**X1-200 (2026/11/03)**

# تصویر در یک گویِ دیئلکتریک IV

**محمد خرمی** mamwad@mailaps.org

پتانسیلِ الکتریکی یِ یک بارِ نقطِئی در حضورِ یک قرصِ دی-الکتریک در یک صفحه بررسی میشود. برا یِ حلِ مسئله، روشِ تصویر و نیز تبدیلِ همدیس به کار میرود.

## 0 درامد

این در ادامه یِ [1] و [2] است، با هم ان نماد-گذاری. در $\mathbb{R}^n$، یک چگالی-یِ-بارِ سمتی-متقارنِ $\rho$ بیرونِ یک گویِ $\mathbb{B}$ (به مرکزِ مبدَئ و شعاعِ $a$) هست. گذردهی یِ نسبی درونِ این ناحیه $e$ و بیرونِ این ناحیه 1 است. گذردهی یِ خلَئ را یک میگیرم. مشتقگیری را با D نشان میدهم. $\rho$ متناظر با یک چگالی-یِ-طولی یِ $\lambda_\rho$ بر نیمه یِ مثبتِ محورِ $z$ است. چگالی-یِ-بارها یِ $\alpha$ و $\beta$ چگالی-یِ-بارها یِ تصویرَند. $\alpha$ بیرونِ گوی و $\beta$ درونِ گوی است. $\alpha$ و $\beta$ متناظر با چگالی-ی-طولیها یِ،

به ترتیب، $\lambda_\alpha$ و $\lambda_\beta$ یَند، که هر-دُ بر نیمه یِ مثبتِ محورِ $z$ اند:

$$\lambda_\rho(s) = 0, \qquad s < a. \tag{1}$$

$$\lambda_\alpha(s) = 0, \qquad s < a. \tag{2}$$

$$\lambda_\beta(s) = 0, \qquad s > a. \tag{3}$$

مرزِ $\mathbb{B}$ را با $\mathbb{S}$، و یک بردارِ عمود بر این مرز را با $\boldsymbol{b}$ نشان میدهم. پتانسیلِ الکتریکی را با $\phi$، پتانسیلِ الکتریکی درونِ $\mathbb{B}$ را با $\phi_{\rm in}$، و پتانسیلِ الکتریکی بیرونِ $\mathbb{B}$ را با $\phi_{\rm out}$ نشان میدهم:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_{\rm in}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{B}. \tag{4}$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_{\rm out}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \notin \mathbb{B}. \tag{5}$$

اینها این معادله-یِ-دیفرانسیلها را برمیئاورَند.

$$(\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \phi_{\rm in})(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{B}. \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \phi_{\rm out})(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \notin \mathbb{B}. \tag{7}$$

شرط-ِ-مرزیها هم چنینَند.

$$\phi_{\rm out}(\boldsymbol{r}) = \phi_{\rm in}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{S}. \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \phi_{\rm out})(\boldsymbol{r}) = e\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \phi_{\rm in})(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{S}. \tag{9}$$

اینها را میشود در مثلَن [3] یافت.

یک حالتِ خاص این است که $\rho$ متناظر است با یک بارِ نقطِئی $(q)$ در نقطه یِ $(c\,\hat{\boldsymbol{z}})$، که رو یِ نیمه یِ مثبتِ محورِ $z$ و بیرونِ $\mathbb{B}$ است:

$$\lambda_\rho(s) = q\,\delta(s - c). \tag{10}$$

$$c > a. \tag{11}$$

تابعِ هِویساید [4] (پله یِ واحد) را با $\Theta$ نشان میدهم. چنان که در [1] به دست آمد،

$$\lambda_\alpha(s) = q\,\frac{1-e}{1+e}\left[\delta(s-c) - \frac{\nu}{c}\left(\frac{s}{c}\right)^{-1+e\,\nu}\Theta(s-c)\right]. \tag{12}$$

$$\lambda_\beta(s) = q\,\frac{1-e}{1+e}\left(\frac{a}{c}\right)^{n-2}\left[\delta\!\left(s-\frac{a^2}{c}\right) - \frac{\nu}{c}\left(\frac{c}{a}\right)^{2}\left(\frac{c\,s}{a^2}\right)^{-1+\nu}\Theta\!\left(\frac{a^2}{c}-s\right)\right]. \tag{13}$$

