویسم. چون H' تابع ِ فقط A' است،

$$H'^{n}(\mathsf{A}') = [H'(\mathsf{A}')]\,\delta^n_{\mathbf{0}}. \tag{4835}$$

که میشود آن را به این دُ-رابطه تفکیک کرد.

$$H' = \mathsf{mn}(H'). \tag{4836}$$

$$H'^n = 0, \quad n \neq 0. \tag{4837}$$

H' رابطه یِ (4833) را برمیئاورَد. پس رابطه یِ (4836) چنین میشود.

$$H'(\mathsf{A}') = \mathsf{mn}[H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}' - \delta\,\mathsf{A})] + \mathsf{mn}[(\delta\,H)(\boldsymbol{.}, \mathsf{A}' - \delta\,\mathsf{A})]. \tag{4838}$$

گیرم اختلال یک بسط ِ توانی بر حسب ِ ε (پارامتر ِ اختلال) دارد. بسط ِ H' بر حسب ِ ε چنین میشود.

$$H'(\mathsf{A}') = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n\, H'_{\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}'). \tag{4839}$$

جملات ِ طرف ِ راست ِ (4838) را هم بر حسب ِ ε بسط میدهم:

$$\begin{aligned} H'_{\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}') = &\Big(\mathsf{mn}\{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.}, \mathsf{A}')]\}\Big)_{\boldsymbol{n}} \\ &+ \Big(\mathsf{mn}\{(\delta\,H)[\boldsymbol{.}, \mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.}, \mathsf{A}')]\}\Big)_{\boldsymbol{n}}. \end{aligned} \tag{4840}$$

برا یِ جمله یِ اول ِ طرف ِ راست،

$$H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')] = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n\, \{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}. \tag{4841}$$

در طرف ِ چپ، بستِگی به ε از طریق ِ $(\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')$ وارد میشود:

$$(\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}') = \sum_{m\geq 1} \varepsilon^m\, \mathsf{A}_{\boldsymbol{m}}(\vartheta, \mathsf{A}'). \tag{4842}$$

پس،

$$H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')] = H_{\mathbf{0}}\left[\mathsf{A}' - \sum_{m\geq 1} \varepsilon^m\, \mathsf{A}_{\boldsymbol{m}}(\vartheta, \mathsf{A}')\right]. \tag{4843}$$

دیده میشود

$$H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{n}}(\vartheta, \mathsf{A}')] = H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{n}-\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')] - \varepsilon^n\,[\mathsf{A}_{\boldsymbol{n}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\,\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}') + o(\varepsilon^n). \tag{4844}$$

که،

$$\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}') = \frac{\partial\,[H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4845}$$

به این ترتیب،

$$\{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}} = \{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{n}-\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}} - [\mathsf{A}_{\boldsymbol{n}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\,\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}'). \tag{4846}$$

همچنین،

$$\mathsf{mn}\{[\mathsf{A}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{.}, \mathsf{A}')]\,\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}')\} = \Big(\mathsf{mn}\{[\mathsf{A}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{.}, \mathsf{A}')]\}\Big)\,\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}'). \tag{4847}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{mn}\{[\mathsf{A}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{.}, \mathsf{A}')]\} &= \mathsf{A}^{0}{}_{\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}'),\\ &= 0.\end{aligned} \tag{4848}$$

پس،

$$\mathsf{mn}\Big(\{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.}, \mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}\Big) = \mathsf{mn}\Big(\{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{n}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{.}, \mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}\Big). \tag{4849}$$

این یعنی برا یِ محاسبه یِ جمله یِ مرتبه یِ n نسبت به ε در طرف ِ چپ، کافی ست $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ $(n-1)$ نسبت به ε معلوم باشد. پس برا یِ محاسبه یِ جمله یِ مرتبه یِ n نسبت به ε در جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (4840)، کافی ست $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ $(n-1)$ نسبت به ε معلوم باشد.

برا یِ جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (4840)،

$$(\delta\,H)[\vartheta, \mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')] = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n\,\{(\delta\,H)[\vartheta, \mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\vartheta, \mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}. \tag{4850}$$

در طرف ِ چپ، بستِگی به ε هم از طریق ِ $(\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')$ وارد میشود و هم از طریق ِ $(\delta\,H)$:

$$(\delta\,H)(\vartheta,\mathsf{A})=\sum_{n\geq 1}\varepsilon^n\,H_{\boldsymbol{n}}(\vartheta,\mathsf{A}). \tag{4851}$$

به این ترتیب،

$$(\delta\,H)[\vartheta,\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})(\vartheta,\mathsf{A}')]=(\delta\,H)\left[\vartheta,\mathsf{A}'-\sum_{m\geq 1}\varepsilon^m\,\mathsf{A}_{\boldsymbol{m}}(\vartheta,\mathsf{A}')\right]. \tag{4852}$$

خُد ِ $(\delta\,H)$ جمله یِ مرتبه-یِ-صفر (نسبت به ε) ندارد. پس برا یِ محاسبه یِ طرف ِ راست تا مرتبه یِ n نسبت به ε، کافی ست درون ِ کروشه تا مرتبه یِ $(n-1)$ نسبت به ε حساب شود:

$$\{(\delta\,H)[\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}=\{(\delta\,H)[\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq\boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}. \tag{4853}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathsf{mn}\Big(\{(\delta\,H)[\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}\Big)=\mathsf{mn}\Big(\{(\delta\,H)[\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}'\\ -(\delta\,\mathsf{A})_{\leq\boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}\Big).\end{aligned} \tag{4854}$$

این یعنی برا یِ محاسبه یِ جمله یِ مرتبه یِ n نسبت به ε در طرف ِ چپ، کافی ست $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ $(n-1)$ نسبت به ε معلوم باشد. پس برا یِ محاسبه یِ جمله یِ مرتبه یِ n نسبت به ε در جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (4840) هم، کافی ست $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ $(n-1)$ نسبت به ε معلوم باشد.

به این ترتیب، (4840) چنین میشود

$$H'_{\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}')=\mathsf{mn}\Big(\{H[\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq\boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}\Big). \tag{4855}$$

از رابطه یِ (4834) مستقیمَن نتیجه میشود،

$$H'_{\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}')=\mathsf{mn}\Big(\{H[\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}\Big). \tag{4856}$$

اما رابطه یِ (4855) بیش از رابطه یِ (4856) است: بر اساس ِ (4855)، برا یِ محاسبه یِ $H'_{\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}')$ کافی ست $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ $(n-1)$ نسبت به ε معلوم باشد: از رابطه یِ (4855) نتیجه میشود

$$H'_{\leq\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}')=\mathsf{mn}\Big(\{H[\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq\boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\}_{\leq\boldsymbol{n}}\Big). \tag{4857}$$

با معلوم-بودنِ H'، بسامدها یِ سیستمِ مختل-شده به دست میئایند:

$$\nu' = \frac{\partial\, H'}{\partial\, \mathsf{A}'}. \tag{4858}$$

برا یِ بسامدها هم یک بسطِ توانی بر حسبِ ε مینویسم:

$$\nu' = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n\, \nu_{\boldsymbol{n}}. \tag{4859}$$

به این ترتیب،

$$\nu'_{\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}') = \mathsf{mn}\left[\left(\frac{\partial\,\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}}{\partial\,\mathsf{A}'}\right)_{\boldsymbol{n}}\right]. \tag{4860}$$

یا،

$$\nu'_{\boldsymbol{n}}(\mathsf{A}') = \frac{\partial\left[\mathsf{mn}\Big(\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}_{\boldsymbol{n}}\Big)\right]}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4861}$$

برا یِ محاسبه یِ بسامدها تا مرتبه یِ n نسبت به ε هم، کافی ست $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ $(n-1)$ نسبت به ε معلوم باشد:

$$\nu'_{\leq \boldsymbol{n}}(\mathsf{A}') = \mathsf{mn}\left[\left(\frac{\partial\,\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}}{\partial\,\mathsf{A}'}\right)_{\leq \boldsymbol{n}}\right]. \tag{4862}$$

یا،

$$\nu'_{\leq \boldsymbol{n}}(\mathsf{A}') = \frac{\partial\left[\mathsf{mn}\Big(\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{n-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}_{\leq \boldsymbol{n}}\Big)\right]}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4863}$$

آن چه میمانَد محاسبه یِ $(\delta\,\mathsf{A})$ است. برا یِ محاسبه یِ $(\delta\,\mathsf{A})$ رابطه یِ (4837) را به کار میبَرم، که با استفاده از (4833) چنین میشود.

$$0 = \{H_{\boldsymbol{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n + \{(\delta\,H)[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n, \quad n \neq 0. \tag{4864}$$

دُ-جمله یِ طرفِ راست را بر حسبِ ε بسط میدهم. برا یِ جمله یِ اول،

$$\{H_{\boldsymbol{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n = \sum_{m\geq 0} \varepsilon^m\, \{H_{\boldsymbol{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4865}$$

و از رابطه یِ (4846)نتیجه میشود.

$$\{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}} = \{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}} - [\mathsf{A}^n{}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\,\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}'). \tag{4866}$$

برا یِ جمله یِ دوم ِ (4864) هم،

$$\{(\delta\,H)[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n = \sum_{m\geq 1}\varepsilon^m\,\{(\delta\,H)[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4867}$$

و از رابطه یِ (4853) نتیجه میشود

$$\{(\delta\,H)[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}} = \{(\delta\,H)[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4868}$$

رابطه یِ (4864)، با استفاده از روابط ِ (4866) و (4868)، نتیجه میدهد

$$0 = \{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}} - [\mathsf{A}^n{}_{\boldsymbol{m}}(\mathsf{A}')]\,\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}') + \{(\delta\,H)[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}}, \quad n\neq 0. \tag{4869}$$

که یعنی،

$$[\mathsf{A}^n{}_{\boldsymbol{m}}(\mathsf{A}')]\,\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}') = \{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}' - (\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^n{}_{\boldsymbol{m}}, \quad n\neq 0. \tag{4870}$$

این رابطه ای برا یِ محاسبه یِ $\mathsf{A}^n{}_{\boldsymbol{m}}$ ها، برا یِ $(n\neq 0)$، است، به شرط ی که قبلَن $(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m}-\mathbf{1}}$ حساب شده باشد. البته،

$$\mathsf{A}^0{}_{\boldsymbol{m}} = 0. \tag{4824}$$

طرف ِ راست ِ 4870 یک ترکیب-ِ-خطی از $\mathsf{A}_i{}^n{}_{\boldsymbol{m}}$ ها ست. اما $\mathsf{A}_i{}^n{}_{\boldsymbol{m}}$ ها مستقل-از-هم نیستند:

$$-\mathsf{A}^n{}_{\boldsymbol{m}} = 2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\tilde{\Upsilon}^n{}_{\boldsymbol{m}}. \tag{4822}$$

که $\tilde{\Upsilon}$ تابعی-یِ-مولد ِ تبدیل ی ست که (ϑ,A) را به (ϑ',A') تبدیل میکند. به این ترتیب،

$$[\mathsf{A}^n{}_{\boldsymbol{m}}(\mathsf{A}')]\,\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}') = -2\,\pi\,\mathrm{i}\,[(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}')]\,\tilde{\Upsilon}^n{}_{\boldsymbol{m}}(\mathsf{A}'). \tag{4871}$$

و رابطه یِ (4870) نتیجه میدهد

$$\tilde{\Upsilon}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}(\mathsf{A}') = -\frac{\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,[(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')]},\quad n\neq 0. \tag{4872}$$

پس،

$$\mathsf{A}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}(\mathsf{A}') = \frac{n\,\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}}{(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')},\quad n\neq 0. \tag{4873}$$

این روابط $\tilde{\Upsilon}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}$ ها و $\mathsf{A}_{i}{}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}$ ها را میدهند، به شرط ی که هیچ n ِ ناصفر ی نباشد که $(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})$ صفر شود:

$$\nexists\, n\neq 0\ \ni$$
$$(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}') = 0. \tag{4874}$$

و این که هیچ n ِ ناصفر ی نیست که $(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})$ صفر شود، یعنی این که سیستم اَبَرانتگرال-پذیر نیست. در این حالت،

$$\begin{aligned}\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}') &= \tilde{\Upsilon}^{0}{}_{\boldsymbol{m}}(\mathsf{A}')\\ &\quad -\frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\sum_{n\neq 0}\frac{\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}}{(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')}\,\Theta_{n}.\end{aligned} \tag{4875}$$

$\tilde{\Upsilon}^{0}{}_{\boldsymbol{m}}$ ها نامعلوم میمانند، یعنی $\tilde{\Upsilon}^{0}$ نامعلوم میمانَد. اما $\tilde{\Upsilon}^{0}$ تابع ِ فقط A' است؛ پس در تعیین ِ A، بر حسب ِ (ϑ,A')، اثر ی ندارد. اثر ِ $\tilde{\Upsilon}^{0}$ در تعیین ِ ϑ'، بر حسب ِ (ϑ,A')، هم به شکل ِ یک تابع ِ جمعی از فقط A' ظاهر میشود. $\tilde{\Upsilon}^{0}$ دلبخاه است و میشود ان را صفر گذاشت:

$$\tilde{\Upsilon}^{0} = 0. \tag{4876}$$

که نتیجه میدهد

$$\tilde{\Upsilon}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}') = -\frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\sum_{n\neq 0}\frac{\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}}{(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')}\,\Theta_{n}. \tag{4877}$$

از (4873) هم نتیجه میشود

$$\mathsf{A}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}') = \sum_{n\neq 0}\frac{n\,\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^{n}{}_{\boldsymbol{m}}}{(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')}\,\Theta_{n}. \tag{4878}$$

رُشن است که اینها برا یِ $(m \neq 0)$ اند. همچنین، دیده میشود

$$(\delta\,\tilde{\Upsilon})_{\leq \boldsymbol{m}}(\mathsf{A}') = (\delta\,\tilde{\Upsilon})^{0}{}_{\leq \boldsymbol{m}}(\mathsf{A}') - \frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\sum_{n\neq 0}\frac{\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^{n}{}_{\leq \boldsymbol{m}}}{(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')}\,\Theta_n. \tag{4879}$$

و میشود $\tilde{\Upsilon}^{0}{}_{\boldsymbol{m}}$ ها را صفر گذاشت. در این حالت،

$$(\delta\,\tilde{\Upsilon})_{\leq \boldsymbol{m}}(\mathsf{A}') = -\frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\sum_{n\neq 0}\frac{\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^{n}{}_{\leq \boldsymbol{m}}}{(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')}\,\Theta_n. \tag{4880}$$

$$(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m}}(\mathsf{A}') = \sum_{n\neq 0}\frac{n\,\{H[\boldsymbol{.},\mathsf{A}'-(\delta\,\mathsf{A})_{\leq \boldsymbol{m-1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}^{n}{}_{\leq \boldsymbol{m}}}{(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')}\,\Theta_n. \tag{4881}$$

رابطه یِ (4878) یک روش ِ بازگشتی برا یِ محاسبه یِ ضریبها یِ بسط ِ $(\delta\,\mathsf{A})$بر حسب ِ ε است. با گذاشتن ِ نتیجه در (4855)، ضریبها یِ بسط ِ H' بر حسب ِ ε به دست میئاید. با استفاده از (4860) هم ضریبها یِ بسط ِ ν' بر حسب ِ ε به دست میئاید.

برا یِ این که $H'_{\boldsymbol{1}}$ و $\nu'_{\boldsymbol{1}}$ حساب شود، $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ 0 لازم است، که صفر است. به این ترتیب،

$$H'_{\boldsymbol{1}}(\mathsf{A}') = \mathsf{mn}[H_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]. \tag{4882}$$

$$H'_{\leq \boldsymbol{1}}(\mathsf{A}') = \mathsf{mn}[H_{\leq \boldsymbol{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]. \tag{4883}$$

همچنین،

$$\nu'_{\boldsymbol{0}}(\mathsf{A}') = \frac{\partial\,[H_{\boldsymbol{0}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4884}$$

$$\nu'_{\boldsymbol{1}}(\mathsf{A}') = \frac{\partial\,\{\mathsf{mn}[H_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4885}$$

$$\nu'_{\leq \boldsymbol{1}}(\mathsf{A}') = \frac{\partial\,\{\mathsf{mn}[H_{\leq \boldsymbol{1}}(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]\}}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4886}$$

برا یِ این که $H'_{\boldsymbol{2}}$ و $\nu'_{\boldsymbol{2}}$ حساب شود، $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ 1 لازم است. از (4878) دیده میشود

$$\mathsf{A}_{\boldsymbol{1}}(\mathsf{A}') = \sum_{n\neq 0}\frac{n\,[H(\boldsymbol{.},\mathsf{A}')]^{n}{}_{\boldsymbol{1}}}{(n\,\nu_{\boldsymbol{0}})(\mathsf{A}')}\,\Theta_n. \tag{4887}$$

همچنین،

$$H'_{\boldsymbol{2}}(\mathsf{A}') = \Big(\mathsf{mn}\{H[\vartheta,\mathsf{A}'-\varepsilon\,\mathsf{A}_{\boldsymbol{1}}(\vartheta,\mathsf{A}')]\}\Big)_{\boldsymbol{2}}. \tag{4888}$$

و البته،

$$H[\vartheta, \mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')] = H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')] + \varepsilon\, H_{\mathbf{1}}[\vartheta, \mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')] + \varepsilon^2\, H_{\mathbf{2}}[\vartheta, \mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')] + o(\varepsilon^2). \tag{4889}$$

پس،

$$H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}') = [H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_0 + [H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_1 + [H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_2. \tag{4890}$$

که،

$$[H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_0 = \Big(\mathsf{mn}\{H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\}\Big)_{\mathbf{2}}. \tag{4891}$$

$$[H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_1 = \Big(\mathsf{mn}\{H_{\mathbf{1}}[\vartheta, \mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\}\Big)_{\mathbf{1}}. \tag{4892}$$

$$[H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_2 = \Big(\mathsf{mn}\{H_{\mathbf{2}}[\vartheta, \mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\}\Big)_{\mathbf{0}}. \tag{4893}$$

دیده میشود

$$H_{\mathbf{0}}[\mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')] = H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}') - \varepsilon\, [\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\, \frac{\partial\, [H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}')]}{\partial\, \mathsf{A}'_i} + \frac{\varepsilon^2}{2}\, [\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\, [\mathsf{A}_{j\,\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\, \frac{\partial^2\, [H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}')]}{\partial\, \mathsf{A}'_i\, \partial\, \mathsf{A}'_j} + o(\varepsilon^2). \tag{4894}$$

پس،

$$[H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_0 = \frac{\mathsf{mn}\{[\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot}, \mathsf{A}')]\, [\mathsf{A}_{j\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot}, \mathsf{A}')]\}}{2}\, \frac{\partial^2\, [H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}')]}{\partial\, \mathsf{A}'_i\, \partial\, \mathsf{A}'_j}. \tag{4895}$$

همچنین،

$$H_{\mathbf{1}}[\vartheta, \mathsf{A}' - \varepsilon\, \mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')] = H_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}') - \varepsilon\, [\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]\, \frac{\partial\, [H_{\mathbf{1}}(\vartheta, \mathsf{A}')]}{\partial\, \mathsf{A}'_i} + o(\varepsilon). \tag{4896}$$

پس،

$$[H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_1 = -\mathsf{mn}\left\{[\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\vartheta,\mathsf{A}')]\,\frac{\partial\,[H_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i}\right\}. \tag{4897}$$

سرانجام،

$$H_{\mathbf{2}}[\vartheta,\mathsf{A}'-\varepsilon\,\mathsf{A}_{\mathbf{1}}(\vartheta,\mathsf{A}')] = H_{\mathbf{2}}(\vartheta,\mathsf{A}') + o(1). \tag{4898}$$

پس،

$$[H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]_2 = \mathsf{mn}[H_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]. \tag{4899}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}') = {}& \frac{\mathsf{mn}\{[\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\,[\mathsf{A}_{j\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\}}{2}\,\frac{\partial^2\,[H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i\,\partial\,\mathsf{A}'_j} \\ & - \mathsf{mn}\left\{[\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\,\frac{\partial\,[H_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i}\right\} + \mathsf{mn}[H_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]. \end{aligned} \tag{4900}$$

همچنین، با استفاده از این که $\mathsf{A}^{0}{}_{\mathbf{1}}$ صفر است،

$$\mathsf{mn}\{[\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\,[\mathsf{A}_{j\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\} = \sum_{n\neq 0}[\mathsf{A}_i{}^{-n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]\,[\mathsf{A}_j{}^{n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]. \tag{4901}$$

$$\mathsf{mn}\left\{[\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\,\frac{\partial\,[H_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i}\right\} = \sum_{n\neq 0}[\mathsf{A}_i{}^{-n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]\,\frac{\partial\,[H^{n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i}. \tag{4902}$$

رابطه یِ (4887) را در اینها میگذارم:

$$\mathsf{mn}\{[\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\,[\mathsf{A}_{j\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\} = \sum_{n\neq 0}\frac{n_i\,n_j\,[H^{-n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]\,[H^{n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]}{[(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}')]^2}. \tag{4903}$$

$$\mathsf{mn}\left\{[\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]\,\frac{\partial\,[H_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i}\right\} = \sum_{n\neq 0}\frac{n_i\,H^{-n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}')}\,\frac{\partial\,[H^{n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i}. \tag{4904}$$

