X1-196 (2026/05/03)

منشور، انحرافِ نور

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

انحرافِ نور در یک منشور بررسی میشود، از جمله وضعیت ی که انحراف فرینه میشود، این که فرینه کمینه است یا بیشینه، و امکانِ فرینه.

0 درامد

یک باریکه به یک سطحِ منشور (سطحِ اول) میخُرَد، میشکند و به درونِ منشور میرود، و بر یکِ سطحِ دیگرِ منشور (سطحِ دوم) باز میشکنَد و از منشور بیرون میرود. زاویه یِ رئسِ منشور (زاویه یِ سطحِ دوم با سطحِ اول) را با a، و ضریب-ِ-شکستِ منشور نسبت به محیط را با n نشان میدهم، و آن را حقیقی میگیرم. باریکه با زاویه-یِ-فرودِ x به سطحِ اول میتابد، در منشور با زاویه یِ $\tilde{x}$ نسبت به عمود-بر-سطحِ اول، و با زاویه یِ $\tilde{y}$ نسبت به عمود-بر-سطحِ دوم حرکت میکند، و بیرونِ منشور با زاویه یِ y نسبت به سطحِ دوم حرکت میکند. قراردادِ علامت برا یِ زاویِها این است. در سطحِ اول، قرینه یِ جهتِ باریکه نسبت به عمود-بر-سطح به سو یِ درونِ منشور؛ در سطحِ دوم، جهتِ باریکه نسبت به عمود-بر-سطح به سو یِ بیرونِ منشور؛ همه با قراردادِ مثلثاتی-مثبت.

حالت ی را بررسی میکنم که بر هیچ کدام از سطحها بازتابشِ کلی رخ نمیدهد. رابطه یِ شکست

این است.

$$\frac{\sin x}{\sin \tilde{x}} = n. \tag{1}$$

$$\frac{\sin y}{\sin \tilde{y}} = n. \tag{2}$$

از هندسه یِ مسئله دیده میشود

$$\tilde{x} + \tilde{y} = a. \tag{3}$$

زاویه یِ انحرافِ باریکه (پس از دُ شکست) را با z نشان میدهم:

$$z = (x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y}). \tag{4}$$

که نتیجه میدهد

$$z = x + y - a. \tag{5}$$

1 مشتقِ اول

از (1) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\tilde{x}}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\cos x}{n\,\cos \tilde{x}}. \tag{6}$$

از (2) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,\tilde{y}} = \frac{n\,\cos \tilde{y}}{\cos y}. \tag{7}$$

از (3) هم نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\tilde{y}}{\mathrm{d}\,\tilde{x}} = -1. \tag{8}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\,\tilde{y}}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{\cos x}{n\,\cos\tilde{x}}. \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{(\cos x)\,(\cos\tilde{y})}{(\cos\tilde{x})\,(\cos y)}. \tag{10}$$

و مشتقِ z نسبت به x چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} = 1 - \frac{(\cos x)\,(\cos\tilde{y})}{(\cos\tilde{x})\,(\cos y)}. \tag{11}$$

انحراف فرینه میشود، وقت ی این مشتق صفر شود. یک حالتِ بدیهی برا یِ این فرینه این است که y با x برابر باشد (و $\tilde{y}$ هم با $\tilde{x}$ برابر باشد). کمیتِ $\mathfrak{X}$ متناظر با این حالت را با $\mathfrak{X}_\circ$ نشان میدهم:

$$y_\circ = x_\circ. \tag{12}$$

$$\tilde{y}_\circ = \tilde{x}_\circ. \tag{13}$$

یکتایی یِ نقطه یِ فرینه را بررسی میکنم. گیرم مشتقِ z نسبت به x صفر است. از (11) نتیجه میشود

$$\frac{\cos y}{\cos\tilde{y}} = \frac{\cos x}{\cos\tilde{x}}. \tag{14}$$

دُ-طرف را مجذور میکنم و (1) و (2) را به کار میبَرم:

$$\frac{1-\sin^2 y}{n^2-\sin^2 y} = \frac{1-\sin^2 x}{n^2-\sin^2 x}. \tag{15}$$

و از این هم،

$$(1-n^2)\,\sin^2 y = (1-n^2)\,\sin^2 x. \tag{16}$$

گیرم

$$n^2 \neq 1. \tag{17}$$

در این صورت،

$$\sin^2 y = \sin^2 x. \tag{18}$$

و این هم نتیجه میدهد

$$\sin^2 \tilde{y} = \sin^2 \tilde{x}. \tag{19}$$

یک حالت که (17) برقرار نیست این است که

$$n = 1. \tag{20}$$

که یعنی شکست رخ نمیدهد:

