

نوسانگر هماهنگ، با اصطکاک و نوفه III

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

یک نوسانگر هماهنگ با اصطکاک خطی بررسی میشود، که یک نوفه ی سفید هم به آن نیرو وارد میکند. حالت ی که این نوفه گاوسی ست (و مکان و مشتقهای ش در هر زمان از نوفه در زمانها ی بعد مستقل ند) را میشود با معادله ی فکیر-پلانک [1] بررسی کرد. با استفاده از این معادله، یک-نقطیها، و دُنقطی-ی-همزمانها به دست میآیند.

0 درآمد

این ادامه ی [2] و [3] است، با هم ان نماد-گذاری. مشتق-گیری (از تابعها ی یک-متغیری) را با D ، مشتق-گیری نسبت به متغیر i^m را با D_i ، و زمان را با t نشان میدهم. وقت ی زمان هم یک ی از متغیرها ی تابع است، زمان را متغیر 0^m میگیرم و قرارداد میکنم i در D_i ، فقط مقادارها ی ناصفر میگیرد. معادله ی حرکت یک نوسانگر هماهنگ با اصطکاک خطی و یک نیرو ی خارجی ی اضافی، که یک نوفه ی سفید بامیانگین صفر است، این است.

$$[P(D)] x = \xi. \quad (1)$$

x مکان، و ξ (نیروی خارجی تقسیم بر جرم) است. P هم یک چند-جملی است، که

$$P(s) = s^2 + \gamma s + \omega_0^2. \quad (2)$$

γ و ω_0 ثابتهای نا-منفی‌ی‌ند. جرم نوسانگر را با m نشان می‌دهم. $(-m\omega_0^2 x)$ نیروی بازگرداننده‌ی خطی-با-مکان، و $(-m\gamma)$ نیروی اصطکاک خطی-با-سرعت است. ریشه‌های P را با s_1 و s_2 نشان می‌دهم:

$$P(s_j) = 0. \quad (3)$$

$$(s_1, s_2) = -\frac{1}{2}(\gamma - \gamma', \gamma + \gamma'). \quad (4)$$

$$\gamma' = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}. \quad (5)$$

این که ξ (یا جرم ضرب در ξ) یک نوفه‌ی سفید با میانگین صفر است، یعنی ξ یک متغیر-تصادفی‌ی وابسته-به-زمان است که

$$\langle \xi(t) \rangle = 0. \quad (6)$$

$$\langle [\xi(t_1)] [\xi(t_2)] \rangle = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1). \quad (7)$$

$\langle \mathfrak{X} \rangle$ میانگین $\mathfrak{X}$ است، و σ ثابت‌ی مثبت است. تبدیل-فوریه [4] ی $\mathfrak{X}$ را با $\tilde{\mathfrak{X}}$ نشان می‌دهم:

$$\tilde{\mathfrak{X}}(\omega) = \int (dt) [\exp(i\omega t)] \mathfrak{X}(t). \quad (8)$$

$$\mathfrak{X}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} [\exp(-i\omega t)] \tilde{\mathfrak{X}}(\omega). \quad (9)$$

روابط (6) و (7) چنین میشوند.

$$\langle \tilde{\xi}(\omega) \rangle = 0. \quad (10)$$

$$\langle [\tilde{\xi}(\omega_1)] [\tilde{\xi}(\omega_2)] \rangle = 2\pi \sigma^2 \delta(\omega_2 + \omega_1). \quad (11)$$

این که نوفه سفید است، یعنی طیف-بسامد آن مستقل از بسامد است: رابطه‌ی (11).

1 معادله ی فکر- پلانک

(D x) را با v نشان میدهم و z را چنین تعریف میکنم.

$$v = D x. \quad (12)$$

$$(z^1, z^2) = (x, v). \quad (13)$$

معادله ی (1) چنین میشود.

$$(D z)(t) = \varpi[t, z(t)] + e \xi(t). \quad (14)$$

$$(\varpi^1, \varpi^2)(t, q, p) = (p, -\omega_o^2 q - \gamma p). \quad (15)$$

$$(e^1, e^2) = (0, 1). \quad (16)$$

چگالی ی- احتمال برای $[z(t)]$ را با ψ نشان میدهم: $[\psi(t, q, p)]$ چگالی ی احتمال برای این است که $[z(t)]$ برابر با (q, p) باشد. میانگین f (که تابع ی از t و z است) چنین میشود.

$$\langle f[t, z(t)] \rangle = \int (d q) (d p) [\psi(t, q, p)] f(t, q, p). \quad (17)$$