با اینها، رابطه یِ (4900) چنین میشود.

$$\begin{aligned} H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}') = {}& \sum_{n\neq 0}\frac{n_i\,n_j\,[H^{-n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]\,[H^{n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]}{2\,[(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}')]^2}\,\frac{\partial^2\,[H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i\,\partial\,\mathsf{A}'_j} \\ & - \sum_{n\neq 0}\frac{n_i\,H^{-n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}')}\,\frac{\partial\,[H^{n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i} + H^{0}{}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{\cdot},\mathsf{A}'). \end{aligned} \tag{4905}$$

همچنین،

$$\nu'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}') = \frac{\partial\,[H'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4906}$$

پس،

$$\begin{aligned}\nu'_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}') = {}& \frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}'}\left\{\sum_{n\neq 0}\frac{n_i\,n_j\,[H^{-n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]\,[H^{n}{}_{\mathbf{1}}\mathsf{A}')]}{2\,[(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}')]^2}\,\frac{\partial^2\,[H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i\,\partial\,\mathsf{A}'_j}\right\}\\ & - \frac{\partial}{\partial\,\mathsf{A}'}\left\{\sum_{n\neq 0}\frac{n_i\,H^{-n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}')}\,\frac{\partial\,[H^{n}{}_{\mathbf{1}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'_i}\right\} + \frac{\partial\,[H^{0}{}_{\mathbf{2}}(\mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'}.\end{aligned} \tag{4907}$$

110 بسامدها یِ مختل-شده، و اختلال ِ وابسته-به-زمان

هَمیلتِنی یِ متناظر با یک سیستم (ِ مختل-نشده) تابع ِ فقط متغیر- ِ-کنش است. این هَمیلتِنی را با $H_{\mathbf{0}}$، و متغیرها-یِ-کنش- ُ-زاویه را با (ϑ,A) نشان میدهم. هَمیلتنی یِ سیستم (ِ مختل-شده) را با H، و هَمیلتِنی یِ اختلال را با $(\delta\,H)$ نشان میدهم. معادلات ِ حرکت چنین میشود.

$$\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}) + \frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}. \tag{4908}$$

$$\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta,\mathsf{A})]}{\partial\,\vartheta}. \tag{4909}$$

که،

$$\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}) = \frac{\partial\,[H_{\mathbf{0}}(\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}. \tag{4910}$$

معادلات- ِ-حرکت ِ مختل-نشده چنین َند:

$$\dot{\vartheta}_{\mathbf{0}} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}}). \tag{4911}$$

$$\dot{\mathsf{A}}_{\mathbf{0}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4912}$$

که $[\vartheta_{\mathbf{0}}(t), \mathsf{A}_{\mathbf{0}}(t)]$ جواب ِ معادلات- ِ-حرکت ِ مختل-نشده است. از (4912) نتیجه میشود $\mathsf{A}_{\mathbf{0}}$ ثابت است:

$$\mathsf{A}_{\mathbf{0}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{A}_{\mathbf{0}}(t_0). \tag{4913}$$

این مقدار ِ ثابت را با خُد ِ $\mathsf{A}_{\mathbf{0}}$ نشان میدهم:

$$\mathsf{A}_{\mathbf{0}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{A}_{\mathbf{0}}. \tag{4914}$$

رابطه یِ (4914) را در (4911) میگذارم. طرف ِ راست ثابت میشود. پس،

$$\vartheta_{\mathbf{0}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \vartheta_{\mathbf{0}}(t_0) + [\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]\,(t - t_0). \tag{4915}$$

$(\delta\,\vartheta, \delta\,\mathsf{A})$ را چنین تعریف میکنم.

$$\vartheta = \vartheta_{\mathbf{0}} + \delta\,\vartheta. \tag{4916}$$

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_{\mathbf{0}} + \delta\,\mathsf{A}. \tag{4917}$$

به این ترتیب، معادلات- ِ-حرکت برا یِ $(\delta\,\vartheta, \delta\,\mathsf{A})$ چنین میشوند.

$$\delta\,\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}) - \nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}}) + \frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta, \mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}. \tag{4918}$$

$$\delta\,\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta, \mathsf{A})]}{\partial\,\vartheta}. \tag{4919}$$

پارامتر ِ اختلال را وارد میکنم. $(\delta\,H)$ از مرتبه یِ ε (پارامتر ِ اختلال) است:

$$\delta\,H = O(\varepsilon). \tag{4920}$$

به هم ین ترتیب،

$$\delta\,\vartheta = O(\varepsilon). \tag{4921}$$

$$\delta\,\mathsf{A} = O(\varepsilon). \tag{4922}$$

و معادلات- ِ-حرکت برا یِ $(\delta\,\vartheta, \delta\,\mathsf{A})$ چنین میشوند.

$$\delta\,\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}} + \delta\,\mathsf{A}) - \nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}}) + \frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta_{\mathbf{0}}, \mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}} + o(\varepsilon). \tag{4923}$$

$$\delta\,\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta_{\mathbf{0}}, \mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\vartheta_{\mathbf{0}}} + o(\varepsilon). \tag{4924}$$

معادله یِ (4923) هم میشود

$$\delta\,\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,[\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\,\delta\,\mathsf{A} + \frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta_{\mathbf{0}}, \mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}} + o(\varepsilon). \tag{4925}$$

معادلات ِ (4924) و (4925)، بستگی یِ $(\delta\,\vartheta, \delta\,\mathsf{A})$ به زمان را تا مرتبه یِ اول ِ اختلال میدهند. $(\delta\,H)$ را به شکل ِ یک سری یِ فوریه مینویسم:

$$(\delta\,H)(\vartheta, \mathsf{A}) = \sum_n [(\delta\,H)^n(\mathsf{A})]\,\Theta_n(\vartheta). \tag{4926}$$

معادله یِ (4924) چنین میشود.

$$\delta\,\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\sum_n (2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]\,\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}}) + o(\varepsilon). \tag{4927}$$

رُشن است که جمله یِ $(n = 0)$ در مجموع ِ طرف- ِ-راست سهم ندارد:

$$\delta\,\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\sum_{n\neq 0} (2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})] \tag{4928}$$

طرف ِ راست ِ (4928) شامل ِ $(\vartheta_{\mathbf{0}}, \mathsf{A}_{\mathbf{0}})$ است. $\mathsf{A}_{\mathbf{0}}$ ثابت است. از (4911) هم دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,[(n\,\vartheta_{\mathbf{0}})(t)]}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} (n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}_{\mathbf{0}}). \tag{4929}$$

گیرم سیستم ِ مختل-نشده اَبَرانتگرال-پذیر نیست.:

$$\nexists\, n \neq 0 \;\ni$$
$$(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}_{\mathbf{0}}) = 0. \tag{4930}$$

با استفاده از (4929) و (4930)، جواب ِ (4928) چنین میشود.

$$(\delta\,\mathsf{A})(t) \stackrel{\text{ns}}{=} (\delta\,\mathsf{A})_{\text{cst}} - \sum_{n\neq 0} \frac{n}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})}\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]\,\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}}) + o(\varepsilon). \tag{4931}$$

که $(\delta\,\mathsf{A})_{\text{cst}}$ یک ثابت است.

میانگین ِ زمانی یِ تابع- ِ-برداری یِ $\mathfrak{X}$ بر دُره یِ T را با $\mathsf{tmn}_T(\mathfrak{X})$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathsf{tmn}_T(\mathfrak{X})](t) = \frac{1}{T}\int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} (\mathrm{d}\,s)\,\mathfrak{X}(s). \tag{4932}$$

رُشن است که (اگر $\mathfrak{X}$ پیوسته باشد)

$$\lim_{T\to 0}[\mathsf{tmn}_T(\mathfrak{X})] = \mathfrak{X}. \tag{4933}$$

این را چنین مینویسم.

$$\mathsf{tmn}_0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}. \tag{4934}$$

میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ تابع- ِ-برداری یِ $\mathfrak{X}$ را میانگین ِ زمانی یِ تابع- ِ-برداری یِ $\mathfrak{X}$ بر دُره یِ T در حد ِ T به بینهایت تعریف میکنم و آن را با $\mathsf{tmn}_\infty(\mathfrak{X})$، یا سادِتر با $\mathsf{tmn}(\mathfrak{X})$، نشان میدهم:

$$[\mathsf{tmn}_\infty(\mathfrak{X})](t) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} (\mathrm{d}\,s)\,\mathfrak{X}(s)\right]. \tag{4935}$$

سادِتر،

$$[\mathsf{tmn}(\mathfrak{X})](t) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} (\mathrm{d}\,s)\,\mathfrak{X}(s)\right]. \tag{4936}$$

دیده میشود اگر $\mathfrak{X}$ دست- ِ-بالا-خطی باشد (یعنی مشتق ِ دوم َ ش صفر باشد)، میانگین ِ زمانی یِ $\mathfrak{X}$ با خُد ِ $\mathfrak{X}$ برابر است:

$$\ddot{\mathfrak{X}} = 0 \Rightarrow$$
$$\mathsf{tmn}_T(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}. \tag{4937}$$

گیرم $\mathfrak{X}$ یک تابع- ِ-برداری یِ کران-دار است. یعنی یک $\mathsf{ub}(\mathfrak{X})$ هست که

$$|\mathfrak{X}(t)| \leq [\mathsf{ub}(\mathfrak{X})]. \tag{4938}$$

دیده میشود

$$\left| \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} (\mathrm{d}\, s)\, \dot{\mathfrak{X}}(s) \right| \leq 2\, \mathsf{ub}(\mathfrak{X}). \tag{4939}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{tmn}(\dot{\mathfrak{X}}) = 0. \tag{4940}$$

یعنی میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ مشتق ِ هر تابع ِ کران-دار صفر است. از جمله،

$$\begin{aligned} &\forall\, \mathfrak{a} \neq 0 : \\ &\exp(\mathfrak{a}\, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \left[\frac{1}{\mathfrak{a}}\, \exp(\mathfrak{a}\, t) \right]. \end{aligned} \tag{4941}$$

و اگر $\mathfrak{a}$ مُهومی یِ محض باشد، آنگاه $\exp(\mathfrak{a}\,\bullet)$ کران-دار است. پس اگر $\mathfrak{a}$ ناصفر و مُهومی-یِ-محض باشد، $\exp(\mathfrak{a}\,\bullet)$ مشتق ِ یک تابع ِ کران-دار است، که نتیجه میدهد میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ $\exp(\mathfrak{a}\,\bullet)$ صفر است:

$$\begin{aligned} &\{[(-\mathrm{i}\, \mathfrak{a}) \in \mathbb{R}] \wedge (\mathfrak{a} \neq 0)\} \Rightarrow \\ &\mathsf{tmn}[\exp(\mathfrak{a}\,\bullet)] = 0. \end{aligned} \tag{4942}$$

از جمله نتیجه میشود

$$\begin{aligned} &(n\, \nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}_{\mathbf{0}}) \neq 0 \Rightarrow \\ &\mathsf{tmn}[\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}})] \stackrel{\mathrm{ns}}{=} 0. \end{aligned} \tag{4943}$$

این را در (4931) میگذارم. با استفاده از (4930) نتیجه میشود

$$\mathsf{tmn}(\delta\, \mathsf{A}) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} (\delta\, \mathsf{A})_{\mathrm{cst}} + o(\varepsilon). \tag{4944}$$

همچنین، $\mathsf{A_0}$ بر-لاک ثابت است. پس (4944) نتیجه میدهد

$$\mathsf{tmn}(\mathsf{A}) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{A_0} + (\delta\,\mathsf{A})_{\text{cst}} + o(\varepsilon). \tag{4945}$$

به شکل ی دیگر، از (4928)، با استفاده از (4943) و این که سیستم ِ مختل-نشده اَبَرانتگرال-پذیر نیست، نتیجه میشود

$$\mathsf{tmn}(\delta\,\dot{\mathsf{A}}) \stackrel{\text{ns}}{=} o(\varepsilon). \tag{4946}$$

و البته، چون $\dot{\mathsf{A}}_{\mathbf{0}}$ صفر است،

$$\mathsf{tmn}(\dot{\mathsf{A}}) \stackrel{\text{ns}}{=} o(\varepsilon). \tag{4947}$$

میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ مشتق ِ زمانی یِ $(\delta\,\mathsf{A})$، تا مرتبه یِ یک نسبت به ε صفر است. یا، میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ $(\delta\,\mathsf{A})$ تا مرتبه یِ یک نسبت به ε ثابت است. که یعنی $(\delta\,\mathsf{A})$ در میانگین (ِ زمانی) تا مرتبه یِ یک نسبت به ε ثابت میمانَد. البته اینها یعنی میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ مشتق ِ زمانی یِ A، تا مرتبه یِ یک نسبت به ε صفر است. که یعنی میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ A تا مرتبه یِ یک نسبت به ε ثابت است: A در میانگین (ِ زمانی) تا مرتبه یِ یک نسبت به ε ثابت میمانَد.

$(\delta\,\mathsf{A})_{\text{cst}}$ از شرط ِ اولیه برا یِ $(\delta\,\mathsf{A})$ به دست میئاید:

$$(\delta\,\mathsf{A})(t_0) = \mathsf{A}(t_0) - \mathsf{A_0}. \tag{4948}$$

مقدار ِ $\mathsf{A_0}$ را چنان میگیرم که

$$(\delta\,\mathsf{A})_{\text{cst}} = 0. \tag{4949}$$

این یعنی

$$(\delta\,\mathsf{A})(t_0) = -\sum_{n\neq 0} \frac{n_i}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A_0})}\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A_0})]\,\Theta_n[\vartheta_{\mathbf{0}}(t_0)]. \tag{4950}$$

به این ترتیب رابطه یِ (4931) چنین میشود.

$$(\delta\,\mathsf{A})(t) \stackrel{\text{ns}}{=} -\sum_{n\neq 0} \frac{n}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A_0})}\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A_0})]\,\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}}) + o(\varepsilon). \tag{4951}$$

و رابطه یِ (4944) هم میشود

$$\mathsf{tmn}(\delta\,\mathsf{A}) \stackrel{\text{ns}}{=} o(\varepsilon). \tag{4952}$$

از (4926) نتیجه میشود.

$$\frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}} = \sum_n \frac{\partial\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}\,\Theta_n(\vartheta). \tag{4953}$$

پس،

$$\frac{\partial\,[(\delta\,H)(\vartheta_{\mathbf{0}},\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}} = \sum_n \frac{\partial\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\,\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}}). \tag{4954}$$

روابط ِ (4951) و (4954) را در (4925) میگذارم:

$$\begin{aligned}\delta\,\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} &-\frac{\partial\,[\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\sum_{n\neq 0}\frac{n}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})}\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]\,\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}})\\ &+\sum_n \frac{\partial\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\,\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}}) + o(\varepsilon).\end{aligned} \tag{4955}$$

در طرف ِ راست، جمله یِ $(n=0)$ در مجموع ِ دوم را از بقیه جدا میکنم:

$$\begin{aligned}\delta\,\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} &\frac{\partial\,[(\delta\,H)^0(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}} + \sum_{n\neq 0}\Bigg\{-\frac{\partial\,[\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\,\frac{n}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})}\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]\\ &+\frac{\partial\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\Bigg\}\,\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}}) + o(\varepsilon).\end{aligned} \tag{4956}$$

از رابطه یِ (4956)، با استفاده از (4929) و این که سیستم ِ مختل-نشده اَبَرانتگرال-پذیر نیست، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(\delta\,\vartheta)(t) \stackrel{\text{ns}}{=} &(\delta\,\vartheta)_{\text{cst}} + \frac{\partial\,[(\delta\,H)^0(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\,(t-t_0)\\ &+\sum_{n\neq 0}\frac{1}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})}\Bigg\{-\frac{\partial\,[\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\,\frac{n}{(n\,\nu_{\mathbf{0}})(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})}\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]\\ &+\frac{\partial\,[(\delta\,H)^n(\mathsf{A}_{\mathbf{0}})]}{\partial\,\mathsf{A}_{\mathbf{0}}}\Bigg\}\,\Theta_n(\vartheta_{\mathbf{0}}) + o(\varepsilon).\end{aligned} \tag{4957}$$

که $(\delta\,\vartheta)_{\text{cst}}$ یک ثابت است. طرف ِ راست ِ (4957)، تا مرتبه یِ یک نسبت به ε شامل ِ سه جمله است. جمله یِ اول ثابت است. جمله یِ دوم نسبت به زمان دست- ِ-بالا خطی ست. میانگین ِ زمانی یِ

بلند-مدت ِ جمله یِ سوم هم صفر است (با فرض ِ این که سیستم ِ مختل-نشده اَبَرانتگرال-پذیر نیست). به این ترتیب میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ $(\delta\,\vartheta)$ در زمان ِ t، تا مرتبه یِ یک نسبت به ε برابر با مجموع ِ دُ-جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (4957) است:

$$[\mathsf{tmn}(\delta\,\vartheta)](t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} (\delta\,\vartheta)_{\mathrm{cst}} + \frac{\partial\,[(\delta\,H)^{\mathcal{O}}(\mathsf{A_0})]}{\partial\,\mathsf{A_0}}\,(t-t_0) + o(\varepsilon). \tag{4958}$$

همچنین، از (4915) دیده میشود

$$[\mathsf{tmn}(\vartheta_{\mathbf{0}})](t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \vartheta_{\mathbf{0}}(t_0) + [\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A_0})]\,(t-t_0). \tag{4959}$$

به این ترتیب،

$$[\mathsf{tmn}(\vartheta)](t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \vartheta_{\mathbf{0}}(t_0) + (\delta\,\vartheta)_{\mathrm{cst}} + \left\{\nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A_0}) + \frac{\partial\,[(\delta\,H)^{\mathcal{O}}(\mathsf{A_0})]}{\partial\,\mathsf{A_0}}\right\}\,(t-t_0) + o(\varepsilon). \tag{4960}$$

به شکل ی دیگر، از رابطه یِ (4956)، با استفاده از (4943) و این که سیستم ِ مختل-نشده اَبَرانتگرال-پذیر نیست، نتیجه میشود

$$\mathsf{tmn}(\delta\,\dot{\vartheta}) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial\,[(\delta\,H)^{\mathcal{O}}(\mathsf{A_0})]}{\partial\,\mathsf{A_0}} + o(\varepsilon). \tag{4961}$$

همچنین، از (4911) دیده میشود

$$\mathsf{tmn}(\dot{\vartheta}_{\mathbf{0}}) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A_0}). \tag{4962}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{tmn}(\dot{\vartheta}) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \nu_{\mathbf{0}}(\mathsf{A_0}) + \frac{\partial\,[(\delta\,H)^{\mathcal{O}}(\mathsf{A_0})]}{\partial\,\mathsf{A_0}} + o(\varepsilon). \tag{4963}$$

میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ مشتق ِ زمانی یِ $(\delta\,\vartheta)$، تا مرتبه یِ یک نسبت به ε یک مقدار ِ ثابت است. یا؛ میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ $(\delta\,\vartheta)$، تا مرتبه یِ یک نسبت به ε یک تابع ِ دست- ِ-بالا-خطی از زمان است. که یعنی $(\delta\,\vartheta)$ در میانگین (ِ زمانی) تا مرتبه یِ یک نسبت به ε با زمان خطی

تغییر میکند. البته اینها یعنی میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ مشتق ِ زمانی یِ ϑ، تا مرتبه یِ یک نسبت به ε یک مقدار ِ ثابت است. که یعنی میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ ϑ تا مرتبه یِ یک نسبت به ε یک تابع ِ دست- ِ-بالا-خطی از زمان است: ϑ در میانگین (ِ زمانی) تا مرتبه یِ یک نسبت به ε با زمان خطی تغییر میکند.

بسامد تا مرتبه یِ اول ِ اختلال چنین است.

$$\nu'_{\leq \mathbf{1}}(\mathsf{A}') = \frac{\partial\,[H^{0}{}_{\leq \mathbf{1}}(\cdot, \mathsf{A}')]}{\partial\,\mathsf{A}'}. \tag{4964}$$

رابطه یِ (4964) را با رابطه یِ (4963) مقایسه میکنم. رابطه یِ (4964) بسامد تا مرتبه یِ اول ِ اختلال را میدهد، و رابطه یِ (4963) میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ مشتق ِ زمانی یِ زاویه تا مرتبه یِ اول ِ اختلال را میدهد. این دُ-کمیت یکسان َند، و روابط ِ (4964) و (4963) هم هم ین را نشان میدهند: طرف- ِ-راستها یکسان َند.

یک راه برا یِ محاسبه یِ اثر ِ اختلال این است که متغیرها یِ کنش- ُ-زاویه برا یِ سیستم ِ مختل-شده حساب شوند، و با استفاده از آنها بسامدها یِ مختل-شده حساب شوند. یک راه ِ دیگر این است که محاسبات با هم ان متغیرها یِ قدیمی (متناظر با سیستم ِ مختل-نشده) یِ کنش- ُ-زاویه انجام شود. با تحول ِ مختل-شده، مشتق ِ زمانی یِ زاویِها یِ قدیمی ثابت نیست، اما میانگین ِ زمانی یِ بلند-مدت ِ مشتق ِ زمانی یِ زاویِها یِ قدیمی ثابت است، و برابر با هم ان بسامدها یِ مختل-شده است، که با روش ِ قبلی حساب میشود.

