

نوسانگر هماهنگ، با اصطکاک و نوفه II

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

یک نوسانگر هماهنگ با اصطکاک خطی بررسی میشود، که یک نوفه سفید (ن لزومن گاوسی) هم به آن نیرو وارد میکند. بستگی ی زمانی ی تابع - د- نقطهها ی هم- زمان برا ی این نوسانگر، از د راه محاسبه میشود. حالتها ی حدی هم بررسی میشوند.

0 درآمد

این ادامه ی [1] است، با هم ان نماد- گذاری. مشتق- گیری را با D و زمان را با t نشان میدهم. معادله ی حرکت یک نوسانگر هماهنگ با اصطکاک خطی و یک نیرو ی خارجی ی اضافی، که یک نوفه ی سفید بامیانگین صفر است، این است.

$$[P(D)]x = \xi. \quad (1)$$

x مکان، و ξ (نیرو ی خارجی تقسیم بر جرم) است. P هم یک چند- جملتی ست، که

$$P(s) = s^2 + \gamma s + \omega_0^2. \quad (2)$$

γ و ω_0 ثابتهای نا-منفی یَند. جرمِ نوسانگر را با m نشان میدهیم. $(-m\omega_0^2 x)$ نیروی بازگرداننده ی خطی-با-مکان، و $(-m\gamma)$ نیروی اصطکاک خطی-با-سرعت است. جوابِ معادله ی (1) چنین میشود.

$$x(t) = [A(t)] x(0) + [B(t)] (Dx)(0) + \int_0^t (du) [B(t-u)] \xi(u). \quad (3)$$

$$A(t) = \frac{-s_2 \exp(s_1 t) + s_1 \exp(s_2 t)}{s_1 - s_2}. \quad (4)$$

$$B(t) = \frac{\exp(s_1 t) - \exp(s_2 t)}{s_1 - s_2}. \quad (5)$$

که s_1 و s_2 ریشه های P اند:

$$P(s_j) = 0. \quad (6)$$

$$(s_1, s_2) = -\frac{1}{2} (\gamma - \gamma', \gamma + \gamma'). \quad (7)$$

$$\gamma' = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}. \quad (8)$$

این که ξ (یا جرم ضرب در ξ) یک نوفه ی سفید با میانگین صفر است، یعنی ξ یک متغیر تصادفی ی وابسته-به-زمان است که

$$\langle \xi(t) \rangle = 0. \quad (9)$$

$$\langle [\xi(t_1)] [\xi(t_2)] \rangle = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1). \quad (10)$$

$\langle \mathfrak{X} \rangle$ میانگین $\mathfrak{X}$ است، و σ ثابت ی مثبت است. تبدیل - فوریه [2] ی $\mathfrak{X}$ را با $\tilde{\mathfrak{X}}$ نشان میدهیم:

$$\tilde{\mathfrak{X}}(\omega) = \int (dt) [\exp(i\omega t)] \mathfrak{X}(t). \quad (11)$$

$$\mathfrak{X}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} [\exp(-i\omega t)] \tilde{\mathfrak{X}}(\omega). \quad (12)$$

روابط (9) و (10) چنین میشوند.

$$\langle \tilde{\xi}(\omega) \rangle = 0. \quad (13)$$

$$\langle [\tilde{\xi}(\omega_1)] [\tilde{\xi}(\omega_2)] \rangle = 2\pi \sigma^2 \delta(\omega_2 + \omega_1). \quad (14)$$

این که نوفه سفید است، یعنی طیف - بسامد آن مستقل از بسامد است: رابطه ی (14).

1 د- نقطه‌های هم-زمان

در محاسبه ی د- (یا بیشتر-) نقطه‌ی، میانگین حاصل- ضرب عاملها بی ظاهر میشود، که هر کدام یک مشتق (از جمله صفرم) x در زمان- صفر، یا یک مشتق (از جمله صفرم) نوفه است. این فرض را به کار می‌بریم که برای t ها ی مثبت، $[(D^j x)(0)]$ برای هر j مستقل از $[\xi(t)]$ است: اثر چشمه (اینجا نوفه) بر x (و همه ی مشتقها ی ش) در صفر، علی ست. به این ترتیب،

$$\langle [(D^j x)(0)] [\xi(t)] \rangle = \langle (D^j x)(0) \rangle \langle \xi(t) \rangle, \quad t > 0. \quad (15)$$

این هم، با استفاده از (9)، نتیجه میدهد

$$\langle [(D^j x)(0)] [\xi(t)] \rangle = 0, \quad t > 0. \quad (16)$$

سرانجام، (3) و (10) و (16) نتیجه میدهند

$$\langle [(D^j x)(t_1)] [\xi(t_2)] \rangle = 0, \quad t_2 > t_1. \quad (17)$$

در ادامه، فقط زمانها ی مثبت را به کار می‌بریم و شرط $(t > 0)$ را نمینویسیم.

