X1-195 (2026/04/03)

گرما-رسانش، و تئخیر

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

یک محیطِ گرما-رسانا از یک چشمه گرما میگیرد. بستگیِ زمانی و مکانی یِ دما در این محیط بررسی میشود. به ویژه، تئخیرِ زمانی یِ دما نسبت به چشمه بررسی میشود.

0 درامد

دما را با T، زمان را با t، و مکان را با $\boldsymbol{r}$ نشان میدهم. $(t, \boldsymbol{r})$ را با r نشان میدهم. شاخصها یِ لاتین مقدارها یِ فضایی (مثبت) میگیرند، r^0 هم ان t است:

$$r^0 = t. \tag{1}$$

شاخصها یِ یونانی مقدار زمانی (صفر) یا فضایی (مثبت) میگیرند. مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبت به r^α را با $(\partial_\alpha\,\mathfrak{X})$، و مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبت به مکان را با $(\boldsymbol{\partial}\,\mathfrak{X})$ نشان میدهم.

با معادله یِ پیوستگی، مشتقِ زمانی یِ دما به جریانِ انرژی مربوط میشود:

$$c\,\partial_0\,T = -\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{J} + Q \tag{2}$$

c ظرفیتِ گرمایی بر حجم است، $\boldsymbol{J}$ چگالی یِ جریانِ انرژی ست، و Q چشمه یِ گرما ست. شکلِ انتگرالی یِ این معادله چنین است.

$$\int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V)\,c\,\dot{T}=-\oint_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S)\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}+\int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V)\,Q. \tag{3}$$

$\mathbb{S}$ مرزِ $\mathbb{V}$ است، و $\boldsymbol{n}$ بردارِ یکه یِ عمود بر $\mathbb{S}$ و به سو یِ بیرونِ $\mathbb{V}$ است. جمله یِ اول در طرفِ راست، آهنگِ ورودِ انرژی به $\mathbb{V}$ از مرزِ آن است.

یک ی از راهها یِ انتقال- ِ-انرژی گرما-رسانش است. در حالت ی که تغییرِ دما نسبت به مکان شدید نیست، چگالی یِ جریانِ انرژی با گرادیانِ دما متناسب است:

$$\boldsymbol{J}=-K\,\boldsymbol{\partial}\,T. \tag{4}$$

K گرما-رسانندگی ست. از ترکیبِ (3) و (4) نتیجه میشود

$$c\,\partial_0\,T=\boldsymbol{\partial}\cdot(K\,\boldsymbol{\partial}\,T)+Q. \tag{5}$$

شکلِ انتگرالی یِ این معادله چنین است.

$$\int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V)\,c\,\dot{T}=\oint_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S)\,K\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\partial}\,T+\int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V)\,Q. \tag{6}$$

جمله یِ اول در طرفِ راست، آهنگِ ورودِ انرژی به $\mathbb{V}$ از مرزِ آن است. میشود این جمله را برداشت و Q را تغییر داد، چنان که معادله عوض نشود. برا یِ این کار، $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\partial}\,T)$ بلا-فاصله-بیرونِ-مرز را صفر میگذارم و $\tilde{Q}$ را به جا یِ Q میگذارم:

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\partial}\,T)_{\mathrm{out}}=0. \tag{7}$$

$$\tilde{Q}(r)=Q(r)+\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S')\,[\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\,Q_{\mathbb{S}}(t,\boldsymbol{r}'). \tag{8}$$

$$Q_{\mathbb{S}}=K\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\partial}\,T)_{\mathrm{in}}-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\partial}\,T)_{\mathrm{out}}]. \tag{9}$$

شاخصها یِ in و out یعنی حد وقت ی نقطه از، به ترتیب، درون و بیرون به مرز میرود. $Q_{\mathbb{S}}$ یک چشمه یِ سطحی ست: فقط بر $\mathbb{S}$ ناصفر است. معادله یِ (5) چنین میشود.

$$c\,\partial_0\,T=\boldsymbol{\partial}\cdot(K\,\boldsymbol{\partial}\,T)+\tilde{Q}. \tag{10}$$

