

## تصویر در یک گویِ دیئلکتریک II

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

روشِ تصویر برای محاسبه‌ی پتانسیل الکتریکیِ یک چگالی-ی-بارِ سمتی-متقارن در حضورِ یک گویِ دیئلکتریک به کار میرود. (حالتها یِ کرائنی یِ) بستگی یِ جواب (برای چگالی-ی-بارها یِ تصویر) به شعاعِ گوی، بُعد، و گذردهی بررسی میشود.

### 0 درآمد

این ادامه یِ [1] است، با هم ان نماد-گذاری. در  $\mathbb{R}^n$ ، یک چگالی-ی-بارِ سمتی-متقارن  $\rho$  بیرونِ یک گویِ  $\mathbb{B}$  (به مرکزِ مبدئ و شعاعِ  $a$ ) هست. گذردهی یِ نسبی درونِ این ناحیه  $e$  و بیرونِ این ناحیه 1 است. گذردهی یِ خلی را یک میگیرم. مشتقگیری را با  $D$  نشان میدهم.  $\rho$  متناظر با یک چگالی-ی-طول یِ  $\lambda_\rho$  بر نیمه یِ مثبتِ محورِ  $z$  است. چگالی-ی-بارها یِ  $\alpha$  و  $\beta$  چگالی-ی-بارها یِ تصویرند.  $\alpha$  بیرونِ گوی و  $\beta$  درونِ گوی است.  $\alpha$  و  $\beta$  متناظر با چگالی-ی-طولها یِ، به ترتیب،

$\lambda_\alpha$  و  $\lambda_\beta$  یَند، که هر-دُ بر نیمه ی مثبتِ محورِ  $z$  اند:

$$\lambda_\rho(s) = 0, \quad s < a. \quad (1)$$

$$\lambda_\alpha(s) = 0, \quad s < a. \quad (2)$$

$$\lambda_\beta(s) = 0, \quad s > a. \quad (3)$$

پارامترِ  $\nu$  را چنین تعریف میکنم.

$$\nu = \frac{n-2}{1+e}. \quad (4)$$

چنان که در [1] به دست آمد، رابطه ی  $\lambda_\rho$  با  $\lambda_\beta$  و  $\lambda_\alpha$  چنین میشود.

$$\lambda_\alpha(s) = \frac{1-e}{1+e} \left[ \lambda_\rho(s) - \frac{\nu}{s} \int_0^s (dz) \left( \frac{s}{z} \right)^{e\nu} \lambda_\rho(z) \right]. \quad (5)$$

$$\lambda_\beta(s) = \frac{1-e}{1+e} \left( \frac{s}{a} \right)^{n-4} \left[ \lambda_\rho \left( \frac{a^2}{s} \right) - \frac{\nu}{s} \int_s^\infty (dz) \left( \frac{z}{s} \right)^{-2+e\nu} \lambda_\rho \left( \frac{a^2}{z} \right) \right]. \quad (6)$$

یک پیامدِ (6) این است که بارِ کلِ متناظر با چگالی-ی-بار- تصویرِ  $\beta$  صفر است:

$$0 = \int_0^\infty (ds) \lambda_\beta(s). \quad (7)$$

یک حالتِ خاص این است که  $\rho$  متناظر است با یک بارِ نقطه‌ای ( $q$ ) در نقطه ی  $(c\hat{z})$ ، که رو یِ

نیمه ی مثبتِ محورِ  $z$  و بیرونِ  $\mathbb{B}$  است:

$$\lambda_\rho(s) = q \delta(s-c). \quad (8)$$

$$c > a. \quad (9)$$

رابطه‌ها ی (5) و (6) میشوند

$$\lambda_\alpha(s) = q \frac{1-e}{1+e} \left[ \delta(s-c) - \frac{\nu}{c} \left( \frac{s}{c} \right)^{-1+e\nu} \Theta(s-c) \right]. \quad (10)$$

$$\lambda_\beta(s) = q \frac{1-e}{1+e} \left( \frac{a}{c} \right)^{n-2} \left[ \delta \left( s - \frac{a^2}{c} \right) - \frac{\nu}{c} \left( \frac{c}{a} \right)^2 \left( \frac{cs}{a^2} \right)^{-1+\nu} \Theta \left( \frac{a^2}{c} - s \right) \right]. \quad (11)$$

که  $\Theta$  تابعِ هویساید [2] (پله ی واحد) است.