یک پیامد (17) این است که هر د- نقطه‌ی همزمان مجموع د- جمله است: یک جمله متناظر با این که نوفه صفر باشد، و یک ی متناظر با این که شرط- اولیه صفر باشد. میانگین $\mathfrak{X}$ متناظر با این که نوفه صفر باشد را با $\langle \mathfrak{X} \rangle_h$ و میانگین $\mathfrak{X}$ متناظر با این که شرط- اولیه صفر باشد را با $\langle \mathfrak{X} \rangle_\xi$ نشان میدهم.

$$\begin{aligned} \langle [(D^j x)(t)] [(D^k x)(t)] \rangle &= \langle [(D^j x)(t)] [(D^k x)(t)] \rangle_h \\ &+ \langle [(D^j x)(t)] [(D^k x)(t)] \rangle_\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

X را چنین تعریف میکنم.

$$X^{j k}_\iota(t) = \langle [(D^j x)(t)] [(D^k x)(t)] \rangle_\iota. \quad (19)$$

شاخص ι ممکن است h یا ξ یا «خالی» باشد. $\mathfrak{X}_\iota$ اگر ι «خالی» باشد، هم ان $\mathfrak{X}$ است. دیده میشود

$$X^{j k} = X^{j k}_h + X^{j k}_\xi. \quad (20)$$

C را چنین تعریف میکنم.

$$(C_0, C_1) = (A, B). \quad (21)$$

از (3) نتیجه میشود

$$X_h^{00}(t) = [C_a(t)] [C_b(t)] X^{ab}(0). \quad (22)$$

کلیر،

$$X_h^{jk}(t) = [(D^j C_a)(t)] [(D^k C_b)(t)] X^{ab}(0). \quad (23)$$

X_ξ را میشود به چند روش حساب کرد.

2 روش مستقیم برای محاسبه ی د-نقطیها-ی-همزمان

از (3) و (10) نتیجه میشود

$$X_\xi^{00}(t) = \sigma^2 \int_0^t (du) [B(t-u)] [B(t-u)]. \quad (24)$$

از (5) هم معلوم است که

$$B(0) = 0. \quad (25)$$

با استفاده از (3) و (10) و (25)،

$$X_\xi^{01}(t) = \sigma^2 \int_0^t (du) [B(t-u)] [(D B)(t-u)]. \quad (26)$$

$$X_\xi^{11}(t) = \sigma^2 \int_0^t (du) [(D B)(t-u)] [(D B)(t-u)]. \quad (27)$$

یا، چنان که در [1] حساب شده،

$$X_{\xi}^{00}(t) = \frac{\sigma^2}{2\gamma\omega_o^2} \left[1 + \frac{4\omega_o^2 - \gamma^2 \cosh(\gamma' t) - \gamma\gamma' \sinh(\gamma' t)}{\gamma'^2} \exp(-\gamma t) \right]. \quad (28)$$

$$X_{\xi}^{01}(t) = \frac{\sigma^2}{\gamma'^2} [\cosh(\gamma' t) - 1] \exp(-\gamma t). \quad (29)$$

$$X_{\xi}^{11}(t) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} \left[1 + \frac{4\omega_o^2 - \gamma^2 \cosh(\gamma' t) + \gamma\gamma' \sinh(\gamma' t)}{\gamma'^2} \exp(-\gamma t) \right]. \quad (30)$$

3 معادله-ی-دیفرانسیل برای د-نقطیها-ی-همزمان

مشتق X_{ξ}^{jk} چنین میشود.

$$(D X_{\xi}^{jk})(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(D X_{\xi}^{jk})(t + \delta) - (D X_{\xi}^{jk})(t)}{\delta}. \quad (31)$$