همراه با این معادله، شرط- ِ-مرزی یِ (7) هست. معادله یِ (6) هم میشود

$$\int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V)\,c\,\dot{T} = \int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V)\,\tilde{Q}. \tag{11}$$

یا، همئرز با آن،

$$\int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V)\,c\,\dot{T} = \int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S)\,Q_{\mathbb{S}} + \int_{\mathbb{V}}(\mathrm{d}\,V)\,Q. \tag{12}$$

از این پس c را مستقل از مکان میگیرم. D (ضریب ِ پخش)، و W (چشمه-یِ-بهنجار ِ گرما) را چنین تعریف میکنم.

$$c\,D = K. \tag{13}$$

$$c\,W = Q. \tag{14}$$

معادله یِ (5) چنین میشود

$$\partial_0\,T = \boldsymbol{\partial}\cdot(D\,\boldsymbol{\partial}\,T) + W. \tag{15}$$

$\tilde{W}$ را هم شبیه ِ $\tilde{Q}$ تعریف میکنم:

$$\tilde{W}(r) = W(r) + \int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S')\,[\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\,W_{\mathbb{S}}(t,\boldsymbol{r}'). \tag{16}$$

$$W_{\mathbb{S}} = D\,[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\partial}\,T)_{\mathrm{in}} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\partial}\,T)_{\mathrm{out}}]. \tag{17}$$

معادله یِ (15) چنین میشود.

$$\partial_0\,T = \boldsymbol{\partial}\cdot(D\,\boldsymbol{\partial}\,T) + \tilde{W}. \tag{18}$$

همراه با این معادله، شرط- ِ-مرزی یِ (7) هست. از این پس D را ثابت میگیرم.

1 چشمه یِ مستقل از دما

وقت ی W مستقل از دما ست، (18) یک معادله یِ خطی برا یِ T است. این معادله را میشود، از جمله، با استفاده از تابع- ِ گرین [1] حل کرد. عملگرِ M را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{M} = \partial_0 - D\,\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}. \tag{19}$$

G (تابع- ِ گرین [1]) وارونِ M است:

$$(\mathsf{M}\,\mathsf{G})(r, r') = \delta(r, r'). \tag{20}$$

رابطه یِ (20) یک معادله یِ دیفرانسیل برا یِ G است. برا یِ تعیینِ یکتا یِ G، شرط- ِ مرزی هم لازم است. شرط- ِ مرزی برا یِ زمان به این مربوط است که اثرِ چشمه در زمانها یِ بعد وارد شود یا در زمانها یِ قبل. این را به کار میبَرَم که اثرِ چشمه در زمانها یِ بعد وارد شود. شرطِ مرزی بر مکان شبیهِ (7) است. پس این شرط- ِ مرزیها را به کار میبَرَم:

$$\mathsf{G}(r, r') = 0, \qquad t < t'. \tag{21}$$

$$(\boldsymbol{\partial}\,\mathsf{G})(r, r') = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{S}_{\text{out}}. \tag{22}$$

$\mathbb{S}_{\text{out}}$ هم یعنی بلافاصله بیرونِ $\mathbb{S}$: حد وقت ی نقطه از بیرون به $\mathbb{S}$ میرود. شرطِ (21) این است که اثرِ چشمه در زمانها یِ بعد وارد میشود: G تئخیری ست. شرطِ (22) (شرط- ِ مرزی یِ نُیمان [2]) این است که تبادل با مرز حذف شده، به جا یَ ش یک چشمه یِ جایگزیده-بر-سطح آمده. جوابِ (18) با شرط- ِ مرزی یِ (7) هم میشود

$$T(r) = \int (\mathrm{d}\,t') \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V')\,[\mathsf{G}(r, r')]\,\tilde{W}(r'). \tag{23}$$

برا یِ حلِ (20) با شرط- ِ مرزیها یِ (21) و (22)، ویژه-بردارها یِ لَپلَسی (با شرط- ِ مرزی یِ نُیمان [2]) را به کار میبَرَم:

$$[(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial} + \lambda_{\mathfrak{a}})\,\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}](\boldsymbol{r}) = 0. \tag{24}$$

$$(\boldsymbol{\partial}\,\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}})(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{S}. \tag{25}$$

