X1-197 (2026/07/03)

تصویر در یک گویِ دیئلکتریک I

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

روشِ تصویر برا یِ محاسبه یِ پتانسیل (و میدان) ِ الکتریکی یِ یک چگالی-یِ-بارِ سمتی-متقارن در حضورِ یک گویِ دیئلکتریک بررسی میشود. جواب ی برا یِ چگالی-یِ-بارها یِ تصویر به دست میئاید. برا یِ حالتِ خاص ی که بارِ اولیه نقطئی ست، این جواب به شکلِ صریحتر ی بیان میشود.

0 درامد

در $\mathbb{R}^n$، یک چگالی-یِ-بارِ ρ بیرونِ یک ناحیه یِ $\mathbb{B}$ هست. گذردهی یِ نسبی درونِ این ناحیه e و بیرونِ این ناحیه 1 است. گذردهی یِ خلَئ را یک میگیرم. مرزِ $\mathbb{B}$ را با $\mathbb{S}$، و بردارِ عمود بر این مرز به سو یِ بیرون را با $\boldsymbol{b}$ نشان میدهم. پتانسیلِ الکتریکی را با ϕ، پتانسیلِ الکتریکی درونِ $\mathbb{B}$ را با ϕ_{in}، و پتانسیلِ الکتریکی بیرونِ $\mathbb{B}$ را با ϕ_{out} نشان میدهم:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_{\text{in}}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{B}. \tag{1}$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_{\text{out}}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \notin \mathbb{B}. \tag{2}$$

اینها این معادله-یِ-دیفرانسیلها را برمیئاورَند.

$$(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}\,\phi_{\rm in})(\boldsymbol{r})=0, \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{B}. \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}\,\phi_{\rm out})(\boldsymbol{r})=-\rho(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\notin\mathbb{B}. \tag{4}$$

شرط-ِ-مرزیها هم چنینَند.

$$\phi_{\rm out}(\boldsymbol{r})=\phi_{\rm in}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}. \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\partial}\,\phi_{\rm out})(\boldsymbol{r})=e\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\partial}\,\phi_{\rm in})(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}. \tag{6}$$

اولی پیوستگی یِ پتانسیل بر مرز، و دومی پیوستگی یِ مئلفه یِ عمودی یِ $\boldsymbol{D}$ (چگالی یِ شارِ الکتریکی) بر مرز است.

اینها را میشود در مثلَن [1] یافت.

1 تصویر

در روشِ تصویر برا یِ محاسبه یِ پتانسیل (و میدان) ِ الکتریکی، دامنه یِ $\phi_{\rm in}$ و $\phi_{\rm out}$ را به کلِ فضا گسترش میدهم. چگالی-یِ-بارها یِ متناظر را با $\rho_{\rm in}$ و $\rho_{\rm out}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}\,\phi_{\rm in}=-\rho_{\rm in}. \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}\,\phi_{\rm out}=-\rho_{\rm out}. \tag{8}$$

هر یک از این چگالی-یِ-بارها یِ گسترش-یافته، در ناحیه ای که پتانسیل با پتانسیلِ واقعی (ϕ) برابر است، هم ان چگالی-یِ-بارِ واقعی ست:

$$\rho_{\rm in}(\boldsymbol{r})=0, \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{B}. \tag{9}$$

$$\rho_{\rm out}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\notin\mathbb{B}. \tag{10}$$

هدف یافتنِ یک $\rho_{\rm in}$ و $\rho_{\rm out}$ ِ مناسب (ساده) است، چنان که شرط-ِ-مرزیها یِ (5) و (6) براورده شوند.