همچنین،

$$(D^l x)(t + \delta) = (D^l x)(t + \delta) + \int_t^{t+\delta} (d u) (D^{l+1} x)(u). \quad (32)$$

به این ترتیب،

$$(D X_{\xi}^{jk})(t) = \langle [(D^{j+1} x)(t^+)] [(D^k x)(t)] \rangle_{\xi} + \langle [(D^j x)(t)] [(D^{k+1} x)(t^+)] \rangle_{\xi} + Y_{\xi}^{jk}(t). \quad (33)$$

$$Y_{\xi}^{jk}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} (d u_1) \int_t^{t+\delta} (d u_2) Z_{\xi}^{jk}(u_1, u_2) \right]. \quad (34)$$

$$Z_{\xi}^{jk}(u_1, u_2) = \langle [(D^{j+1} x)(u_1)] [(D^{k+1} x)(u_2)] \rangle_{\xi}. \quad (35)$$

که $[\mathfrak{X}(t^+)]$ چنین تعریف شده.

$$\mathfrak{X}(t^+) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [\mathfrak{X}(t + \delta)]. \quad (36)$$

اگر فقط تابعها ی معمولی ی هموار در محاسبه وارد میشدند، در طرف راست (33) فقط دُ-جمله ی اول ظاهر میشدند: هم ان قاعده ی کینیتسی برا ی مشتق-گیری از حاصل-ضرب تابعها ی هموار. اما ξ هموار نیست، که این از رابطه ی (10) دیده میشود. به هم ین خاطر Υ_{ξ}^{jk} لزومَن صفر نیست. دیده میشود

$$(D^2 x)(u) = \xi(u) + \dots \quad (37)$$

$$(D x)(u) = \int_0^u (d w) [\xi(w) + \dots]. \quad (38)$$

که (۰۰۰) شامل جملها ی هموارتر است. و، با استفاده از (10)، نتیجه میشود

$$Z_{\xi}^{00}(u_1, u_2) = 0. \quad (39)$$

$$Z_{\xi}^{01}(u_1, u_2) = 0. \quad (40)$$

$$Z_{\xi}^{11}(u_1, u_2) = \sigma^2. \quad (41)$$

به این ترتیب،

$$(D \langle x^2 \rangle_{\xi})(t) = 2 \langle [x(t)] [(D x)(t^+)] \rangle_{\xi}. \quad (42)$$

$$(D \langle x D x \rangle_{\xi})(t) = \langle [(D x)(t)]^2 \rangle_{\xi} + \langle [x(t)] [(D^2 x)(t^+)] \rangle_{\xi}. \quad (43)$$

$$[D \langle (D x)^2 \rangle_{\xi}](t) = 2 \langle [(D x)(t)] [(D^2 x)(t^+)] \rangle_{\xi} + \sigma^2. \quad (44)$$

در طرف راست (42)، مشتق دوم x و در نتیجه ξ ظاهر نشده. پس میشود به جا ی t^+ هم ان t را گذاشت. در (43) و (44) هم، $(D^2 x)$ را از معادله ی (1) حساب میکنم، و (17) را به کار میبرم. (42) تا (44) چنین میشوند:

$$D \langle x^2 \rangle_{\xi} = 2 \langle x D x \rangle_{\xi}. \quad (45)$$

$$D \langle x D x \rangle_{\xi} = \langle (D x)^2 \rangle_{\xi} - \gamma D \langle x D x \rangle_{\xi} - \omega_o^2 D \langle x^2 \rangle_{\xi}. \quad (46)$$

$$D \langle (D x)^2 \rangle_{\xi} = -2 \gamma \langle (D x)^2 \rangle_{\xi} - 2 \omega_o^2 \langle x D x \rangle_{\xi} + \sigma^2. \quad (47)$$

Υ و M و Ξ را چنین تعریف میکنم.

$$(\Upsilon \mid M \mid \Xi) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbf{X}_{\xi}^{00} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \mathbf{X}_{\xi}^{01} & -\omega_{\circ}^2 & -\gamma & 1 & 0 \\ \mathbf{X}_{\xi}^{11} & 0 & -2\omega_{\circ}^2 & -2\gamma & \sigma^2 \end{array} \right). \quad (48)$$

بسته ی (45) تا (47) چنین میشود.

$$D \Upsilon = M \Upsilon + \Xi. \quad (49)$$

که جواب ش میشود

$$\Upsilon(t) = [\exp(t M)] \Upsilon(0) + [\exp(t M) - 1] M^{-1} \Xi. \quad (50)$$

یا،

$$\Upsilon(t) = [\exp(t M)] \Upsilon(0) + \int_0^t (d u) [\exp(u M)] \Xi. \quad (51)$$

شکلِ اخیر، اگر M^{-1} نباشد هم درست است.