رابطه‌ها ی (5) و (6)، و در نتیجه (10) و (11) برایِ حالتها ی ناکرانئی یَند. مشخصن،

$$a < \infty. \quad (12)$$

$$e \neq -1. \quad (13)$$

$$e < \infty. \quad (14)$$

$$n \neq 2. \quad (15)$$

سه-شرطِ اخیر را میشود بر حسبِ پارامترِ  $\nu$  نوشت. هر یک از شرطها ی (12) تا (15) برقرار نباشد، جوابِ متناظر با رابطه‌ها ی (5) و (6) و در نتیجه (10) و (11)، ممکن است ناخُشفتار شود. هدفِ رفعِ این ناخُشفتاری (ابهام) است. ابزاری که بکار میرود حدگیری ست.

## 1 نیمفضا

نیمفضا حدِ گوی در شعاع به بینهایت است:

$$a \rightarrow \infty. \quad (16)$$

برایِ بررسی یِ این حالت، تابعها را بازتعریف میکنم:

$$\mathfrak{x} =: \check{\mathfrak{x}} + a. \quad (17)$$

$$\mathfrak{X}(\xi) =: \check{\mathfrak{X}}(\check{\xi}). \quad (18)$$

پس،

$$\mathfrak{X}(\xi) =: \check{\mathfrak{X}}(\xi - a). \quad (19)$$

دیده میشود

$$\check{\lambda}_\alpha(s) = \frac{1-e}{1+e} \left[ \check{\lambda}_\rho(s) - \frac{\nu}{s+a} \int_{-a}^s (dz) \left( \frac{s+a}{z+a} \right)^{e\nu} \check{\lambda}_\rho(z) \right]. \quad (20)$$

$$\check{\lambda}_\beta(s) = \frac{1-e}{1+e} \left( \frac{s+a}{a} \right)^{n-4} \left[ \check{\lambda}_\rho \left( \frac{a^2}{s+a} - a \right) - \frac{\nu}{s+a} \int_{s+a}^{\infty} (dz) \left( \frac{z+a}{s+a} \right)^{-2+e\nu} \check{\lambda}_\rho \left( \frac{a^2}{z+a} - a \right) \right]. \quad (21)$$

اینها در (16)، حد  $(a \rightarrow \infty)$ ، میشوند

$$\check{\lambda}_\alpha(s) = \frac{1-e}{1+e} \check{\lambda}_\rho(s). \quad (22)$$

$$\check{\lambda}_\beta(s) = \frac{1-e}{1+e} \check{\lambda}_\rho(-s). \quad (23)$$

از جمله برای حالت - خاص بار - نقطه‌ی، رابطه‌ی (8)،

$$\check{\lambda}_\rho(s) = q \delta(s - \check{c}). \quad (24)$$

$$\check{\lambda}_\alpha(s) = q \frac{1-e}{1+e} \delta(s - \check{c}). \quad (25)$$

$$\check{\lambda}_\beta(s) = q \frac{1-e}{1+e} \delta(s + \check{c}). \quad (26)$$

## 2 گذردهی ی وارونه

منظور از گذردهی ی وارونه این است که

$$e = -1. \quad (27)$$

این را با حالت - حدی ی زیر بررسی میکنم.

$$\nu \rightarrow +\infty. \quad (28)$$

در این حد، بخش غالب انتگرالها یی که در طرف راست (5) و (6) اند، از  $z$  در نزدیکی  $s$  می‌آیند.

انتگرالها را با  $\mathfrak{F}_\alpha$  و  $\mathfrak{F}_\beta$  نشان میدهم:

$$\mathfrak{F}_\alpha = \left( \frac{s}{z} \right)^{e\nu} \lambda_\rho(z). \quad (29)$$

$$\mathfrak{F}_\beta = \left( \frac{z}{s} \right)^{-2+e\nu} \lambda_\rho \left( \frac{a^2}{z} \right). \quad (30)$$