2 بسط بر حسبِ هماهنگها

پتانسیلِ الکتریکی در $\boldsymbol{r}$ به خاطرِ یک بارِ نقطِئی در $\boldsymbol{s}$ را با $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ نشان میدهم:

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = \sum_{\ell} (\xi_<)^{\ell}\,[g_{\ell}(\xi_>)]\,\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}). \tag{11}$$

$$(\xi_<,\xi_>) = (\min,\max)(r,s). \tag{12}$$

$$(r,s) = (|\boldsymbol{r}|,|\boldsymbol{s}|). \tag{13}$$

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = (r\,\hat{\boldsymbol{r}}, s\,\hat{\boldsymbol{s}}). \tag{14}$$

چیزها (از جمله g و Π_{ℓ}) به n (بُعدِ فضا) هم بستگی دارند. اما این بستگی صریحَن نشان داده نشده. بهنجارشِ Π_{ℓ} چنین انتخاب شده.

$$\Pi_{\ell}(1) = 1. \tag{15}$$

برا یِ $\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})$ چنین بسط ی هست.

$$\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}) = \sum_{m} [\Upsilon_{\ell\,m}(\hat{\boldsymbol{r}})]\,\overline{[\Upsilon_{\ell\,m}(\hat{\boldsymbol{s}})]}. \tag{16}$$

که $\Upsilon_{\ell\,m}$ هماهنگ- ِ-کروی ست، از جمله،

$$\Upsilon_{\ell\,0}(\hat{\boldsymbol{r}}) = \Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}). \tag{17}$$

تابعِ ϕ را میشود بر حسبِ هماهنگ- ِ-کرویها بسط داد:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell\,m} [\phi_{\ell\,m}(r)]\,\Upsilon_{\ell\,m}(\hat{\boldsymbol{r}}). \tag{18}$$

اگر ϕ سمتی-متقارن باشد، $\phi_{\ell\,m}$ ها یِ با $(m\neq 0)$ صفر میشوند:

$$\phi_{\rho\,\ell\,m} = \phi_{\rho\,\ell}\,\delta_{m\,0}. \tag{19}$$

و (18) میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell} [\phi_{\ell}(r)]\,\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}). \tag{20}$$

عنصرِ حجم را با $(\mathrm{d}\,V)$، و پتانسیلِ متناظر با چگالی-یِ-بارِ ρ را با ϕ_ρ نشان میدهم. دیده میشود

$$\phi_\rho(\boldsymbol{r}) = \int (\mathrm{d}\,V_{\boldsymbol{s}})\,[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})]\,\rho(\boldsymbol{s}). \tag{21}$$

بسطِ ϕ_ρ بر حسبِ هماهنگ-ِ-کرویها هم چنین میشود.

$$\phi_\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell\,m}[\phi_{\rho\,\ell\,m}(r)]\,\Upsilon_{\ell\,m}(\hat{\boldsymbol{r}}). \tag{22}$$

$$\phi_{\rho\,\ell\,m}(r) = \int (\mathrm{d}\,V_{\boldsymbol{s}})\,(\xi_<)^\ell\,[g_\ell(\xi_>)]\,\overline{[\Upsilon_{\ell\,m}(\hat{\boldsymbol{s}})]}\,\rho(\boldsymbol{s}). \tag{23}$$

اگر ρ سمتی-متقارن باشد، ϕ_ρ هم چنین میشود:

$$\phi_\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell}[\phi_{\rho\,\ell}(r)]\,\Pi_\ell(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}). \tag{24}$$

$$\phi_{\rho\,\ell}(r) = \int (\mathrm{d}\,V_{\boldsymbol{s}})\,(\xi_<)^\ell\,[g_\ell(\xi_>)]\,[\Pi_\ell(\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}})]\,\rho(\boldsymbol{s}). \tag{25}$$

گیرم ρ بیرونِ $\mathbb{V}$ صفر میشود، که $\mathbb{V}$ ناحیه یِ بینِ دُ کره به شعاعها یِ a و $\tilde{a}$ و مرکزِ مبدئ است:

$$\mathbb{V} = \{\boldsymbol{r} \mid a < r < \tilde{a}\}. \tag{26}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \notin \mathbb{V}. \tag{27}$$