$$z = 0. \tag{21}$$

یک حالت ِ دیگر که (17) برقرار نیست این است که

$$n = -1. \tag{22}$$

در این صورت،

$$x = -\tilde{x}. \tag{23}$$

$$y = -\tilde{y}. \tag{24}$$

که نتیجه میدهد

$$z = -2\,a. \tag{25}$$

پس در این حالت (هم) انحراف ثابت است. جز در این حالتها، (20) یا (22)، رابطه ی ِ (17) برقرار است، و (19) نتیجه میدهد

$$\tilde{y} = \pm\tilde{x}. \tag{26}$$

رابطه یِ (3)، همراه با این که $(a \neq 0)$، نتیجه میدهد

$$\tilde{y} \neq -\tilde{x}. \tag{27}$$

پس، (26) میشود

$$\tilde{y} = \tilde{x}. \tag{28}$$

و، با استفاده از (1) و (2) و (28)،

$$y = x. \tag{29}$$

رابطِها یِ (29) و (28) هم ان رابطِها یِ (12) و (13) اند: نقطه یِ فرینه یکتا ست، مگر قدر- ِ-مطلقِ ضریب- ِ-شکست یک باشد. قدر- ِ-مطلقِ ضریب- ِ-شکست یک باشد هم، انحراف ثابت است. این که فرینه یکتا ست، یعنی در حالت ِ فرینه

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\circ. \tag{30}$$

2 مشتقِ دوم

از (11) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{(\mathrm{d}\, x)^2} = \frac{(\cos x)\,(\cos \tilde{y})}{(\cos \tilde{x})\,(\cos y)}\, Z. \tag{31}$$

$$Z = \tan x - (\tan y)\,\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} + (\tan \tilde{y})\,\frac{\mathrm{d}\, \tilde{y}}{\mathrm{d}\, x} - (\tan \tilde{x})\,\frac{\mathrm{d}\, \tilde{x}}{\mathrm{d}\, x}. \tag{32}$$

از جمله،

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2 z}{(\mathrm{d}\, x)^2}\right]_\circ = Z_\circ. \tag{33}$$

$$\begin{aligned} Z_\circ &= 2\,\left[\tan x - (\tan \tilde{x})\,\frac{\cos x}{n\,\cos \tilde{x}}\right]_\circ, \\ &= \left\{(2\,\tan x)\,\left[1 - \left(\frac{\cos\, x}{n\,\cos \tilde{x}}\right)^2\right]\right\}_\circ. \end{aligned} \tag{34}$$

که نتیجه میدهد

$$Z_\circ = (n^2 - 1) \left(\frac{2 \tan x}{n^2 - \sin^2 x} \right)_\circ . \tag{35}$$

شرط ِ این که (در سطح ِ اول) بازتابش- ِ -کلی رخ ندهد این است که

$$n^2 - \sin^2 x \geq 0. \tag{36}$$

پس علامت ِ $Z_\circ$ هم ان علامت ِ $(n^2 - 1)$ است:

$$\mathsf{sgn}(Z_\circ) = \mathsf{sgn}(n^2 - 1). \tag{37}$$

این یعنی فرینه، اگر قدر- ِ -مطلق ِ ضریب- ِ -شکست بزرگتر از یک باشد (مثلَن درون ِ منشور آب بیرون ِ منشور هوا) کمینه است، و اگر قدر- ِ -مطلق ِ ضریب- ِ -شکست کوچکتر از یک باشد (مثلَن درون ِ منشور هوا بیرون ِ منشور آب) بیشینه است

3 امکان ِ فرینه

در حالت ِ فرینه، (28) برقرار است، یا (30) برقرار است، که با آن (13) هم ان (28) میشود. (3) همراه با اینها نتیجه میدهد

$$\tilde{x}_\circ = \frac{a}{2}. \tag{38}$$

پس،

$$\sin x_\circ = n \sin \frac{a}{2}. \tag{39}$$

این ممکن است، اگر و تنها اگر

$$\left(n \sin \frac{a}{2} \right)^2 \leq 1. \tag{40}$$

که همئرز است با

$$n^2\left(1-\cos a\right)\leq 2. \tag{41}$$

این رابطه، اگر قدر- ِ-مطلقِ ضریب- ِ-شکست کوچکتر از یک باشد برقرار است؛ اگر نَ، یک شرط برا یِ زاویه-یِ-رئس ِ a بر حسب ِ ضریب- ِ-شکست ِ n است:

$$a\leq \cos^{-1}\left(1-\frac{2}{n^2}\right). \tag{42}$$

و شرط ِ (41) را میشود چنین خلاصه کرد.

$$a\leq \cos^{-1}\left[\max\left(-1,1-\frac{2}{n^2}\right)\right]. \tag{43}$$