که،

$$\nu = \frac{n-2}{1+e}. \tag{14}$$

از (13) دیده میشود که بارِ کلِ متناظر با چگالی-یِ-بار-ِ-تصویرِ $\beta$ صفر است:

$$0 = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\,\lambda_\beta(s). \tag{15}$$

# 1 صفحه

صفحه این است که بُعد 2 است:

$$n = 2. \tag{16}$$

پس،

$$\nu = 0. \tag{17}$$

البته در این حالت جمله یِ دوم در کروشه یِ طرف-ِ-راست ِ(13) مبهم میشود. یک راهِ رفع-ِ-ابهام، حدگیری در $(\nu \to 0^+)$ است. به این ترتیب، چنان که در [1] به دست آمد،

$$\lambda_\alpha(s) = q\,\frac{1-e}{1+e}\,\delta(s-c). \tag{18}$$

$$\lambda_\beta(s) = q\,\frac{1-e}{1+e}\left[\delta\!\left(s-\frac{a^2}{c}\right) - \delta(s)\right]. \tag{19}$$

گویِ دُ-بُعدی قرص است. پتانسیلِ الکتریکی در $\boldsymbol{r}$ به خاطرِ یک بارِ نقطِئی در $\boldsymbol{s}$ را با $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ نشان میدهم:

$$(-2\,\pi)\,g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = \ln\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|}{\mathfrak{l}}. \tag{20}$$

که $\mathfrak{l}$ یک ثابت است. تغییر-دادنِ $\mathfrak{l}$ پتانسیل را با یک ثابتِ جمعی تغییر میدهد.

## 2 نگاشتِ همدیس

نگاشتِ همدیس نگاشت ی ست که زاویه را ثابت نگه میدارد. در بُعدِ 2، هر نگاشتِ تمامریخت جا یی که مشتقَ ش صفر نباشد همدیس است. نمایشِ مختلط را به کار میبَرم. محورِ $z$ را محورِ حقیقی میگیرم. مزدوج-ِ-مختلطِ $\mathfrak{X}$ را با $\bar{\mathfrak{X}}$ نشان میدهم. مشتقگیری با $(\partial,\bar{\partial})$ مشخص میشود، که $\partial$ مشتقگیری نسبت به (متغیر-ِ-مختلطِ) $\boldsymbol{r}$ است، و $\bar{\partial}$ مشتقگیری نسبت به $\bar{\boldsymbol{r}}$ است. از جمله میشود لَپلَسی را بر حسبِ اینها نوشت:

$$\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial} = 4\,\bar{\partial}\,\partial. \tag{21}$$

$f$ یک نگاشتِ تمامریخت است. تبدیل-یافته یِ $\boldsymbol{r}$ تحتِ $f$ را با $\boldsymbol{w}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{r}). \tag{22}$$

تبدیل-یافته $\mathfrak{X}$ تحتِ این نگاشت را با $\dot{\mathfrak{X}}$ نشان میدهم. از جمله،

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{w}. \tag{23}$$

$$\dot{\partial} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{w}}\,\partial. \tag{24}$$

$$\dot{\bar{\partial}}\,\dot{\partial} = \left|\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{w}}\right|^2\bar{\partial}\,\partial. \tag{25}$$

و اگر $\mathfrak{b}$ یک بردار باشد،

$$\dot{\mathfrak{b}}\cdot\dot{\boldsymbol{\partial}} = \mathfrak{b}\cdot\boldsymbol{\partial}. \tag{26}$$

$\overset{\bullet}{\phi}$ و $\overset{\bullet}{\rho}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\overset{\bullet}{\phi}(\boldsymbol{w}) = \phi(\boldsymbol{r}). \tag{27}$$

$$\overset{\bullet}{\rho}(\boldsymbol{w}) = \left|\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{w}}\right|^2 \rho(\boldsymbol{r}). \tag{28}$$

این که یک نگاشتِ همدیس زاویه را ثبات نگه میدارد نتیجه میدهد $\overset{\bullet}{\boldsymbol{b}}$ بر $\overset{\bullet}{\mathbb{S}}$ عمود است. به این ترتیب، تحتِ نگاشتِ $f$ شکلِ روابطِ (6) تا (9) عوض نمیشود. همچنین، دیده میشود تحتِ این نگاشت یک بارِ نقطِئی به یک بارِ نقطِئی تبدیل میشود، و مقدارِ بار عوض نمیشود. یعنی، گیرم