14

ناورداها یِ ایستاواری

111 معادله-یِ-تحول، و انتقال- ِ-زمان

سیستم ی را بررسی میکنم که تحول ِ آن با این معادله داده میشود.

$$\mathcal{E} \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{4965}$$

متغیر ِ سیستم، که تحول برا یِ آن نوشته شده، را با $\mathfrak{x}$ نشان میدهم. در حالت ِ کلی، $\mathcal{E}$ تابع ی از t و $\mathfrak{x}$ است. و معادله یِ (4965) را میشود چنین نوشت.

$$\mathcal{E}(t,\mathfrak{x}) \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{4966}$$

البته منظور این است که معادله یِ (4966) برا یِ هر t است:

$$\forall t :$$

$$\mathcal{E}(t,\mathfrak{x}) \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{4967}$$

انتقال ِ زمان به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ را با $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})](t) = \mathfrak{x}(t-\mathfrak{c}). \tag{4968}$$

میگویم معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ ناوردا ست، اگر

$$\mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]=\mathcal{E}(t,\mathfrak{x}). \tag{4969}$$

میگویم معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان ناوردا ست، اگر (4969) برا یِ هر $\mathfrak{c}$ برقرار باشد، یعنی اگر معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان به هر اندازه ای ناوردا باشد:

$$\forall\,\mathfrak{c}:$$
$$\mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]=\mathcal{E}(t,\mathfrak{x}). \tag{4970}$$

یک پیامد ِ ناوردایی تحت ِ انتقال- ِ-زمان به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ این است که اگر $\mathfrak{x}$ یک جواب ِ معادله-یِ-تحول باشد، $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})$ هم یک جواب ِ معادله-یِ-تحول است:

$$\mathcal{E}(t,\mathfrak{x})\stackrel{\text{ns}}{=}0\Rightarrow$$
$$\mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]\stackrel{\text{ns}}{=}0. \tag{4971}$$

پس،

$$[\forall\,t:\quad \mathcal{E}(t,\mathfrak{x})\stackrel{\text{ns}}{=}0]\Rightarrow$$
$$\{\forall\,t:\quad \mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]\stackrel{\text{ns}}{=}0\}. \tag{4972}$$

که یعنی،

$$[\forall\,t:\quad \mathcal{E}(t,\mathfrak{x})\stackrel{\text{ns}}{=}0]\Rightarrow$$
$$\{\forall\,t:\quad \mathcal{E}[t,\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]\stackrel{\text{ns}}{=}0\}. \tag{4973}$$

از جمله، ناوردایی یِ معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان نتیجه میدهد اگر $\mathfrak{x}$ یک جواب ِ معادله-یِ-تحول باشد، انتقال-یافته یِ $\mathfrak{x}$ به هراندازه ای هم یک جواب ِ معادله-یِ-تحول است، یعنی $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})$ با هر مقدار ِ $\mathfrak{c}$ هم یک جواب ِ معادله-یِ-تحول است.

این که معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان ناوردا باشد، به شکل ِ ساده یعنی زمان از طریق ِ فقط $\mathfrak{x}$ (متغیر) در معادله-یِ-تحول وارد میشود. به هم ین خاطر به سیستم ی که معادله-یِ-تحول َ ش تحت ِ انتقال- ِ-زمان ناوردا ست، یک سیستم ِ خُد-گردان میگویند.

یک حالت ِ خاص این است که $\mathcal{E}(t,\mathfrak{x})$ نسبت به $\mathfrak{x}$ مُضعی ست. این یعنی یک $\mathfrak{m}$ هست که $\mathcal{E}(t,\mathfrak{x})$ نسبت به $\mathfrak{x}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{m}$ است. و این هم یعنی یک Eq هست که

$$\mathcal{E}(t,\mathfrak{x}) = \mathsf{Eq}[t, (\mathcal{D}^{(\mathfrak{m})}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{4974}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{E}(t,\mathfrak{x}) = \mathsf{Eq}\{t, \mathfrak{x}(t), (\mathbf{D}\,\mathfrak{x})(t), \dots, [(\mathbf{D})^{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{x}](t)\}. \tag{4975}$$

در این حالت میگویم معادله-یِ-تحول از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{m}$ است. میگویم معادله یِ تحول (نسبت به $\mathfrak{x}$) مُضعی ست، وقت ی یک $\mathfrak{m}$ (ِ محدود) هست که معادله-یِ-تحول (نسبت به $\mathfrak{x}$) از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{m}$ است. میگویم معادله-یِ-تحول (نسبت به $\mathfrak{x}$) نقطِئی ست، وقتی معادله-یِ-تحول (نسبت به $\mathfrak{x}$) از مرتبه یِ دست- ِ-بالا صفر است:

$$\mathcal{E}(t,\mathfrak{x}) = \mathsf{Eq}[t, \mathfrak{x}(t)]. \tag{4976}$$

از تعریف ِ $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}$ نتیجه میشود

$$\{(\mathbf{D})^{\mathfrak{k}}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{y})]\}(t) = [(\mathbf{D})^{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{y}](t-\mathfrak{c}). \tag{4977}$$

$$\{\mathcal{D}^{(\mathfrak{n})}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{y})]\}(t) = (\mathcal{D}^{(\mathfrak{n})}\,\mathfrak{y})(t-\mathfrak{c}). \tag{4978}$$

$$\{\mathcal{D}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{y})]\}(t) = (\mathcal{D}\,\mathfrak{y})(t-\mathfrak{c}). \tag{4979}$$

به این ترتیب،

$$\{(\mathbf{D})^{\mathfrak{k}}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{y})]\}(t+\mathfrak{c}) = [(\mathbf{D})^{\mathfrak{k}}\,\mathfrak{y}](t). \tag{4980}$$

$$\{\mathcal{D}^{(\mathfrak{n})}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{y})]\}(t+\mathfrak{c}) = (\mathcal{D}^{(\mathfrak{n})}\,\mathfrak{y})(t). \tag{4981}$$

$$\{\mathcal{D}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{y})]\}(t+\mathfrak{c}) = (\mathcal{D}\,\mathfrak{y})(t). \tag{4982}$$

گیرم معادله-یِ-تحول مُضعی ست و تحت ِ انتقال- ِ-زمان به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ ناوردا ست. پس،

$$\mathsf{Eq}\Big(t+\mathfrak{c}, \{\mathcal{D}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]\}(t+\mathfrak{c})\Big) = \mathsf{Eq}[t, (\mathcal{D}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{4983}$$

که یعنی،

$$\mathsf{Eq}[t+\mathfrak{c},(\text{Đ}\,\mathfrak{x})(t)]=\mathsf{Eq}[t,(\text{Đ}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{4984}$$

رابطه یِ (4984) برا یِ هر مقدار ِ $(\text{Đ}\,\mathfrak{x})(t)$ درست است. میشود آن را چنین نوشت.

$$\mathsf{Eq}(t+\mathfrak{c},\mathfrak{X})=\mathsf{Eq}(t,\mathfrak{X}). \tag{4985}$$

که نشان میدهد $\mathsf{Eq}(\text{•},\mathfrak{X})$ دُرِئی ست. دُرِه یِ $\mathsf{Eq}(\text{•},\mathfrak{X})$ برابر با $\mathfrak{c}$ است. دقیقتر این که $\mathsf{Eq}(\text{•},\mathfrak{X})$ با دُره یِ $\mathfrak{c}$ تکرار میشود، ولی دُره اَش عدد ی مثبت است که ممکن است کوچکتر از $|\mathfrak{c}|$ هم باشد.

گیرم معادله-یِ-تحول مُضعی ست و تحت ِ انتقال- ِ-زمان ناوردا ست. پس

$$\forall\,\mathfrak{c}:$$
$$\mathsf{Eq}\Big(t+\mathfrak{c},\{\text{Đ}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]\}(t+\mathfrak{c})\Big)=\mathsf{Eq}[t,(\text{Đ}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{4986}$$

که یعنی،

$$\forall\,\mathfrak{c}:$$
$$\mathsf{Eq}[t+\mathfrak{c},(\text{Đ}\,\mathfrak{x})(t)]=\mathsf{Eq}[t,(\text{Đ}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{4987}$$

رابطه یِ (4987) برا یِ هر مقدار ِ $(\text{Đ}\,\mathfrak{x})(t)$ درست است. میشود آن را چنین نوشت.

$$\forall\,\mathfrak{c}:$$
$$\mathsf{Eq}(t+\mathfrak{c},\mathfrak{X})=\mathsf{Eq}(t,\mathfrak{X}). \tag{4988}$$

این یعنی $\mathsf{Eq}(t,\mathfrak{X})$ مستقل از t است، یا $\mathsf{Eq}(\text{•},\mathfrak{X})$ ثابت است. میشود گفت مشتق ِ $\mathsf{Eq}(t,\mathfrak{X})$ نسبت به t صفر است:

$$\frac{\partial\,[\mathsf{Eq}(t,\mathfrak{X})]}{\partial\,t}=0. \tag{4989}$$

سیستمها یِ خُد-گردان با معادله-یِ-تحول ِ مُضعی، سیتمها یی یَند که معادله-یِ-تحول ِ شان یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ خُد-گردان است. یعنی در معادله-یِ-تحول، t از طریق ِ فقط خُد ِ متغیر و مشتقها یَ ش وارد میشود.

112 بستگی به زمان، با پارامتر

سیستم ی را بررسی میکنم که متغیر ِ آن $(\lambda, \mathfrak{x})$ است، و معادله-یِ-تحول ِ آن به دُ بخش تفکیک میشود:

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{x}}(t, \lambda, \mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4990}$$

و

$$\mathcal{E}_{\lambda}(t, \lambda, \mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4991}$$

میگویم λ پارامتر (ِ خارجی) است، وقت ی معادله-یِ-تحول ِ سیستم با فقط (4990) داده میشود، که در آن λ (تابع ی) معلوم است. در این حالت، برا یِ سادِگی شاخص ِ $\mathfrak{x}$ را هم نمینویسم و معادله یِ (4990) را چنین مینویسم.

$$\mathcal{E}(t, \lambda, \mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4992}$$

و البته منظور این است که معادله یِ (4992) برا یِ هر t است:

$$\forall t :$$
$$\mathcal{E}(t, \lambda, \mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4993}$$

میگویم معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان ِ جامع به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ ناوردا ست، اگر

$$\mathcal{E}[t + \mathfrak{c}, \mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\lambda), \mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] = \mathcal{E}(t, \mathfrak{x}). \tag{4994}$$

میگویم معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان ِ جامع ناوردا ست، اگر (4994) برا یِ هر $\mathfrak{c}$ برقرار باشد، یعنی اگر معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان به هر اندازه ای ناوردا باشد:

$$\forall \mathfrak{c} :$$
$$\mathcal{E}[t + \mathfrak{c}, \mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\lambda), \mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] = \mathcal{E}(t, \mathfrak{x}). \tag{4995}$$

یک پیامد ِ ناوردایی تحت ِ انتقال- ِ-زمان ِ جامع به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ این است که اگر $\mathfrak{x}$ یک جواب ِ معادله-یِ-تحول باشد، $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})$ هم یک جواب ِ معادله-یِ-تحول با پارامتر ِ منتقل-شده است:

$$\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0 \Rightarrow$$
$$\mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\lambda),\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{4996}$$

پس،

$$[\forall\, t: \quad \mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0] \Rightarrow$$
$$\{\forall\, t: \quad \mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\lambda),\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] \stackrel{\text{ns}}{=} 0\}. \tag{4997}$$

که یعنی،

$$[\forall\, t: \quad \mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0] \Rightarrow$$
$$\{\forall\, t: \quad \mathcal{E}[t,\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\lambda),\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] \stackrel{\text{ns}}{=} 0\}. \tag{4998}$$

فرق ِ انتقال- ِ-زمان به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ با انتقال- ِ-زمان ِ جامع به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ این است که در اولی پارامتر تبدیل نمیشود، ولی در دومی پارامتر هم مثل ِ متغیر تبدیل میشود. این که معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ ناوردا ست، یعنی

$$\mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\lambda,\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] = \mathcal{E}(t,\mathfrak{x}). \tag{4999}$$

و یک پیامد ِ ناوردایی تحت ِ انتقال- ِ-زمان به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ این است که اگر $\mathfrak{x}$ یک جواب ِ معادله-یِ-تحول باشد، $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})$ هم یک جواب ِ معادله-یِ-تحول است:

$$\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0 \Rightarrow$$
$$\mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\lambda,\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \tag{5000}$$

پس،

$$[\forall\, t: \quad \mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) \stackrel{\text{ns}}{=} 0] \Rightarrow$$
$$\{\forall\, t: \quad \mathcal{E}[t+\mathfrak{c},\lambda,\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] \stackrel{\text{ns}}{=} 0\}. \tag{5001}$$

که یعنی،

$$[\forall t: \quad \mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) \overset{\text{ns}}{=} 0] \Rightarrow$$
$$\{\forall t: \quad \mathcal{E}[t,\lambda,\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})] \overset{\text{ns}}{=} 0\}. \tag{5002}$$

ناوردایی یِ معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان ِ جامع نتیجه میدهد اگر $\mathfrak{x}$ یک جواب ِ معادله-یِ-تحول باشد، انتقال-یافته یِ $\mathfrak{x}$ به هراندازه ای هم یک جواب ِ معادله-یِ-تحول با پارامتر ِ انتقال-یافته است، یعنی $\mathfrak{c}$ هر چه باشد، $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})$ هم یک جواب ِ معادله-یِ-تحول با پارامتر ِ $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\lambda)$ است.

این که معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان ِ جامع ناوردا باشد، به شکل ِ ساده یعنی زمان از طریق ِ فقط λ و $\mathfrak{x}$ (پارامتر و متغیر) در معادله-یِ-تحول وارد میشود. چنین-سیستم ی خُد-گردان میبود، اگر پارامتر هم بخش ی از متغیر به حساب میامد، یعنی برا یِ آن هم معادله یِ تحول نوشته میشد (و البته معادله-یِ-تحول ِ متناظر با پارامتر هم تحت ِ انتقال- ِ-زمان ِ جامع ناوردا میبود). اما وقت ی λ پارامتر است، سیستم خُد-گردان است اگر معادله-یِ-تحول تحت ِ انتقال- ِ-زمان ناوردا باشد.

یک حالت ِ خاص این است که $\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x})$ نسبت به λ و $\mathfrak{x}$ مُضعی ست. این یعنی یک $\mathfrak{l}$ هست که $\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x})$ نسبت به λ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{l}$ است، و یک $\mathfrak{m}$ هست که $\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x})$ نسبت به $\mathfrak{x}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{m}$ است. و اینها هم یعنی یک Eq هست که

$$\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) = \mathsf{Eq}[t,(\mathrm{D}^{(\mathfrak{l})}\,\lambda)(t),(\mathrm{D}^{(\mathfrak{m})}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{5003}$$

مفصلتر،

$$\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) = \mathsf{Eq}\{t,\lambda(t),(\mathbf{D}\,\lambda)(t),\ldots,[(\mathbf{D})^{\mathfrak{l}}\,\lambda](t),$$
$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{x})(t),\ldots,[(\mathbf{D})^{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{x}](t)\}. \tag{5004}$$

در این حالت میگویم معادله-یِ-تحول، نسبت به λ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا ۱، و نسبت به λ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{m}$ است. میگویم معادله یِ تحول نسبت به λ و $\mathfrak{x}$ مُضعی ست، وقت ی یک ۱ (ِ محدود) هست که معادله-یِ-تحول نسبت به λ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا ۱ است، و یک $\mathfrak{m}$ (ِ محدود) هست که معادله-یِ-تحول نسبت به $\mathfrak{x}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{m}$ است. میگویم معادله-یِ-تحول نسبت به λ نقطِئی ست، وقت ی وقتی معادله-یِ-تحول نسبت به λ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا صفر است. و میگویم معادله-یِ-تحول نسبت به $\mathfrak{x}$ نقطِئی ست، وقت ی وقتی معادله-یِ-تحول نسبت به $\mathfrak{x}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا صفر است. معادله-یِ-تحول نسبت به λ و $\mathfrak{x}$ نقطِئی ست، وقت ی

$$\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) = \mathsf{Eq}[t,\lambda(t),\mathfrak{x}(t)]. \tag{5005}$$

گیرم معادله-یِ-تحول نسبت به پارامتر و متغیر مُضعی ست (یعنی یک ۱ هست که معادله-یِ-تحول نسبت به λ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا ۱ است، و یک $\mathfrak{m}$ هست که معادله-یِ-تحول نسبت به $\mathfrak{x}$ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $\mathfrak{m}$ است)، و تحت ِ انتقال- ِ-زمان ِ جامع به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ ناوردا ست. پس،

$$\begin{aligned}\mathsf{Eq}\Big(&t+\mathfrak{c},\{\mathfrak{D}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\lambda)]\}(t+\mathfrak{c}),\\ &\{\mathfrak{D}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]\}(t+\mathfrak{c})\Big) = \mathsf{Eq}[t,(\mathfrak{D}\,\mathfrak{x})(t)].\end{aligned} \tag{5006}$$

که یعنی،

$$\mathsf{Eq}[t+\mathfrak{c},(\mathfrak{D}\,\lambda)(t),(\mathfrak{D}\,\mathfrak{x})(t)] = \mathsf{Eq}[t,(\mathfrak{D}\,\lambda)(t),(\mathfrak{D}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{5007}$$

رابطه یِ (5007) برا یِ هر مقدار ِ $(\mathfrak{D}\,\lambda)(t)$ و هر مقدار ِ $(\mathfrak{D}\,\mathfrak{x})(t)$ درست است. میشود آن را چنین نوشت.

$$\mathsf{Eq}(t+\mathfrak{c},\Lambda,\mathfrak{X}) = \mathsf{Eq}(t,\Lambda,\mathfrak{X}). \tag{5008}$$

که نشان میدهد $\mathsf{Eq}(\bullet,\Lambda,\mathfrak{X})$ دُرِئی ست. دُره یِ $\mathsf{Eq}(\bullet,\Lambda,\mathfrak{X})$ برابر با $\mathfrak{c}$ است. دقیقتر این که $\mathsf{Eq}(\bullet,\Lambda,\mathfrak{X})$ با دُره یِ $\mathfrak{c}$ تکرار میشود، ولی دُره اَش عدد ی مثبت است که ممکن است کوچکتر از $|\mathfrak{c}|$ هم باشد.

گیرم معادله-یِ-تحول نسبت به پارامتر و متغیر مُضعی ست و تحت ِ انتقال- ِ-زمان ِ جامع

ناوردا ست. پس

$$\forall \mathfrak{c}:$$
$$\mathsf{Eq}\Big(t+\mathfrak{c}, \{\mathfrak{D}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\lambda)]\}(t+\mathfrak{c}),$$
$$\{\mathfrak{D}\,[\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x})]\}(t+\mathfrak{c})\Big) = \mathsf{Eq}[t, (\mathfrak{D}\,\lambda)(t), (\mathfrak{D}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{5009}$$

که یعنی،

$$\forall \mathfrak{c}:$$
$$\mathsf{Eq}[t+\mathfrak{c}, (\mathfrak{D}\,\lambda)(t), (\mathfrak{D}\,\mathfrak{x})(t)] = \mathsf{Eq}[t, (\mathfrak{D}\,\lambda)(t), (\mathfrak{D}\,\mathfrak{x})(t)]. \tag{5010}$$

رابطه یِ (5010) برا یِ هر مقدارِ $(\mathfrak{D}\,\lambda)(t)$ و هر مقدارِ $(\mathfrak{D}\,\mathfrak{x})(t)$ درست است. میشود آن را چنین نوشت.

$$\forall \mathfrak{c}:$$
$$\mathsf{Eq}(t+\mathfrak{c}, \Lambda, \mathfrak{X}) = \mathsf{Eq}(t, \Lambda, \mathfrak{X}). \tag{5011}$$

این یعنی $\mathsf{Eq}(t, \Lambda, \mathfrak{X})$ مستقل از t است، یا $\mathsf{Eq}(\cdot, \Lambda, \mathfrak{X})$ ثابت است. میشود گفت مشتقِ $\mathsf{Eq}(t, \Lambda, \mathfrak{X})$ نسبت به t صفر است:

$$\frac{\partial\,[\mathsf{Eq}(t, \Lambda, \mathfrak{X})]}{\partial\, t} = 0. \tag{5012}$$

برا یِ سیستمها یی که تحتِ انتقال-ِ-زمانِ جامع ناوردا یَند و معادله-یِ-تحولِ شان نسبت به پارامتر و متغیر مُضعی ست، بستگی-به-زمان در معادله-یِ-تحول از طریقِ فقط پارامتر و متغیر و مشتقها یِ شان وارد میشود.