$\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}$ ویژه-بردار، و $(-\lambda_{\mathfrak{a}})$ ویژه-مقدارِ متناظر است. لَپلَسی اِرمیتی ست و ویژه-بردارها یَ ش را میشود بر هم عمود کرد. چنین میکنم و ویژه-بردارها را یکه هم میکنم. لَپلَسی قطری-شدنی ست و ویژه-بردارها یَ ش، با این انتخابها، یک پایه یِ یکه-متعامد میسازند:

$$\delta_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V)\overline{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]}\,[\mathfrak{u}_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{r})]. \tag{26}$$

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{\mathfrak{a}}[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\,\overline{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]}. \tag{27}$$

البته اینها مالِ وقت ی ست که طیفِ لَپلَسی گسسته باشد. اگر چنین نباشد، دلتا یِ کْرُنِکِر [3] در (26) دلتا یِ دیرَک [4] میشود، و جمع در (27) انتگرال میشود. (27) ضمنَن نتیجه میدهد

$$\delta(r,r') = [\delta(t-t')]\,\sum_{\mathfrak{a}}[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\,\overline{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]}. \tag{28}$$

G را بر حسبِ ویژه-بردارها یِ لَپلَسی بسط میدهم:

$$\mathsf{G}(r,r') = \sum_{\mathfrak{a}}[\mathsf{G}_{\mathfrak{a}}(t-t')]\,[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\,\overline{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]}. \tag{29}$$

(از جمله) از این استفاده شده که $\mathsf{G}(r,r')$ تحتِ انتقال-ِ-زمان متقارن است، چون $\delta(r,r')$ چنین است. پس بستگی یِ $\mathsf{G}(r,r')$ به t و t' از طریقِ فقط $(t-t')$ است. (29) را در (20) میگذارم، و از (23) و خطی-مستقل-بودنِ ویژه-بردارها استفاده میکنم. نتیجه میشود

$$[(\partial_0 + D\,\lambda_{\mathfrak{a}})\,\mathsf{G}_{\mathfrak{a}}](t) = \delta(t). \tag{30}$$

شرط-ِ-مرزی یِ (21) هم نتیجه میدهد

$$\mathsf{G}_{\mathfrak{a}}(t) = 0, \qquad t < 0. \tag{31}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{G}_{\mathfrak{a}}(t) = [\Theta(t)]\,\exp(-D\,\lambda_{\mathfrak{a}}\,t). \tag{32}$$

که Θ تابعِ هِویساید [5] (پله یِ واحد) است. (29) و (32) نتیجه میدهند

$$\mathsf{G}(r,r') = [\Theta(t-t')]\,\sum_{\mathfrak{a}}[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\,\overline{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]}\,\exp[-D\,\lambda_{\mathfrak{a}}\,(t-t')]. \tag{33}$$

2 چشمه یِ نوسانی-با-زمان

یک حالتِ خاص، چشمه یِ (زمانی-)هماهنگ با بسامدِ (زاویئی یِ) ω است:

$$\tilde{W}(r) = [\tilde{W}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r})]\ \exp(-\mathrm{i}\,\omega\, t). \tag{34}$$

این را در (23) میگذارم، و (33) را به کار میبَرم:

$$T(r) = [T_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r})]\ \exp(-\mathrm{i}\,\omega\, t). \tag{35}$$

$$T_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V')\,[\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\,\tilde{W}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}'). \tag{36}$$

$$\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\,\overline{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]}}{D\,\lambda_{\mathfrak{a}} - \mathrm{i}\,\omega}. \tag{37}$$

$$[(-\mathrm{i}\,\omega - \boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})\,\mathsf{G}_{\mathrm{c}}](\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'). \tag{38}$$

دیده میشود

$$T_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})}{D\,\lambda_{\mathfrak{a}} - \mathrm{i}\,\omega}\ \left\{\int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V')\,\overline{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]}\,\tilde{W}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}')\right\}. \tag{39}$$

