X1-188 (2025/05/03)

تحول ِ دُ-بعدی، و هَمیلتِنی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

یک دستگاه ِ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ دُ-متغیری یِ مرتبه-یِ-یک بررسی میشود. نشان داده میشود تحول ِ این تحول دستگاه را میشود به شکل ِ یک تحول ِ هم-تافته نوشت. ساختار- ِ-هم-تافته و هَمیلتنی یِ متناظر به دست میئایند. یک محاسبه یِ مفصلتر برا یِ دستگاهها یِ خطی انجام میشود.

0 دستگاه ِ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-یک

یک دستگاه ِ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-یک چنین است.

$$\dot{x}^j = f^j(t, \boldsymbol{x}). \tag{1}$$

$\dot{\mathfrak{x}}$ مشتق ِ $\mathfrak{x}$ نسبت به t (زمان) است. x^j ها مختصات ِ $\boldsymbol{x}$ اند. یک دستگاه ِ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ دُ-متغیری یِ مرتبه-یِ-یک چنین است.

$$\dot{x} = f(t, x, v). \tag{2}$$

$$\dot{v} = g(t, x, v). \tag{3}$$

که (x, v, f, g) چنین تعریف شده اند.

$$\begin{pmatrix} x & f \\ v & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & f^1 \\ x^2 & f^2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

دستگاهِ (2) و (3) را میشود به یک معادله-یِ-دیفرانسیلِ مرتبه-یِ-دُ تبدیل کرد. برا یِ این کار، از (2) نسبت به t مشتق میگیرم:

$$\ddot{x} = (\mathrm{D}_0\, f)(t, x, v) + [(\mathrm{D}_1\, f)(t, x, v)]\, \dot{x} + [(\mathrm{D}_2\, f)(t, x, v)]\, \dot{v}. \tag{5}$$

که $(\mathrm{D}_j\, \mathfrak{X})$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبت به x^j است، و $(\mathrm{D}_0\, \mathfrak{X})$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t است. از (2)، مقدارِ v را بر حسبِ $(t, x, \dot{x})$ حساب میکنم:

$$v = e(t, x, \dot{x}). \tag{6}$$

که یعنی،

$$\mathfrak{y} = f[\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, e(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y})]. \tag{7}$$

از (3) و (5) و (6) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \ddot{x} = {} & (\mathrm{D}_0\, f)[t, x, e(t, x, \dot{x})] + \{(\mathrm{D}_1\, f)[t, x, e(t, x, \dot{x})]\}\, \dot{x} \\ & + [(\mathrm{D}_2\, f)\, g][t, x, e(t, x, \dot{x})]. \end{aligned} \tag{8}$$

که یک معادله-یِ-دیفرانسیلِ مرتبه-یِ-دُ است. بر عکس، گیرم تحولِ x با یک معادله-یِ-دیفرانسیلِ مرتبه-یِ-دُ داده میشود:

$$\ddot{x} = g(t, x, \dot{x}). \tag{9}$$

دیده میشود این معادله با دستگاهِ (2) و (3) همئرز است، به شرط ی که

$$f(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{v}. \tag{10}$$

این همئرزی یِ یک دستگاه ِ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ دُ-متغیری یِ مرتبه-یِ-یک با یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ مرتبه-یِ-دُ، حالت ِ خاص ی از همئرزی یِ یک دستگاه ِ معادله-یِ-دیفرانسیل با یک معادله-یِ-دیفرانسیل (ِ از مرتبه یِ بیشتر) است. اینها را میشود در مثلَن [1] یافت.

1 تحول ِ هم-تافته

تحول ِ متغیر ِ x هم-تافته است، وقت ی معادله-یِ-تحول چنین باشد.

$$\dot{x}^j = \{x^j, H\}(t, \boldsymbol{x}). \tag{11}$$

H هَمیلتِنی، یک تابع از $(t, \boldsymbol{x})$، است. و $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$ کروشه-یِ-پُوَسُن [2] ِ تابعها یِ $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ است.
کروشه-یِ-پُوَسُن [2] پادمتقارن است:

$$\{\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}\} = -\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}. \tag{12}$$