البته ممکن است a صفر یا $\tilde{a}$ بینهایت باشد. دیده میشود

$$\phi_\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \phi_\rho^-(\boldsymbol{r}), & r < a \\ \phi_\rho^+(\boldsymbol{r}), & r > \tilde{a} \end{cases}. \tag{28}$$

که،

$$\phi_\rho^-(\boldsymbol{r}) = \sum_\ell r^\ell \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V_{\boldsymbol{s}})\,[g_\ell(s)]\,[\Pi_\ell(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})]\,\rho(\boldsymbol{s}). \tag{29}$$

$$\phi_\rho^+(\boldsymbol{r}) = \sum_\ell [g_\ell(r)] \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V_{\boldsymbol{s}})\,s^\ell\,[\Pi_\ell(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})]\,\rho(\boldsymbol{s}). \tag{30}$$

یا،

$$\phi^{-}_{\rho}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell\, m} r^{\ell}\, [\Upsilon_{\ell\, m}(\hat{\boldsymbol{r}})] \int (\mathrm{d}\, V_{\boldsymbol{s}})\, [g_{\ell}(s)]\, \overline{[\Upsilon_{\ell\, m}(\hat{\boldsymbol{s}})]}\, \rho(\boldsymbol{s}). \tag{31}$$

$$\phi^{+}_{\rho}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell\, m} [g_{\ell}(r)]\, [\Upsilon_{\ell\, m}(\hat{\boldsymbol{r}})] \int (\mathrm{d}\, V_{\boldsymbol{s}})\, s^{\ell}\, \overline{[\Upsilon_{\ell\, m}(\hat{\boldsymbol{s}})]}\, \rho(\boldsymbol{s}). \tag{32}$$

پس،

$$\phi^{-}_{\rho\,\ell\, m}(r) = \Phi^{-}_{\rho\,\ell\, m}\, r^{\ell}. \tag{33}$$

$$\phi^{+}_{\rho\,\ell\, m}(r) = \Phi^{+}_{\rho\,\ell\, m}\, g_{\ell}(r). \tag{34}$$

که،

$$\Phi^{-}_{\rho\,\ell\, m} = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V_{\boldsymbol{s}})\, [g_{\ell}(s)]\, \overline{[\Upsilon_{\ell\, m}(\hat{\boldsymbol{s}})]}\, \rho(\boldsymbol{s}). \tag{35}$$

$$\Phi^{+}_{\rho\,\ell\, m} = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V_{\boldsymbol{s}})\, s^{\ell}\, \overline{[\Upsilon_{\ell\, m}(\hat{\boldsymbol{s}})]}\, \rho(\boldsymbol{s}). \tag{36}$$

و اگر ρ سمتی-متقارن باشد،

$$\phi^{-}_{\rho}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell} r^{\ell}\, [\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}})] \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V_{\boldsymbol{s}})\, [g_{\ell}(s)]\, [\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}})]\, \rho(\boldsymbol{s}). \tag{37}$$

$$\phi^{+}_{\rho}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell} [g_{\ell}(r)]\, [\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}})] \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V_{\boldsymbol{s}})\, s^{\ell}\, [\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}})]\, \rho(\boldsymbol{s}). \tag{38}$$

پس،

$$\phi^{-}_{\rho\,\ell}(r) = \Phi^{-}_{\rho\,\ell}\, r^{\ell}. \tag{39}$$

$$\phi^{+}_{\rho\,\ell}(r) = \Phi^{+}_{\rho\,\ell}\, g_{\ell}(r). \tag{40}$$

که،

$$\Phi^{-}_{\rho\,\ell} = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V_{\boldsymbol{s}})\, [g_{\ell}(s)]\, [\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}})]\, \rho(\boldsymbol{s}). \tag{41}$$

$$\Phi^{+}_{\rho\,\ell} = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\, V_{\boldsymbol{s}})\, s^{\ell}\, [\Pi_{\ell}(\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}})]\, \rho(\boldsymbol{s}). \tag{42}$$