113 پارامترِ کند-تغییر

پارامترِ λ تابعِ t (زمان) است. میگویم λ کند-تغییر است، وقت ی زمانِ نُعی یِ تغییرِ پارامتر (یعنی زمانِ لازم برا یِ تغییرِ چشمگیرِ مقدارِ پارامتر) از زمانِ نُعی یِ تحولِ زمانی یِ متغیر

(یعنی زمان ِ لازم برا یِ تغییر ِ چشمگیر ِ مقدار ِ متغیر طی ِ تحول) خیل ی بزرگتر باشد:

$$T_\lambda \gg T_{\mathfrak{x}}. \tag{5013}$$

T_λ زمان ِ نُعی یِ تغییر ِ λ است، $\mathfrak{x}$ متغیر است، و $T_{\mathfrak{x}}$ زمان ِ نُعی یِ تحول ِ زمانی یِ $\mathfrak{x}$ است. کند-تغییر-بودن ِ پارامتر را میشود بر حسب ِ یک پارامتر- ِ-کندی بیان کرد: بستگی یِ زمانی یِ پارامتر ِ λ را بر حسب ِ یک پارامتر ِ دیگر ($\bar{\lambda}$) و پارامتر- ِ-کندی (ε) چنین مینویسم.

$$\lambda = \bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon. \tag{5014}$$

که مشتق ِ s_ε برابر با ε است:

$$\dot{\mathsf{s}}_\varepsilon(t) = \varepsilon. \tag{5015}$$

این یعنی یک ثابت ِ $\mathfrak{t}$ هست که،

$$\mathsf{s}_\varepsilon(t) = \mathfrak{t} + \varepsilon\,(t - \mathfrak{t}). \tag{5016}$$

پارامتر- ِ-کندی یِ ε مثبت است و با کوچک-کردن ِ ε (و ثابت-نگه-داشتن ِ $\bar{\lambda}$) زمان ِ نُعی یِ تغییر ِ λ بزرگ میشود:

$$T_\lambda = \frac{T_{\bar{\lambda}}}{\varepsilon}. \tag{5017}$$

و شرط ِ کند-تغییر-بودن ِ پارامتر چنین میشود.

$$\varepsilon \ll \frac{T_{\bar{\lambda}}}{T_{\mathfrak{x}}}. \tag{5018}$$

همچنین، دیده میشود

$$(\mathbf{D})^{\mathrm{i}}\,\lambda = \varepsilon^{\mathrm{i}}\,[(\mathbf{D})^{\mathrm{i}}\,\bar{\lambda}] \circ \mathsf{s}_\varepsilon. \tag{5019}$$

از جمله،

$$\dot{\lambda} = \varepsilon\,(\mathbf{D}\,\bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon. \tag{5020}$$

کند-تغییر-بودن ِ λ متناظر با کوچک-بودن ِ ε است، در حالت ِ حدی متناظر با این که ε به صفر بگراید.

گیرم معادله-یِ-تحول ِ متغیر، نسبت به پارامتر مُضعی ست. یعنی یک ا هست که $\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x})$ نسبت به λ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا ا است. و این هم یعنی یک Eq هست که

$$\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) = \mathsf{Eq}\{t,\lambda(t),(\mathbf{D}\,\lambda)(t),\ldots,[(\mathbf{D})^{\mathfrak{l}}\,\lambda](t),\mathfrak{x}\}. \tag{5021}$$

و بر حسب ِ پارامتر ِ کندی،

$$\mathcal{E}(t,\lambda,\mathfrak{x}) = \mathsf{Eq}\{t,\lambda[\mathsf{s}_\varepsilon(t)],\varepsilon\,(\mathbf{D}\,\lambda)[\mathsf{s}_\varepsilon(t)],\ldots,\varepsilon^{\mathfrak{l}}\,[(\mathbf{D})^{\mathfrak{l}}\,\lambda][\mathsf{s}_\varepsilon(t)],\mathfrak{x}\}. \tag{5022}$$

با کوچک-شدن ِ پارامتر- ِ-کندی، اثر ِ مشتقها یِ پارامتر در معادله-یِ-تحول ِ متغیر کم میشود. و هر چه مرتبه یِ مشتق بزرگتر باشد، کاهش ِ اثر بیشتر است.

114 هَمیلتِنی یِ وابسته-به-پارامتر، و ثابت- ِ-حرکت

سیستم ی را بررسی میکنم که هَمیلتِنی یِ متناظر با آن H است، که تابع ِ فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته است، به این شکل که بستگی یِ H به زمان از طریق ِ پارامتر (λ) است. در حالت ِ کلی پارامتر شامل ِ چند متغیر است. این که بستگی یِ H به زمان از طریق ِ پارامتر است، یعنی یک تابع ِ $\boldsymbol{H}$ هست که

$$H(t,x) = \boldsymbol{H}[\lambda(t),x]. \tag{5023}$$

از جمله، دیده میشود

$$\frac{\partial\,[H(t,x)]}{\partial\,t} = \{(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{H})[\lambda(t),x)]\}\,\dot{\lambda}(t). \tag{5024}$$

مفصلتر،

$$\frac{\partial\,[H(t,x)]}{\partial\,t} = \{(\overset{\circ}{\mathbf{D}}_{(0)\,\mathfrak{a}}\,\boldsymbol{H})[\lambda(t),x)]\}\,\dot{\lambda}^{\mathfrak{a}}(t). \tag{5025}$$

از معادله یِ تحول نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,[H(t,x)]}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial\,[H(t,x)]}{\partial\,t}. \tag{5026}$$

پس،

$$\frac{\mathrm{d}\,[H(t,x)]}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{H})(\lambda,x)]\,\dot{\lambda}. \tag{5027}$$

از جمله معلوم میشود اگر λ ثابت باشد، $\boldsymbol{H}(\lambda,\boldsymbol{.})$ بر-لاک ثابت است:

$$\dot{\lambda}=0\Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}\,[\boldsymbol{H}(\lambda,x)]}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} 0. \tag{5028}$$

اما وقت ی λ ثابت نیست، نتیجه نمیشود H بر-لاک ثابت است.

مانسته یِ این برا یِ ثابت- ِ-حرکتها یِ دیگر هم درست است. گیرم متناظر با λ یک $\boldsymbol{I}(\lambda,\boldsymbol{.})$ هست، چنان که وقت ی تحول با $\boldsymbol{H}(\lambda,\boldsymbol{.})$ است و λ ثابت است، $\boldsymbol{I}(\lambda,\boldsymbol{.})$ بر-لاک ثابت است:

$$\dot{\lambda}=0\Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}\,\{\boldsymbol{I}(\lambda,x)\}}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} 0. \tag{5029}$$

از معادله-یِ-حرکت نتیجه میشود

$$\dot{\lambda}=0\Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}\,[\boldsymbol{I}(\lambda,x)]}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \{\boldsymbol{I}(\lambda,x),\boldsymbol{H}(\lambda,x)\}. \tag{5030}$$

پس این که $\boldsymbol{I}$ بر-لاک ثابت است، همئرز است با

$$\{\boldsymbol{I}(\lambda,x),\boldsymbol{H}(\lambda,x)\}=0. \tag{5031}$$

البته رُشن است که این رابطه با $\boldsymbol{H}$ به جا یِ $\boldsymbol{I}$ هم برقرار است:

$$\{\boldsymbol{H}(\lambda,x),\boldsymbol{H}(\lambda,x)\}=0. \tag{5032}$$

با استفاده از $\boldsymbol{I}$، تابعی یِ I از فضا-یِ-فاز ِ گسترش-یافته را چنین میسازم:

$$I(t,x) = \boldsymbol{I}[\lambda(t),x]. \tag{5033}$$

دیده میشود

$$\frac{\partial\,[I(t,x)]}{\partial\,t} = \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{I})[\lambda(t),x]\}\,\dot{\lambda}(t). \tag{5034}$$

از معادله-یِ-حرکت نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,[I(t,x)]}{\mathrm{d}\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial\,[I(t,x)]}{\partial\,t} + \{I(t,x),H(t,x)\}. \tag{5035}$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}\,[I(t,x)]}{\mathrm{d}\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{I})(\lambda,x)]\,\dot{\lambda} + \{\boldsymbol{I}(\lambda,x),\boldsymbol{H}(\lambda,x)\}. \tag{5036}$$

پس،

$$\frac{\mathrm{d}\,[I(t,x)]}{\mathrm{d}\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} \frac{\partial\,[I(t,x)]}{\partial\,t}. \tag{5037}$$

که میشود،

$$\frac{\mathrm{d}\,[I(t,x)]}{\mathrm{d}\,t} \overset{\mathrm{ns}}{=} [(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{I})(\lambda,x)]\,\dot{\lambda}(t). \tag{5038}$$

از جمله وقت ی تحول با H است و λ ثابت نیست، نتیجه نمیشود I بر-لاک ثابت است.

115 هَمیلتِنی یِ وابسته-به-پارامتر، و انتگرال-پذیری

سیستم ی را بررسی میکنم که متناظر با یک هَمیلتِنی یِ وابسته-به-پارامتر است، و به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ ثابت ِ پارامتر (λ) انتگرال-پذیر است. این یعنی، وقت ی بُعد ِ فضا-یِ-فاز ($2\,\mathfrak{m}$) است، $\mathfrak{m}$ تابعی از فضا-یِ-فاز (و پارامتر) هستند که پُؤَسُنی و مستقل-از-هم َند، و کروشه-یِ-پُؤَسُن ِ هر

یک از آنها با H (هَمیلتِنی یِ سیستم) صفر است. یعنی تابعیها یِ I_1 تا I_{m} از فضا-یِ-فاز (و پارامتر) هستند که مستقل-از-هم َند و

$$\{\boldsymbol{I}_i(\lambda,x),\boldsymbol{I}_j(\lambda,x)\}=0. \tag{5039}$$

$$\{\boldsymbol{I}_i(\lambda,x),\boldsymbol{H}(\lambda,x)\}=0. \tag{5040}$$

این که I_1 تا I_{m} پُوَسُنی و مستقل-از-هم َند، نتیجه میدهد میشود I_1 تا I_{m} را مئلفِها یِ تکانه برا یِ یک دسته مختصات ِ کانُنیک گرفت. یعنی q'^i ها یی هستند که (q',I) کانُنیک است. یا (q',p') کانُنیک است، که p' هم ان I تعریف شده:

$$p'(t,x)=\boldsymbol{p}'[\lambda(t),x]. \tag{5041}$$

که $\boldsymbol{p}'$ هم ان $\boldsymbol{I}$ است:

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{I} \tag{5042}$$

به این ترتیب،

$$\{\boldsymbol{p}'_i(\lambda,x),\boldsymbol{H}(\lambda,x)\}=0. \tag{5043}$$

همچنین،

$$q'(t,x)=\boldsymbol{q}'[\lambda(t),x]. \tag{5044}$$

که، چون $(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')$ کانُنیک است، رابطه یِ (5043) یعنی

$$-\frac{\partial\,\boldsymbol{H}}{\partial\,\boldsymbol{q}'}=0. \tag{5045}$$

مفصلتر،

$$-\left(\frac{\partial\,\boldsymbol{H}}{\partial\,\boldsymbol{q}'}\right)_{\lambda,\boldsymbol{p}'}=0. \tag{5046}$$

که یعنی $\boldsymbol{H}(\lambda,x)$ تابع ی از λ و $\boldsymbol{p}'$ است: یک تابعی یِ $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ هست که

$$\boldsymbol{H}(\lambda,x)=\boldsymbol{\mathcal{H}}[\lambda,\boldsymbol{p}'(\lambda,x)]. \tag{5047}$$

این که مشتق ِ H نسبت به q' صفر است، لزومَن نتیجه نمیدهد p' بر-لاک ثابت است:

$$\dot{p}' \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\, p'}{\partial\, t}+\{p',H\}. \tag{5048}$$

پس،

$$\dot{p}' \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\, p'}{\partial\, t}. \tag{5049}$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}\,[\boldsymbol{p}'(\lambda,x)]}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{p}')[\lambda(t),x]\}\,\dot{\lambda}(t). \tag{5050}$$

برا یِ q' هم،

$$\dot{q}' \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\, q'}{\partial\, t}+\{q',H\}. \tag{5051}$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}\,\{\boldsymbol{q}'[\lambda(t),x]\}}{\mathrm{d}\,t} \stackrel{\text{ns}}{=} \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{q}')[\lambda(t),x]\}\,\dot{\lambda}(t)+(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\boldsymbol{\mathcal{H}})\{\lambda(t),\boldsymbol{p}'[\lambda(t),x)]\}. \tag{5052}$$

البته میشود x در طرف- ِ-راست ِ معادله-یِ-حرکت برا یِ x' را هم بر حسب ِ λ و x' نوشت. به این ترتیب،

$$\dot{p}' \stackrel{\text{ns}}{=} \Big((\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{p}')\{\lambda(t),x[\lambda(t),x']\}\Big)\,\dot{\lambda}(t). \tag{5053}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}' \stackrel{\text{ns}}{=}{}& \Big((\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\boldsymbol{q}')\{\lambda(t),x[\lambda(t),x']\}\Big)\,\dot{\lambda}(t)\\ &+(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\boldsymbol{\mathcal{H}})\Big(\lambda(t),\boldsymbol{p}'\{\lambda(t),x[\lambda(t),x')]\}\Big).\end{aligned} \tag{5054}$$

یک راه ِ دیگر برا یِ به-دست-آوردن ِ هم ین معادلات- ِ-حرکت این است که هَمیلتنی یِ متناظر با تبدیل- ِ-کانُنیک ی را حساب کنم که (q,p) را به (q',p') تبدیل میکند. این هَمیلتنی را با H'

نشان میدهم. تبدیل ِ (q,p) به (q',p') وابسته-به-زمان است. این وابستگی از طریق ِ λ است. تابعی-یِ-مولد ِ متناظر با این تبدیل را با $\tilde{\Upsilon}$ نشان میدهم. دیده میشود

$$H'(t,x') = H(t,x) + \frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(t,q,p')]}{\partial\,t}. \tag{5055}$$

فرض شده q و p' مستقل-از-هم َند. اگر چنین نباشد، یک جایگشت- ِ-کانُنیک از (q,p) را به جا یِ (q,p) به کار میبَرم. تابعی-یِ-مولد را بر حسب ِ λ، به جا یِ t، مینویسم:

$$\tilde{\Upsilon}(t,q,p') = \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}[\lambda(t),q,p']. \tag{5056}$$

به این ترتیب، رابطه یِ (5055) چنین میشود.

$$H'(t,x') = H(t,x) + \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})[\lambda(t),q,p']\}\,\dot{\lambda}(t). \tag{5057}$$

البته میشود H و H' را بر حسب ِ λ، به جا یِ t، نوشت:

$$H(t,x) = \boldsymbol{H}[\lambda(t),x]. \tag{5058}$$

$$H'(t',x') = \boldsymbol{H}'[\lambda(t),x']. \tag{5059}$$

به این ترتیب رابطه یِ (5057) چنین میشود.

$$\boldsymbol{H}'[\lambda(t),x'] = \boldsymbol{H}[\lambda(t),x] + \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})[\lambda(t),q,p']\}\,\dot{\lambda}(t). \tag{5060}$$

و خُد ِ x در طرف ِ راست هم، بر حسب ِ (λ,x') نوشته میشوند:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}'[\lambda(t),x'] &= \boldsymbol{H}\{\lambda(t),x[\lambda(t),x']\}\\ &\quad + \Big((\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})\{\lambda(t),q[\lambda(t),x'],p'\}\Big)\,\dot{\lambda}(t).\end{aligned} \tag{5061}$$

در طرف ِ راست، جمله یِ اول تابع ِ فقط $[\lambda(t),p']$ است. از (5047) دیده میشود

$$\boldsymbol{H}[\lambda(t),x] = \boldsymbol{\mathcal{H}}\{\lambda(t),\boldsymbol{p}'[\lambda(t),x]\}. \tag{5062}$$

پس،

$$\boldsymbol{H}\{\lambda(t),x[\lambda(t),x']\}=\boldsymbol{\mathcal{H}}\Big(\lambda(t),\boldsymbol{p}'\{\lambda(t),x[\lambda(t),x']\}\Big). \tag{5063}$$

از (5041) هم دیده میشود

$$\boldsymbol{p}'\{\lambda(t),x[\lambda(t),x']\}=p'. \tag{5064}$$

به این ترتیب، رابطه یِ (5061) چنین میشود

$$\boldsymbol{H}'[\lambda(t),x']=\boldsymbol{\mathcal{H}}[\lambda(t),p']+\Big((\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})\{\lambda(t),q[\lambda(t),x'],p'\}\Big)\,\dot{\lambda}(t). \tag{5065}$$

در طرف ِ راست، ضریب ِ $\dot{\lambda}$ تابع ِ (λ,x') است. این ضریب را با $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,x')=(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})[\lambda,q(\lambda,x'),p']. \tag{5066}$$

به این ترتیب، رابطه یِ (5065) چنین میشود.

$$\boldsymbol{H}'[\lambda(t),x']=\boldsymbol{\mathcal{H}}[\lambda(t),p']+\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}[\lambda(t),x']\}\,\dot{\lambda}(t). \tag{5067}$$

که یعنی

$$H'(t,x')=\boldsymbol{\mathcal{H}}[\lambda(t),p']+\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}[\lambda(t),x']\}\,\dot{\lambda}(t). \tag{5068}$$

دیده میشود اگر λ ثابت نباشد، H' تابع ِ فقط t و p' نیست، به q' هم بستگی دارد. اگر مشتق ِ λ (نسبت به زمان) صفر نباشد، نتیجه نمیشود مشتق ِ H' نسبت به q' صفر است. و این یعنی اگر پارامتر ثابت نباشد نتیجه نمیشود سیستم انتگرال-پذیر است. معادلات- ِ-حرکت چنین میشوند.

$$\dot{q}'\overset{\text{ns}}{=}\frac{\partial\,[\boldsymbol{\mathcal{H}}(\lambda,p')]}{\partial\,p'}+\frac{\partial\,[\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,x')]}{\partial\,p'}\,\dot{\lambda}. \tag{5069}$$

$$\dot{p}'\overset{\text{ns}}{=}-\frac{\partial\,[\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,x')]}{\partial\,q'}\,\dot{\lambda}. \tag{5070}$$

وقت ی پارامتر ثابت است، p' بر-لاک ثابت است و سیستم انتگرال-پذیر است. در این حالت مشتق ِ زمانی یِ q' ثابت است و q' بر-لاک یک تابع ِ دست- ِ-بالا-خطی از زمان میشود. وقت ی پارامتر ثابت نیست، لزومَن چنین نیست: p' لزومَن بر-لاک ثابت نیست و سیستم لزومَن انتگرال-پذیر نیست.

116 هَمیلتِنی با پارامترِ کند-تغییر، و انتگرال-پذیری

سیستم ی را بررسی میکنم که متناظر با یک هَمیلتِنی یِ وابسته-به-پارامتر است، و پارامتر (λ) کند-تغییر است. کند-تغییر-بودنِ پارامتر را بر حسبِ پارامتر-ِ-کندی یِ ε نشان میدهم.

گیرم سیستم به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ ثابتِ پارامتر انتگرال-پذیر است. ثابت-ِ-حرکتها یِ سیستم را مئلفِها یِ تکانه برا یِ مختصات-ِ-کانُنینکِ پریم-دار میگیرم. با مختصاتِ پریم-دار، مشتقِ H (هَمیلتِنی) نسبت به q'^i ها صفر است. اما وقت ی پارامتر وابسته-به-زمان است، هَمیلتِنی یِ متناظر با مختصات-ِ-کانُنیکِ پریم-دار H' میشود، که

$$H'(t,x') = H(t,x) + \frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(t,q,p')]}{\partial\,t}. \tag{5055}$$

که $\tilde{\Upsilon}$ تابعی-یِ-مولدِ متناظر با تبدیل-ِ-کانُنیک ی ست که (q,p) را به (q',p') تبدیل میکند. تابعی-یِ-مولد را بر حسبِ λ، به جا یِ t، مینویسم:

$$\tilde{\Upsilon}(t,q,p') = \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}[(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),q,p']. \tag{5071}$$

به این ترتیب،

$$H'(t,x') = H(t,x) + \varepsilon\,\{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})[(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),q,p']\}\,[(\mathbf{D}\,\lambda)\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5072}$$

در طرفِ راست، x را بر حسبِ x' مینویسم. جمله یِ اول در طرفِ راست مستقل از q' میشود:

$$H(t,x) = \boldsymbol{\mathcal{H}}[(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),p']. \tag{5073}$$

در جمله یِ دومِ طرف-ِ-راستِ (5072) هم، مشتقِ $\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}$ نسبت به λ را با $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,x') = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})(\lambda,q,p'). \tag{5074}$$

به این ترتیب، رابطه یِ (5072) چنین میشود.

$$H'(t,x') = \boldsymbol{\mathcal{H}}[(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),p'] + \varepsilon\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}[(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),x']\}\,[(\mathbf{D}\,\lambda)\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5075}$$

معادلات- ِ-حرکت هم چنین میشوند.

$$\dot{q}' \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,\{\boldsymbol{\mathcal{H}}[(\bar{\lambda}\circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t),p']\}}{\partial\,p} + \varepsilon\,\frac{\partial\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}[(\bar{\lambda}\circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t),x']\}}{\partial\,p'}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ \mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5076}$$

$$\dot{p}' \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\varepsilon\,\frac{\partial\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}[(\bar{\lambda}\circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t),x']\}}{\partial\,q'}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ \mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5077}$$

وقت ی پارامتر ثابت است، p' بر-لاک ثابت است و سیستم انتگرال-پذیر است. در این حالت مشتق ِ زمانی یِ q' ثابت است و q' بر-لاک یک تابع ِ دست- ِ-بالا-خطی از زمان میشود. وقت ی پارامتر ثابت نیست، لزومَن چنین نیست: p' لزومَن بر-لاک ثابت نیست و سیستم لزومَن انتگرال-پذیر نیست.