کروشه-یِ-پُوَسُن [2] یاکُبیی [3] ست:

$$\{\mathfrak{X}, \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}\}\} = \{\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}, \mathfrak{Z}\} + \{\mathfrak{Y}, \{\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}\}\}. \tag{13}$$

کروشه-یِ-پُوَسُن [2] لَیبنیتسی [4] ست:

$$\{\mathfrak{X}, \mathfrak{F}(\boldsymbol{\mathfrak{Y}})\} = (\mathrm{D}_{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{F})\, \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}^{\mathfrak{a}}\}. \tag{14}$$

از این ویژگی نتیجه میشود کروشه-یِ-پُوَسُن [2] معین است، اگر کروشه-یِ-پُوَسُن [2] ِ مختصات معین باشد. کروشه-یِ-پُوَسُن [2] ِ مختصات را با J نشان میدهم:

$$\mathsf{J}^{j\,k} = \{x^j, x^k\}. \tag{15}$$

به J ماتریس ِ هم-تافته میگویند. البته J دلبخاه نیست: J باید پادمتقارن باشد و چنان که کروشه-یِ-پُوَسُن [2] یاکُبیی باشد. بر حسب ِ ماتریس ِ هم-تافته، معادله-یِ-تحول ِ (11) چنین میشود.

$$\dot{x}^j = (\mathsf{J}^{j\,k}\, \mathrm{D}_k\, H)(t, \boldsymbol{x}). \tag{16}$$

اینها را (نَ لزومَن با هم ین نماد-گذاری) میشود در مثلَن [5] یافت.

وقت ی دستگاه دُ-متغیری ست، یاکُبیبی-[3]-بودن شرط ِ اضافی یی نمیدهد. در این حالت مختصات را (x, v) میگیرم و $\{x, v\}$ را با J نشان میدهم:

$$\mathsf{J} = \{x, v\}. \tag{17}$$

و (16) چنین میشود.

$$\dot{x} = (J\, \mathrm{D}_2\, H)(t, x, v). \tag{18}$$

$$-\dot{v} = (J\, \mathrm{D}_1\, H)(t, x, v). \tag{19}$$

2 هم-تافته-کردن ِ تحول

تحول ِ (1) را بررسی میکنم. هم-تافته-کردن ِ این تحول، یعنی یافتن ِ یک هَمیلتِنی و یک کروشه-یِ-پُوَسُن [2]، چنان که (1) به شکل ِ (11)، همئرز با آن (16)، شود. وقت ی دستگاه دُ-متغیری ست، (1) به شکل ِ (2) و (3) است. (16) هم به شکل ِ (18) و (19) است. پس هم-تافته-کردن ِ تحول یعنی یافتن ِ (J, H) چنان که،

$$f = \mathsf{J}\, \mathrm{D}_2\, H. \tag{20}$$

$$-g = \mathsf{J}\, \mathrm{D}_1\, H. \tag{21}$$

یک حالت ِ بدیهی این است که (f, g) صفر است. در ابن حالت میشود H را ثابت و J را دلبخاه گرفت: (20) و (21) براورده میشوند. حالت ِ نابدیهی این است که (f, g) صفر نیست. پس J صفر نیست. در این حالت J را بین ِ (20) و (21) حذف میکنم. این معادله برا یِ H به دست میئاید.

$$0 = f\, \mathrm{D}_1\, H + g\, \mathrm{D}_2\, H. \tag{22}$$

جواب ِ کلی یِ معادله یِ بالا برا یِ Hبه جواب ِ کلی یِ این معادله-یِ-دیفرانسیل ِ معمولی مربوط است.

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{f(t, x, v)} = \frac{\mathrm{d}\, v}{g(t, x, v)}. \tag{23}$$

که در آن t یک پارامتر است. ارتباط به این شکل است که H بر هر یک از خم‌-ِ-جوابها یِ (23) ثابت است. معادله یِ (23)، به فرضِ این که نسبتِ f و g به حدِ کافی خُش-رفتار باشد مُضعَن جواب دارد. پس با هم ین فرض، معادله یِ (22) هم برا یِ H جواب دارد. این جواب را در یک ی از معادلاتِ (20) یا (21) میگذارم. J به دست میئاید. مثلَن،

$$\mathsf{J} = \frac{f}{\mathrm{D}_2\, H}. \tag{24}$$

جوابِ (22) برا یِ H یکتا نیست. اگر H یک جواب باشد، هر تابع از H هم جواب است. $\tilde{H}$ را یک تابع از H میگیرم. :

$$\tilde{H} = \mathfrak{h}(H). \tag{25}$$

وقت ی (J, H) یک جوابِ (20) و (21) است، $(\tilde{\mathsf{J}}, \tilde{H})$ هم یک جوابِ (20) و (21) است، که

$$\tilde{\mathsf{J}} = \frac{\mathsf{J}}{\mathfrak{h}'(H)}. \tag{26}$$

و $\mathfrak{X}'$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ است.

