

نوسانگر هماهنگ، با اصطکاک و نوفه I

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

یک نوسانگر هماهنگ با اصطکاک خطی بررسی میشود، که یک نوفه سفید (ن لزوْمَن گاوسی) هم به آن نیرو وارد میکند. بستگی ی زمانی ی تابعها ی یک-نقطئی و د-نقطئی برا ی این نوسانگر محاسبه میشود.

1 نوسانگر هماهنگ، با اصطکاک خطی و نیروی خارجی

مشتق-گیری (از تابعها ی یک-متغیری) را با D ، مشتق-گیری نسبت به متغیر $i^{\text{م}}$ را با D_i ، و زمان را با t نشان میدهم. معادله ی حرکت یک نوسانگر هماهنگ با اصطکاک خطی و یک نیروی خارجی ی اضافی این است.

$$[P(D)]x = f. \quad (1)$$

x مکان، و f (نیروی خارجی تقسیم بر جرم) است. P هم یک چند-جملئی ست، که

$$P(s) = s^2 + \gamma s + \omega_0^2. \quad (2)$$

γ و ω_0 ثابتهای نا-منفی یَند. جرمِ نوسانگر را با m نشان میدهیم. $(-m\omega_0^2 x)$ نیروی بازگرداننده ی خطی-با-مکان، و $(-m\gamma D x)$ نیروی اصطکاک خطی-با-سرعت است. از معادله ی (1)، که خطی ست، نتیجه میشود رابطه ی x با f و شرایط -اولیه خطی ست. جواب (1) برای x را میشود چنین نوشت.

$$x(t) = [A(t)] x(0) + [B(t)] (D x)(0) + \int_0^t (d u) [Q(t, u)] f(u). \quad (3)$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} (D x)(t) &= [(D A)(t)] x(0) + [(D B)(t)] (D x)(0) \\ &+ [Q(t, t)] f(t) + \int_0^t (d u) [(D_1 Q)(t, u)] f(u). \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (D^2 x)(t) &= [(D^2 A)(t)] x(0) + [(D^2 B)(t)] (D x)(0) \\ &+ \{[(2 D_1 + D_2) Q](t, t)\} f(t) + [Q(t, t)] (D f)(t) \\ &+ \int_0^t (d u) \{[(D_1)^2 Q](t, u)\} f(u). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \{[P(D)] x\}(t) &= \left(\{[P(D)] A\}(t)\right)(0) + \left(\{[P(D)] B\}(t)\right)(D x)(0) \\ &+ \{[(2 D_1 + D_2 + \gamma) Q](t, t)\} f(t) + [Q(t, t)] (D f)(t) \\ &+ \int_0^t (d u) \left(\{[P(D_1)] Q\}(t, u)\right) f(u). \end{aligned} \quad (6)$$

از (3) نتیجه میشود

$$A(0) = 1. \quad (7)$$

$$B(0) = 0. \quad (8)$$

از (4) هم نتیجه میشود

$$(D A)(0) = 0. \quad (9)$$

$$(D B)(0) = 1. \quad (10)$$

$$Q(0, 0) = 0. \quad (11)$$

سرانجام، از مقایسه ی (6) با (1) نتیجه میشود

$$[P(D)] A = 0. \quad (12)$$

$$[P(D)] B = 0. \quad (13)$$

$$[P(D_1)] Q = 0. \quad (14)$$

$$Q(t, t) = 0. \quad (15)$$

$$(D_1 Q)(t, t) = 1. \quad (16)$$

از مقایسه ی (14) و (15) و (16) با (13) و (8) و (10) نتیجه میشود

$$Q(t, u) = B(t - u). \quad (17)$$

این که $[Q(t, u)]$ تابع فقط $(t - u)$ است، پیش-بینی میشود، از اینجا که معادله ی (1) تحت انتقال- زمان (انتقال- متغیر) ناورداست. ریشه ی P را با s_1 و s_2 نشان میدهم:

$$P(s_j) = 0. \quad (18)$$

$$(s_1, s_2) = -\frac{1}{2} (\gamma - \gamma', \gamma + \gamma'). \quad (19)$$

$$\gamma' = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_o^2}. \quad (20)$$