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c}). \tag{29}$$

که $\boldsymbol{c}$ یک ثابت (در حالتِ کلی-مختلط) است. در این صورت،

$$\overset{\bullet}{\rho}(\boldsymbol{w}) = q\,\delta(\boldsymbol{w} - \overset{\bullet}{\boldsymbol{c}}). \tag{30}$$

$$\overset{\bullet}{\boldsymbol{c}} = f(\boldsymbol{c}). \tag{31}$$

$f$ را چنان میجویم که قرصِ $\mathbb{B}$ بک یک نیم-صفحه تبدیل شود. یک جواب این است.

$$f(z) = \frac{z - a}{z + a}. \tag{32}$$

با این $f$، درونِ $\mathbb{B}$ به نیمصفحه یِ چپ (بخشِ حقیقی-منفی)، و بیرونِ $\mathbb{B}$ به نیمصفحه یِ راست (بخشِ حقیقی-مثبت) تبدیل میشود. مرزِ $\mathbb{B}$ (که یک دایره است) هم به محورِ مُهومی تبدیل میشود. همچنین،

$$f(\infty) = 1. \tag{33}$$

$$f(-a) = \infty. \tag{34}$$

## 3 بارِ نقطِئی و مسئله یِ تبدیل-یافته

حالتِ بارِ نقطِئی را بررسی میکنم، که $\rho$ به شکلِ (29) است و

$$\boldsymbol{c} = c. \tag{35}$$

همئرز، $\rho$ متناظر با $\lambda_\rho$ به شکلِ (10) است. نگاشتِ $f$ به شکلِ (32) را به کار میبَرم. نتیجه میشود

$$\overset{\bullet}{\rho}(\boldsymbol{w}) = q\,\delta(\boldsymbol{w}-h). \tag{36}$$

$$h = \frac{c-a}{c+a}. \tag{37}$$

پس در مسئله یِ تبدیل-یافته، چشمه بارِ نقطِئی یِ $q$ بر بخشِ مثبتِ محورِ حقیقی ست.

برا یِ حلِ این مسئله روشِ تصویر را به کار میبَرم: پتانسیلها یِ $\overset{\bullet}{\psi}_{\rm in}$ و $\overset{\bullet}{\psi}_{\rm out}$ را متناظر با چگالی-یِ-بارها یِ، به ترتیب، $\overset{\bullet}{\rho}_{\rm in}$ و $\overset{\bullet}{\rho}_{\rm out}$ میگیرم:

$$\overset{\bullet}{\rho}_{\rm in}(\boldsymbol{w}) = (q+q_\alpha)\,\delta(\boldsymbol{w}-h). \tag{38}$$

$$\overset{\bullet}{\rho}_{\rm out}(\boldsymbol{w}) = q\,\delta(\boldsymbol{w}-h) + q_\beta\,\delta(\boldsymbol{w}+h). \tag{39}$$

و $\overset{\bullet}{\psi}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\overset{\bullet}{\psi}(\boldsymbol{w}) = \overset{\bullet}{\psi}_{\rm in}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{w} \in \overset{\bullet}{\mathbb{B}}. \tag{40}$$

$$\overset{\bullet}{\psi}(\boldsymbol{w}) = \overset{\bullet}{\psi}_{\rm out}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{w} \notin \overset{\bullet}{\mathbb{B}}. \tag{41}$$

$\overset{\bullet}{\mathbb{B}}$ نیمصفحه یِ راست، و بیرونِ $\overset{\bullet}{\mathbb{B}}$ نیمصفحه یِ چپ است. $\overset{\bullet}{\mathbb{S}}$ (مرزِ $\overset{\bullet}{\mathbb{B}}$) هم محورِ مُهومی ست، و شرط-ِ-مرزیها چنین َند.

$$\overset{\bullet}{\psi}_{\rm out}(\boldsymbol{w}) = \overset{\bullet}{\psi}_{\rm in}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{w} \in \overset{\bullet}{\mathbb{S}}. \tag{42}$$

$$(\overset{\bullet}{\boldsymbol{b}}\cdot\overset{\bullet}{\boldsymbol{\partial}}\,\overset{\bullet}{\psi}_{\rm out})(\boldsymbol{w}) = e\,(\overset{\bullet}{\boldsymbol{b}}\cdot\overset{\bullet}{\boldsymbol{\partial}}\,\overset{\bullet}{\psi}_{\rm in})(\boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{w} \in \overset{\bullet}{\mathbb{S}}. \tag{43}$$

