

نوسانگر هماهنگ، با اصطکاک و نوفه IV

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

یک نوسانگر هماهنگ با اصطکاک خطی بررسی میشود، که یک نوفه ی سفید هم به آن نیرو وارد میکند. تحرک و ضریب - پخش تعریف میشوند و، با استفاده از بستگی ی زمانی ی تابع - د-نقطیها ی هم-زمان برا ی این نوسانگر، وقت ی نیرو ی بازگرداننده ی خطی-با-مکان نیست، رابطه ای بین تحرک و ضریب - پخش به دست میآید.

0 درآمد

این ادامه ی [1] و [2] و [3] است، با هم ان نماد-گذاری. مشتق-گیری (از تابعها ی یک-متغیری) را با D ، مشتق-گیری نسبت به متغیر i^m را با D_i ، و زمان را با t نشان میدهم. وقت ی زمان هم یک ی از متغیرها ی تابع است، زمان را متغیر 0^m میگیرم و قرارداد میکنم i در D_i ، فقط مقادارها ی ناصفر میگیرد. معادله ی حرکت یک نوسانگر هماهنگ با اصطکاک خطی و یک نیرو ی خارجی ی اضافی، که یک نوفه ی سفید بامیانگین صفر است، این است.

$$[P(D)]x = \xi. \quad (1)$$

x مکان، و ξ (نیروی خارجی تقسیم بر جرم) است. P هم یک چند-جملی است، که

$$P(s) = s^2 + \gamma s + \omega_0^2. \quad (2)$$

γ و ω_0 ثابتهای نا-منفی‌ی‌اند. جرم نوسانگر را با m نشان می‌دهم. $(-m\omega_0^2 x)$ نیروی بازگرداننده‌ی خطی-با-مکان، و $(-m\gamma)$ نیروی اصطکاک خطی-با-سرعت است. این که ξ (یا جرم ضرب در ξ) یک نوفه‌ی سفید با میانگین صفر است، یعنی ξ یک متغیر تصادفی‌ی وابسته-به-زمان است که

$$\langle \xi(t) \rangle = 0. \quad (3)$$

$$\langle [\xi(t_1)] [\xi(t_2)] \rangle = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1). \quad (4)$$

$\langle \mathfrak{X} \rangle$ میانگین $\mathfrak{X}$ است، و σ ثابت‌ی مثبت است. تبدیل - فوریه [4] ی $\mathfrak{X}$ را با $\tilde{\mathfrak{X}}$ نشان می‌دهم:

$$\tilde{\mathfrak{X}}(\omega) = \int (dt) [\exp(i\omega t)] \mathfrak{X}(t). \quad (5)$$

$$\mathfrak{X}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} [\exp(-i\omega t)] \tilde{\mathfrak{X}}(\omega). \quad (6)$$

روابط (3) و (4) چنین میشوند.

$$\langle \tilde{\xi}(\omega) \rangle = 0. \quad (7)$$

$$\langle [\tilde{\xi}(\omega_1)] [\tilde{\xi}(\omega_2)] \rangle = 2\pi \sigma^2 \delta(\omega_2 + \omega_1). \quad (8)$$

این که نوفه سفید است، یعنی طیف - بسامد آن مستقل از بسامد است: رابطه‌ی (8).

حالت‌ی را بررسی می‌کنم که نیروی بازگرداننده‌ی خطی-با-مکان نیست، ولی نیروی بازگرداننده‌ی خطی-با-سرعت هست:

$$\omega_0 = 0. \quad (9)$$

$$\gamma > 0. \quad (10)$$

چنان که در [3] به دست آمد،

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle + \frac{1 - \exp(-\gamma t)}{\gamma} \langle v(0) \rangle. \quad (11)$$

$$\langle v(t) \rangle = [\exp(-\gamma t)] \langle v(0) \rangle. \quad (12)$$

فرض میکنم برای t های مثبت، $[(D^j x)(0)]$ برای هر j مستقل از $[\xi(t)]$ است. در این صورت،

$$(\langle x^2 \rangle, \langle x v \rangle, \langle v^2 \rangle) = (\langle x^2 \rangle_h, \langle x v \rangle_h, \langle v^2 \rangle_h) + (\langle x^2 \rangle_\xi, \langle x v \rangle_\xi, \langle v^2 \rangle_\xi). \quad (13)$$

که،

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle_h &= \langle x^2(0) \rangle + 2 \frac{1 - \exp(-\gamma t)}{\gamma} \langle (x v)(0) \rangle \\ &\quad + \left[\frac{1 - \exp(-\gamma t)}{\gamma} \right]^2 \langle v^2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle (x v)(t) \rangle_h &= [\exp(-\gamma t)] \langle (x v)(0) \rangle \\ &\quad + \frac{\exp(-\gamma t) - \exp(-2\gamma t)}{\gamma} \langle v^2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_h = [\exp(-2\gamma t)] \langle v^2(0) \rangle. \quad (16)$$

$$\langle x^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{\gamma^3} [(\gamma t - 2) \exp(\gamma t) + \sinh(\gamma t) + 2] \exp(-\gamma t). \quad (17)$$

$$\langle (x v)(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} [\cosh(\gamma t) - 1] \exp(-\gamma t). \quad (18)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{2\gamma} [1 - \exp(-2\gamma t)]. \quad (19)$$

و در زمانها ی بزرگ،

$$\langle x^2(t) \rangle_h = \langle x^2(0) \rangle + \frac{2}{\gamma} \langle (x v)(0) \rangle + \frac{1}{\gamma^2} \langle v^2(0) \rangle + o(1). \quad (20)$$

$$\langle (x v)(t) \rangle_h = o(1). \quad (21)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_h = o(1). \quad (22)$$

$$\langle x^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{\gamma^3} \left(\gamma t - \frac{3}{2} \right) + o(1). \quad (23)$$

$$\langle (x v)(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{2\gamma^2} + o(1). \quad (24)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{2\gamma} + o(1). \quad (25)$$