اما اگر پارامتر کند-تغییر باشد، انحراف ِ معادلات- ِ-حرکت از شکل ِ انتگرال-پذیر کوچک است: پارامتر- ِ-کندی یِ ε یک پارامتر- ِ-اختلال است، برا یِ انحراف ِ سیستم از یک سیستم ِ انتگرال-پذیر. در این حالت، معادلات- ِ-حرکت ِ (5076) و (5077) را چنین مینویسم.

$$\dot{q}' \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\partial\,\{\boldsymbol{\mathcal{H}}[(\bar{\lambda}\circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t),p']\}}{\partial\,p'} + o(1). \tag{5078}$$

$$\dot{p}' \stackrel{\text{ns}}{=} o(1). \tag{5079}$$

از معادله یِ (5079) نتیجه میشود

$$p'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} p'(t_0) + o(1). \tag{5080}$$

این را در (5078) میگذارم:

$$\dot{q}'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} v'[(\bar{\lambda}\circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t),p'(t_0)] + o(1). \tag{5081}$$

که v' چنین تعریف شده.

$$v'(\lambda,p') = \frac{\partial\,[\boldsymbol{\mathcal{H}}(\lambda,p')]}{\partial\,p'}. \tag{5082}$$

از (5081) نتیجه میشود

$$q'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q'(t_0) + (\Delta\,q')(t) + o(1). \tag{5083}$$

که،

$$(\Delta\, q')(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v'[(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(s), p'(t_0)]. \tag{5084}$$

یا، بر حسب ِ خُد ِ λ،

$$(\Delta\, q')(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v'[\lambda(s), p'(t_0)]. \tag{5085}$$

روابط ِ (5080) و (5083) جواب ِ معادلات- ِ-حرکت تا مرتبه یِ صفر نسبت به پارامتر- ِ-کندی یَند. اینها را در (5077) میگذارم. مشتق ِ زمانی یِ p' تا مرتبه یِ یک نسبت به پارامتر- ِ-کندی به دست میئاید:

$$\begin{aligned} \dot{p}'(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} & -\varepsilon\, \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \boldsymbol{\mathcal{Y}})[(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), q'(t_0) \\ & + (\Delta\, q')(t), p'(t_0)]\}\, [(\mathbf{D}\, \bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](t) + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{5086}$$

به این ترتیب،

$$p'(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} p'(t_0) + \varepsilon\, p'_{\sim\mathbf{1}}(t) + o(\varepsilon). \tag{5087}$$

که،

$$\begin{aligned} p'_{\sim\mathbf{1}}(t) = & -\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \boldsymbol{\mathcal{Y}})[(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(s), q'(t_0) \\ & + (\Delta\, q')(s), p'(t_0)]\}\, [(\mathbf{D}\, \bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](s). \end{aligned} \tag{5088}$$

البته میشود اینها را بر حسب ِ خُد ِ λ نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon\, p'_{\sim\mathbf{1}}(t) = & -\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \boldsymbol{\mathcal{Y}})[\lambda(s), q'(t_0) \\ & + (\Delta\, q')(s), p'(t_0)]\}\, (\mathbf{D}\, \lambda)(s). \end{aligned} \tag{5089}$$

اما در شکل ِ قبلی (بر حسب ِ $\bar{\lambda}$) مرتبه یِ اختلال مشخصتر است.

$p'_{\sim\mathbf{1}}$ ضریبِ ε^1 در بسطِ اختلالی یِ p' نیست، اما اختلافِ آن با این ضریب $(p'_{\mathbf{1}})$، در حدِ $(\varepsilon \to 0)$ به صفر میگراید:

$$p'_{\sim\mathbf{1}} = p'_{\mathbf{1}} + o(1). \tag{5090}$$

به این ترتیب،

$$\varepsilon\, p'_{\sim\mathbf{1}} = \varepsilon\, p'_{\mathbf{1}} + o(\varepsilon). \tag{5091}$$

از رابطه یِ (5076) دیده میشود برا یِ محاسبه یِ q' تا مرتبه یِ یک نسبت به ε، در طرفِ راستِ رابطه یِ (5076)، در جمله یِ دوم p' و q' تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε لازم اند، و در جمله یِ اول p' تا مرتبه یِ یک نسبت به ε لازم است. p' و q' تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε از، به ترتیب، (5080) و (5083) به دست میئایند. p' تا مرتبه یِ یک نسبت به ε هم از (5087) به دست میئاید. به این ترتیب، از (5076) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\dot{q}'(t) \overset{\text{ns}}{=}\ & v'[(\lambda\!\!\!^{-} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), p'(t_0) + \varepsilon\, p'_{\sim\mathbf{1}}(t)] \\ & + \varepsilon\, \{\mathbf{Y}[(\lambda\!\!\!^{-} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), q'(t_0) + (\Delta\, q')(t), p'(t_0)]\}\, [(\mathbf{D}\, \lambda\!\!\!^{-}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](t) \\ & + o(\varepsilon).\end{aligned} \tag{5092}$$

که،

$$\mathbf{Y}(\lambda, q', p') = \frac{\partial\, [\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda, q', p')]}{\partial\, p'}. \tag{5093}$$

جمله یِ اولِ طرفِ راستِ (5092) را هم بر حسبِ ε بسط میدهم:

$$\begin{aligned}v'[(\lambda\!\!\!^{-} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), p'(t_0) + \varepsilon\, p'_{\sim\mathbf{1}}(t)] = {} & v'[(\lambda\!\!\!^{-} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), p'(t_0)] \\ & + \varepsilon\, \{w'[(\lambda\!\!\!^{-} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), p'(t_0)]\}\, p'_{\sim\mathbf{1}}(t) \\ & + o(\varepsilon).\end{aligned} \tag{5094}$$

که،

$$w'(\lambda, p') = \frac{\partial\, [v'(\lambda, p')]}{\partial\, p'}. \tag{5095}$$

یا،

$$w'(\lambda, p') = \frac{\partial^2 \left[\boldsymbol{\mathcal{H}}(\lambda, p')\right]}{(\partial\, p')^2}. \tag{5096}$$

از جمله رُشن است که w' متقارن است. رابطه یِ (5092) چنین میشود.

$$\begin{aligned}\dot{q}'(t) &\stackrel{\text{ns}}{=} v'[(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), p'(t_0)] + \varepsilon \left\{w'[(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), p'(t_0)]\right\} p'_{\sim\mathbf{1}}(t) \\ &\quad + \varepsilon \left\{\mathbf{Y}[(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t), q'(t_0) + (\Delta\, q')(t), p'(t_0)]\right\} [(\mathbf{D}\, \bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](t) \\ &\quad + o(\varepsilon).\end{aligned} \tag{5097}$$

و با انتگرال-گیری بر زمان،

$$q'(t) \stackrel{\text{ns}}{=} q'(t_0) + (\Delta\, q')(t) + \varepsilon\, q'_{\sim\mathbf{1}}(t) + o(\varepsilon). \tag{5098}$$

که،

$$\begin{aligned}q'_{\sim\mathbf{1}}(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s) \Big(&\left\{w'[(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(s), p'(t_0)]\right\} p'_{\sim\mathbf{1}}(s) + \left\{\mathbf{Y}[(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(s), q'(t_0)\right. \\ &\left. + (\Delta\, q')(s), p'(t_0)]\right\} [(\mathbf{D}\, \bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](s)\Big).\end{aligned} \tag{5099}$$

البته میشود این را بر حسب ِ خُد ِ λ نوشت:

$$\begin{aligned}\varepsilon\, q'_{\sim\mathbf{1}}(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s) \Big(&\left\{w'[\lambda(s), p'(t_0)]\right\} (\varepsilon\, p'_{\sim\mathbf{1}})(s) + \left\{\mathbf{Y}[\lambda(s), q'(t_0)\right. \\ &\left. + (\Delta\, q')(s), p'(t_0)]\right\} (\mathbf{D}\, \lambda)(s)\Big).\end{aligned} \tag{5100}$$

اما در شکل ِ قبلی (بر حسب ِ $\bar{\lambda}$) مرتبه یِ اختلال مشخصتر است.

روابط ِ (5087) و (5098) جواب ِ معادلات- ِ-حرکت تا مرتبه یِ یک نسبت به ε را میدهند. این روابط، از جمله شامل ِ $p'_{\sim\mathbf{1}}$ و $q'_{\sim\mathbf{1}}$ اند، که با یک ضریب ِ ε در طرف- ِ-راستها یِ (5087) و (5098) وارد شده اند. پس برا یِ محاسبه یِ جواب ِ معادلات- ِ-حرکت تا مرتبه یِ یک نسبت به ε، کافی ست $p'_{\sim\mathbf{1}}$ و $q'_{\sim\mathbf{1}}$ تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε حساب شوند. از جمله، برا یِ محاسبه یِ اینها تا

مرتبه یِ صفر نسبت به ε کافی ست $(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)$ تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε حساب شود. برا یِ این کار، $\mathfrak{t}$ در (5016) را هم ان t_0 میگذارم:

$$\mathfrak{t} = t_0. \tag{5101}$$

$$\mathsf{s}_\varepsilon(s) = t_0 + \varepsilon\,(s - t_0). \tag{5102}$$

$$(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(s) = \bar{\lambda}[t_0 + \varepsilon\,(s - t_0)]. \tag{5103}$$

$$(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(s) = \bar{\lambda}(t_0) + o(1). \tag{5104}$$

$$(\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(s) = (\bar{\lambda} \circ \mathsf{s}_\varepsilon)(t_0) + o(1). \tag{5105}$$

$$\lambda(s) = \lambda(t_0) + o(1). \tag{5106}$$

همچنین،

$$[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](s) = (\mathbf{D}\,\bar{\lambda})(t_0) + o(1). \tag{5107}$$

$$[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](s) = [(\mathbf{D}\,\bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](t_0) + o(1). \tag{5108}$$

$$\dot{\lambda}(s) = \varepsilon\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda}) \circ \mathsf{s}_\varepsilon](t_0) + o(\varepsilon). \tag{5109}$$

$$\dot{\lambda}(s) = \varepsilon\,(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})(t_0) + o(\varepsilon). \tag{5110}$$

رُشن است که اینها به شرط ی درست َند که $|s - t_0|$ خیلی بزرگ نباشد، یعنی به شرط ی که

$$\varepsilon\,(s - t_0) = o(1). \tag{5111}$$

گیرم

$$\varepsilon\,(t - t_0) = o(1). \tag{5112}$$

رابطه یِ (5088) چنین میشود

$$\begin{aligned} p'_{\sim\mathbf{1}}(t) = -\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,s)\,\{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\boldsymbol{\mathcal{Y}})[\lambda(t_0), q'(t_0) \\ + (\Delta\,q')(s), p'(t_0)]\}\,(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})(t_0) + o(1). \end{aligned} \tag{5113}$$

خُد ِ $(\Delta\, q')$ هم، از رابطه یِ (5084)، چنین میشود

$$(\Delta\, q')(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, v'[\lambda(t_0), p'(t_0)] + o(1). \tag{5114}$$

که یعنی،

$$(\Delta\, q')(t) = \{v'[\lambda(t_0), p'(t_0)]\}\, (t - t_0) + o(1). \tag{5115}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} p'_{\sim\mathbf{1}}(t) = -\Bigg[\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s) \Big((\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \boldsymbol{\mathcal{Y}})[\lambda(t_0), q'(t_0) \\ + \{v'[\lambda(t_0), p'(t_0)]\}\, (s - t_0), p'(t_0) \Big) \Bigg]\, (\mathbf{D}\, \check{\lambda})(t_0) + o(1). \end{aligned} \tag{5116}$$

که یعنی،

$$\begin{aligned} \varepsilon\, p'_{\sim\mathbf{1}}(t) = -\Bigg[\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s) \Big((\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \boldsymbol{\mathcal{Y}})[\lambda(t_0), q'(t_0) \\ + \{\mathrm{v}'[\lambda(t_0), p'(t_0)]\}\, (s - t_0), p'(t_0) \Big) \Bigg]\, (\mathbf{D}\, \lambda)(t_0) + o(1). \end{aligned} \tag{5117}$$

رابطه یِ (5099) هم چنین میشود.

$$\begin{aligned} q'_{\sim\mathbf{1}}(t) = \{w'[\lambda(t_0), p'(t_0)]\} \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, p'_{\sim\mathbf{1}}(s) + \Bigg[\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \mathbf{Y} \Big(\lambda(t_0), q'(t_0) \\ + \{v'[\lambda(t_0), p'(t_0)]\}\, (s - t_0), p'(t_0) \Big) \Bigg]\, (\mathbf{D}\, \check{\lambda})(t_0) + o(1). \end{aligned} \tag{5118}$$

که یعنی،

$$\begin{aligned} \varepsilon\, q'_{\sim\mathbf{1}}(t) = \{w'[\lambda(t_0), p'(t_0)]\} \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, (\varepsilon\, p'_{\sim\mathbf{1}})(s) + \Bigg[\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\, s)\, \mathbf{Y} \Big(\lambda(t_0), q'(t_0) \\ + \{v'[\lambda(t_0), p'(t_0)]\}\, (s - t_0), p'(t_0) \Big) \Bigg]\, (\mathbf{D}\, \lambda)(t_0) + o(1). \end{aligned} \tag{5119}$$

روابطِ (5116) و (5118) را میشود برایِ به-دست-آوردنِ جوابِ معادلات-ِ-حرکت تا مرتبه یِ یک نسبت به ε به کار برد، اما به شرط ی که (5112) برقرار باشد. وقت ی (5112) برقرار است، مقدارِ λ از t_0 تا t تغییرِ چشمگیر ی ندارد. برایِ این که λ از t_0 تا t تغییرِ چشمگیر ی داشته باشد، لازم است که

$$|\varepsilon\,(t-t_0)| \gtrsim 1. \tag{5120}$$

که یعنی،

$$|t-t_0| \gtrsim \varepsilon^{-1}. \tag{5121}$$

در این حالت، برایِ این که انتگرال ی از t_0 تا t، تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε حساب شود، باید انتگرال-ده را تا مرتبه یِ یک نسبت به ε حساب کرد. خلاصه، وقت ی $|t-t_0|$ بزرگ است، چنان که λ از t_0 تا t تغییرِ چشمگیر ی داشته باشد، محاسباتِ بالا برایِ به-دست-آوردنِ جوابِ معادلات حرکت تا مرتبه یِ یک نسبت به ε کافی نیستند. در واقع جوابها یِ مرتبه-یِ-صفر هم ممکن است عوض شوند. از جمله جوابِ مرتبه-یِ-صفر برایِ p' این بود که p' ثابت است. وقت ی $|t-t_0|$ بزرگ است، ممکن است جوابِ مرتبه-یِ-صفر برایِ p' این نباشد که p' ثابت است. باید شمارشِ مرتبه نسبت به ε را عوض کرد.

117 هَمیلتِنی با پارامترِ کند-تغییر، و متغیرهایِ کنش-ُ-زاویه

سیستم ی را بررسی میکنم که متناظر با یک هَمیلتِنی یِ وابسته-به-پارامتر است، و پارامتر (λ) کند-تغییر است. کند-تغییر-بودنِ پارامتر را بر حسبِ پارامتر-ِ-کندی یِ ε نشان میدهم.

گیرم سیستم به ازایِ همه یِ مقدارهایِ ثابتِ پارامتر انتگرال-پذیر است، و برایَ ش متغیرهایِ کنش-ُ-زاویه تعریف میشود، یعنی به ازایِ همه یِ مقدارهایِ ثابتِ پارامتر، متغیرهایِ کنش-ُ-زاویه را میشود مختصاتِ فضا-یِ-فاز گرفت و هَمیلتِنی یِ سیستم تابعِ فقط متغیرهایِ کنش (و احتمالَن خُدِ پارامتر) است. البته میشود این شرط.ها را ملایمتر کرد: کافی ست به ازایِ مقدارهایِ ثابتِ پارامتر در یک همسایگی، متغیرهایِ کنش-ُ-زاویه مستقل-از-هم باشند و هَمیلتِنی تابعِ فقط متغیرهایِ کنش

(و احتمالَن خُدِ پارامتر) باشد. این حالتِ خاص ی از سیستم ی با پارامترِ کند-تغییر است، که به ازا یِ مقدارها یِ ثابتِ پارامتر انتگرال-پذیر است. پس نتایجِ مربوط به حالتِ کلی اینجا هم برقرار َند. اما اینجا ضمنَن برا یِ تابعها یِ فضا-یِ-فاز میشود بسط-ِ-فوریه نوشت.

هَمیلتِنی یِ سیستم متناظر با (q,p)، مختصاتِ قدیمِ فضا-یِ-فاز، را با H نشان میدهم. H یک تابعی از (λ,q,p) است. این که سیستم به ازا یِ مقدارها یِ ثابتِ پارامتر انتگرال-پذیر است، و متغیرها-یِ-کنش-ُ-زاویه یِ متناظر با آن (ϑ,A) است، یعنی مشتقِ H نسبت به ϑ (در λ و A یِ ثابت) صفر است:

$$\left\{\frac{\partial\,[\boldsymbol{H}(\lambda,x)]}{\partial\,\vartheta^i}\right\}_{\lambda,\mathsf{A}}=0. \tag{5122}$$

اما وقت ی پارامتر وابسته-به-زمان است، هَمیلتِنی یِ متناظر با مختصات-ِ-کانُنیکِ جدید (متغیرها یِ کنش-ُ-زاویه) H' میشود، که

$$H'(t,\vartheta,\mathsf{A})=H(t,q,p)+\frac{\partial\,[\tilde{\Upsilon}(t,q,\mathsf{A})]}{\partial\,t}. \tag{5123}$$

که $\tilde{\Upsilon}$ تابعی-یِ-مولدِ متناظر با تبدیل-ِ-کانُنیک ی ست که (q,p) را به (ϑ,A) تبدیل میکند. تابعی-یِ-مولد را بر حسبِ $\bar{\lambda}$، به جا یِ t، مینویسم:

$$\tilde{\Upsilon}(t,q,\mathsf{A})=\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),q,\mathsf{A}]. \tag{5124}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}H'(t,\vartheta,\mathsf{A})&=\boldsymbol{\mathcal{H}}[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}]\\&\quad+\varepsilon\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\vartheta,\mathsf{A}]\}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t).\end{aligned} \tag{5125}$$

که،

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,\vartheta,\mathsf{A})=(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})(\lambda,q,\mathsf{A}). \tag{5126}$$

البته $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,\vartheta,\mathsf{A})$ نسبت به ϑ دُرِئی ست. پس میشود آن را بر حسبِ Θ_n ها بسط داد:

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,\vartheta,\mathsf{A})=[\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n(\lambda,\mathsf{A})]\,\Theta_n(\vartheta). \tag{5127}$$

به این ترتیب،

$$H'(t,\vartheta,\mathsf{A}) = \boldsymbol{\mathcal{H}}[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}] + \varepsilon\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}]\}\,[\Theta_n(\vartheta)]\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5128}$$

معادلات- ِ-حرکت هم چنین میشوند.

$$\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}] + \varepsilon\,\frac{\partial\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\vartheta,\mathsf{A}]\}}{\partial\,\mathsf{A}}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5129}$$

$$\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\varepsilon\,\frac{\partial\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\vartheta,\mathsf{A}]\}}{\partial\,\vartheta}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5130}$$

که،

$$\nu(\lambda,\mathsf{A}) = \frac{\partial\,[\boldsymbol{\mathcal{H}}(\lambda,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}. \tag{5131}$$

به شکل ِ سری-یِ-فوریه،

$$\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}] + \varepsilon\,\frac{\partial\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}]\}}{\partial\,\mathsf{A}}\,[\Theta_n(\vartheta)]\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5132}$$

$$\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\varepsilon\,\sum_{n\neq 0}(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}]\}\,[\Theta_n(\vartheta)]\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5133}$$

اگر پارامتر ثابت میبود، مشتق ِ زمانی یِ A صفر میشد، که یعنی Aبر-لاک ثابت میماند؛ و مشتق ِ زمانی یِ ϑ هم ثابت میشد، در نتیجه ϑ یک تابع ِ دست- ِ-بالا-خطی از زمان میشد.