با توجه به (38) و (39)،

$$(-2\,\pi)\,\overset{\bullet}{\psi}_{\rm in}(\boldsymbol{w}) \overset{\rm d}{=} (q+q_\alpha)\,\ln|\boldsymbol{w}-h|. \tag{44}$$

$$(-2\,\pi)\,\overset{\bullet}{\psi}_{\rm out}(\boldsymbol{w}) \overset{\rm d}{=} q\,\ln|\boldsymbol{w}-h| + q_\beta\,\ln|\boldsymbol{w}+h|. \tag{45}$$

نمادِ $\overset{\mathrm{d}}{=}$ یعنی دُ-طرف تا حدِ یک ثابتِ جمعی با هم برابرَند: تفاضلِ شان یک ثابت است. شرط-ِ مرزیها میشوند

$$q + q_\beta = q + q_\alpha. \tag{46}$$

$$q - q_\beta = e\,(q + q_\alpha). \tag{47}$$

که نتیجه میدهند

$$q_\alpha = \frac{1-e}{1+e}\,q. \tag{48}$$

$$q_\beta = \frac{1-e}{1+e}\,q. \tag{49}$$

به این ترتیب،

$$(-2\,\pi)\,\underset{\bullet}{\psi}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{w}) \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{2\,q}{1+e}\,\ln|\boldsymbol{w}-h|. \tag{50}$$

$$(-2\,\pi)\,\underset{\bullet}{\psi}_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{w}) \overset{\mathrm{d}}{=} q\,\ln|\boldsymbol{w}-h| + \frac{1-e}{1+e}\,q\,\ln|\boldsymbol{w}+h|. \tag{51}$$

که نتیجه میدهد

$$(-2\,\pi)\,\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{z}) \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{2\,q}{1+e}\,\ln\frac{|\boldsymbol{z}-c|}{|\boldsymbol{z}+a|}. \tag{52}$$

$$(-2\,\pi)\,\psi_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{z}) \overset{\mathrm{d}}{=} q\,\ln\frac{|\boldsymbol{z}-c|}{|\boldsymbol{z}+a|} + \frac{1-e}{1+e}\,q\,\ln\frac{|\boldsymbol{z}-c_{\mathrm{i}}|}{|\boldsymbol{z}+a|}. \tag{53}$$

$$c_{\mathrm{i}} = \frac{a^2}{c}. \tag{54}$$

اما $\psi$ جوابِ مسئله یِ اولیه نیست. $\psi(z)$ در $(z=-a)$ هم، علاوه بر $(z=c)$، تکین است: تُزیع-ـِبارِ متناظر با $\psi$، علاوه بر بار یِ که در $c$ بود یک بار هم در $(-a)$ دارد. ریشه یِ این، رابطه یِ (34) است: $f(z)$ در $(z=-a)$ بینهایت میشود. پس اگر قرار است پتانسیلِ اولیه در $(z=-a)$ بینهایت نشود، پتانسیلِ تبدیل-یافته هم باید در $(w=\infty)$ بینهایت نشود. رابطه یِ (33) راه یِ میدهد که این شرط براورده شود: $f(z)$ در $(z=\infty)$ برابر با 1 میشود. لازم نیست پتانسیلِ اولیه در $(z=\infty)$ محدود بماند. پس لازم نیست پتانسیلِ تبدیل-یافته در $(w=1)$ محدود بماند. پس میشود در $(w=1)$ یک بارِ اضافی گذاشت، حتا برا یِ مسئله یِ بیرون. البته برا یِ مسئله یِ بیرون، علاوه بر این میشود یک بار هم در نقطه یِ تصویر یعنی در $(z=-1)$ گذاشت:

$$\tilde{\rho}_{\text{in}} = \rho_{\text{in}}(\boldsymbol{w}) + (\tilde{q}+\tilde{q}_\alpha)\,\delta(\boldsymbol{w}-1). \tag{55}$$

$$\tilde{\rho}_{\text{out}} = \rho_{\text{out}}(\boldsymbol{w}) + \tilde{q}\,\delta(\boldsymbol{w}-1) + \tilde{q}_\beta\,\delta(\boldsymbol{w}+1). \tag{56}$$

این که در (56) ضریبِ جمله یِ دوم $(\tilde{q}+\tilde{q}_\alpha)$ شده فقط یک تغییر-ـِمتغیر است، برا یِ این که شکلِ جملِها یِ اضافی شبیهِ شکلِ جملِها یِ اولیه شود. پتانسیلها یِ متناظر هم چنین میشوند.