3 بارِ سمتی-متقارن، بیرونِ یک گویِ دیئلکتریک

ناحیه یِ $\mathbb{B}$ یک گوی به شعاعِ a است. چگالی-یِ-بارِ ρ، که بیرونِ این گوی است، نسبت به یک محور که از مرکزِ گوی میگذرد سمتی-متقارن است. محورِ z را بر این محور، و مبدئ را بر مرکزِ گوی میگذارم. بخشِ اضافی یِ بار-ِ-تصویر را هم (نسبت به محورِ z) سمتی-متقارن میگیرم: چگالی-یِ-بارِ α (برا یِ $\phi_{\rm in}$) بیرونِ گوی، و چگالی-یِ-بارِ β (برا یِ $\phi_{\rm out}$) درونِ گوی است:

$$\phi_{\rm in} = \phi_\rho + \phi_\alpha. \qquad (43)$$

$$\phi_{\rm out} = \phi_\rho + \phi_\beta. \qquad (44)$$

$$\alpha(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad r < a. \qquad (45)$$

$$\beta(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad r > a. \qquad (46)$$

گیرم یک گویِ $\mathbb{B}_{\rm out}$، هممرکز با $\mathbb{B}$ و با شعاعِ $a_{\rm out}$ بزرگتر از a، هست که ρ درونِ $\mathbb{B}_{\rm out}$ صفر است. در این صورت α هم درونِ $\mathbb{B}_{\rm out}$ صفر است:

$$a_{\rm out} > a. \qquad (47)$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad r < a_{\rm out}. \qquad (48)$$

$$\alpha(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad r > a_{\rm out}. \qquad (49)$$

ϕ_ρ^- و ϕ_α^- را مثلِ (28)، و با $a_{\rm out}$ (به جا یِ a) تعریف میکنم. به این ترتیب،

$$\phi_{\rm in}(\boldsymbol{r}) = \phi_\rho^-(\boldsymbol{r}) + \phi_\alpha^-(\boldsymbol{r}), \qquad r < a_{\rm out}. \qquad (50)$$

$$\phi_{\rm out}(\boldsymbol{r}) = \phi_\rho^-(\boldsymbol{r}) + \phi_\beta^+(\boldsymbol{r}), \qquad a < r < a_{\rm out}. \qquad (51)$$

و شرط-ِ-مرزیها یِ (5) و (6) میشوند

$$(\phi_\rho^- + \phi_\beta^+)(\boldsymbol{r}) = (\phi_\rho^- + \phi_\alpha^-)(\boldsymbol{r}), \qquad r = a. \qquad (52)$$

$$[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\partial}\,(\phi_\rho^- + \phi_\beta^+)](\boldsymbol{r}) = e\,[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\partial}\,(\phi_\rho^- + \phi_\alpha^-)](\boldsymbol{r}), \qquad r = a. \qquad (53)$$

واردـ‌کردنِ $a_{\rm out}$ فقط به خاطرِ این است که بشود (51) را نوشت. در نهایت، به شرطِ این که ρ بارِ جایگزیده بر $\mathbb{S}$ نداشته باشد، می‌شود $a_{\rm out}$ را به a میل داد؛ و از کلیتِ مسئله کم نمی‌شود.

با استفاده از (18) و (39) و (40) و مانستِ‌ها یِ شان برا یِ α و β به جا یِ ρ، شرطـ‌ِـمرزی‌ها یِ (52) و (53) چنین می‌شوند.

$$\Phi^-_{\rho\,\ell}\,a^\ell+\Phi^+_{\beta\,\ell}\,g_\ell(a)=(\Phi^-_{\rho\,\ell}+\Phi^-_{\alpha\,\ell})\,a^\ell. \tag{54}$$

$$\ell\,\Phi^-_{\rho\,\ell}\,a^{\ell-1}+\Phi^+_{\beta\,\ell}\,(\mathrm{D}\,g_\ell)(a)=e\,\ell\,(\Phi^-_{\rho\,\ell}+\Phi^-_{\alpha\,\ell})\,a^{\ell-1}. \tag{55}$$