در حالت ِ کلی که پارامتر وابسته-به-زمان است، لزومَن چنین نیست. اما اگر پارامتر کند-تغییر باشد، انحراف ِ معادلات- ِ-حرکت از شکل ِ انتگرال-پذیر کوچک است: پارامتر- ِ-کندی یِ ε یک پارامتر- ِ-اختلال است، برا یِ انحراف ِ سیستم از یک سیستم ِ انتگرال-پذیر. در این حالت، معادلات- ِ-حرکت ِ (5129) و (5130) را چنین مینویسم.

$$\dot{\vartheta} \stackrel{\text{ns}}{=} \nu[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}] + o(1). \tag{5134}$$

$$\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} o(1). \tag{5135}$$

از (5134) و (5135) نتیجه میشود

$$\mathsf{A}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{A}(t_0) + o(1). \tag{5136}$$

$$\vartheta(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \vartheta(t_0) + (\Delta\,\vartheta)(t) + o(1). \tag{5137}$$

که،

$$(\Delta\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,s)\,\nu[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(s), \mathsf{A}(t_0)]. \tag{5138}$$

یا، بر حسب ِ خُد ِ λ،

$$(\Delta\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,s)\,\nu[\lambda(s), \mathsf{A}(t_0)]. \tag{5139}$$

روابط ِ (5136) و (5137) جواب ِ معادلات- ِ-حرکت تا مرتبه یِ صفر نسبت به پارامتر- ِ-کندی یَند. اینها را در (5133) میگذارم . مشتق ِ زمانی یِ A تا مرتبه یِ یک نسبت به پارامتر- ِ-کندی به دست میئاید:

$$\begin{aligned}\dot{\mathsf{A}}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} & -\varepsilon \sum_{n\neq 0} (2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t), \mathsf{A}(t_0)]\}\,\{\Theta_n[\vartheta(t_0) \\ & + (\Delta\,\vartheta)(t)]\}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t) + o(\varepsilon).\end{aligned} \tag{5140}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{A}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{A}(t_0) + \varepsilon\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(t) + o(\varepsilon). \tag{5141}$$

که،

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(t) = & -\sum_{n\neq 0} \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,s)\,(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(s), \mathsf{A}(t_0)]\}\,\{\Theta_n[\vartheta(t_0) \\ & + (\Delta\,\vartheta)(s)]\}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](s).\end{aligned} \tag{5142}$$

البته میشود این را بر حسب ِ خُد ِ λ نوشت:

$$\varepsilon\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(t) = -\sum_{n\neq 0}\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[\lambda(s),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\Theta_n[\vartheta(t_0) + (\Delta\,\vartheta)(s)]\}\,(\mathbf{D}\,\lambda)(s). \tag{5143}$$

اما در شکل ِ قبلی (بر حسب ِ $\check{\lambda}$) مرتبه یِ اختلال مشخصتر است.

$\mathsf{A}_{i\sim\mathbf{1}}$ ضریب ِ ε^1 در بسط ِ اختلالی یِ A_i نیست، اما اختلاف ِ آن با این ضریب ($\mathsf{A}_{i\,\mathbf{1}}$)، در حد ِ ($\varepsilon\to 0$) به صفر میگراید:

$$\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}} = \mathsf{A}_{\mathbf{1}} + o(1). \tag{5144}$$

به این ترتیب،

$$\varepsilon\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}} = \varepsilon\,\mathsf{A}_{\mathbf{1}} + o(\varepsilon). \tag{5145}$$

از رابطه یِ (5129) دیده میشود برا یِ محاسبه یِ ϑ^i ها تا مرتبه یِ یک نسبت به ε، در طرف ِ راست ِ رابطه یِ (5129)، در جمله یِ دوم A و ϑ تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε لازم اند، و در جمله یِ اول A تا مرتبه یِ یک نسبت به ε لازم است. A و ϑ تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε از، به ترتیب، (5136) و (5137) به دست میایند. A تا مرتبه یِ یک نسبت به ε هم از (5141) به دست میاید. به این ترتیب، از (5133) نتیجه میشود

$$\dot{\vartheta}(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \nu[(\check{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}(t_0)+\varepsilon\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(t)] + \varepsilon\,\{\mathbf{Y}^n[(\check{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\{\Theta_n[\vartheta(t_0) + (\Delta\,\vartheta)(t)]\}\,[(\mathbf{D}\,\check{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t) + o(\varepsilon). \tag{5146}$$

که،

$$\mathbf{Y}(\lambda,\mathsf{A}) = \frac{\partial\,[\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}. \tag{5147}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (5146) را هم بر حسب ِ ε بسط میدهم:

$$\begin{aligned}\nu[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}(t_0)+\varepsilon\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(t)] &= \nu[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}(t_0)]\\ &\quad+\varepsilon\,\{\xi[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(t)\\ &\quad+o(\varepsilon).\end{aligned}\tag{5148}$$

که،

$$\xi(\lambda,\mathsf{A})=\frac{\partial\,[\nu(\lambda,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}.\tag{5149}$$

یا،

$$\xi(\lambda,\mathsf{A})=\frac{\partial^2\,[\boldsymbol{\mathcal{H}}(\lambda,\mathsf{A})]}{(\partial\,\mathsf{A})^2}.\tag{5150}$$

از جمله رُشن است که ξ متقارن است. رابطه یِ (5146) چنین میشود.

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}(t)\stackrel{\text{ns}}{=}\nu[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}(t_0)]&+\varepsilon\,\{\xi[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(t)\\ &+\varepsilon\,\{\mathbf{Y}^n[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}(t_0)]\}\{\,\Theta_n[\vartheta(t_0)\\ &+(\Delta\,\vartheta)(t)]\}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t)+o(\varepsilon).\end{aligned}\tag{5151}$$

با انتگرال-گیری بر زمان،

$$\vartheta(t)\stackrel{\text{ns}}{=}\vartheta(t_0)+(\Delta\,\vartheta)(t)+\varepsilon\,\vartheta_{\sim\mathbf{1}}(t)+o(\varepsilon).\tag{5152}$$

که،

$$\begin{aligned}\vartheta_{\sim\mathbf{1}}(t)=\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,\Big(&\{\xi[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(s),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(s)\\ &+\{\mathbf{Y}^n[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(s),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\{\Theta_n[\vartheta(t_0)\\ &+(\Delta\,\vartheta)(s)]\}\,[(\mathbf{D}\,\bar{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](s)\Big).\end{aligned}\tag{5153}$$

البته میشود این را بر حسب ِ خُد ِ λ نوشت:

$$\varepsilon\,\vartheta_{\sim\mathbf{1}}(t) = \int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,\Big(\{\xi[(\check{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(s),\mathsf{A}(t_0)]\}\,(\varepsilon\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}})(s) + \{\mathbf{Y}^n[(\check{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(s),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\{\Theta_n[\vartheta(t_0) + (\Delta\,\vartheta)(s)]\}\,[(\mathbf{D}\,\lambda)\circ\mathsf{s}_\varepsilon](s)\Big). \tag{5154}$$

اما در شکل ِ قبلی (بر حسب ِ $\check{\lambda}$) مرتبه یِ اختلال مشخصتر است.

روابط ِ (5141) و (5152) جواب ِ معادلات- ِ-حرکت تا مرتبه یِ یک نسبت به ε را میدهند. این روابط، از جمله شامل ِ $\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}$ و $\vartheta_{\sim\mathbf{1}}$ اند، که با یک ضریب ِ ε در طرف- ِ-راستها یِ (5141) و (5152) وارد شده اند. پس برا یِ محاسبه یِ جواب ِ معادلات- ِ-حرکت تا مرتبه یِ یک نسبت به ε، کافی ست $\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}$ و $\vartheta_{\sim\mathbf{1}}$ تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε حساب شوند. از جمله، برا یِ محاسبه یِ اینها تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε کافی ست $(\check{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)$ تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε حساب شود. برا یِ این کار، t در تعریف ِ s را هم ان t_0 میگذارم. همچنین، حالت ی را بررسی میکنم که $|t-t_0|$ بزرگ نیست.

روابط ِ (5142) و (5153) چنین میشودن.

$$\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(t) = -\sum_{n\neq 0}\Bigg\{\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[\lambda(t_0),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\Big[\Theta_n\Big(\vartheta(t_0) + \{\nu[\lambda(t_0),\mathsf{A}(t_0)]\}\,(s-t_0)\Big)\Big]\Bigg\}\,(\mathbf{D}\,\check{\lambda})(t_0) + o(1). \tag{5155}$$

$$\vartheta_{\sim\mathbf{1}}(t) = \{\xi[\lambda(t_0),\mathsf{A}(t_0)]\}\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,\mathsf{A}_{\sim\mathbf{1}}(s) + \Bigg[\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\,s\,\{\mathbf{Y}^n[\lambda(t_0),\mathsf{A}(t_0)]\}\,\Theta_n\Big(\vartheta(t_0) + \{\nu[\lambda(t_0),\mathsf{A}(t_0)]\}\,(s-t_0)\Big)\Bigg]\,(\mathbf{D}\,\check{\lambda})(t_0) + o(1). \tag{5156}$$

روابط ِ (5155) و (5156) را میشود برا یِ به-دست-آوردن ِ جواب ِ معادلات- ِ-حرکت تا مرتبه یِ یک نسبت به ε به کار برد، اما به شرط ی که زمان ِ تحول بزرگ نباشد، که در این حالت مقدار ِ λ از t_0 تا t تغییر ِ چشمگیر ی ندارد. برا یِ این که λ از t_0 تا t تغییر ِ چشمگیر ی داشته باشد، لازم است زمان ِ تحول با ε^{-1} قابل- ِ-مقایسه، یا از ε^{-1} بزرگتر باشد. در این حالت، برا یِ این که انتگرال ی از

t_0 تا t، تا مرتبه یِ صفر نسبت به ε حساب شود، باید انتگرال-ده را تا مرتبه یِ یک نسبت به ε حساب کرد. وقت ی $|t-t_0|$ بزرگ است، چنان که λ از t_0 تا t تغییر ِ چشمگیر ی داشته باشد، محاسبات ِ بالا برا یِ به-دست-آوردن ِ جواب ِ معادلات حرکت تا مرتبه یِ یک نسبت به ε کافی نیستند. باید شمارش ِ مرتبه نسبت به ε را عوض کرد.

118 هَمیلتِنی با پارامتر ِ کند-تغییر، و ناوردایی یِ متغیر- ِ-کنش

میخاهم تحول ِ زمانی یِ متغیر- ِ-کنش در مرتبه یِ صفر برا یِ حالت ی را به دست آورم که تغییر ِ λ چشمگیر است. دیده میشود

$$\{\mathbf{D}\,[\Theta_n(\vartheta)]\}(t) \overset{\text{ns}}{=} [2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\dot{\vartheta}(t)]\,\Theta_n[\vartheta(t)]. \tag{5157}$$

معادله یِ تحول برا یِ ϑ چنین است.

$$\dot{\vartheta} \overset{\text{ns}}{=} \nu[(\bar{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}]+o(1). \tag{5134}$$

گیرم سیستم اَبَرانتگرال-پذیر نیست:

$$\begin{aligned} &n\neq 0\Rightarrow\\ &(n\,\nu)(\lambda,\mathsf{A})\neq 0. \end{aligned} \tag{5158}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} &\forall\, n\neq 0:\\ &\exists\,\delta>0\ \ni\ (|\varepsilon|<\delta\Rightarrow n\,\dot{\vartheta}\overset{\text{ns}}{\neq}0). \end{aligned} \tag{5159}$$

این را، سادِتر، چنین مینویسم.

$$\begin{aligned} &n\neq 0\Rightarrow\\ &n\,\dot{\vartheta}\overset{\text{ns}}{\neq}0. \end{aligned} \tag{5160}$$

به این ترتیب،

$$n \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Theta_n(\vartheta) \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{\mathbf{D}\,[\Theta_n(\vartheta)]}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\dot{\vartheta}}. \tag{5161}$$

معادله-یِ-حرکت برا یِ A رابطه یِ (5133) است:

$$\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} -\,\varepsilon \sum_{n\neq 0}(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\,\{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[(\check{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(t),\mathsf{A}]\}\,[\Theta_n(\vartheta)]\,[(\mathbf{D}\,\check{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](t). \tag{5133}$$

از این معادله نتیجه میشود

$$\mathsf{A}(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \mathsf{A}_i(t_0) + (\Delta\,\mathsf{A})(t). \tag{5162}$$

که،

$$(\Delta\,\mathsf{A})(t) = -\varepsilon \sum_{n\neq 0}(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\boldsymbol{\mathcal{Z}}^n(s)]\,\Theta_n[\vartheta(s)]. \tag{5163}$$

و،

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}^n(s) = \{\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n[(\check{\lambda}\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(s),\mathsf{A}(s)]\}\,[(\mathbf{D}\,\check{\lambda})\circ\mathsf{s}_\varepsilon](s). \tag{5164}$$

میخاهم نشان دهم طرفِ راستِ (5163)، در $(\varepsilon \to 0)$ صفر میشود، حتا اگر زمانِ تحول از مرتبه یِ ε^{-1} باشد. وقت ی زمانِ تحول از مرتبه یِ ε^{-1} است، خُدِ انتگرال-گیری یک ضریبِ ε^{-1} وارد میکند. این را با تعریفِ $(đ\,s)$ اعمال میکنم:

$$\mathrm{d}\,s = \varepsilon^{-1}\,đ\,s. \tag{5165}$$

که خُدِ $(đ\,s)$، نسبت به ε از مرتبه یِ صفر است، وقت یِ زمانِ تحول از مرتبه یِ ε^{-1} است. به این ترتیب، رابطه یِ (5163) را میشود چنین نوشت.

$$(\Delta\,\mathsf{A})(t) = -\sum_{n\neq 0}(2\,\pi\,\mathrm{i}\,n)\int_{t_0}^{t}(đ\,s)\,[\boldsymbol{\mathcal{Z}}^n(s)]\,\Theta_n[\vartheta(s)]. \tag{5166}$$

و میخاهم نشان دهم طرف ِ راست ِ (5166)، در $(\varepsilon \to 0)$ صفر میشود. رابطه یِ (5166) را، با استفاده از (5161)، میشود چنین هم نوشت.

$$(\Delta\,\mathsf{A})(t) \stackrel{\text{ns}}{=} -\sum_{n\neq 0}\int_{t_0}^{t}(\text{đ}\,s)\,[\mathbf{Z}^n(s)]\,\{\mathbf{D}\,[\Theta_n(\vartheta)]\}(s). \tag{5167}$$

که،

$$\mathbf{Z}^n \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{n\,\mathcal{Z}^n}{n\,\dot{\vartheta}}, \quad n\neq 0. \tag{5168}$$

رابطه یِ (5167) با انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ چنین میشود.

$$\begin{aligned}(\Delta\,\mathsf{A})(t) \stackrel{\text{ns}}{=} &-\varepsilon\sum_{n\neq 0}\Big\{[\mathbf{Z}^n(s)]\,[\Theta_n(\vartheta)](s)\Big\}_{s=t_0}^{s=t}\\ &+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{d}\,s)\,[\dot{\mathbf{Z}}^n(s)]\,[\Theta_n(\vartheta)](s).\end{aligned} \tag{5169}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست، در $(\varepsilon \to 0)$ صفر میشود. پس،

$$(\Delta\,\mathsf{A})(t) \stackrel{\text{ns}}{=} \int_{t_0}^{t}(\text{đ}\,s)\,[\dot{\mathbf{Z}}^n(s)]\,[\Theta_n(\vartheta)](s) + o(1). \tag{5170}$$

همچنین،

$$\mathbf{D}\,\mathsf{s}_\varepsilon = o(1). \tag{5171}$$

که نتیجه میدهد اگر $\mathfrak{X}$ تابع ی تند-تغییر نباشد،

$$\mathbf{D}\,(\mathfrak{X}\circ\mathsf{s}_\varepsilon) = o(1). \tag{5172}$$

از جمله،

$$\mathbf{D}\,(\text{ƛ}\circ\mathsf{s}_\varepsilon) = o(1). \tag{5173}$$

همچنین،

$$\dot{\mathsf{A}} \stackrel{\text{ns}}{=} o(1). \tag{5174}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{D}\,[\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon,\mathsf{A})]\stackrel{\text{ns}}{=}o(1). \tag{5175}$$

همچنین،

$$\mathbf{D}\,[(\mathbf{D}\,\lambda)\circ\mathsf{s}_\varepsilon]=o(1). \tag{5176}$$

پس،

$$\dot{\mathcal{Z}}^n\stackrel{\text{ns}}{=}o(1). \tag{5177}$$

سرانجام، از (5134) و (5173) و (5174) نتیجه میشود

$$\mathbf{D}\,\dot{\vartheta}\stackrel{\text{ns}}{=}o(1). \tag{5178}$$

و از (5160) و (5168) و (5178) نتیجه میشود

$$\dot{\mathbf{Z}}^n\stackrel{\text{ns}}{=}o(1). \tag{5179}$$

این را در (5170) میگذارم. نتیجه میشود

$$(\Delta\,\mathsf{A})(t)\stackrel{\text{ns}}{=}o(1). \tag{5180}$$

که یعنی،

$$|\varepsilon\,(t-t_0)|\lesssim 1\Rightarrow$$
$$\mathsf{A}(t)\stackrel{\text{ns}}{=}\mathsf{A}(t_0)+o(1). \tag{5181}$$

چیز ی که قبلَن برا یِ تحول ِ متغیر- ِ-کنش به دست آمده بود رابطه یِ (5136) است:

$$\mathsf{A}(t)\stackrel{\text{ns}}{=}\mathsf{A}(t_0)+o(1). \tag{5136}$$

ولی (5136) با این فرض به دست آمده بود که زمان ِ تحول بزرگ نیست. چیز ی که اینجا به دست آمده، رابطه یِ (5181)، این است که (5136) برقرار است، حتا اگر زمان ِ تحول بزرگ (از مرتبه یِ ε^{-1}) باشد. اگر سیستم (ِ با پارامتر ِ ثابت) انتگرال-پذیر باشد ولی اَبَرانتگرال-پذیر نباشد، وقت ی پارامتر کند-تغییر است متغیر- ِ-کنش ثابت میمانَد، حتا اگر زمان ِ تحول چنان بزرگ باشد که تغییر ِ پارامتر چشمگیر باشد.

دقیقتر این که اگر سیستم (ِ با پارامتر ِ ثابت) انتگرال-پذیر باشد ولی اَبَرانتگرال-پذیر نباشد، به ازا یِ تغییر ِ معین ِ پارامتر، اگر آهنگ ِ تغییر به صفر بگراید (یعنی پارامتر- ِکندی یِ ε به صفر بگراید) متغیر- ِ-کنش همچنان ثابت میمانَد:

$$|\Delta\,\lambda| \lesssim 1 \Rightarrow$$
$$\mathsf{A}(t) \overset{\text{ns}}{=} \mathsf{A}(t_0) + o(1). \tag{5182}$$

به هم ین خاطر به متغیر- ِ-کنش ناوردا یِ ایستاواری میگویند.

119 هَمیلتِنی با پارامتر ِکند-تغییر، و تحول ِ متغیر- ِ-زاویه

معادله-یِ-حرکت برا یِ ϑ رابطه یِ (5132) است:

$$\dot{\vartheta} \overset{\text{ns}}{=} \nu(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon,\mathsf{A}) + \varepsilon\,[\mathbf{Y}^n(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon,\mathsf{A})]\,[\Theta_n(\vartheta)]\,[(\mathbf{D}\,\lambda)\circ\mathsf{s}_\varepsilon]. \tag{5183}$$

که،

$$\nu(\lambda,\mathsf{A}) = \frac{\partial\,[\boldsymbol{\mathcal{H}}(\lambda,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}. \tag{5131}$$
$$\mathbf{Y}^n(\lambda,\mathsf{A}) = \frac{\partial\,[\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n(\lambda,\mathsf{A})]}{\partial\,\mathsf{A}}. \tag{5147}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda,\vartheta,\mathsf{A}) = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})(\lambda,q,\mathsf{A})\,. \tag{5126}$$

از رابطه یِ (5183) بر زمان انتگرال میگیرم:

$$\vartheta(t) \overset{\text{ns}}{=} \vartheta(t_0) + (\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)(t) + (\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta)(t). \tag{5184}$$

که،

$$(\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,s)\,\nu[(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon)(s),\mathsf{A}(s)]. \tag{5185}$$

$$(\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta)(t) = \varepsilon\int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,s)\,[\boldsymbol{\mathcal{W}}^n(s)]\,\Theta_n[\vartheta(s)]. \tag{5186}$$

و،

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}^n = [\mathbf{Y}^n(\lambda\circ\mathsf{s}_\varepsilon,\mathsf{A})]\,[(\mathbf{D}\,\lambda)\circ\mathsf{s}_\varepsilon]. \tag{5187}$$

رابطه یِ (5184) تحول ِ متغیر- ِ-زاویه را به شکل ِ مجموع ِ دُ جمله نشان میدهد. جمله یِ اول $(\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)$ است، که هم ان تغییر- ِ-زاویه ای ست که انتظار میرود در تحول ِ متغیر- ِ-زوایه وارد شود، البته با در-نظر-گرفتن ِ این که بسامد لزومَن مستقل-از-زمان نیست. به $(\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)$ زاویه یِ دینامیکی میگویند. جمله یِ دوم $(\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta)$ است، که یک تغییر ِ اضافی ست که در تحول ِ متغیر- ِ-زاویه وارد میشود، به این خاطر که پارامتر وابسته-به-زمان است. رفتار ِ $(\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta)$ را در حد ِ $(\varepsilon\to 0)$ بررسی میکنم. از (5186) دیده میشود اگر زمان ِ تحول بزرگ نباشد، $(\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta)$ در حد ِ $(\varepsilon\to 0)$ صفر میشود. اما وقت ی زمان ِ تحول بزرگ است، چنان که تغییر ِ پارامتر ِ تحول چشمگیر است، $(\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta)$ در حد ِ $(\varepsilon\to 0)$ صفر نمیشود: رابطه یِ (5186) را میشود چنین نوشت.

$$(\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} (đ\,s)\,[\boldsymbol{\mathcal{W}}^n(s)]\,\Theta_n[\vartheta(s)]. \tag{5188}$$

که،

$$\mathrm{d}\,s = \varepsilon^{-1}\,đ\,s. \tag{5165}$$

که خُد ِ $(đ\,s)$، نسبت به ε از مرتبه یِ صفر است، وقت یِ زمان ِ تحول از مرتبه یِ ε^{-1} است.