شرط - اولیه برا ی Υ این است.

$$\Upsilon(0) = 0. \quad (52)$$

پس،

$$\Upsilon(t) = [\exp(t M) - 1] M^{-1} \Xi. \quad (53)$$

یا،

$$\Upsilon(t) = \int_0^t (d u) [\exp(u M)] \Xi. \quad (54)$$

همچنین،

$$M^{-1} = -\frac{1}{2\gamma\omega_o^2} \begin{pmatrix} \gamma^2 + \omega_o^2 & 2\gamma & 1 \\ -\gamma\omega_o^2 & 0 & 0 \\ \omega_o^4 & 0 & \omega_o^2 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

$$\exp(tM) = \sum_j [\exp(\lambda_j t)] M_j. \quad (56)$$

$$M_j = \prod_{k \neq j} \frac{M - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}. \quad (57)$$

و λ_j ها ویژه-مقدارها ی M اند:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -(\gamma - \gamma', \gamma + \gamma', \gamma). \quad (58)$$

یا،

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2s_1, 2s_2, s_1 + s_2). \quad (59)$$

به این ترتیب،

$$\Upsilon(t) = \Upsilon_\infty + \Upsilon_\bullet(t). \quad (60)$$

$$\Upsilon_\infty = \frac{\sigma^2}{2\gamma\omega_o^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \omega_o^2 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

$$\Upsilon_\bullet(t) = \frac{\sigma^2 \exp(-\gamma t)}{2\gamma\gamma'^2\omega_o^2} \begin{pmatrix} 4\omega_o^2 - \gamma^2 \cosh(\gamma' t) - \gamma\gamma' \sinh(\gamma' t) \\ 2\gamma\omega_o^2 [\cosh(\gamma' t) - 1] \\ \omega_o^2 [4\omega_o^2 - \gamma^2 \cosh(\gamma' t) + \gamma\gamma' \sinh(\gamma' t)] \end{pmatrix}. \quad (62)$$

اینها هم ان روابط (28) تا (30) اند.

4 حالت‌های حدی

طرف - راست (61) و (62) به شرطی خُش-تعریف است که γ و ω_0 مثبت باشند. حالت‌های حدی این‌ند که γ یا ω_0 صفر باشد. گیرم γ مثبت است و ω_0 صفر است. این حالت را میشود با حد-گیری (ω_0 به صفر) به دست آورد:

$$\omega_0 = 0 \Rightarrow \Upsilon(t) = \frac{\sigma^2 \exp(-\gamma t)}{\gamma^3} \begin{pmatrix} (\gamma t - 2) \exp(\gamma t) + \sinh(\gamma t) + 2 \\ \gamma [\cosh(\gamma t) - 1] \\ \gamma^2 \sinh(\gamma t) \end{pmatrix}. \quad (63)$$

گیرم γ صفر و ω_0 مثبت است. این حالت را هم میشود با حد-گیری (γ به صفر) به دست آورد:

$$\gamma = 0 \Rightarrow \Upsilon(t) = \frac{\sigma^2}{4\omega_0^3} \begin{pmatrix} 2\omega_0 t - \sin(2\omega_0 t) \\ \omega_0 [1 - \cos(2\omega_0 t)] \\ \omega_0^2 [2\omega_0 t + \sin(2\omega_0 t)] \end{pmatrix}. \quad (64)$$

سرانجام، با حد-گیری از هر یک از د-حالت پیش،

$$(\omega_0, \gamma) = (0, 0) \Rightarrow \Upsilon(t) = \sigma^2 \begin{pmatrix} t^3/3 \\ t^2/2 \\ t \end{pmatrix}. \quad (65)$$

5 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «نوسانگر هماهنگ، با اصطکاک و نوفه I» (2025/10/04) X1-191

[2] Fourier