که D مشتق‌گیری ست. h_ℓ را چنین تعریف می‌کنم.

$$h_\ell=-\frac{\Xi\,\mathrm{D}\,g_\ell}{g_\ell}. \tag{56}$$

که Ξ چنین تعریف شده.

$$0=(\Xi\,\mathfrak{X})(\xi)-\xi\,\mathfrak{X}(\xi). \tag{57}$$

نتیجه می‌شود

$$\Phi^+_{\beta\,\ell}=\frac{a^\ell}{g_\ell(a)}\,\Phi^-_{\alpha\,\ell}. \tag{58}$$

$$\Phi^-_{\alpha\,\ell}=\frac{(1-e)\,\ell}{e\,\ell+h_\ell(a)}\,\Phi^-_{\rho\,\ell}. \tag{59}$$

از جمله دیده می‌شود

$$\Phi^-_{\alpha\,0}=0. \tag{60}$$

$$\Phi^+_{\beta\,0}=0. \tag{61}$$

چگالی‌ـیِ‌ـبارها یِ α و β را بر نیمه یِ مثبتِ محورِ z می‌گیرم: α متناظر با چگالی‌ـیِ‌ـطولی یِ λ_α، و β متناظر با چگالی‌ـیِ‌ـطولی یِ λ_β است. به این ترتیب،

$$\phi_\alpha(\boldsymbol{r})=\int_{a_{\rm out}}^\infty(\mathrm{d}\,s)\,[g(\boldsymbol{r},s\,\hat{\boldsymbol{z}})]\,\lambda_\alpha(s). \tag{62}$$

$$\phi_\beta(\boldsymbol{r})=\int_0^a(\mathrm{d}\,s)\,[g(\boldsymbol{r},s\,\hat{\boldsymbol{z}})]\,\lambda_\beta(s). \tag{63}$$

که نتیجه میدهند

$$\Phi^-_{\alpha\,\ell} = \int_{a_{\mathrm{out}}}^{\infty} (\mathrm{d}\,s)\,[g_\ell(s)]\,\lambda_\alpha(s). \tag{64}$$

$$\Phi^+_{\beta\,\ell} = \int_0^a (\mathrm{d}\,s)\,s^\ell\,\lambda_\beta(s). \tag{65}$$

البته ناحیه یِ انتگرالگیری را میشود $[0\,\infty)$ کرد:

$$\Phi^-_{\alpha\,\ell} = \int_0^{\infty} (\mathrm{d}\,s)\,[g_\ell(s)]\,\lambda_\alpha(s). \tag{66}$$

$$\Phi^+_{\beta\,\ell} = \int_0^{\infty} (\mathrm{d}\,s)\,s^\ell\,\lambda_\beta(s). \tag{67}$$

از (58) و (66) نتیجه میشود

$$\Phi^+_{\beta\,\ell} = \frac{a^\ell}{g_\ell(a)}\,\int_0^{\infty} (\mathrm{d}\,s)\,[g_\ell(s)]\,\lambda_\alpha(s). \tag{68}$$

حالتِ ویژه این است.

$$(n,\ell) = (2,0). \tag{69}$$

گیرم حالت ناویژه است. در این صورت g_ℓ توانی ست:

$$g_\ell(\xi) \propto \xi^{2-n-\ell}. \tag{70}$$

$$h_\ell(\xi) = \ell + n - 2. \tag{71}$$

و (59) میشود

$$\Phi^-_{\alpha\,\ell} = \frac{(1-e)\,\ell}{(1+e)\,\ell + n - 2}\,\Phi^-_{\rho\,\ell}. \tag{72}$$

از (68) و (70) هم نتیجه میشود

$$\Phi^+_{\beta\,\ell} = \int_0^{\infty} (\mathrm{d}\,s)\,a^{-2+n+2\,\ell}\,s^{2-n-\ell}\,\lambda_\alpha(s). \tag{73}$$

در انتگرال، s را با $\mathfrak{s}$ جایگزین میکنم و بعد این تغییر- ِ-متغیر را به کار میبَرم.