میخاهم نشان دهم در طرف ِ راست ِ رابطه یِ (5188)، در $(\varepsilon\to 0)$ همه یِ جملات صفر میشوند جز یک جمله. در طرف ِ راست ِ این رابطه، جمله یِ $(n=0)$ را از بقیه یِ جملِها جدا میکنم:

$$\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta = \Delta_{\mathrm{z}}\,\vartheta + \Delta_{\mathrm{r}}\,\vartheta. \tag{5189}$$

که،

$$(\Delta_{\mathrm{z}}\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} (đ\,s)\,\boldsymbol{\mathcal{W}}^{0}(s). \tag{5190}$$

$$(\Delta_{\mathrm{r}}\,\vartheta)(t) = \sum_{n\neq 0}\int_{t_0}^{t} (đ\,s)\,[\boldsymbol{\mathcal{W}}^{n}(s)]\,\Theta_{n}[\vartheta(s)]. \tag{5191}$$

گیرم سیستم اَبَرانتگرال-پذیر نیست. در این صورت،

$$n \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Theta_{n}(\vartheta) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\mathbf{D}\,[\Theta_{n}(\vartheta)]}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\dot{\vartheta}}. \tag{5161}$$

و رابطه یِ (5191) را میشود چنین نوشت.

$$(\Delta_{\mathrm{r}}\,\vartheta)(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \sum_{n\neq 0}\int_{t_0}^{t} (đ\,s)\,[\mathbf{W}^{n}(s)]\,\{\mathbf{D}\,[\Theta_{n}(\vartheta)]\}(s). \tag{5192}$$

که،

$$\mathbf{W}^{n} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \frac{\boldsymbol{\mathcal{W}}^{n}}{2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,\dot{\vartheta}}, \quad n \neq 0. \tag{5193}$$

رابطه یِ (5192) با انتگرال-گیری یِ جزئ-به-جزئ چنین میشود.

$$(\Delta_{\mathrm{r}}\,\vartheta)(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} \varepsilon \sum_{n\neq 0}\Big\{[\mathbf{W}^{i\,n}(s)]\,[\Theta_{n}(\vartheta)](s)\Big\}_{s=t_0}^{s=t}$$
$$- \int_{t_0}^{t} (đ\,s)\,[\dot{\mathbf{W}}^{n}(s)]\,[\Theta_{n}(\vartheta)](s). \tag{5194}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست، در $(\varepsilon \to 0)$ صفر میشود. پس،

$$(\Delta_{\mathrm{r}}\,\vartheta)(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} -\int_{t_0}^{t} (đ\,s)\,[\dot{\mathbf{W}}^{n}(s)]\,[\Theta_{n}(\vartheta)](s) + o(1). \tag{5195}$$

با استدلال ی مشابه با آن چه در فصل ِ پیش آمد، معلوم میشود

$$\dot{\mathbf{W}}^{n} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} o(1). \tag{5196}$$

این را در (5195) میگذارم. نتیجه میشود

$$(\Delta_{\mathrm{r}}\,\vartheta)(t) \overset{\mathrm{ns}}{=} o(1). \tag{5197}$$

پس،

$$\Delta_{\mathrm{e}}\,\vartheta \overset{\mathrm{ns}}{=} \Delta_{\mathrm{z}}\,\vartheta + o(1). \tag{5198}$$

آن چه میمانَد محاسبه یِ $(\Delta_{\mathrm{z}}\,\vartheta)$ است. دیده میشود

$$(\Delta_{\mathrm{z}}\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} (\text{đ}\,s)\,\{\mathbf{Y}^{0}[(\lambda\!\!\!^{-} \circ \mathsf{s}_{\varepsilon})(s), \mathsf{A}(s)]\}\,[(\mathbf{D}\,\lambda\!\!\!^{-}) \circ \mathsf{s}_{\varepsilon}](s). \tag{5199}$$

و بر حسب ِ خُد ِ λ،

$$(\Delta_{\mathrm{z}}\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{d}\,s)\,\{\mathbf{Y}^{0}[\lambda(s), \mathsf{A}(s)]\}\,(\mathbf{D}\,\lambda)(s). \tag{5200}$$

اما، A در حد ِ $(\varepsilon \to 0)$ ثابت میمانَد، حتا اگر $|t - t_0|$ با ε^{-1} قابل- ِ-مقایسه باشد؛ که یعنی A در حد ِ $(\varepsilon \to 0)$ ثابت میمانَد، حتا اگر تغییر ِ پارامتر چشمگیر باشد:

$$\begin{aligned} &|\Delta\,\lambda| \lesssim 1 \Rightarrow \\ &\mathsf{A}(t) \overset{\mathrm{ns}}{=} \mathsf{A}(t_0) + o(1). \end{aligned} \tag{5182}$$

پس

$$\Delta_{\mathrm{z}}\,\vartheta \overset{\mathrm{ns}}{=} \Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta + o(1). \tag{5201}$$

که،

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} (\text{đ}\,s)\,\{\mathbf{Y}^{0}[(\lambda\!\!\!^{-} \circ \mathsf{s}_{\varepsilon})(s), \mathsf{A}(t_0)]\}\,[(\mathbf{D}\,\lambda\!\!\!^{-}) \circ \mathsf{s}_{\varepsilon}](s). \tag{5202}$$

و بر حسب ِ خُد ِ λ،

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,s\,\{\mathbf{Y}^{0}[\lambda(s), \mathsf{A}(t_0)]\}\,(\mathbf{D}\,\lambda)(s). \tag{5203}$$

به این شکل، انتگرال-ده تابع ی از فقط پارامتر است ضرب در سرعت ِ پارامتر. پس طرف ِ راست یک انتگرال-بر-خم (در فضا یِ پارامتر) است. مسیر ِ پارامتر را با $\mathcal{C}$ نشان میدهم. رابطه یِ (5203) چنین میشود.

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) = \int_{\mathcal{C}} \{\mathbf{Y}^{\mathcal{O}}[\lambda, \mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathrm{d}\,\lambda. \tag{5204}$$

یا،

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) = \int_{\mathcal{C}} \left\{ \int (\mathrm{d}\,\vartheta)\,\mathbf{Y}[\lambda, \vartheta, \mathsf{A}(t_0)] \right\} \mathrm{d}\,\lambda. \tag{5205}$$

$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)$ یک انتگرال بر یک خم در فضا یِ پارامتر است. مقدار ِ این انتگرال به فقط مسیر در فضا یِ پارامتر (و البته متغیر- ِ-کنش) بستگی دارد. از جمله مستقل از آهنگ ِ تغییر ِ پارامتر است. البته در حالت ِ کلی این انتگرال وابسته به مسیر ِ انتگرال-گیری ست، نَ فقط ابتدا و انتها یِ مسیر. از جمله، اگر ابتدا و انتها یِ مسیر ِ پارامتر یکسان باشد (مسیر ِ پارامتر یک حلقه باشد) هم، $(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)$ لزومَن صفر نیست. به $(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)$ زاویه یِ هندسی میگویند.

خلاصه، اگر سیستم (ِ با پارامتر ِ ثابت) انتگرال-پذیر باشد ولی اَبَرانتگرال-پذیر نباشد، وقت ی پارامتر کند-تغییر است ولی زمان ِ تحول بزرگ (از مرتبه یِ ε^{-1}) است، تحول ِ متغیر- ِ-زاویه مجموع ِ دُ جمله است: زاویه یِ دینامیکی $(\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)$ و زاویه یِ هندسی $(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)$:

$$\begin{aligned} &|\varepsilon\,(t-t_0)| \lesssim 1 \Rightarrow \\ &\qquad \vartheta(t) \overset{\mathrm{ns}}{=} \vartheta(t_0) + (\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)(t) + (\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) + o(1). \end{aligned} \tag{5206}$$

دقیقتر این که اگر سیستم (ِ با پارامتر ِ ثابت) انتگرال-پذیر باشد ولی اَبَرانتگرال-پذیر نباشد، به ازا یِ تغییر ِ معین ِ پارامتر، اگر آهنگ ِ تغییر به صفر بگراید (یعنی پارامتر- ِ کندی یِ ε به صفر بگراید)، تحول ِ متغیر- ِ-زاویه مجموع ِ دُ جمله است: زاویه یِ دینامیکی $(\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)$ و زاویه یِ هندسی $(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)$:

$$\begin{aligned} &|\Delta\,\lambda| \lesssim 1 \Rightarrow \\ &\qquad \vartheta(t) \overset{\mathrm{ns}}{=} \vartheta(t_0) + (\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)(t) + (\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) + o(1). \end{aligned} \tag{5207}$$

زاویه یِ دینامیکی $(\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)$ هم ان تغییر- ِ-زاویه ای ست که انتظار میرود در تحول ِ متغیر- ِ-زاویه وارد شود، البته با در-نظر-گرفتن ِ این که بسامد لزومَن مستقل-از-زمان نیست. زاویه یِ هندسی $(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)$

یک تغییرِ اضافی ست که در تحولِ متغیر-ِ-زاویه وارد میشود، به این خاطر که پارامتر وابسته-به-زمان است. زاویه یِ هندسی مستقل از آهنگِ تغییرِ پارامتر است.

زاویه یِ دینامیکی انتگرالِ زمانی یِ بسامد است، و بسامد مشتقِ $\mathcal{H}$ (هَمیلتِنی یِ پارامتری، متناظر با مختصاتِ قدیم) نسبت به متغیر-ِ-کنش است. $\mathcal{H}$ معلوم است (یکتا ست). پس بسامد یکتا ست. به این ترتیب زاویه یِ دینامیکی یکتا ست.

اما برا یِ محاسبه یِ زاویه یِ هندسی تابعی-یِ-مولد لازم است. تابعی-یِ-مولد یکتا نیست: میشود به تابعی-یِ-مولد یک تابعی یِ دلبخاه از پارامتر و متغیر-ِ-کنش افزود، بی آن که رابطه یِ متغیر-ِ-کنش با مختصاتِ قدیمِ فضا-یِ-فاز عوض شود:

$$\tilde{\Upsilon} \to \tilde{\Upsilon}_{\text{۱}}. \tag{5208}$$

$$\tilde{\Upsilon}_{\text{۱}}(t,q,\mathsf{A}) = \tilde{\Upsilon}(t,q,\mathsf{A}) + \zeta[\lambda(t),\mathsf{A}]. \tag{5209}$$

یا،

$$\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} \to \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\text{۱}}. \tag{5210}$$

$$\tilde{\Upsilon}_{\text{۱}}(t,q,\mathsf{A}) = \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\text{۱}}[\lambda(t),q,\mathsf{A}]. \tag{5211}$$

و بر حسبِ $\check{\lambda}$، به جا یِ λ:

$$\tilde{\Upsilon}_{\text{۱}}(t,q,\mathsf{A}) = \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\text{۱}}[(\check{\lambda}\circ\mathsf{s}_{\varepsilon})(t),q,\mathsf{A}]. \tag{5212}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\text{۱}}(\lambda,q,\mathsf{A}) = \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}(\lambda,q,\mathsf{A}) + \zeta(\lambda,\mathsf{A}). \tag{5213}$$

البته با تبدیلِ $\tilde{\Upsilon}$ به $\tilde{\Upsilon}_{\text{۱}}$ (یا $\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}$ به $\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\text{۱}}$)، متغیر-ِ-زاویه هم عوض میشود. ϑ به $\vartheta_{\text{۱}}$ تبدیل میشود:

$$\vartheta = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}})(\lambda,q,\mathsf{A}). \tag{5214}$$

$$\vartheta_{\text{۱}} = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\text{۱}})(\lambda,q,\mathsf{A}). \tag{5215}$$

به این ترتیب،

$$\vartheta_{\text{۱}} = \vartheta + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\zeta)(\lambda,\mathsf{A}). \tag{5216}$$

$\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ با استفاده از $\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}$ تعریف شد. به شکل ی مشابه، $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\text{۱}}$ را با استفاده از $\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\text{۱}}$ تعریف میکنم:

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\text{۱}}(\lambda, \vartheta_{\text{۱}}, \mathsf{A}) = (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_{\text{۱}})(\lambda, q, \mathsf{A}). \tag{5217}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\text{۱}}(\lambda, \vartheta_{\text{۱}}, \mathsf{A}) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}(\lambda, \vartheta, \mathsf{A}) + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \zeta)(\lambda, \mathsf{A}). \tag{5218}$$

از جمله،

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\text{۱}}^{0}(\lambda, \mathsf{A}) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{0}(\lambda, \mathsf{A}) + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \zeta)(\lambda, \mathsf{A}). \tag{5219}$$

مشتق ِ $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\text{۱}}{}^{n}$ نسبت به A را با $\mathbf{Y}_{\text{۱}}{}^{n}$، و مشتق ِ ζ نسبت به A را با $\mathbf{z}$ نشان میدهم:

$$\mathbf{Y}_{\text{۱}}{}^{n}(\lambda, \mathsf{A}) = \frac{\partial\, [\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{\text{۱}}{}^{n}(\lambda, \mathsf{A})]}{\partial\, \mathsf{A}}. \tag{5220}$$

$$\mathbf{z}(\lambda, \mathsf{A}) = \frac{\partial\, [\zeta(\lambda, \mathsf{A})]}{\partial\, \mathsf{A}}. \tag{5221}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{Y}_{\text{۱}}{}^{0}(\lambda, \mathsf{A}) = \mathbf{Y}^{0}(\lambda, \mathsf{A}) + (\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mathbf{z})(\lambda, \mathsf{A}). \tag{5222}$$

همچنین، از (5216) و (5221) نتیجه میشود

$$\vartheta_{\text{۱}} = \vartheta + \mathbf{z}(\lambda, \mathsf{A}). \tag{5223}$$

مانسته یِ (5204) برا یِ $\vartheta_{\text{۱}}$ چنین میشود.

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\, \vartheta_{\text{۱}})(t) = \int_{\mathcal{C}} \{\mathbf{Y}_{\text{۱}}{}^{i\,0}[\lambda, \mathsf{A}(t_0)]\}\, \mathrm{d}\, \lambda. \tag{5224}$$

به این ترتیب،

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\, \vartheta_{\text{۱}})(t) = (\Delta_{\mathrm{g}}\, \vartheta)(t) + \int_{\mathcal{C}} \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mathbf{z})[\lambda, \mathsf{A}(t_0)]\}\, \mathrm{d}\, \lambda. \tag{5225}$$

انتگرال-ده در انتگرال-بر-خم ِ طرف- ِ-راست، مشتق ِ یک تابع است (یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ دقیق است)، پس انتگرال برابر است با مقدار ِ آن تابع در ته ِ خم منها یِ مقدار ِ آن تابع در سر ِ خم. به این ترتیب،

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta_{\text{۱}})(t) = (\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) + \mathbf{z}[\lambda(t), \mathsf{A}(t_0)] - \mathbf{z}[\lambda(t_0), \mathsf{A}(t_0)]. \tag{5226}$$

البته این با (5223) هم سازگار است، چنان که انتظار میرود. از (5223) نتیجه میشود

$$\vartheta_{\text{۱}}(t) = \vartheta(t) + \mathbf{z}[\lambda(t), \mathsf{A}(t)]. \tag{5227}$$

و البته،

$$\vartheta_{\text{۱}}(t_0) = \vartheta(t_0) + \mathbf{z}[\lambda(t_0), \mathsf{A}(t_0)]. \tag{5228}$$

به این ترتیب،

$$\vartheta_{\text{۱}}(t) - \vartheta_{\text{۱}}(t_0) = \vartheta(t) - \vartheta(t_0) + \mathbf{z}[\lambda(t), \mathsf{A}(t)] - \mathbf{z}[\lambda(t_0), \mathsf{A}(t_0)]. \tag{5229}$$

از (5182) دیده میشود $\mathsf{A}(t)$ در $(\varepsilon \to 0)$ هم ان $\mathsf{A}(t_0)$ است. پس،

$$\begin{aligned}\vartheta_{\text{۱}}(t) - \vartheta_{\text{۱}}(t_0) \overset{\mathrm{ns}}{=} \vartheta(t) - \vartheta(t_0) + \mathbf{z}[\lambda(t), \mathsf{A}(t_0)] - \mathbf{z}[\lambda(t_0), \mathsf{A}(t_0)]\\ + o(1).\end{aligned} \tag{5230}$$

اما،

$$\vartheta(t) - \vartheta(t_0) \overset{\mathrm{ns}}{=} (\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)(t) + (\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) + o(1). \tag{5231}$$

$$\vartheta_{\text{۱}}(t) - \vartheta_{\text{۱}}(t_0) \overset{\mathrm{ns}}{=} (\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta_{\text{۱}})(t) + (\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta_{\text{۱}})(t) + o(1). \tag{5232}$$

فاز ِ دینامیکی هم یکتا ست، که یعنی برا یِ ϑ و $\vartheta_{\text{۱}}$ یکسان است:

$$(\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta_{\text{۱}})(t) = (\Delta_{\mathrm{d}}\,\vartheta)(t). \tag{5233}$$

پس،

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta_{\text{۱}})(t) \stackrel{\mathrm{ns}}{=} (\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) + \mathbf{z}[\lambda(t), \mathsf{A}(t_0)] - \mathbf{z}[\lambda(t_0), \mathsf{A}(t_0)] + o(1). \tag{5234}$$

که با (5226) سازگار است.

معلوم شد زاویه یِ هندسی یکتا نیست: به انتخاب ِ متغیر- ِ-زاویه (بر حسب ِ پارامتر) بستگی دارد. اما اگر پارامتر از مقدار ِ اولیه اَ ش تغییر کند و به مقدار ِ اولیه اَ ش برگردد، یعنی مسیر در فضا-یِ-پارامتر یک حلقه (خم ِ بسته) باشد، نایکتایی یِ زاویه-یِ-هندسی از بین میرود: زاویه یِ هندسی یکتا میشود. گیرم مسیر ِ پارامتر حلقه یِ $\mathcal{L}$ است. زمانها یِ متناظر با ابتدا و انتها یِ این حلقه را با، به ترتیب، t_0 و t_{f} نشان میدهم. دیده میشود

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t_{\mathrm{f}}) = \oint_{\mathcal{L}} \{\mathbf{Y}^{\mathit{O}}[\lambda, \mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathrm{d}\,\lambda. \tag{5235}$$

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta_{\text{۱}})(t_{\mathrm{f}}) = \oint_{\mathcal{L}} \{\mathbf{Y}_{\text{۱}}{}^{\mathit{O}}[\lambda, \mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathrm{d}\,\lambda. \tag{5236}$$

به این ترتیب،

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta_{\text{۱}})(t_{\mathrm{f}}) = (\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t_{\mathrm{f}}) + \oint_{\mathcal{L}} \{(\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathbf{z})[\lambda, \mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathrm{d}\,\lambda. \tag{5237}$$

البته،

$$\oint_{\mathcal{L}} \{(\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathbf{z})[\lambda, \mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathrm{d}\,\lambda = \mathbf{z}[\lambda(t_{\mathrm{f}}), \mathsf{A}(t_0)] - \mathbf{z}[\lambda(t_0), \mathsf{A}(t_0)]. \tag{5238}$$

و چون $\mathcal{L}$ حلقه است،

$$\lambda(t_{\mathrm{f}}) = \lambda(t_0). \tag{5239}$$

پس،

$$\oint_{\mathcal{L}} \{(\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathbf{z})[\lambda, \mathsf{A}(t_0)]\}\,\mathrm{d}\,\lambda = 0. \tag{5240}$$

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta_{\text{۱}})(t_{\mathrm{f}}) = (\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t_{\mathrm{f}}). \tag{5241}$$

یعنی در این حالت، که مسیر ِ پارامتر یک حلقه (خم ِ بسته) است، زاویه یِ هندسی یکتا ست (به انتخاب ِ متغیر- ِ-زاویه برحسب ِ پارامتر بستگی ندارد).