پس، در زمانها ی بزرگ،

$$\frac{d \langle x^2(t) \rangle}{dt} = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} + o(1). \quad (26)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma} + o(1). \quad (27)$$

1 تحرک

تحرک رابطه ی سرعت (حد) با نیرو ی بیرونی را میدهد. یک جسم به جرم m تحت یک نیرو ی اصطکاک خطی-با-مکان و یک نیرو ی بیرونی (F_{ex}) است:

$$m D v = -m \gamma v + F_{\text{ex}}. \quad (28)$$

اگر نیرو ی بیرونی ثابت باشد، در زمانها ی بزرگ سرعت به یک مقدار ثابت (v_{∞}) میگراید:

$$v_{\infty} = \tau F_{\text{ex}}. \quad (29)$$

$$\tau = \frac{1}{m \gamma}. \quad (30)$$

به τ تحرک میگویند.

2 ضریب-پخش

ضریب-پخش آهنگ پخش-شدن را میدهد. در یک سیستم (یک-بعدی)، چگالی ی ذرات را با ρ و جریان ذرات را با I نشان میدهم: $\rho(t, q)$ و $I(t, q)$ ، به ترتیب، چگالی و جریان در زمان t و مکان q اند. تعداد کل ذرات را با N نشان میدهم:

$$N(t) = \int (dq) \rho(t, q). \quad (31)$$

اگر ذرات ساخته نشوند و نابود هم نشوند، بین چگالی و جریان معادله ی پیوستگی برقرار است:

$$0 = D_0 \rho + D_1 I. \quad (32)$$

فرض میکنم جمله‌ها ی مرزی در انتگرال-گیری‌ها ی جزئ-به-جزئ صفرند:

$$0 = \int (d q) (D_1 \mathfrak{J})(t, q). \quad (33)$$

این، از جمله تضمین میکند

$$D N = 0. \quad (34)$$

گشتاور n^m ذرات را با Q_n نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم:

$$Q_n(t) = \frac{1}{N} \int (d q) [\rho(t, q)] q^n. \quad (35)$$

دیده میشود

$$(D Q_n)(t) = \frac{1}{N} \int (d q) [(D_0 \rho)(t, q)] q^n. \quad (36)$$

وقت ی چگالی یکنواخت نباشد، جریان ی از ذرات برقرار میشود: از جاها ی پر-چگالتر به جاها ی کم-چگالتر. اگر چگالی نسبت به مکان کند-تغییر باشد، جریان با مشتق چگالی نسبت به مکان متناسب است:

$$I = -\mathfrak{D} D_1 \rho. \quad (37)$$

به $\mathfrak{D}$ ضریب پخش میگویند. از این پس فرض میکنم چگالی نسبت به مکان کند-تغییر است، پس (37) برقرار است. همچنین، $\mathfrak{D}$ را ثابت میگیرم. از (32) و (37) نتیجه میشود

$$D_0 \rho = \mathfrak{D} D_1 D_1 \rho. \quad (38)$$

به این، معادله ی پخش میگویند. با استفاده از این، (36) چنین میشود.

$$(D Q_n)(t) = \frac{\mathfrak{D}}{N} \int (d q) [(D_1 D_1 \rho)(t, q)] q^n. \quad (39)$$

که، با استفاده از (33) میشود

$$(D Q_n)(t) = \mathfrak{D} n(n-1) Q_{n-2}. \quad (40)$$

از جمله،

$$(D Q_2)(t) = 2 \mathfrak{D}. \quad (41)$$

کلتر (برای تحولات دیگر)، ضریب - پخش را چنین تعریف میکنند.

$$2 \mathfrak{D} = \lim_{t \rightarrow \infty} [(D C_2)(t)]. \quad (42)$$

که،

$$C_2 = Q_2 - (Q_1)^2. \quad (43)$$

به این ترتیب، روابط (11) و (26) نشان میدهند برای جسمی که تحت یک نیروی اصطکاک خطی - با مکان است،

$$\mathfrak{D} = \frac{\sigma^2}{2 \gamma^2}. \quad (44)$$

3 رابطه‌ی تحرک با ضریب - پخش

از (30) و (44) دیده میشود

$$\mathfrak{D} = \frac{m \sigma^2}{2 \gamma} \tau. \quad (45)$$

این هم، با استفاده از (27) میشود

$$\mathfrak{D} = [m \langle v^2(\infty) \rangle] \tau. \quad (46)$$

گیرم در زمان بینهایت سیستم در تعادل ترمودینامیکی است. از قضیه‌ی همپارش نتیجه میشود

$$m \langle v^2(\infty) \rangle = k_B T. \quad (47)$$

T دما (ی مطلق)، و k_B ثابت بولتسمان [5] است. (46) و (47) نتیجه میدهند

$$\mathfrak{D} = (k_B T) \tau. \quad (48)$$

به این، رابطه‌ی آینشتین [6] میگویند.

4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «نوسانگرِ هماهنگ، با اصطکاک و نوفه I» (2025/10/04) X1-191

[2] محمد خرمی؛ «نوسانگرِ هماهنگ، با اصطکاک و نوفه II» (2025/11/03) X1-192

[3] محمد خرمی؛ «نوسانگرِ هماهنگ، با اصطکاک و نوفه III» (2026/01/03) X1-193

[4] Fourier

[5] Boltzmann

[6] Einstein