X1-187 (2025/04/03)

نیرو یِ الکترُستاتیک: تقارن و بار

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

نیرو یِ بینِ دُ جسمِ نقطِئی یِ باردارِ ساکن بررسی میشود. با استفاده از تقارنها یِ مسئله، شکلِ این نیرو ساده میشود. با افزودنِ فرضِ پایستگی یِ شار، تعیینِ بستگی یِ نیرو به جا یِ اجسام کامل میشود. سرانجام، رابطه یِ این نیرو با پارامترها یِ اجسام بررسی میشود: تعریفِ بارِ الکتریکی ارائه میشود و شکلِ نیرو یِ الکترُستاتیک به دست میئاید.

0 درامد

در حدِ نا-کوانتمی و نانسبیتی کار میکنم. در این حد، برهمکنشِ بینِ اجسام را میشود بر حسبِ نیرو یِ مستقیم (بی واسطه یِ میدان) بیان کرد. نیرو یی که جسمِ نقطِئی یِ 1 به جسمِ نقطِئی یِ 2 وارد میکند را با $\boldsymbol{F}$ نشان میدهم. این نیرو تابعِ پارامترها یِ اجسام، زمان، مکانها، و سرعتها یِ اجسام است:

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}[t, \boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_2(t)]. \qquad (1)$$

که t زمان است، $\boldsymbol{r}_i$ مکانِ جسمِ i است، و $\boldsymbol{v}_i$ سرعتِ جسمِ i است. یک شکلِ مختصرترِ (1) این است.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2). \tag{2}$$

وقت ی اجسام ساکن باشند، سرعتها حذف میشوند و فقط زمان و مکانها میمانند:

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}[t, \boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)]. \tag{3}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2). \tag{4}$$

1 انتقال- ِ-زمان

انتقالِ زمان به اندازه یِ (ثابت ِ) t_0 را با $\mathsf{T}(t_0)$ نشان میدهم:

$$\{[\mathsf{T}(t_0)](\boldsymbol{r}_i)\}(t) = \boldsymbol{r}_i(t - t_0). \tag{5}$$

$$\{[\mathsf{T}(t_0)](\boldsymbol{F})\}(t) = \boldsymbol{F}(t - t_0). \tag{6}$$

فرض میشود انتقال- ِ-زمان یک تقارنِ سیستم است. یعنی اگر مکانها در زمان به مقدارِ ثابتِ t_0 منتقل شوند، نیرو هم در زمان به هم ان مقدار منتقل میشود:

$$\{[\mathsf{T}(t_0)](\boldsymbol{F})\}(t) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}\Big(t, \{[\mathsf{T}(t_0)](\boldsymbol{r}_1)\}(t), \{[\mathsf{T}(t_0)](\boldsymbol{r}_2)\}(t)\Big). \tag{7}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{F}(t - t_0) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}[t, \boldsymbol{r}_1(t - t_0), \boldsymbol{r}_2(t - t_0)]. \tag{8}$$

یا،

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}[t - t_0, \boldsymbol{r}_1(t - t_0), \boldsymbol{r}_2(t - t_0)] = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}[t, \boldsymbol{r}_1(t - t_0), \boldsymbol{r}_2(t - t_0)]. \tag{9}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F}_{\rm s}(t-t_0,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{F}_{\rm s}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2). \tag{10}$$

این رابطه برا یِ هر t_0 برقرار است. پس $\boldsymbol{F}_{\rm s}$ مستقل از متغیرِ اولَ ش است: $\boldsymbol{F}_{\rm s}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ به t بستگی ندارد:

$$\boldsymbol{F}_{\rm s}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{F}_{\rm c}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2). \tag{11}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}_{\rm c}[\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t)]. \tag{12}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\rm c}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2). \tag{13}$$

2 انتقال- ِ-مکان

انتقالِ زمان به اندازه یِ (ثابتِ) $\boldsymbol{r}_0$ را با $\mathsf{R}(\boldsymbol{r}_0)$ نشان میدهم:

$$\{[\mathsf{R}(\boldsymbol{r}_0)](\boldsymbol{r}_i)\}(t)=\boldsymbol{r}_i(t)+\boldsymbol{r}_0. \tag{14}$$

$$\{[\mathsf{R}(\boldsymbol{r}_0)](\boldsymbol{F})\}(t)=\boldsymbol{F}(t). \tag{15}$$