در محاسبه ی n - نقطه‌ها، میانگین حاصل - ضرب دست - بالا n عامل نوه ظاهر میشود. پس در محاسبه ی یک- و د- نقطه‌ای، فقط میانگین و همبستگی ی نوه ظاهر میشوند و نوه گاوسی باشد یا نه مهم نیست. از این پس نوه را گاوسی میگیرم و فرض میکنم برای t ها ی مثبت، $[(D^j x)(0)]$ برای هر j مستقل از $[\xi(t)]$ است. در این صورت ψ ، برای $(t \geq 0)$ ، معادله ی فکر- پلانک [1] را بر میآورد:

$$D_0 \psi = -D_i (\varpi^i \psi) + \frac{g^{ij} D_i D_j \psi}{2}. \quad (18)$$

$$g^{ij} = \sigma^2 e^i e^j. \quad (19)$$

به این ترتیب، معادله ی فکر- پلانک [1] چنین میشود.

$$D_0 \psi = H \psi. \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (H \psi)(t, q, p) = & -p (D_1 \psi)(t, q, p) + \omega_o^2 q (D_2 \psi)(t, q, p) + \gamma p (D_2 \psi)(t, q, p) \\ & + \gamma \psi(t, q, p) + \frac{\sigma^2 (D_2 D_2 \psi)(t, q, p)}{2}. \end{aligned} \quad (21)$$

تحول میانگینها هم از این رابطه به دست میآید.

$$\frac{d \langle f[t, z(t)] \rangle}{dt} = \int (dq) (dp) [(H \psi)(t, q, p)] f(t, q, p). \quad (22)$$

همچنین، فرض میکنم جملهها ی مرزی در انتگرال-گیریها ی جزئی-به-جزئی صفرند:

$$0 = \int (dq) (dp) (D_i \mathfrak{I}^i)(t, q, p). \quad (23)$$

این، از جمله تضمین میکند

$$\frac{d \langle 1 \rangle}{dt} = 0. \quad (24)$$

2 یک-نقطیها

از (21) تا (23) (و با انتگرال-گیری ی جزئی-به-جزئی) نتیجه میشود

$$D \langle \langle x \rangle, \langle v \rangle \rangle = (\langle v \rangle, -\omega_o^2 \langle x \rangle - \gamma \langle v \rangle). \quad (25)$$

البته این را میشود از (6) و (14) هم به دست آورد، چنان که در [1] انجام شد. نتیجه هم هم ان است که در [1] به دست آمد:

$$\langle x(t) \rangle = [A(t)] \langle x(0) \rangle + [B(t)] \langle v(0) \rangle. \quad (26)$$

$$\langle v(t) \rangle = [(D A)(t)] \langle x(0) \rangle + [(D B)(t)] \langle v(0) \rangle. \quad (27)$$

که،

$$A(t) = \left(\cosh \frac{\gamma' t}{2} + \frac{\gamma}{\gamma'} \sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \left[\exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right]. \quad (28)$$

$$B(t) = \frac{2}{\gamma'} \left(\sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \left[\exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right]. \quad (29)$$

$$(D A)(t) = -\frac{2\omega_o^2}{\gamma'} \left(\sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \left[\exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right]. \quad (30)$$

$$(D B)(t) = \left(\cosh \frac{\gamma' t}{2} - \frac{\gamma}{\gamma'} \sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \left[\exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right]. \quad (31)$$

3 د- نقطه‌های هم-زمان

از (21) تا (23) (و با انتگرال-گیری ی جزئی-به-جزئی) نتیجه میشود

$$D(\langle x^2 \rangle, \langle x v \rangle, \langle v^2 \rangle) = (2 \langle x v \rangle, -\omega_o^2 \langle x^2 \rangle - \gamma \langle x v \rangle + \langle v^2 \rangle, -2 \gamma \langle v^2 \rangle + \sigma^2). \quad (32)$$

جواب این هم، چنان که در [1] آمده، میشود

$$(\langle x^2 \rangle, \langle x v \rangle, \langle v^2 \rangle) = (\langle x^2 \rangle_h, \langle x v \rangle_h, \langle v^2 \rangle_h) + (\langle x^2 \rangle_\xi, \langle x v \rangle_\xi, \langle v^2 \rangle_\xi). \quad (33)$$

که،

$$\langle x^2(t) \rangle_h = [A^2(t)] \langle x^2(0) \rangle + 2 [(A B)(t)] \langle (x v)(0) \rangle + [B^2(t)] \langle v^2(0) \rangle. \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \langle (x v)(t) \rangle_h &= [(A D A)(t)] \langle x^2(0) \rangle + [(A D B + B D A)(t)] \langle (x v)(0) \rangle \\ &+ [(B D B)(t)] \langle v^2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle_h &= [(D A)^2(t)] \langle x^2(0) \rangle + 2 \{[(D A)(D B)](t)\} \langle (x v)(0) \rangle \\ &+ [(D B)^2(t)] \langle v^2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\langle x^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{2 \gamma \omega_o^2} \left[1 + \frac{4 \omega_o^2 - \gamma^2 \cosh(\gamma' t) - \gamma \gamma' \sinh(\gamma' t)}{\gamma'^2} \exp(-\gamma t) \right]. \quad (37)$$

$$\langle (x v)(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{\gamma'^2} [\cosh(\gamma' t) - 1] \exp(-\gamma t). \quad (38)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{2 \gamma} \left[1 + \frac{4 \omega_o^2 - \gamma^2 \cosh(\gamma' t) + \gamma \gamma' \sinh(\gamma' t)}{\gamma'^2} \exp(-\gamma t) \right]. \quad (39)$$