$$\mathfrak{s} = \frac{a^2}{s}. \tag{74}$$

به این ترتیب،

$$\Phi^{+}_{\beta\,\ell} = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\, s^\ell \left(\frac{s}{a}\right)^{n-4} \lambda_\alpha\left(\frac{a^2}{s}\right). \tag{75}$$

از مقایسه ی ِ این با (65) نتیجه میشود

$$\lambda_\beta(s) = \left(\frac{s}{a}\right)^{n-4} \lambda_\alpha\left(\frac{a^2}{s}\right). \tag{76}$$

پتانسیل ِ ناشی از ρ در $\mathbb{B}_{\mathrm{out}}$ را میشود با یک چگالی-ی ِ-طولی ی ِ λ_ρ بیرون ِ $\mathbb{B}_{\mathrm{out}}$ بر نیمه ی ِ مثبت ِ محور ِ z ساخت:

$$\lambda_\rho(s) = 0, \qquad s < a_{\mathrm{out}}. \tag{77}$$

$$\phi^{-}_{\rho}(\boldsymbol{r}) = \int_0 a_{\mathrm{out}}{}^\infty (\mathrm{d}\,s)\ [g(\boldsymbol{r}, s\,\hat{\boldsymbol{z}})]\, \lambda_\rho(s). \tag{78}$$

که البته میشود

$$\phi^{-}_{\rho}(\boldsymbol{r}) = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\ [g(\boldsymbol{r}, s\,\hat{\boldsymbol{z}})]\, \lambda_\rho(s). \tag{79}$$

به این ترتیب،

$$\Phi^{-}_{\rho\,\ell} = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\, [g_\ell(s)]\, \lambda_\rho(s). \tag{80}$$

این را در (72) میگذارم:

$$\Phi^{-}_{\alpha\,\ell} = \frac{(1-e)\,\ell}{e\,\ell + \ell + n - 2}\, \int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\, [g_\ell(s)]\, \lambda_\rho(s). \tag{81}$$

عملگر ِ L را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{L} = -\Xi\ \mathrm{D} + 2 - n. \tag{82}$$

و دیده میشود

$$\mathsf{L}\, g_\ell = \ell\, g_\ell. \tag{83}$$

پس (81) میشود

$$\Phi^-_{\alpha\,\ell} = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\ \left\{\left[\frac{(1-e)\,\mathsf{L}}{(1+e)\,\mathsf{L}+n-2}\,g_\ell\right](s)\right\}\ \lambda_\rho(s). \tag{84}$$

که نتیجه میدهد

$$\Phi^-_{\alpha\,\ell} = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\,[g_\ell(s)]\ \left[\frac{(1-e)\,\mathsf{L}^\dagger}{(1+e)\,\mathsf{L}^\dagger+n-2}\,\lambda_\rho\right](s). \tag{85}$$

از مقایسه یِ این با (64) هم نتیجه میشود

$$\lambda_\alpha = \frac{(1-e)\,\mathsf{L}^\dagger}{(1+e)\,\mathsf{L}^\dagger+n-2}\,\lambda_\rho. \tag{86}$$

یا،

$$\lambda_\alpha = \frac{1-e}{1+e}\,(\lambda_\rho + \grave{\lambda}_\rho). \tag{87}$$

$$\grave{\lambda}_\rho = \frac{2-n}{(1+e)\,\mathsf{L}^\dagger+n-2}\,\lambda_\rho. \tag{88}$$

رابطه یِ اخیر یعنی

$$[(1+e)\,\mathsf{L}^\dagger+n-2]\,\grave{\lambda}_\rho = (2-n)\,\lambda_\rho. \tag{89}$$

این یک معادله-یِ-دیفرانسیل برا یِ $\grave{\lambda}_\rho$ است. از (82) دیده میشود

$$\mathsf{L}^\dagger = \Xi\,\mathrm{D} + 3 - n. \tag{90}$$

پس،

$$\left[\Xi\,\mathrm{D} + 1 - \frac{e\,(n-2)}{1+e}\right]\,\grave{\lambda}_\rho = \frac{2-n}{1+e}\,\lambda_\rho. \tag{91}$$