از (7) و (9) و (12) برای A ، و (8) و (10) و (13) برای B ، نتیجه میشود

$$A(t) = \frac{-s_2 \exp(s_1 t) + s_1 \exp(s_2 t)}{s_1 - s_2}. \quad (21)$$

$$B(t) = \frac{\exp(s_1 t) - \exp(s_2 t)}{s_1 - s_2}. \quad (22)$$

یا، با استفاده از (19)،

$$A(t) = \left(\cosh \frac{\gamma' t}{2} + \frac{\gamma}{\gamma'} \sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right). \quad (23)$$

$$B(t) = \frac{2}{\gamma'} \left(\sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right). \quad (24)$$

2 نوفه ی سفید با میانگین صفر

میگویند متغیر - تصادفی ی وابسته - به - زمان ξ یک نوفه ی سفید با میانگین صفر است، وقت ی

$$\langle \xi(t) \rangle = 0. \quad (25)$$

$$\langle [\xi(t_1)] [\xi(t_2)] \rangle = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1). \quad (26)$$

$\langle \mathfrak{X} \rangle$ میانگین $\mathfrak{X}$ است، و σ ثابت ی مثبت است. تبدیل - فوریه [1] ی $\mathfrak{X}$ را با $\tilde{\mathfrak{X}}$ نشان میدهم:

$$\tilde{\mathfrak{X}}(\omega) = \int (d t) [\exp(i \omega t)] \mathfrak{X}(t). \quad (27)$$

$$\mathfrak{X}(t) = \int \frac{d \omega}{2 \pi} [\exp(-i \omega t)] \tilde{\mathfrak{X}}(\omega). \quad (28)$$

از روابط (25) و (26)، به ترتیب، نتیجه میشود.

$$\langle \tilde{\xi}(\omega) \rangle = 0. \quad (29)$$

$$\langle [\tilde{\xi}(\omega_1)] [\tilde{\xi}(\omega_2)] \rangle = 2 \pi \sigma^2 \delta(\omega_2 + \omega_1). \quad (30)$$

این که نوفه سفید است، یعنی طیف - بسامد آن مستقل از بسامد است: رابطه ی (30). از این پس فرض میشود ξ یک نوفه ی سفید با میانگین صفر است.

3 چند-نقطیها

معادله ی (1) با نوفه ی ξ به جا ی f چنین میشود.

$$[P(D)] x = \xi. \quad (31)$$

جواب این معادله هم ان (3) است، که در آن f با ξ جایگزین شده:

$$x(t) = [A(t)] x(0) + [B(t)] (D x)(0) + \int_0^t (d u) [B(t-u)] \xi(u). \quad (32)$$

یک (تابع) n -نقطی میانگین حاصل - ضرب n متغیر است، که هر کدام یک ی از مشتقها ی (از جمله صفرم) x است.

3.1 یک-نقطه‌ای

میانگینِ معادله ی (31) چنین میشود.

$$[P(D)] \langle x \rangle = \langle \xi \rangle. \quad (33)$$

که، با استفاده از (25)، میشود

$$[P(D)] \langle x \rangle = 0. \quad (34)$$

میشود معادله ی (34) را حل کرد، یا میانگینِ رابطه ی (32) را به کار بُرد. نتیجه ی آخر این است.

$$\langle x(t) \rangle = [A(t)] \langle x(0) \rangle + [B(t)] \langle (Dx)(0) \rangle. \quad (35)$$

$$\langle (Dx)(t) \rangle = [(D A)(t)] \langle x(0) \rangle + [(D B)(t)] \langle (Dx)(0) \rangle. \quad (36)$$

البته،

$$D A = -\omega_o^2 B. \quad (37)$$

$$D B = A - \gamma B. \quad (38)$$

یا،

$$(D A)(t) = -\frac{2\omega_o^2}{\gamma'} \left(\sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right). \quad (39)$$

$$D B = \left(\cosh \frac{\gamma' t}{2} - \frac{\gamma}{\gamma'} \sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right). \quad (40)$$

و شکلِ صریحِ (35) و (36) چنین میشود.