3 مثال، تحولِ خطی

تحولِ خطی را هم میشود به شکلِ یک دستگاهِ خطی یِ n-متغیری یِ مرتبه-یِ-یک، یا یک معادله یِ خطی یِ یک متغیری یِ مرتبه-یِ-n نوشت. حالتِ $n = 2$ را بررسی میکنم. هدف این است که این تحولِ خطی هم-تافته شود.

3.1 دستگاهِ مرتبه-یِ-یک

معادلات هم ان (2) و (3) اند، که $f(t, x, v)$ و $g(t, x, v)$ نسبت به (x, v) خطی یَند:

$$\begin{pmatrix} f(t,x,v) \\ g(t,x,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \tag{27}$$

مختصرتر،

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \tag{28}$$

که fو g تابع ِ (t, x, v) اند، و f_j ها و g_j ها تابع ِ فقط t اند. معادله ی ِ (23) چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{f_1\, x + f_2\, v} = \frac{\mathrm{d}\, v}{g_1\, x + g_2\, v}. \tag{29}$$

این یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ همگن است. برا یِ حل َ ش متغیر ِ جدید ِ w را وارد میکنم:

$$v = x\, w. \tag{30}$$

معادله یِ (29) چنین میشود.

$$0 = \frac{\mathrm{d}\, x}{x} + \frac{(f_1 + f_2\, w)\, \mathrm{d}\, w}{-g_1 + (f_1 - g_2)\, w + f_2\, w^2}. \tag{31}$$

یا،

$$0 = \frac{\mathrm{d}\, x}{x} + \frac{(f_1 + f_2\, w)\, \mathrm{d}\, w}{f_2\, (w - a)\, (w - b)}. \tag{32}$$

که a و b ریشِها یِ مخرج ِ جمله یِ دوم در طرف ِ راست ِ (31) اند:

$$0 = f_1 - g_2 + f_2\, (a + b). \tag{33}$$

$$0 = g_1 + f_2\, a\, b. \tag{34}$$

از (32) انتگرال میگیرم:

$$c = x\, (w - a)^{\alpha}\, (w - b)^{\beta}. \tag{35}$$

که c مستقل از (x, v) است، و

$$\alpha = \frac{f_1 + f_2\, a}{f_2\, (a - b)}. \tag{36}$$

$$\beta = \frac{f_1 + f_2\, b}{f_2\, (b - a)}. \tag{37}$$

دیده میشود

$$1 = \alpha + \beta. \tag{38}$$

$$0 = f_1 + f_2\,(b\,\alpha + a\,\beta). \tag{39}$$

با استفاده از (38)، رابطه یِ (35) چنین میشود.

$$c = (v - a\,x)^{\alpha}\,(v - b\,x)^{\beta}. \tag{40}$$

هَمیلتِنی یِ H هم ان طرف- ِ-راست، یا یک تابع از آن است:

$$H = h[(v - a\,x)^{\alpha}\,(v - b\,x)^{\beta}]. \tag{41}$$

h دلبخاه است. شکلِ مفصلترِ رابطه یِ بالا چنین است.

$$H(t,x,v) = h\Big(t, \{v - [a(t)]\,x\}^{\alpha(t)}\,\{v - [b(t)]\,x\}^{\beta(t)}\Big). \tag{42}$$

یک انتخابِ خاص این است.

$$H = \frac{m\,f_2\,(v - a\,x)^{2\,\alpha}\,(v - b\,x)^{2\,\beta}}{2}. \tag{43}$$