یا،

$$T_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathfrak{a}} [\Upsilon_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\ \exp[\mathrm{i}\,\theta_{\mathfrak{a}}(\omega)]. \tag{40}$$

$$\Upsilon_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})}{|D\,\lambda_{\mathfrak{a}} - \mathrm{i}\,\omega|}\ \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V')\,\overline{[\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]}\,\tilde{W}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r}'). \tag{41}$$

$$\theta_{\mathfrak{a}}(\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{D\,\lambda_{\mathfrak{a}}}. \tag{42}$$

$\theta_{\mathfrak{a}}$ تئخیر-ِ-فازِ متناظر با وجهِ $\mathfrak{a}$ است. تئخیر-ِ-زمانِ متناظر با وجهِ $\mathfrak{a}$ را با $\tau_{\mathfrak{a}}$ نشان میدهم:

$$\tau_{\mathfrak{a}}(\omega) = \frac{\theta_{\mathfrak{a}}(\omega)}{\omega}. \tag{43}$$

$$T(r) = \sum_{\mathfrak{a}} [\Upsilon_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\ \exp\{-\mathrm{i}\,\omega\,[t - \tau_{\mathfrak{a}}(\omega)]\}. \tag{44}$$

تئخیر-ِ-زمان به وجه و ω بستگی دارد. پس در حالتِ کلی که چشمه یک ترکیب-ِ-خطی از هماهنگها یِ با بسامدها یِ مختلف است، پاسخ (دما) یک تئخیر-ِ-زمانی یِ معین (نسبت به چشمه) ندارد.

3 بسامدها یِ بزرگ

ضریب- ِ-پخش ِ D از جنس ِ مجذور ِ طول تقسیم بر زمان است. با استفاده از ضریب- ِ-پخش ِ D و بسامد ِ ω، یک کمیت ِ Λ از جنس ِ عکس ِ مجذور ِ طول ساخته میشود:

$$\Lambda = \frac{\omega}{D}. \tag{45}$$

از (36) و (39) دیده میشود اگر $\lambda_{\mathfrak{a}}$ خیل ی بزرگتر از Λ باشد، اثر ِ وجه ِ $\mathfrak{a}$ در پاسخ تضعیف میشود: در پاسخ، Λ مثل ِ یک قطع- ِ-بالا برا یِ $\lambda_{\mathfrak{a}}$ ها ست. مسئله یک طول- ِ-مشخصه یِ دیگر هم دارد: R، (کوچکترین) اندازه یِ فضا. متناظر با این طول، وجه ِ $\mathfrak{a}$ یک وجه ِ کوتاه(-طول- ِ-مُج) است اگر

$$R^2\, \lambda_{\mathfrak{a}} \gg 1. \tag{46}$$

به طول- ِ-مُج تقسیم بر $(2\,\pi)$ طول- ِ-مُج- ِ-کاسته میگویم. $\lambda_{\mathfrak{a}}$ عکس ِ مجذور ِ طول- ِ-مُج- ِ-کاسته یِ متناظر با وجه ِ $\mathfrak{a}$ است. وجهها یِ کوتاه آنها یی اند که طول- ِ-مُج- ِ-کاسته یِ شان خیل ی کوچکتر از اندازه یِ سیستم است.

میگویم بسامد ِ ω زیاد است، وقت ی

$$R^2\, \Lambda \gg 1. \tag{47}$$

وقت ی بسامد زیاد است، خیل ی از («بیشتر ِ») وجهها یِ زیر ِ قطع- ِ-بالا، وجه ِ کوتاه َند. برا یِ این وجهها، شرط- ِ-مرزی یِ فضایی (از جمله اندازه یِ سیستم) مهم نیست و جمع-بندی بر وجه را هم میشود به انتگرال تبدیل کرد:

$$\mathfrak{u}_{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{V}}. \tag{48}$$

$$[\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\,\overline{[\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]} = \exp[\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]. \tag{49}$$

$$\lambda_{\mathfrak{a}} = \boldsymbol{k}_{\mathfrak{a}}\cdot\boldsymbol{k}_{\mathfrak{a}}. \tag{50}$$

$$\sum_{\mathfrak{a}} \to \frac{V}{(2\,\pi)^n}\int(\mathrm{d}^n\, k_{\mathfrak{a}}). \tag{51}$$