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \left(\cosh \frac{\gamma' t}{2} + \frac{\gamma}{\gamma'} \sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \left[\exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \langle x(0) \rangle \\ &+ \frac{2}{\gamma'} \left(\sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \left[\exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \langle (Dx)(0) \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \langle (Dx)(t) \rangle &= -\frac{2\omega_o^2}{\gamma'} \left(\sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \left[\exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \langle x(0) \rangle \\ &+ \left(\cosh \frac{\gamma' t}{2} - \frac{\gamma}{\gamma'} \sinh \frac{\gamma' t}{2} \right) \left[\exp \left(-\frac{\gamma t}{2} \right) \right] \langle (Dx)(0) \rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

چنان که از (34) انتظار میرود، در یک-نقطی نوفه ظاهر نمیشود.

3.2 د-نقطی

در محاسبه ی د- (یا بیشتر-) نقطی، میانگین حاصل- ضرب عاملها بی ظاهر میشود، که هر کدام یک مشتق (از جمله صفر) x در زمان- صفر، یا یک مشتق (از جمله صفر) نوفه است. این فرض را به کار میبریم که برای t های مثبت، $[(D^j x)(0)]$ برای هر j مستقل از $[\xi(t)]$ است: اثر چشمه (اینجا نوفه) بر x (و همه ی مشتقهایش) در صفر، علیست. به این ترتیب،

$$\langle [(D^j x)(0)] [\xi(t)] \rangle = \langle (D^j x)(0) \rangle \langle \xi(t) \rangle, \quad t > 0. \quad (43)$$

این هم، با استفاده از (25)، نتیجه میدهد

$$\langle [(D^j x)(0)] [\xi(t)] \rangle = 0, \quad t > 0. \quad (44)$$

سرانجام، (26) و (32) و (44) نتیجه میدهند

$$\langle [(D^j x)(t_1)] [\xi(t_2)] \rangle = 0, \quad t_2 > t_1. \quad (45)$$

در ادامه، فقط زمانهای مثبت را به کار میبریم و شرط $(t > 0)$ را نمینویسیم.

یک پیامد (44) این است که هر د-نقطی مجموع د-جمله است: یک ی متناظر با این که نوفه صفر باشد، و یک ی متناظر با این که شرط- اولیه صفر باشد. میانگین $\mathcal{X}$ متناظر با این که نوفه صفر باشد را با $\langle \mathcal{X} \rangle_h$ و میانگین $\mathcal{X}$ متناظر با این که شرط- اولیه صفر باشد را با $\langle \mathcal{X} \rangle_\xi$ نشان میدهم.

$$\begin{aligned} \langle [(D^j x)(t_1)] [(D^k x)(t_2)] \rangle &= \langle [(D^j x)(t_1)] [(D^k x)(t_2)] \rangle_h \\ &+ \langle [(D^j x)(t_1)] [(D^k x)(t_2)] \rangle_\xi. \end{aligned} \quad (46)$$

البته مانسته ی این رابطه برای یک-نقطیها هم برقرار است:

$$\langle (D^j x)(t) \rangle = \langle (D^j x)(t) \rangle_h + \langle (D^j x)(t) \rangle_\xi. \quad (47)$$

اما،

$$\langle (D^j x)(t) \rangle_\xi = 0. \quad (48)$$

$$\langle (D^j x)(t) \rangle = \langle (D^j x)(t) \rangle_h. \quad (49)$$

X را چنین تعریف میکنم

$$X_\iota^{jk}(t_1, t_2) = \langle [(D^j x)(t_1)] [(D^k x)(t_2)] \rangle_\iota. \quad (50)$$

شاخص ι ممکن است h یا ξ یا «خالی» باشد. $\mathfrak{X}_\iota$ اگر ι «خالی» باشد، هم $\mathfrak{X}$ است. روشن است که

$$X^{jk} = X_h^{jk} + X_\xi^{jk}. \quad (51)$$

$$X_\iota^{jk} = (D_1)^j (D_2)^k X_\iota^{00}. \quad (52)$$

3.2.1 د-نقطی یِ نوفه-صفر

C را چنین تعریف میکنم.

$$(C_0, C_1) = (A, B). \quad (53)$$

از (32) نتیجه میشود

$$X_h^{00}(t_1, t_2) = [C_a(t_1)] [C_b(t_2)] X^{ab}(0, 0). \quad (54)$$

پس،

$$X_h^{jk}(t_1, t_2) = [(D^j C_a)(t_1)] [(D^k C_b)(t_2)] X^{ab}(0, 0). \quad (55)$$