و در زمانهای بزرگ،

$$(\langle x^2 \rangle_h, \langle x v \rangle_h, \langle v^2 \rangle_h) = o(1). \quad (40)$$

$$(\langle x^2 \rangle_\xi, \langle x v \rangle_\xi, \langle v^2 \rangle_\xi) = \frac{\sigma^2}{2 \gamma} (\omega_o^{-2}, 0, 1) + o(1). \quad (41)$$

پس، در زمانهای بزرگ،

$$(\langle x^2 \rangle, \langle x v \rangle, \langle v^2 \rangle) = \frac{\sigma^2}{2 \gamma} (\omega_o^{-2}, 0, 1) + o(1). \quad (42)$$

4 حالت حدی: نبود نیروی بازگرداننده ی خطی - با مکان

یک حالت خاص این است که بخش وابسته - به - مکان نیرو صفر باشد. این یعنی

$$\omega_o = 0. \quad (43)$$

گیرم بخش وابسته - به - سرعت نیرو هنوز هست (و بازدارنده است، یعنی γ مثبت است). در این حالت،

$$A(t) = 1. \quad (44)$$

$$B(t) = \frac{1 - \exp(-\gamma t)}{\gamma}. \quad (45)$$

$$(D A)(t) = 0. \quad (46)$$

$$(D B)(t) = \exp(-\gamma t). \quad (47)$$

و یک - نقطه‌ها میشوند

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle + \frac{1 - \exp(-\gamma t)}{\gamma} \langle v(0) \rangle. \quad (48)$$

$$\langle v(t) \rangle = [\exp(-\gamma t)] \langle v(0) \rangle. \quad (49)$$

برای دُ - نقطه‌ها ی هم - زمان هم،

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle_h &= \langle x^2(0) \rangle + 2 \frac{1 - \exp(-\gamma t)}{\gamma} \langle (x v)(0) \rangle \\ &\quad + \left[\frac{1 - \exp(-\gamma t)}{\gamma} \right]^2 \langle v^2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \langle (x v)(t) \rangle_h &= [\exp(-\gamma t)] \langle (x v)(0) \rangle \\ &\quad + \frac{\exp(-\gamma t) - \exp(-2\gamma t)}{\gamma} \langle v^2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (51)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_h = [\exp(-2\gamma t)] \langle v^2(0) \rangle. \quad (52)$$

$$\langle x^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{\gamma^3} [(\gamma t - 2) \exp(\gamma t) + \sinh(\gamma t) + 2] \exp(-\gamma t). \quad (53)$$

$$\langle (x v)(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} [\cosh(\gamma t) - 1] \exp(-\gamma t). \quad (54)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{2\gamma} [1 - \exp(-2\gamma t)]. \quad (55)$$

و در زمانها ی بزرگ،

$$\langle x^2(t) \rangle_h = \langle x^2(0) \rangle + \frac{2}{\gamma} \langle (x v)(0) \rangle + \frac{1}{\gamma^2} \langle v^2(0) \rangle + o(1). \quad (56)$$

$$\langle (x v)(t) \rangle_h = o(1). \quad (57)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_h = o(1). \quad (58)$$

$$\langle x^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{\gamma^3} \left(\gamma t - \frac{3}{2} \right) + o(1). \quad (59)$$

$$\langle (x v)(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{2\gamma^2} + o(1). \quad (60)$$

$$\langle v^2(t) \rangle_\xi = \frac{\sigma^2}{2\gamma} + o(1). \quad (61)$$

پس، در زمانها ی بزرگ،

$$\frac{d \langle x^2(t) \rangle}{d t} = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} + o(1). \quad (62)$$

$$\langle (x v)(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma^2} + o(1). \quad (63)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma} + o(1). \quad (64)$$

5 پانوشتها

[1] Fokker-Planck

[2] محمد خرمی؛ «نوسانگر هماهنگ، با اصطکاک و نوفه I» (2025/10/04) X1-191

[3] محمد خرمی؛ «نوسانگر هماهنگ، با اصطکاک و نوفه II» (2025/11/03) X1-192

[4] Fourier