

X1-199 (2026/10/03)

تصویر در یک گویِ دیئلکتریک III

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

روشِ تصویر برای محاسبه‌ی پتانسیل الکتریکی یِ یک چگالی-ی-بار در حضورِ یک پاره-خطِ دی-الکتریک در یک خط به کار میرود.

0 درآمد

این در ادامه یِ [1] است، با هم ان نماد-گذاری. در $\mathbb{R}^n$ ، یک چگالی-ی-بار سمتی-متقارن ρ بیرونِ یک گویِ $\mathbb{B}$ (به مرکزِ مبَدئ و شعاعِ a) هست. گذردهی یِ نسبی درونِ این ناحیه e و بیرونِ این ناحیه 1 است. گذردهی یِ خَلّی را یک میگیرم. مشتقگیری را با D نشان میدهم. ρ متناظر با یک چگالی-ی-طول یِ λ_ρ بر نیمه یِ مثبتِ محورِ z است. چگالی-ی-بارها یِ α و β چگالی-ی-بارها یِ تصویرند. α بیرونِ گوی و β درونِ گوی است. α و β متناظر با چگالی-ی-طولها یِ، به ترتیب،

λ_α و λ_β یَند، که هر-دُ بر نیمه ی مثبتِ محورِ z اند:

$$\lambda_\rho(s) = 0, \quad s < a. \quad (1)$$

$$\lambda_\alpha(s) = 0, \quad s < a. \quad (2)$$

$$\lambda_\beta(s) = 0, \quad s > a. \quad (3)$$

مرزِ $\mathbb{B}$ را با $\mathbb{S}$ ، و یک بردارِ عمود بر این مرز را با $\mathbf{b}$ نشان میدهم. پتانسیلِ الکتریکی را با ϕ ، پتانسیلِ الکتریکی درونِ $\mathbb{B}$ را با ϕ_{in} ، و پتانسیلِ الکتریکی بیرونِ $\mathbb{B}$ را با ϕ_{out} نشان میدهم:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{in}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{B}. \quad (4)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{out}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \mathbb{B}. \quad (5)$$

اینها این معادله-ی-دیفرانسیلها را برمیآورند.

$$(\partial \cdot \partial \phi_{\text{in}})(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{B}. \quad (6)$$

$$(\partial \cdot \partial \phi_{\text{out}})(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \notin \mathbb{B}. \quad (7)$$

شرط- - مرزها هم چنین نَد.

$$\phi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \phi_{\text{in}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{S}. \quad (8)$$

$$(\mathbf{b} \cdot \partial \phi_{\text{out}})(\mathbf{r}) = e (\mathbf{b} \cdot \partial \phi_{\text{in}})(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{S}. \quad (9)$$

اینها را میشود در مثلن [2] یافت.

چنان که در [1] به دست آمد، رابطه ی λ_α و λ_β با λ_ρ چنین میشود.

$$\lambda_\alpha(s) = \frac{1-e}{1+e} \left[\lambda_\rho(s) - \frac{\nu}{s} \int_0^s (dz) \left(\frac{s}{z} \right)^{e\nu} \lambda_\rho(z) \right]. \quad (10)$$

$$\lambda_\beta(s) = \frac{1-e}{1+e} \left(\frac{s}{a} \right)^{n-4} \left[\lambda_\rho \left(\frac{a^2}{s} \right) - \frac{\nu}{s} \int_s^\infty (dz) \left(\frac{z}{s} \right)^{-2+e\nu} \lambda_\rho \left(\frac{a^2}{z} \right) \right]. \quad (11)$$

که،

$$\nu = \frac{n-2}{1+e}. \quad (12)$$

یک پیامد (11) این است که بار کل متناظر با چگالی-ی-بار- تصویر β صفر است:

$$0 = \int_0^\infty (ds) \lambda_\beta(s). \quad (13)$$

یک حالت خاص این است که ρ متناظر است با یک بار نقطه‌ای (q) در نقطه‌ی $(c\hat{z})$ ، که روی نیمه‌ی مثبت محور z و بیرون $\mathbb{B}$ است:

$$\lambda_\rho(s) = q \delta(s - c). \quad (14)$$

$$c > a. \quad (15)$$

تابع هویساید [3] (پله‌ی واحد) را با Θ نشان می‌دهم. رابطها‌ی (10) و (11) میشوند

$$\lambda_\alpha(s) = q \frac{1-e}{1+e} \left[\delta(s-c) - \frac{\nu}{c} \left(\frac{s}{c} \right)^{-1+e\nu} \Theta(s-c) \right]. \quad (16)$$

$$\lambda_\beta(s) = q \frac{1-e}{1+e} \left(\frac{a}{c} \right)^{n-2} \left[\delta\left(s - \frac{a^2}{c}\right) - \frac{\nu}{c} \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left(\frac{cs}{a^2} \right)^{-1+\nu} \Theta\left(\frac{a^2}{c} - s\right) \right]. \quad (17)$$