$$(-2\,\pi)\,\tilde{\psi}_{\text{in}}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\text{d}}{=} (-2\,\pi)\,\psi_{\text{out}}(\boldsymbol{w}) + (\tilde{q}+\tilde{q}_\alpha)\,\ln|\boldsymbol{w}-1|. \tag{57}$$

$$(-2\,\pi)\,\tilde{\psi}_{\text{out}}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\text{d}}{=} (-2\,\pi)\,\psi_{\text{out}}(\boldsymbol{w}) + \tilde{q}\,\ln|\boldsymbol{w}-1| + \tilde{q}_\beta\,\ln|\boldsymbol{w}+1|. \tag{58}$$

شرط-ـِمرزیها، علاوه بر (46) و (47)، میشوند

$$\tilde{q}+\tilde{q}_\beta = \tilde{q}+\tilde{q}_\alpha. \tag{59}$$

$$\tilde{q}-\tilde{q}_\beta = e\,(\tilde{q}+\tilde{q}_\alpha). \tag{60}$$

که نتیجه میدهند

$$\tilde{q}_\alpha = \frac{1-e}{1+e}\,\tilde{q}. \tag{61}$$

$$\tilde{q}_\beta = \frac{1-e}{1+e}\,\tilde{q}. \tag{62}$$

و این شرط که $\dot{\tilde{\psi}}(\infty)$ بینهایت نشود، همراه با (61) و (62)، نتیجه میدهد

$$\tilde{q} = -q. \tag{63}$$

به این ترتیب،

$$(-2\,\pi)\,\dot{\tilde{\psi}}_{\rm in}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\rm d}{=} (q + q_\alpha)\,\ln\frac{|\boldsymbol{w}-h|}{|\boldsymbol{w}-1|}. \tag{64}$$

$$(-2\,\pi)\,\dot{\tilde{\psi}}_{\rm out}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\rm d}{=} q\,\ln\frac{|\boldsymbol{w}-h|}{|\boldsymbol{w}-1|} + q_\beta\,\ln\frac{|\boldsymbol{w}+h|}{|\boldsymbol{w}+1|}. \tag{65}$$

یا،

$$(-2\,\pi)\,\dot{\tilde{\psi}}_{\rm in}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\rm d}{=} \frac{2\,q}{1+e}\,\ln\frac{|\boldsymbol{w}-h|}{|\boldsymbol{w}-1|}. \tag{66}$$

$$(-2\,\pi)\,\dot{\tilde{\psi}}_{\rm out}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\rm d}{=} q\,\ln\frac{|\boldsymbol{w}-h|}{|\boldsymbol{w}-1|} + \frac{1-e}{1+e}\,q\,\ln\frac{|\boldsymbol{w}+h|}{|\boldsymbol{w}+1|}. \tag{67}$$

که نتیجه میدهد

$$(-2\,\pi)\,\tilde{\psi}_{\rm in}(\boldsymbol{z}) \stackrel{\rm d}{=} \frac{2\,q}{1+e}\,\ln\frac{|\boldsymbol{z}-c|}{\mathfrak{l}}. \tag{68}$$

$$(-2\,\pi)\,\tilde{\psi}_{\rm out}(\boldsymbol{z}) \stackrel{\rm d}{=} q\,\ln\frac{|\boldsymbol{z}-c|}{\mathfrak{l}} + \frac{1-e}{1+e}\,q\,\ln\frac{|\boldsymbol{z}-c_{\rm i}|}{|\boldsymbol{z}|}. \tag{69}$$

$\tilde{\psi}$ هم ان جوابِ مسئله یِ اولیه است:

$$\phi = \tilde{\psi}. \tag{70}$$

برا یِ مسئله یِ درون، یک بار- ِ-تصویرِ $q_\alpha$ در $c$ هست (علاوه بر بار- ِ-اولیه یِ $q$ که در $c$ بود). برا یِ مسئله یِ بیرون، یک بار- ِ-تصویرِ $q_\beta$ در $c_{\rm i}$ هست، و یک بار- ِ-تصویرِ $(-q_\beta)$ هم در صفر هست. اینها هم ان روابطِ (18) و (19) اند.

# 4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «تصویر در یک گویِ دیئلکتریک I» X1-197 (2026/07/03)

[2] محمد خرمی؛ «تصویر در یک گویِ دیئلکتریک II» X1-198 (2026/08/03)

[3] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[4] Heaviside