از (49) یک شرط- ِ-مرزی برا یِ λ_α نتیجه میشود.

$$\lambda_\alpha(s) = 0, \quad s < a_{\mathrm{out}}. \tag{92}$$

به این ترتیب، یک شرط- ِ-مرزی برا یِ $\grave{\lambda}_\rho$ به دست میئاید:

$$\grave{\lambda}_\rho(s) = 0, \quad s < a_{\mathrm{out}}. \tag{93}$$

پارامترِ ν را چنین تعریف میکنم.

$$\nu = \frac{n-2}{1+e}. \tag{94}$$

جوابِ (91)، همراه با شرط- ِ-مرزی یِ (92)، میشود

$$\grave{\lambda}_\rho(s) = -\frac{\nu}{s}\int_0^s (\mathrm{d}\,z)\left(\frac{s}{z}\right)^{e\,\nu}\lambda_\rho(z). \tag{95}$$

به این ترتیب،

$$\lambda_\alpha(s) = \frac{1-e}{1+e}\left[\lambda_\rho(s) - \frac{\nu}{s}\int_0^s (\mathrm{d}\,z)\left(\frac{s}{z}\right)^{e\,\nu}\lambda_\rho(z)\right]. \tag{96}$$

$$\lambda_\beta(s) = \frac{1-e}{1+e}\left(\frac{s}{a}\right)^{n-4}\left[\lambda_\rho\!\left(\frac{a^2}{s}\right) - \frac{\nu\,s}{a^2}\int_0^{a^2/s}(\mathrm{d}\,z)\left(\frac{a^2}{s\,z}\right)^{e\,\nu}\lambda_\rho(z)\right]. \tag{97}$$

در انتگرال، z را با $\mathfrak{z}$ جایگزین میکنم و بعد این تغییر- ِ-متغیر را به کار میبَرم.

$$\mathfrak{z} = \frac{a^2}{z}. \tag{98}$$

به این ترتیب،

$$\lambda_\beta(s) = \frac{1-e}{1+e}\left(\frac{s}{a}\right)^{n-4}\left[\lambda_\rho\!\left(\frac{a^2}{s}\right) - \frac{\nu}{s}\int_s^\infty(\mathrm{d}\,\mathfrak{z})\left(\frac{\mathfrak{z}}{s}\right)^{-2+e\,\nu}\lambda_\rho\!\left(\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)\right]. \tag{99}$$

از جمله تحقیق میکنم (61) درست است. از (67) دیده میشود

$$\Phi^{+}_{\beta\,0} = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\,\lambda_\beta(s). \tag{100}$$

به این ترتیب،

$$\Phi^{+}_{\beta\,0}=\frac{1-e}{1+e}\left[\int_0^\infty (\mathrm{d}\,s)\left(\frac{s}{a}\right)^{n-4}\lambda_\rho\left(\frac{a^2}{s}\right)-\mathfrak{I}\right]. \tag{101}$$

$$\mathfrak{I}=\nu\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\,s}{s}\left(\frac{s}{a}\right)^{n-4}\int_s^\infty(\mathrm{d}\,z)\left(\frac{z}{s}\right)^{-2+e\,\nu}\lambda_\rho\left(\frac{a^2}{z}\right). \tag{102}$$

در طرفِ راستِ رابطه یِ اخیر، ترتیبِ انتگرالگیریها را عوض میکنم:

$$\mathfrak{I}=\nu\int_0^\infty(\mathrm{d}\,z)\int_0^z\frac{\mathrm{d}\,s}{s}\left(\frac{s}{a}\right)^{n-4}\left(\frac{z}{s}\right)^{-2+e\,\nu}\lambda_\rho\left(\frac{a^2}{z}\right). \tag{103}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathfrak{I}=\frac{\nu}{n-2-e\,\nu}\int_0^\infty(\mathrm{d}\,z)\left(\frac{z}{a}\right)^{n-4}\lambda_\rho\left(\frac{a^2}{z}\right). \tag{104}$$

البته،

$$\nu=n-2-e\,\nu. \tag{105}$$

از (101) و (104) و (105) نتیجه میشود (61) درست است. رابطه یِ (61) یعنی بارِ کلِ متناظر با β صفر است.