فرض میشود انتقال- ِ-مکان یک تقارنِ سیستم است. یعنی اگر مکانها به مقدارِ ثابتِ $\boldsymbol{r}_0$ منتقل شوند، نیرو هم به هم ان مقدار منتقل میشود (که یعنی عوض نمیشود):

$$\{[\mathsf{R}(\boldsymbol{r}_0)](\boldsymbol{F})\}(t)=\boldsymbol{F}_{\rm s}\Big(t,\{[\mathsf{R}(\boldsymbol{r}_0)](\boldsymbol{r}_1)\}(t),\{[\mathsf{R}(\boldsymbol{r}_0)](\boldsymbol{r}_2)\}(t)\Big). \tag{16}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}_{\rm s}[t,\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_0]. \tag{17}$$

یا،

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}[t, \boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r_2}(t)] = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}[t, \boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r_2}(t) - \boldsymbol{r}_0]. \tag{18}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r_2}) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r}_0). \tag{19}$$

این رابطه برا یِ هر $\boldsymbol{r}_0$ برقرار است. از جمله میشود $\boldsymbol{r}_0$ را خُد ِ $\boldsymbol{r}_1$ گرفت:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r_2}) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r}_1). \tag{20}$$

یا،

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r_2}) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1). \tag{21}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}[t, \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t)]. \tag{22}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1). \tag{23}$$

3 دَوَران

دَوَران با ماتریس ِ Θ را با $\mathsf{U}(\Theta)$ نشان میدهم:

$$\{[\mathsf{U}(\Theta)](\boldsymbol{r}_i)\}(t) = \Theta\,[\boldsymbol{r}_i(t)]. \tag{24}$$

$$\{[\mathsf{U}(\Theta)](\boldsymbol{F})\}(t) = \Theta\,[\boldsymbol{F}(t)]. \tag{25}$$

فرض میشود دَوَران یک تقارنِ سیستم است. یعنی اگر مکانها با ماتریسِ ثابتِ Θ بچرخند، نیرو هم با هم ان ماتریس میچرخد:

$$\{[\mathsf{U}(\Theta)](\boldsymbol{F})\}(t) = \boldsymbol{F}_{\rm s}\Big(t, \{[\mathsf{U}(\Theta)](\boldsymbol{r}_1)\}(t), \{[\mathsf{U}(\Theta)](\boldsymbol{r}_2)\}(t)\Big). \tag{26}$$

که نتیجه میدهد

$$\Theta\,[\boldsymbol{F}(t)] = \boldsymbol{F}_{\rm s}\{t, \Theta\,[\boldsymbol{r}_1(t)], \Theta\,[\boldsymbol{r}_2(t)]\}. \tag{27}$$

یا،

$$\Theta\,\{\boldsymbol{F}_{\rm s}[t, \boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)]\} = \boldsymbol{F}_{\rm s}\{t, \Theta\,[\boldsymbol{r}_1(t)], \Theta\,[\boldsymbol{r}_2(t)]\}. \tag{28}$$

مختصرتر،

$$\Theta\,[\boldsymbol{F}_{\rm s}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)] = \boldsymbol{F}_{\rm s}(t, \Theta\,\boldsymbol{r}_1, \Theta\,\boldsymbol{r}_2). \tag{29}$$

$\boldsymbol{F}_{\rm s}$ را میشود چنین تجزیه کرد.

$$\boldsymbol{F}_{\rm s} = \boldsymbol{F}_{{\rm s}\,\|} + \boldsymbol{F}_{{\rm s}\,\perp}. \tag{30}$$

که $\boldsymbol{F}_{{\rm s}\,\|}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ و $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ در یک صفحه ($\mathbb{P}$) اند، و $\boldsymbol{F}_{{\rm s}\,\perp}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ بر $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ عمود است. $\Theta_{\mathbb{P}}$ را دَوَران ی میگیرم که هیچ یک از بردارها یِ $\mathbb{P}$ را تغییر نمیدهد. پس،

$$\Theta_{\mathbb{P}}\,\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i. \tag{31}$$

$$\Theta_{\mathbb{P}}\,[\boldsymbol{F}_{{\rm s}\,\|}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)] = \boldsymbol{F}_{{\rm s}\,\|}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2). \tag{32}$$

روابطِ (29) و (30) نتیجه میدهند

$$\Theta_{\mathbb{P}}\,[\boldsymbol{F}_{{\rm s}\,\perp}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)] = \boldsymbol{F}_{{\rm s}\,\perp}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2). \tag{33}$$