1 خط

خط این است که بُعد 1 است:

$$n = 1. \quad (18)$$

پس،

$$\nu = -\frac{1}{1+e}. \quad (19)$$

گوی-یک-بُعدی هم پاره-خط است. پتانسیل الکتریکی در r به خاطر یک بار نقطه‌ای در s را با $g(r, s)$ نشان می‌دهم. (در بُعد یک)، r و s عددند، و

$$g(r, s) = -\frac{|r-s|}{2}. \quad (20)$$

یا،

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{2} \{ [\text{sgn}(\mathbf{s})] \Theta(|\mathbf{s}| - |\mathbf{r}|) - [\text{sgn}(\mathbf{r})] \Theta(|\mathbf{r}| - |\mathbf{s}|) \}. \quad (21)$$

که sgn تابعِ علامت است.

2 پتانسیل الکتریکی

با استفاده از (6) و (7) و (20)، پتانسیل الکتریکی چنین میشود.

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \phi_{\text{in}}(0) + \frac{(q_\rho + q_\alpha) \mathbf{r}}{2}. \quad (22)$$

$$\phi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \phi_\rho(\mathbf{r}) + c_{\text{out}} \text{sgn}(\mathbf{r}) - \frac{q_\beta |\mathbf{r}|}{2}. \quad (23)$$

که،

$$\phi_{\text{in}}(0) = -\frac{p_\rho + p_\alpha}{2}. \quad (24)$$

$$c_{\text{out}} = \frac{p_\beta}{2}. \quad (25)$$

$$(q_\varsigma, p_\varsigma) = \int_0^\infty (d s) (1, s) \lambda_\varsigma(s). \quad (26)$$

$$\phi_\rho(\mathbf{r}) = - \int_0^\infty (d s) \frac{|\mathbf{r} - s|}{2} \lambda_\rho(s). \quad (27)$$

دیده میشود

$$(q_\alpha, p_\alpha) = \frac{1-e}{1+e} (q_\rho + \dot{q}_\rho, p_\rho + \dot{p}_\rho). \quad (28)$$

$$(\dot{q}_\rho, \dot{p}_\rho) = -\nu \int_0^\infty \frac{d s}{s} (1, s) \int_0^s (d z) \left(\frac{s}{z} \right)^{e\nu} \lambda_\rho(z). \quad (29)$$

در (29) ترتیبِ انتگرالگیریها را عوض میکنم:

$$(\dot{q}_\rho, \dot{p}_\rho) = -\nu \int_0^\infty (d z) \int_z^\infty \frac{d s}{s} (1, s) \left(\frac{s}{z} \right)^{e\nu} \lambda_\rho(z). \quad (30)$$

انتگرالها بر s همگرا یَند، اگر

$$e\nu < -1. \quad (31)$$

فرض میکنم چنین است. (حالتی که چنین نیست را با گسترش تحلیلی میسازم.) نتیجه میشود

$$(\dot{q}_\rho, \dot{p}_\rho) = \int_0^\infty (dz) \left(\frac{1}{e}, \frac{\nu z}{1+e\nu} \right) \lambda_\rho(z). \quad (32)$$

یا،

$$(\dot{q}_\rho, \dot{p}_\rho) = \left(\frac{q_\rho}{e}, -p_\rho \right). \quad (33)$$

پس،

$$(q_\alpha, p_\alpha) = \left(\frac{1-e}{e} q_\rho, 0 \right). \quad (34)$$

برای محاسبه (q_β, p_β) هم، s در انتگرال طرف-راست (26) را با $\mathfrak{s}$ جایگزین میکنم و بعد این تغییر-متغیر را به کار میبرم.

$$\mathfrak{s} = \frac{a^2}{s}. \quad (35)$$

نتیجه میشود

$$(q_\beta, p_\beta) = \int_0^\infty (ds) \frac{a^2}{s^2} \left(1, \frac{a^2}{s} \right) \lambda_\beta \left(\frac{a^2}{s} \right). \quad (36)$$

از (11)، همراه با (18)، هم دیده میشود

$$\lambda_\beta \left(\frac{a^2}{s} \right) = \frac{1-e}{1+e} \left(\frac{s}{a} \right)^3 \left[\lambda_\rho(s) - \frac{\nu s}{a^2} \int_{a^2/s}^\infty (dz) \left(\frac{s z}{a^2} \right)^{-2+e\nu} \lambda_\rho \left(\frac{a^2}{z} \right) \right]. \quad (37)$$