دیده میشود

$$z \leq s \Rightarrow$$

$$\mathfrak{F}_\alpha = \left(\frac{s}{z}\right)^{e\nu} [\lambda_\rho(s) + (z-s)(D\lambda_\rho)(s) + \dots]. \quad (31)$$

$$\int_0^s \frac{dz}{s} \mathfrak{F}_\alpha = \frac{1}{1-e\nu} \left[ \lambda_\rho(s) - \frac{s}{2-e\nu} (D\lambda_\rho)(s) + \dots \right]. \quad (32)$$

پس،

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha(s) = \frac{\nu(1-e)}{(n-2)(1-e\nu)} & \left\{ [1 - (1+e)\nu] \lambda_\rho(s) \right. \\ & \left. + \frac{\nu s}{2-e\nu} (D\lambda_\rho)(s) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

همچنین،

$$z \geq s \Rightarrow$$

$$\mathfrak{F}_\beta = \left(\frac{z}{s}\right)^{-2+e\nu} \left[ \lambda_\rho\left(\frac{a^2}{s}\right) - \frac{a^2(z-s)}{s^2} (D\lambda_\rho)\left(\frac{a^2}{s}\right) + \dots \right]. \quad (34)$$

$$\int_s^\infty \frac{dz}{s} \mathfrak{F}_\beta = \frac{1}{1-e\nu} \left[ \lambda_\rho\left(\frac{a^2}{s}\right) + \frac{a^2}{s^2} \frac{s}{e\nu} (D\lambda_\rho)\left(\frac{a^2}{s}\right) + \dots \right]. \quad (35)$$

پس،

$$\begin{aligned} \lambda_\beta(s) = \frac{\nu(1-e)}{(n-2)(1-e\nu)} & \left(\frac{s}{a}\right)^{n-4} \left\{ [1 - (1+e)\nu] \lambda_\rho\left(\frac{a^2}{s}\right) \right. \\ & \left. - \frac{a^2}{s^2} \frac{s}{e} (D\lambda_\rho)\left(\frac{a^2}{s}\right) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

روابط (33) و (36)، با استفاده از (4)، و در (28)، حد  $(\nu \rightarrow +\infty)$  میشوند

$$\lambda_\alpha(s) = \frac{2}{n-2} [(3-n)\lambda_\rho(s) + s(D\lambda_\rho)(s)]. \quad (37)$$

$$\lambda_\beta(s) = \frac{2}{n-2} \left(\frac{s}{a}\right)^{n-4} \left[ (3-n)\lambda_\rho\left(\frac{a^2}{s}\right) + \frac{a^2}{s} (D\lambda_\rho)\left(\frac{a^2}{s}\right) \right]. \quad (38)$$

از جمله برای حالت - خاص بار - نقطه‌ای، رابطه ی (8)،

$$\lambda_{\alpha}(s) = q \frac{2}{n-2} [(3-n) \delta(s-c) + s (D \delta)(s-c)]. \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\beta}(s) = q \frac{2}{n-2} \left( \frac{s}{a} \right)^{n-4} & \left[ (3-n) \delta \left( \frac{a^2}{s} - c \right) \right. \\ & \left. + \frac{a^2}{s} (D \delta) \left( \frac{a^2}{s} - c \right) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

دیده میشود

$$0 = [f(s)] \delta(s-c) - [f(c)] \delta(s-c). \quad (41)$$

$$0 = [f(s)] (D \delta)(s-c) - [f(c)] (D \delta)(s-c) + [(D f)(c)] \delta(s-c). \quad (42)$$

همچنین،

$$0 = \delta \left( \frac{a^2}{s} - c \right) - \frac{s^2}{a^2} \delta \left( s - \frac{a^2}{c} \right). \quad (43)$$

$$0 = (D \delta) \left( \frac{a^2}{s} - c \right) + \frac{s^2}{a^2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s^2}{a^2} \delta \left( s - \frac{a^2}{c} \right) \right]. \quad (44)$$

$$0 = (D \delta) \left( \frac{a^2}{s} - c \right) + \frac{s^2}{c^2} (D \delta) \left( s - \frac{a^2}{c} \right). \quad (45)$$

به این ترتیب،

$$\lambda_{\alpha}(s) = q \frac{2}{n-2} [(2-n) \delta(s-c) + c (D \delta)(s-c)]. \quad (46)$$

$$\lambda_{\beta}(s) = q \frac{-2c}{n-2} \left( \frac{a}{c} \right)^n (D \delta) \left( s - \frac{a^2}{c} \right). \quad (47)$$