V حجم ِ فضا و n بُعد ِ فضا ست. (49) وقت ی درست است (تقریب ِ خوب ی ست) که

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \ll R. \tag{52}$$

پس یک تقریب برا یِ حالتِ بسامد- ِ-زیاد به دست میئاید: گیرم بسامد زیاد است. در این صورت،

$$\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \int \frac{\mathrm{d}^n\,k_{\mathfrak{a}}}{(2\,\pi)^n}\,\frac{[\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r})]\,\overline{[\mathfrak{v}_{\mathfrak{a}}(\boldsymbol{r}')]}}{D\,\lambda_{\mathfrak{a}} - \mathrm{i}\,\omega}. \tag{53}$$

یا،

$$\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \int \frac{\mathrm{d}^n\,k}{(2\,\pi)^n}\,\frac{\exp[\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{D\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} - \mathrm{i}\,\omega}. \tag{54}$$

این یعنی برا یِ G_{c}، فضا عملَن $\mathbb{R}^n$ است. κ و ν را چنین تعریف میکنم.

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega}{2\,D}}. \tag{55}$$

$$\nu = \frac{n-2}{2}. \tag{56}$$

تابعِ بِسِلِ [6] ِ دگرگون از نُعِ دوم را با K نشان میدهم. (54) میشود

$$\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{[(1-\mathrm{i})\,\kappa]^{\nu}\,\mathsf{K}_{\nu}[(1-\mathrm{i})\,\kappa\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{(2\,\pi)^{\nu+1}\,\nu\,D\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{\nu}}. \tag{57}$$

تئخیر- ِ-فاز را با θ و تئخیر- ِ-زمان را با τ نشان میدهم:

$$\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = |\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|\,\exp(\mathrm{i}\,\theta). \tag{58}$$

$$\tau = \frac{\theta}{\omega}. \tag{59}$$

با استفاده از رفتارها یِ مجانبی یِ K، رفتارِ جواب نزدیک به چشمه و دور از چشمه را بررسی میکنم.

نزدیکِ چشمه،

$$(\kappa\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \ll 1 \quad \Rightarrow$$

$$\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\Gamma(\nu)}{4\,\pi^{\nu+1}\,\nu\,D\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{2\,\nu}}. \tag{60}$$

$$\theta = 0. \tag{61}$$

$$\tau = 0. \tag{62}$$

دور از چشمه،

$$(\kappa\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \gg 1 \quad \Rightarrow$$

$$\mathsf{G}_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{[(1-\mathrm{i})\,\kappa]^{\nu-(1/2)}}{2\,(2\,\pi)^{\nu+(1/2)}\,\nu\,D}\,\frac{\exp[(\mathrm{i}-1)\,\kappa\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{\nu+(1/2)}}. \tag{63}$$

$$\theta = \kappa\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - \frac{(2\,\nu-1)\,\pi}{8}. \tag{64}$$

$$\tau = \frac{\kappa\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\omega} - \frac{(2\,\nu-1)\,\pi}{8\,\omega}. \tag{65}$$

در این حالت G_{c} مثلِ یک مُجِ (محو-شونده یِ) بیرون-رونده است، که عدد-ِمُجَش κ است.
برا یِ چنین-مُج ی v_{p} (سرعتِ فاز) و v_{g} (سرعتِ گروه) تعریف میشود:

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{\omega}{\kappa}. \tag{66}$$

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\kappa}. \tag{67}$$

$$v_{\mathrm{p}} = 2\,D\,\kappa. \tag{68}$$

$$v_{\mathrm{p}} = \sqrt{2\,D\,\omega}. \tag{69}$$

$$v_{\mathrm{g}} = 4\,D\,\kappa. \tag{70}$$

$$v_{\mathrm{g}} = \sqrt{8\,D\,\omega}. \tag{71}$$

4 پانوشتها

[1] Green

[2] Neumann

[3] Kronecker

[4] Dirac

[5] Heaviside

[6] Bessel