در انتگرال، z را با $\mathfrak{z}$ جایگزین میکنم و بعد این تغییر-متغیر را به کار میبرم.

$$\mathfrak{z} = \frac{a^2}{z}. \quad (38)$$

نتیجه میشود

$$\lambda_\beta \left(\frac{a^2}{s} \right) = \frac{1-e}{1+e} \left(\frac{s}{a} \right)^3 \left[\lambda_\rho(s) - \frac{\nu s}{a^2} \int_0^s (dz) \left(\frac{a^2}{z^2} \right) \left(\frac{s}{z} \right)^{-2+e\nu} \lambda_\rho(z) \right]. \quad (39)$$

این را در (36) میگذارم و در محاسبه ی جمله ی دوم، ترتیب انتگرالگیریها را عوض میکنم:

$$(q_\beta, p_\beta) = \frac{1-e}{1+e} \left[\int_0^\infty (ds) \frac{s}{a} \left(1, \frac{a^2}{s} \right) \lambda_\rho(s) + \int_0^\infty (dz) \frac{z}{a} \left(-1, \frac{a^2}{ez} \right) \lambda_\rho(z) \right]. \quad (40)$$

که نتیجه میدهد

$$q_\beta = 0. \quad (41)$$

$$p_\beta = \frac{1-e}{e} a q_\rho. \quad (42)$$

رابطه ی (41) حالت - خاص ی از (13) است. نتایج را در (22) و (23) میگذارم:

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -\frac{p_\rho}{2} + \frac{q_\rho \mathbf{r}}{2e}. \quad (43)$$

$$\phi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \phi_\rho(\mathbf{r}) + \frac{(1-e) a q_\rho}{2e} \text{sgn}(\mathbf{r}). \quad (44)$$

البته،

$$\phi_\rho(\mathbf{r}) = -\frac{p_\rho}{2} + \frac{q_\rho \mathbf{r}}{2}, \quad \mathbf{r} \leq a. \quad (45)$$

برای حالت - خاص بار - نقطه‌ای، رابطه ی (14)،

$$q_\rho = q. \quad (46)$$

$$p_\rho = c q. \quad (47)$$

$$\phi_\rho(\mathbf{r}) = -\frac{q |\mathbf{r} - \mathbf{c}|}{2}. \quad (48)$$

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -\frac{cq}{2} + \frac{q \mathbf{r}}{2e}. \quad (49)$$

$$\phi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = -\frac{q |\mathbf{r} - \mathbf{c}|}{2} + \frac{(1-e) a q}{2e} \text{sgn}(\mathbf{r}). \quad (50)$$

از جمله دیده میشود نتایج در ($e = 0$) تکین‌ند.

3 ابهام

در بُعد یک، معادله ی پُوسُن [4]، در بینهایت شرط - مرزی ی «طبیعی» ندارد: پتانسیل را (حتا برا ی تزیع - بارها ی جایگزیده) لزومَن نمیشود هم در $(-\infty)$ و هم در $(+\infty)$ صفر کرد. این آزادی هست که به جوابِ معادله یک تابعِ آفین (دست - بالا - خطی) افزوده شود. از جمله میشود g در رابطه ی (20) را به $\tilde{g}$ گسترش داد:

$$\tilde{g}(\gamma, \mu, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = \gamma - [\mu \Theta(\mathbf{s} - \mathbf{r}) + (1 - \mu) \Theta(\mathbf{r} - \mathbf{s})] |\mathbf{r} - \mathbf{s}|. \quad (51)$$

γ و μ ثابت نند. دیده میشود

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \tilde{g}(0, 0.5, \mathbf{r}, \mathbf{s}). \quad (52)$$

یک انتخاب هم g_+ است:

$$g_+(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \tilde{g}(0, 0, \mathbf{r}, \mathbf{s}). \quad (53)$$

پتانسیلِ متناظر با این انتخاب را با ϕ_+ نشان میدهم. مانسته ی (43) و (44) میشود

$$\phi_{+\text{in}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (54)$$

$$\phi_{+\text{out}}(\mathbf{r}) = \phi_{+\rho}(\mathbf{r}). \quad (55)$$

که نتیجه میدهد

$$\phi_+(\mathbf{r}) = \phi_{+\rho}(\mathbf{r}). \quad (56)$$

$$\phi_{+\rho}(\mathbf{r}) = - \int_0^{\mathbf{r}} (\mathrm{d} s) (\mathbf{r} - s) \lambda_{\rho}(s). \quad (57)$$

دیده میشود

$$\phi_{+\rho}(\mathbf{r}) = \phi_{\rho}(\mathbf{r}) - \frac{q_{\rho} \mathbf{r}}{2} + \frac{p_{\rho}}{2}. \quad (58)$$

برای حالت - خاص بار - نقطه‌ای، رابطه ی (14)،

$$\phi_{+ \text{ out}}(\mathbf{r}) = -q(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \Theta(\mathbf{r} - \mathbf{c}). \quad (59)$$

$$\phi_+(\mathbf{r}) = -q(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \Theta(\mathbf{r} - \mathbf{c}). \quad (60)$$

ϕ_+ تکینگی ی $(e = 0)$ را ندارد، بر خلاف ϕ ، که با g به دست آمد.