4 بارِ نقطِئی

یک حالتِ خاص این است که ρ متناظر است با یک بارِ نقطِئی (q) در نقطه یِ ($c\,\hat{\boldsymbol{z}}$)، که رو یِ نیمه یِ مثبتِ محورِ z و بیرونِ $\mathbb{B}$ است:

$$\rho(\boldsymbol{r})=q\,\delta(\boldsymbol{r}-c\,\hat{\boldsymbol{z}}). \tag{106}$$

$$c>a. \tag{107}$$

این چگالی-یِ-حجمی متناظر است با چگالی-یِ-طولی یِ λ_ρ:

$$\lambda_\rho(s)=q\,\delta(s-c). \tag{108}$$

پس،

$$\grave{\lambda}_\rho(s) = -\frac{q\,\nu}{c}\left(\frac{s}{c}\right)^{-1+e\,\nu}\Theta(s-c). \tag{109}$$

که Θ تابعِ هِویسایدِ [2] (پله یِ واحد) است. برا یِ λ_β هم،

$$\lambda_\beta = \frac{1-e}{1+e}\,(\lambda_{\rm p}+\lambda_{\rm l}). \tag{110}$$

$$\lambda_{\rm p}(s) = q\left(\frac{a}{c}\right)^{n-2}\delta\!\left(s-\frac{a^2}{c}\right). \tag{111}$$

$$\lambda_{\rm l}(s) = -\frac{q\,\nu}{c}\left(\frac{a}{c}\right)^{n-4}\left(\frac{c\,s}{a^2}\right)^{-1+\nu}\Theta\!\left(\frac{a^2}{c}-s\right). \tag{112}$$

به این ترتیب،

$$\lambda_\alpha(s) = q\,\frac{1-e}{1+e}\left[\delta(s-c)-\frac{\nu}{c}\left(\frac{s}{c}\right)^{-1+e\,\nu}\Theta(s-c)\right]. \tag{113}$$

$$\begin{aligned}\lambda_\beta(s) = q\,\frac{1-e}{1+e}\left(\frac{a}{c}\right)^{n-2}&\Bigg[\delta\!\left(s-\frac{a^2}{c}\right)\\ &-\frac{\nu}{c}\left(\frac{c}{a}\right)^{2}\left(\frac{c\,s}{a^2}\right)^{-1+\nu}\Theta\!\left(\frac{a^2}{c}-s\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{114}$$

5 همگرایی

پتانسیلِ ناشی از λ_α، بر محورِ z چنین است.

$$\phi_\alpha(r\,\hat{\boldsymbol{z}}) = \int(\mathrm{d}\,s)\,[g(r\,\hat{\boldsymbol{z}}, s\,\hat{\boldsymbol{z}})]\,\lambda_\alpha(z). \tag{115}$$

همچنین،

$$g(r\,\hat{\boldsymbol{z}}, s\,\hat{\boldsymbol{z}}) \propto s^{2-n}, \qquad s \gg |r|. \tag{116}$$

پس با λ_α به شکلِ (113)، انتگرالِ طرف- ِ-راستِ (115) همگرا ست، اگر

$$-1 > -1 + e\,\nu + 2 - n. \tag{117}$$

ساده‌-شده، شرط-ِ-همگرایی یِ (117) میشود

$$\nu > 0. \tag{118}$$

این شرط ضمنَن تضمین میکند λ_β انتگرالپذیر است. حالتها یی که (118) برقرار نیست را میشود با گسترشِ تحلیلی بررسی کرد.

6 پانوشتها

[1] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[2] Heaviside