که m مستقل از (x,v) است. مفصلتر،

$$H(t,x,v) = \frac{[m(t)]\,[f_2(t)]\,\{v - [a(t)]\,x\}^{2\,\alpha(t)}\,\{v - [b(t)]\,x\}^{2\,\beta(t)}}{2}. \tag{44}$$

با این انتخاب،

$$\mathrm{D}_2\,H = m\,f_2\,\left(\frac{\alpha}{v - a\,x} + \frac{\beta}{v - b\,x}\right)\,(v - a\,x)^{2\,\alpha}\,(v - b\,x)^{2\,\beta}. \tag{45}$$

که، با استفاده از (38) و (39)، نتیجه میدهد

$$\mathrm{D}_2\,H = m\,f\,(v - a\,x)^{2\,\alpha - 1}\,(v - b\,x)^{2\,\beta - 1}. \tag{46}$$

این را در (24) میگذارم. نتیجه میشود

$$\mathsf{J} = \frac{(v - a\,x)^{1-2\,\alpha}\,(v - b\,x)^{1-2\,\beta}}{m}. \tag{47}$$

از (44) و (47) معلوم است که m در معادله-یِ-تحول وارد نمیشود: از جمله میشود آن را یک گذاشت.

از (38) و (47) دیده میشود شکل ِ J ساده میشود، J تابع ِ فقط t میشود، اگر

$$\beta = \alpha. \tag{48}$$

این حالت وقت ی رخ میدهد که

$$g_2 = -f_1. \tag{49}$$

در این صورت،

$$H = \frac{m\,[(f_1\,x + f_2\,v)^2 - (f_2\,g_1 + f_1^2)\,x^2]}{2\,f_2}. \tag{50}$$

$$\mathsf{J} = \frac{1}{m}. \tag{51}$$

3.2 معادله یِ یک متغیری

معادله هم ان (9) است، که $g(t,x,\dot{x})$ نسبت به $(x,\dot{x})$ خطی ست:

$$g(t,x,\dot{x}) = [g_1(t)]\,x + [g_2(t)]\,\dot{x}. \tag{52}$$

و، مثل ِ حالت ِ کلی یِ یک معادله-یِ-دیفرانسیل ِ یک-متغیری یِ مرتبه-یِ-دُ، میشود مسئله را به یک دستگاه ِ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ دُ-متغیری یِ مرتبه-یِ-یک تبدیل کرد:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \tag{53}$$

این هم ان است که در زیربخش ِ پیش بررسی شد، با

$$(f_1, f_2) = (0, 1). \tag{54}$$

روابطِ متناظر، آنها که تغییر میکنند، میشوند (33) و (34) میشوند

$$0 = -g_2 + a + b. \tag{55}$$

$$0 = g_1 + a\, b. \tag{56}$$

$$\alpha = \frac{a}{a-b}. \tag{57}$$

$$\beta = \frac{b}{b-a}. \tag{58}$$

$$0 = b\,\alpha + a\,\beta. \tag{59}$$

$$H = \frac{m\,(v - a\,x)^{2\,\alpha}\,(v - b\,x)^{2\,\beta}}{2}. \tag{60}$$

و در حالت ی که (49) برقرار باشد، که L تابعِ فقط t شود، رابطه یِ (51)،

$$H = \frac{m\,(v^2 - g_1\,x^2)}{2}. \tag{61}$$

3.2.1 نوسانگرِ هماهنگ

معادله یِ تحول برا یِ یک نوسانگرِ هماهنگ در یک بُعد این است.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2\,x \end{pmatrix}. \tag{62}$$

که v سرعتِ متناظر با x است، و ω بسامدِ زاویئی یِ نوسانگر است. اینها متناظرَند با

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

با اینها، (49) و (54) براورده میشوند. از (49) نتیجه میشود L تابعِ فقط t است، رابطه یِ (51). هَمیلتنی هم به شکلِ (50)، همئرز با آن (61)، است:

$$H = \frac{m\,(v^2 + \omega^2\,x^2)}{2}. \tag{64}$$

4 پانوشتها

[1] Vladimir I. Arnold; “Ordinary differential equations” (Springer, 2006)

[2] Poisson

[3] Jacobian

[4] Leibnizian

[5] Vladimir I. Arnold; “Mathematical methods for classical mechanics” 2nd edition (Springer, 1989)