4 حل معادله -ی- دیفرانسیل

جواب کلی ی (4) تا (9) برای ϕ را با $\tilde{\phi}$ نشان میدهم. جواب کلی معادله -ی- دیفرانسیلها میشود

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\mathbf{r}) = & (\gamma'_{\text{out}} + \mu'_{\text{out}} \mathbf{r}) \Theta(-a - \mathbf{r}) + (\gamma_{\text{in}} + \mu_{\text{in}} \mathbf{r}) \Theta(a - |\mathbf{r}|) \\ & + [\phi_{\rho}(\mathbf{r}) + \gamma_{\text{out}} + \mu_{\text{out}} \mathbf{r}] \Theta(\mathbf{r} - a). \end{aligned} \quad (61)$$

که γ'_{out} و μ'_{out} و γ_{in} و μ_{in} و γ_{out} و μ_{out} ثابت‌ند. شرط - مرزها نتیجه میدهند

$$\phi_{\rho}(a) + \gamma_{\text{out}} + a \mu_{\text{out}} = \gamma_{\text{in}} + a \mu_{\text{in}}. \quad (62)$$

$$(\mathbf{D} \phi_{\rho})(a) + \mu_{\text{out}} = e \mu_{\text{in}}. \quad (63)$$

$$\gamma'_{\text{out}} - a \mu'_{\text{out}} = \gamma_{\text{in}} - a \mu_{\text{in}}. \quad (64)$$

$$a \mu'_{\text{out}} = e a \mu_{\text{in}}. \quad (65)$$

البته،

$$(\phi_{\rho}, \mathbf{D} \phi_{\rho})(a) = \frac{(a q_{\rho} - p_{\rho}, q_{\rho})}{2}. \quad (66)$$

به این ترتیب 4 تا از ثابتها بر حسب 2 تا ی دیگر به دست میآیند:

$$\mu_{\text{in}} = \frac{q_{\rho} + 2\mu_{\text{out}}}{2e}. \quad (67)$$

$$\gamma_{\text{in}} = \frac{(e-1)a(q_{\rho} + 2\mu_{\text{out}})}{2e} - \frac{p_{\rho}}{2} + \gamma_{\text{out}}. \quad (68)$$

$$\mu'_{\text{out}} = \frac{q_{\rho} + 2\mu_{\text{out}}}{2}. \quad (69)$$

$$\gamma'_{\text{out}} = \frac{(e-1)a(q_{\rho} + 2\mu_{\text{out}})}{e} - \frac{p_{\rho}}{2} + \gamma_{\text{out}}. \quad (70)$$

برای حالت - - خاص بار - نقطه‌ی، رابطه ی (14)،

$$\mu_{\text{in}} = \frac{q + 2\mu_{\text{out}}}{2e}. \quad (71)$$

$$\gamma_{\text{in}} = \frac{(e-1)a(q + 2\mu_{\text{out}})}{2e} - \frac{cq}{2} + \gamma_{\text{out}}. \quad (72)$$

$$\mu'_{\text{out}} = \frac{q + 2\mu_{\text{out}}}{2}. \quad (73)$$

$$\gamma'_{\text{out}} = \frac{(e-1)a(q + 2\mu_{\text{out}})}{e} - \frac{cq}{2} + \gamma_{\text{out}}. \quad (74)$$

یک انتخاب برای ثابتها این است.

$$\mu_{\text{out}} = 0. \quad (75)$$

$$\gamma_{\text{out}} = \frac{(1-e)aq_{\rho}}{2e}. \quad (76)$$

با این انتخاب،

$$\tilde{\phi} = \phi. \quad (77)$$

یک انتخاب دیگر هم این است.

$$\mu_{\text{out}} = -\frac{q_{\rho}}{2}. \quad (78)$$

$$\gamma_{\text{out}} = \frac{p_{\rho}}{2}. \quad (79)$$

با این انتخاب،

$$\tilde{\phi} = \phi_{+}. \quad (80)$$

5 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «تصویر در یک گویِ دیالکتریک I» (2026/07/03) X1-197

[2] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[3] Heaviside

[4] Poisson