### 3 رسانا

رسانا حد گذردهی به بینهایت است:

$$e \rightarrow \infty. \quad (48)$$

این را با حالت - حدی زیر بررسی میکنم.

$$\nu \rightarrow 0^+. \quad (49)$$

دیده میشود

$$\lambda_\alpha(s) = \frac{1-e}{1+e} \left[ \lambda_\rho(s) - \frac{\nu}{s} \int_0^s (dz) \left( \frac{s}{z} \right)^{n-2-\nu} \lambda_\rho(z) \right]. \quad (50)$$

$$\lambda_\beta(s) = \frac{1-e}{1+e} \left[ \left( \frac{s}{a} \right)^{n-4} \lambda_\rho \left( \frac{a^2}{s} \right) - \lambda_c(s) \right]. \quad (51)$$

$$\lambda_c(s) = \frac{\nu}{s} \left( \frac{s}{a} \right)^\nu \int_s^\infty (dz) \left( \frac{z}{a} \right)^{n-4-\nu} \lambda_\rho \left( \frac{a^2}{z} \right). \quad (52)$$

همچنین،

$$\delta(s) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \frac{\nu}{s} \left( \frac{s}{a} \right)^\nu. \quad (53)$$

روابط (50) و (51)، در (49)، حد  $(\nu \rightarrow 0^+)$  میشوند

$$\lambda_\alpha(s) = -\lambda_\rho(s). \quad (54)$$

$$\lambda_\beta(s) = -\left( \frac{s}{a} \right)^{n-4} \lambda_\rho \left( \frac{a^2}{s} \right) + q_0 \delta(s). \quad (55)$$

$$q_0 = \int_0^\infty (ds) \left( \frac{s}{a} \right)^{n-4} \lambda_\rho \left( \frac{a^2}{s} \right). \quad (56)$$

در انتگرال،  $s$  را با  $\mathfrak{s}$  جایگزین میکنم و بعد این تغییر - متغیر را به کار میبرم.

$$\mathfrak{s} = \frac{a^2}{s}. \quad (57)$$

به این ترتیب،

$$q_0 = \int_0^\infty (ds) \left( \frac{a}{s} \right)^{n-2} \lambda_\rho(s). \quad (58)$$

از جمله برای حالت - خاص بار - نقطی، رابطه ی (8)،

$$\lambda_\alpha(s) = -q \delta(s-c). \quad (59)$$

$$\lambda_\beta(s) = q \left( \frac{a}{c} \right)^{n-2} \left[ \delta(s) - \delta \left( s - \frac{a^2}{c} \right) \right]. \quad (60)$$

## 4 صفحه

صفحه این است که بُعد 2 است:

$$n = 2. \quad (61)$$

این را هم با هم ان حالت - - حدی ی  $\nu$  به صفر- مثبت، (49)، بررسی میکنم. روابط (50) تا (53) همچنان برقرارند. به این ترتیب، مانسته ی (54) و (55) به دست میآید:

$$\lambda_\alpha(s) = \frac{1-e}{1+e} \lambda_\rho(s). \quad (62)$$

$$\lambda_\beta(s) = \frac{1-e}{1+e} \left(\frac{s}{a}\right)^{-2} \lambda_\rho\left(\frac{a^2}{s}\right) + q_0 \delta(s). \quad (63)$$

$$q_0 = -\frac{1-e}{1+e} \int_0^\infty (ds) \left(\frac{s}{a}\right)^{-2} \lambda_\rho\left(\frac{a^2}{s}\right). \quad (64)$$

یا،

$$q_0 = -\frac{1-e}{1+e} \int_0^\infty (ds) \lambda_\rho(s). \quad (65)$$

از جمله برای حالت - - خاص بار - - نقطی، رابطه ی (8)،

$$\lambda_\alpha(s) = q \frac{1-e}{1+e} \delta(s-c). \quad (66)$$

$$\lambda_\beta(s) = q \frac{1-e}{1+e} \left[ \delta\left(s - \frac{a^2}{c}\right) - \delta(s) \right]. \quad (67)$$

## 5 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «تصویر در یک گویِ دینلکتريک I» (2026/07/03) X1-197

[2] Heaviside