زاویه یِ هندسی مستقل از آهنگ ِ تغییر ِ پارامتر است. این را میشود به شکل ی صریح نمایش داد (که در آن t ظاهر نشود). فرم- ِ-دیفرانسیلها یِ $\mathbf{y}$ و $\mathbf{y}_1$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{y}(\lambda,\mathsf{A}) = [\mathbf{Y}^{0}(\lambda,\mathsf{A})]\,\mathbf{d}\,\lambda. \tag{5242}$$

$$\mathbf{y}_1(\lambda,\mathsf{A}) = [\mathbf{Y}_1{}^{0}(\lambda,\mathsf{A})]\,\mathbf{d}\,\lambda. \tag{5243}$$

تابعیها یِ $\mathbf{ge}$ و $\mathbf{ge}_1$ از خم ِ $\mathcal{C}$ (در فضا-یِ-پارامتر) و A را هم چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{ge}(\mathcal{C},\mathsf{A}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{y}(\cdot,\mathsf{A}). \tag{5244}$$

$$\mathbf{ge}_1(\mathcal{C},\mathsf{A}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{y}_1(\cdot,\mathsf{A}). \tag{5245}$$

دیده میشود برا یِ خم ِ $\mathcal{C}$ در فضا-یِ-پارامتر، که ابتدا و انتها یِ آن متناظر با زمانها یِ t_0 و t است،

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta)(t) = \mathbf{ge}[\mathcal{C},\mathsf{A}(t_0)]. \tag{5246}$$

$$(\Delta_{\mathrm{g}}\,\vartheta_1)(t) = \mathbf{ge}_1[\mathcal{C},\mathsf{A}(t_0)]. \tag{5247}$$

دیده میشود

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y} + \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\mathbf{z}. \tag{5248}$$

$$\mathbf{ge}_1 = \mathbf{ge} + \int \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\mathbf{z}. \tag{5249}$$

به این ترتیب، برا یِ خم ِ $\mathcal{C}$ در فضا-یِ-پارامتر، که ابتدا و انتها یِ آن λ_0 و λ است،

$$\mathbf{ge}_1(\mathcal{C},\mathsf{A}) = \mathbf{ge}(\mathcal{C},\mathsf{A}) + \mathbf{z}(\lambda,\mathsf{A}) - \mathbf{z}(\lambda_0,\mathsf{A}). \tag{5250}$$

این هم ان (5226) است.

$\mathbf{ge}$ و $\mathbf{ge}_1$ متناظر با یک حلقه در فضا-یِ-پارامتر را با، به ترتیب، $\mathbf{cge}$ و $\mathbf{cge}_1$ نشان میدهم. از رابطه یِ بالا نتیجه میشود

$$\mathbf{cge}_1 = \mathbf{cge} + \oint \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\mathbf{z}. \tag{5251}$$

انتگرالِ هر یک-فرم-ِ-دیفرانسیلِ دقیق بر هر حلقه صفر است. پس،

$$\oint \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\mathbf{z} = 0. \tag{5252}$$

پس،

$$\mathbf{cge}_{\backslash} = \mathbf{cge}. \tag{5253}$$

این هم ان (5241) است.

به یک-فرم-ِ-دیفرانسیلِ $\mathbf{y}$ پتانسیلِ هندسی میگویم. زاویه یِ هندسی انتگرالِ پتانسیلِ هندسی بر خم ی ست که پارامتر میپیماید. پتانسیلِ هندسی دقیق نیست. به هم ین خاطر زاویه یِ تابعِ خم ی ست که پارامتر میپیماید (نَ فقط ابتدا و انتها یِ آن خم). از جمله، زاویه یِ هندسی وقت ی مسیرِ پارامتر یک حلقه (خمِ بسته) باشد هم لزومَن صفر نیست. پتانسیلِ هندسی یکتا نیست و به تعریفِ زاویه (بستگی یَ ش به پارامتر) وابسته است. با تغییرِ تعریفِ زاویه بر حسبِ پارامتر، پتانسیلِ هندسی هم تغییر میکند، چنان که به آن یک یک-فرم-ِ-دیفرانسیلِ دقیق (مشتقِ یک صفر-فرم-ِ-دیفرانسیل، یعنی مشتقِ یک تابع) اضافه میشود. به این تغییر یک تبدیلِ پیمانِئی میگویم. این تبدیل-ِ-پیمانِئی یِ پتانسیلِ هندسی، به تغییرِ زاویه یِ هندسی مینجامد. اما وقت ی مسیرِ پارامتر بسته است، انتگرالِ تغییرِ پتانسیلِ هندسی صفر است، چون انتگرالِ هر یک-فرم-ِ-دیفرانسیلِ دقیق بر هر حلقه صفر است. پس اگر مسیرِ پارامتر بسته باشد، زاویه یِ هندسی یکتا ست.

زاویه یِ دینامیکی یکتا ست، با وجود ی که خُدِ زاویه یکتا نیست.

15

پیوست

120 چند مرجع

در این بخش، [0] یعنی هم ین کتاب.

[1] یک کتاب ِ نَ-چندان-استاندارد ِ جبر ِ خطی ست. در نمادگذاری یِ [0] قراردادها یِ [1] هم به کار رفته.

[2] یک کتاب ِ نَ-چندان-استاندارد ِ هندسه است. در نمادگذاری یِ [0] قراردادها یِ [2] هم به کار رفته.

[3] یک کتاب ِ درسی یِ معادلات ِ دیفرانسیل است.

[4] یک کتاب ِ درسی یِ آنالیز ِ ریاضی ست. از جمله شامل ِ قضیِها یِ تابع- ِ-واورن و رتبه است.

[5] چنان که از اسم َش بر میئاید، هندسه و تپلژی برا یِ فیزیک-پیشِها ست.

[6] یک کتاب ِ درسی یِ مکانیک است.

[7] یک کتاب ِ فشرده یِ مکانیک است، اولین کتاب از دُره یِ لانداؤ و لیفشیتز.

[8] یک کتاب ِ مکانیک با تکیه بر زبان ِ هندسه است.

[9] هم یک کتاب ِ مکانیک است که در آن زبان ِ هندسه هم به کار رفته.

[10] یک کتاب ِ مکانیک با زبانی ریاضیتر (نسبت به کتابها یِ معمول ِ مکانیک) است.

[1] محمد خرمی؛ «جبر ِ خطی»، ویراست ِ سوم (2016/05/10) XB-001

[2] محمد خرمی؛ «هندسه» (2016/08/20) XB-002

[3] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Douglas B. Meade; “Elementary differential equations and boundary value problems”, 11th edition (John Wiley & Sons, 2017)

[4] Walter Rudin; “Principles of mathematical analysis”, 3rd edition (McGraw-Hill, 1984)

[5] Mikio Nakahara; “Geometry, topology and physics”, 2nd edition (Institute of Physics Publishing, 2003)

[6] Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko ; “Classical mechanics”, 3rd edition (Addison-Wesley, 2002)

[7] Lev Davidovich Landau, Evgeni Mikhailovich Lifshitz; “Mechanics (volume 1 of course of theoretical physics)”, 3rd edition (Reed Educational and Professional Publishing Ltd, 2000)

[8] S. Neil Rasband; “Dynamics”, (John Wiley & Sons, 1983)

[9] Florian Scheck; “Mechanics, from Newton’s laws to deterministic chaos”, 5th edition (Springer, 2010)

[10] Vladimir Igorevich Arnold; “Mathematical methods for classical mechanics”, 2nd edition (Springer, 1989)

121 اسمها یِ خاص

اُیلِر (ریاضی- پیشه- فیزیک- پیشه یِ سویسی)

لِئُنارد اُیلِر (1707 تا 1783) Leonhard Euler

اَینشْتَین (فیزیک- پیشه یِ سویسی- آلمانی- امریکایی)

آلبِرت اَینشْتَین (1879 تا 1955) Albert Einstein

پُوَسُن (ریاضی- پیشه- فیزیک- پیشه یِ فرانسوی)

سیمِئُن دُنی پُوَسُن (1781 تا 1840) Siméon Denis Poisson

پیکَر (ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)

اِمیل پیکَر (1856 تا 1840) Émile Picard

دَربو (ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)

ژان- گَستُن دَربو (1842 تا 1917) Jean-Gaston Darboux

دِکَرت (ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)

رُنه دِکَرت (1596 تا 1650) René Descartes

دیرَک (فیزیک- پیشه یِ بریتانیایی)

پُل اَدرین مِریس دیرَک (1902 تا 1984) Paul Adrien Maurice Dirac

شْمیت (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)

اِرهارد شْمیت (1876 تا 1959) Erhard Schmidt

فْرُنه (ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)

ژان فْرِدِریک فْرُنه (1816 تا 1900) Jean Frédéric Frenet

فوریه (ریاضی- پیشه- فیزیک- پیشه یِ فرانسوی)

ژان- بَتیست ژُزِف فوریه (1768 تا 1830) Jean-Baptiste Joseph Fourier

کْرُنِکِر (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)
لِئُپُلد کْرُنِکِر (1823 تا 1891) Leopold Kronecker

کْلِرُ (ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)
اَلِکسی کْلُد کْلِرُ (1713 تا 1765) Alexis Claude Clairaut

گالیلِئُ (فیزیک- پیشه یِ ایتالیایی)
گالیلِئُ گالیلِئی (1564 تا 1642) Galileo Galilei

گْرام (ریاضی- پیشه یِ دانمارکی)
یُرگِن پِدِرسِن گْرام (1850 تا 1916) Jørgen Pedersen Gram

لَپلَس (ریاضی- پیشه- فیزیک- پیشه یِ فرانسوی)
پیِر- سیمُن دُ لَپلَس (1749 تا 1827) Pierre-Simon de Laplace

لُژاندر (ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)
اَدریان- مَری لُژاندر (1752 تا 1833) Adrien-Marie Legendre

لَگرانژ (ریاضی- پیشه- فیزیک- پیشه یِ ایتالیایی- فرانسوی)
ژُزِف- لویی لَگرانژ (1736 تا 1813) Joseph-Louis Lagrange

لِوی- چیویتا (ریاضی- پیشه یِ ایتالیایی)
تولیُ لِوی- چیویتا (1873 تا 1941) Tullio Levi-Civita

لی (ریاضی- پیشه یِ نروژی)
ماریوس سُفوس لی (1842 تا 1899) Marius Sophus Lie

لَیبنیتس (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)
گُتفرید ویلهِلم لَیبنیتس (1646 تا 1716) Gottfried Wilhelm Leibniz

لیوویل (فیزیک- پیشه- ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)
ژُزِف لیوویل (1809 تا 1882) Joseph Liouville

نُتِر (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)
آمالی اِمی نُتِر (1882 تا 1935) Amalie Emmy Noether

نیوتُن (فیزیک-پیشه-ریاضی-پیشه یِ بریتانیایی)

آیزاک نیوتُن (1642 تا 1727) Isaac Newton

هَمیلتَن (ریاضی-پیشه-فیزیک-پیشه یِ ایرلندی)

ویلیام روؤان هَمیلتِن (1805 تا 1855) William owan Hamilton

یاکُبی (ریاضی-پیشه یِ آلمانی)

کارل گوستاو یاکُب یاکُبی (1804 تا 1851) Carl Gustav Jacob Jacobi

122 واژه-نامه یِ فارسی به انگلیسی

◎ یعنی واژه یِ انگلیسی من-دراوردی ست.

آرمانی	ideal
آزاد	free
آزادی	freedom, arbitrariness
آفین	affine
آکسیم	axiom
آهنگ	rate
آینده	future
اَبَر-	super-
اتحاد	identity
اثبات	proof
اجتماع	union
اختلال	perturbative
ادغام	contraction
استقرا	induction
استقرایی	inductive, inductively

استاندارد	standard
استوانه	cylinder
اسکالر	scalar
اشتراک	intersection
اضافی	additional
اعمال-شده	applied
افراز	partition
افقی	horizontal
افکنش	projection
افکنده	projected
الکتریکی	electric
انتقال	translation
انتقال-ِ-زمان ِ جامع	comprehensive time translation ◎
انتقال-یافته	translated
انتگرال	integral
انتگرال-پذیر	integrable
انتگرال-پذیری	integrability
اندازه	measure
انرژی	energy
اولیه	initial
ایستا	static
ایستاواری	quasi-statical ◎, adiabatic
اُیلِر	Euler
اَینشتَین	Einstein

بازپارامترش	reparametrization
بار	charge
باردار	charged
باز	open
بازتابی	reflexive
بازگشتی	recursive
بازه	interval
بخش- ِ-صحیح	integer part
بدیهی	trivial
بدیهیگر	trivialization
برابری	equality
بردار	vector
برداری	vector
برچسب	label
بر-لاک	on-the-shell
برونی	exterior
برهمکنش	interaction
بسامد	frequency
بسته	closed
بسط	expansion
بُعد	dimension
-بُعدی	-dimensional
بلند-مدت	long-time, long-term
بی-سمت	non-oriented ⊚
بیرون- ِ-لاک	off-the-shell

بیشینه	maximun
بینهایت	infinite
پادتقارن	antisymmetry
پادمتقارن	antisymmetric
پادمشتق	antiderivative
پارامتر	parameter
پارامترش	parametrization
پارِئی	partial
پاره-خط	line segment
پایستار	conservative
پایه	basis
پُوَسُن	Poisson
پُوَسُنی	involutive
پتانسیل	potential
پسار	pullback
پوچ	null
پوش	envelope
پوشا	onto, surjective
پهنه	span
پیچش	torsion
پیشران	pushforward
پیکَر	Picard
پیکربندی	configuration
پیمانِئی	gauge

پیمانه	gauge
پیوستگی	continuity
پیوسته	continuous
تابع	function
تابعی	functional
تار	fiber
تانسر	tensor
تانسری	tensor
تبدیل	transformation
تپلژی	topology
تپلژیکی	topologically
تحدید	restriction
تحول	evolution
تخت	flat
ترانهاده	transpose
ترایا	transitive
ترکیب	combination
تصویر	image
تعدادِ اعضا	cardinal
تعمیم-یافته	generalized
تغییر	change
تقارن	symmetry
تقاطع	crossing
تکانه	momentum

تکِئی	piecewise
تکین	singular
تناظر	correspondence
تند-تغییر	rapidly-varying
توان	power
توانی	power
تهی	empty
ثابت	constant
جا-به-جاگر	commutator
جایگشت	permutation
جبر	algebra
جبری	algebraic
جدا-از-هم	disjoint
جداشدنی	separable
جرم	mass
جریان	current
جزئ-به-جزئ	by parts
جمع-بندی	summation
جمعی	additive
جنبشی	kinetic
جهان-خط	world-line
جهانی	universal

چارچوب	frame
چگالی	density
چنبره	torus
چند-ذرِئی	multiple-particle
حاصل-ِ-جمع	sum
حاصل-ِ-ضرب	product
حال	present
حالت	statet
حجم	volume
حد	limit
حرکت	motion
حسابان	calculus
حقیقی	real
حکم	statement
حلقه	loop
خارجی	external
خازن	capacitor
خانواده	family
خُد-	self-
خُد-گردان	autonomous
خُش-تعریف	well-defined
خط	line
خطی	linear

خطی- مستقل	linearly-independent
خطی- وابسته	linearly-dependent
خم	curve
خمش	curvature
خمینه	manifold
خمینه- یِ- پایه	base manifold
داخلی	internal
دامنه	domain
دایره	circle
دترمینان	determinant
دُرِئی	periodic
دَربو	Darboux
درجه	degree
درجه- یِ- آزادی	degree-of-freedom
درون	interior
درونی	inner
دُره	period
دستیدِگی	handedness ◎
دی- طول	di-length ◎
دفاع	apology
دقیق	exact
دِکَرت	Descartes
دِکَرتی	Cartesian
دُگان	dual

دُگانی	duality
دلبخاه	arbitrary
دیرَک	Dirac
دیفرانسیل	differential
دینامیک	dynamics
دینامیکی	dynamical
دیورژانس	divergence
ذره	particle
رابطه	relation
راست-دست	right-handed ◎
رئس	vertex
رتبه	rank
رده	class
رسانا	conductor
رویداد	event
زاویه	angle
زاویِئی	angular
زُج	even
زمان	time
زمانی	time, temporal
زنجیرِئی	chain
زیر-	sub-

ژئُدزیک	geodesic
ساختار	structure
سازگار	compatible, consistent
ساعت	clock
ستون	column
سراسری	global
سرعت	velocity
سری	series
سطح	surface
سطر	row
سمت-پذیر	orientable
سمت-دار	oriented ◎
سنجش	measurement
سنجش-پذیر	measurable
سو	direction
سویی	directional
سیستم	system
سینماتیک	kinematics
شاخص	index
شارش	flow
شبکه	lattice
شبه-ِ-	pseudo-
شرط	condition

شتاب	acceleration
شعاع	radius
شمارنده	divisor
شْمیت	Schmidt
صریح	explicit
صعودی	increasing
صفحه	plane
صفر	zero
ضرب	product
ضربی	multiplicative
ضریب	multiplier
ضلع	side
ضمنی	implicit
طبیعی	natural
طول	length
عدد	number
عدد ِ صحیح	integer
عضو	member
عرض-از-مبدئ	function-intercept ◎, offset ◎
عکس‌العمل	reaction
علامت	sign, signal

عمل	action, operation
عملگر	operator
عمود	normal, perpendicular
عنصر	element
فاز	phase
فرد	odd
فرم	form
فْرُنه	Frenet
فرمول-بندی	formulation
فروکاست-گرایانه	reductionistic
فروکاست-گرایی	reductionism
فرینه	extremum
فزونوَر	extensive
فشرده	compact
فضا	space
فضایی	space, spacial
فعال	active
فُق- ِ-	hyper-
فنر	spring
فوریه	Fourier
فیزیک	physics
قائم	vertical
قاعده	rule

قانون	law
قرارداد	convention
قضیه	theorem
قطری	diagonal
قید	constraint
قیدی	constraint

کار	work
کامل	complete
کانُنیک	canonical
کاهش	reduction
کران	bound
کران-دار	bounded
کْروشه	bracket
کْرُنِکِر	Kronecker
کف	floor
کلاسیک	classical
کلاف	bundle
کْلِرُ	Clairaut
کمینه	minimum
کنج	frame
کند-تغییر	slowly-varying
کندی	slowlness
کنش	action
کوانتمی	quantum

گالیلِئُ	Galileo
گذار	transition
گذر	lapse
گذشته	past
گرانش	gravitation
گْرام	Gram
گروه	group
گسترش-یافته	extended
گسسته	discrete
گویا	rational
لَپلَس	Laplace
لخت	inertial
لُژاندر	Legendre
لَگرانژ	Lagrange
لَگرانژی	Lagrangian
لِوی-چیویتا	Levi-Civita
لی	Lie
لَیبنیتس	Leibniz
لَیبنیتسی	Leibnizian ◎
لیوویل	Liouville
ماتریس	matrix
مانده-از-کف	remainder-from-the-floor ◎
مئلفه	component

مبدئ	origin
مبدَل	transform
مبنا	base
متریک	metric
متعامد	orthogonal
متغیر	variable
متقارن	symmetric
متمایز	distinct
مثبت	positive
مجازی	virtual
مجموعه	set
محدود	finite
محیط	environment
مختصات	coordinates
مختصاتی	coordinate
مختصه	coordinate
مختل-شده	perturbed
مخروط	cone
مدار	orbit
مرتب	ordered
مرتبه	order
مرز	boundary
-مستقل	-independent
مستقل-از-	-independent
مستقیم	direct

مسیر	path
مشاهده-پذیر	observable
مشترک	common
مشتق	derivative
مشتق-پذیر	differentiable
مشتق ِ درونی	interior derivative ⊙
مشتق ِ کامل	total derivative
مشتق-گیری	differentiation
مضرب	multiple
مُضعَن	locally
مُضعی	local
معادله	equation
مطلق	absolute
معین	definite
معین-مثبت	positive definite
مغناطیسی	magnetic
مقیاس	scale
مکان	position
مکانیک	mechanics
مکانیک ِ ذرات	particle mechanics
مکانیکی	mechanical
مکعب	cube
مماس	tangent
منفی	negative
موازی	parallel

مولد	generator
مولد- ِ-پُؤَسُنی	Poisson-generator
مُهومی	imaginary
مُهومی یِ محض	pure imaginary
میانگین	mean
میدان	field
میدان-پایه	basis-field ◎
ناتکین	nonsingular
نادُرِئی	nonperiodic
نافعال	passive
نامعین	indefinite
ناوردا	invariant
ناوردایی	invariance
نُتِر	Noether
نُتِری	Noetherian
نسبیتی	relativistic
نُع	type
نُعی	typical
نقشه	chart
نقطِئی	point, pointwise ◎
نقطه	point
نقطه یِ درونی	interior point
نور	light
نیرو	force

نیم- مختصات	half-coordinates
نیوتُن	Newton
- وابسته	-dependent
وابسته- به-	-dependent
وابرریختی	diffeomorphism
واحد	unit
- وار	quasi-
وارون	inverse
وارون- پذیر	invertible
وارونی	inversion
هسته	kernel
هُلُنُم	holonomiv
همئرز	equivalent
همئرزی	equivalence
همانریخت	homeomorphic
همانی	identity
همبردار	covector
همتافته	symplectic
همراه	comoving
همزمان	simultaneous
همزمانی	simultaneity
همسایگی	neighborhood
همسایه	neighbor

همگرا	convergent
هممماس	cotangent
هموار	smooth
همموردا	covariant
هموستار	connection
هَمیلتِن	Hamiltonian
هَمیلتِنی	Hamiltonianian
هندسه	geometry
هندسی	geometric, geometrical
هیئت	field
هیچ-جا	nowhere

یاخته	cell
یاکُبی	Jacobi
یک-به-یک	one-to-one, injective
یکتا	unique
یکریخت	isomorphic
یکه	unit
یکه-متعامد	orthonormal

XB-003 (2022/07/07)

Classical mechanics

Mohammad Khorrami mamwad@mailaps.org

Using, printing, and publishing this text for non-commercial purposes is free, provided it is not altered in any sense (including text, style, and orthography). For any other use, author's permission is needed.

XB-003

Classical mechanics

Mohammad Khorrami