3.2.2 د-نقطی یِ شرط-اولیه-صفر

از (32)، همراه با (26)، نتیجه میشود

$$\begin{aligned} X_\xi^{00}(t_1, t_2) &= \sigma^2 \int_0^{t_1} (d u_1) \int_0^{t_2} (d u_2) [B(t_1 - u_1)] [B(t_2 - u_2)] \delta(u_2 - u_1), \\ &= \sigma^2 \int_0^{\min(t_1, t_2)} (d u) [B(t_1 - u)] [B(t_2 - u)]. \end{aligned} \quad (56)$$

پس،

$$X_{\xi}^{00} = \frac{\sigma^2}{(s_1 - s_2)^2} \Sigma^{jk} Y_{jk}. \quad (57)$$

که،

$$\Sigma^{jk} = -\frac{(-1)^{j+k}}{s_j + s_k}. \quad (58)$$

$$\begin{aligned} Y_{jk}(t_1, t_2) &= [\Theta(t_2 - t_1)] \exp[s_k(t_2 - t_1)] + [\Theta(t_1 - t_2)] \exp[s_j(t_1 - t_2)] \\ &\quad - \exp(s_j t_1 + s_k t_2). \end{aligned} \quad (59)$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} X_{\xi}^{00}(t_1, t_2) &= \frac{\sigma}{(s_1 - s_2)^2} \left\{ \frac{\exp[s_1(t_1 + t_2)]}{2s_1} + \frac{\exp[s_2(t_1 + t_2)]}{2s_2} \right. \\ &\quad - \frac{\exp(s_1 t_1 + s_2 t_2) + \exp(s_2 t_1 + s_1 t_2)}{s_1 + s_2} \\ &\quad \left. + \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} \left[\frac{\exp(s_1 |t_2 - t_1|)}{2s_1} - \frac{\exp(s_2 |t_2 - t_1|)}{2s_2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} X_{\xi}^{01}(t_1, t_2) &= \frac{\sigma}{(s_1 - s_2)^2} \left\{ \frac{\exp[s_1(t_1 + t_2)] + \exp[s_2(t_1 + t_2)]}{2} \right. \\ &\quad - \frac{s_2 \exp(s_1 t_1 + s_2 t_2) + s_1 \exp(s_2 t_1 + s_1 t_2)}{s_1 + s_2} \\ &\quad + \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} \left[\frac{\exp(s_1 |t_2 - t_1|)}{2} - \frac{\exp(s_2 |t_2 - t_1|)}{2} \right] \\ &\quad \left. \times \operatorname{sgn}(t_2 - t_1) \right\}. \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} X_{\xi}^{11}(t_1, t_2) &= \frac{\sigma}{(s_1 - s_2)^2} \left\{ \frac{s_1 \exp[s_1(t_1 + t_2)] + s_2 \exp[s_2(t_1 + t_2)]}{2} \right. \\ &\quad - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} [\exp(s_1 t_1 + s_2 t_2) + \exp(s_2 t_1 + s_1 t_2)] \\ &\quad \left. - \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} \left[\frac{s_1 \exp(s_1 |t_2 - t_1|) - s_2 \exp(s_2 |t_2 - t_1|)}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

که sgn تابع علامت است:

$$\text{sgn}(\mathfrak{x}) = \frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}. \quad (63)$$

یک حالت خاص، دُ-نقطی همزمان است:

$$X_{\xi}^{00}(t, t) = \frac{\sigma^2}{2\gamma\omega_{\circ}^2} \left[1 + \frac{4\omega_{\circ}^2 - \gamma^2 \cosh(\gamma' t) - \gamma\gamma' \sinh(\gamma' t)}{\gamma'^2} \exp(-\gamma t) \right]. \quad (64)$$

$$X_{\xi}^{01}(t, t) = \frac{\sigma^2}{\gamma'^2} [\cosh(\gamma' t) - 1] \exp(-\gamma t). \quad (65)$$

$$X_{\xi}^{11}(t, t) = \frac{\sigma^2}{2\gamma} \left[1 + \frac{4\omega_{\circ}^2 - \gamma^2 \cosh(\gamma' t) + \gamma\gamma' \sinh(\gamma' t)}{\gamma'^2} \exp(-\gamma t) \right]. \quad (66)$$

4 پانوشتها

[1] Fourier