اگر بُعد ِ فضا بیش از 3 باشد، مجموعه یِ بردارها یی که تحت ِ همه یِ دَوَرانها یِ $\Theta_{\mathbb{P}}$ ناوردا یَند، هم ان $\mathbb{P}$ است. پس اگر بُعد ِ فضا بیش از 3 باشد، $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}\,\perp}$ صفر است. اگر بُعد ِ فضا 2 باشد، $\mathbb{P}$ کل ِ فضا ست و $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}\,\perp}$ صفر است. اگر بُعد ِ فضا 1 باشد هم همه یِ بردارها با هم موازی یَند، و باز $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}\,\perp}$ صفر است. نتیجه این که $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}\,\perp}$ صفر است، مگر بُعد ِ فضا 3 باشد.

گیرم $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ خطی-مستقل َند. در فضا یِ 3-بُعدی، رابطه یِ (30) را میشود چنین نوشت.

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{r}_1\,f_{\mathrm{s}\,1}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)+\boldsymbol{r}_2\,f_{\mathrm{s}\,2}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\,f_{\mathrm{s}\,3}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2). \tag{34}$$

بین ِ ضرب- ِ-خارجی و دَوَران این رابطه هست.

$$\Theta\,(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)=(\Theta\,\boldsymbol{r}_1)\times(\Theta\,\boldsymbol{r}_2). \tag{35}$$

به این ترتیب، (29) نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0}=\Theta\,\{&\boldsymbol{r}_1\,[f_{\mathrm{s}\,1}(t,\Theta\,\boldsymbol{r}_1,\Theta\,\boldsymbol{r}_2)-f_{\mathrm{s}\,1}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)]\\&+\boldsymbol{r}_2\,[f_{\mathrm{s}\,2}(t,\Theta\,\boldsymbol{r}_1,\Theta\,\boldsymbol{r}_2)-f_{\mathrm{s}\,2}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)]\\&+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\,[f_{\mathrm{s}\,3}(t,\Theta\,\boldsymbol{r}_1,\Theta\,\boldsymbol{r}_2)-f_{\mathrm{s}\,3}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)]\}.\end{aligned} \tag{36}$$

که نتیجه میدهد $f_{\mathrm{s}\,i}$ ها تحت ِ دَوَران ناوردایَند:

$$f_{\mathrm{s}\,i}(t,\Theta\,\boldsymbol{r}_1,\Theta\,\boldsymbol{r}_2)=f_{\mathrm{s}\,i}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2). \tag{37}$$

یک Θ_2 هست که

$$\Theta_2\,\boldsymbol{r}_1=r_1\,(\hat{\boldsymbol{e}}'\,\sin\alpha+\hat{\boldsymbol{e}}\,\cos\alpha). \tag{38}$$

$$\Theta_2\,\boldsymbol{r}_2=r_2\,\hat{\boldsymbol{e}}. \tag{39}$$

که $\hat{e}$ و $\hat{e}'$ بردارها یی معین َند که یکه و بر هم عمود َند. همچنین، r_i طول ِ بردار ِ $\boldsymbol{r}_i$ است، و α زاویه یِ بین ِ $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ است:

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=r_1\,r_2\,\cos\alpha. \tag{40}$$

از روابط ِ (37) تا (39) نتیجه میشود

$$f_{\mathrm{s}\,i}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=f_{\mathrm{e}\,i}(t,r_1,r_2,\alpha). \tag{41}$$

تحت ِ دَوَران، r_i ها و $(\cos\alpha)$ ناوردا میمانند. (34) و (41) نتیجه میدهند

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)&=\boldsymbol{r}_1\,f_{\mathrm{e}\,1}(t,r_1,r_2,\alpha)+\boldsymbol{r}_2\,f_{\mathrm{e}\,2}(t,r_1,r_2,\alpha)\\&\quad+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\,f_{\mathrm{e}\,3}(t,r_1,r_2,\alpha).\end{aligned} \tag{42}$$

با استدلالها یی مشابه دیده میشود اگر بُعد 3 نباشد، رابطه یِ (42) با تغییرات ی همچنان درست است. یک تغییر این است که $f_{\mathrm{e}\,3}$، اگر بُعد 3 نباشد صفر است. یک ویژگی یِ خاص هم در بُعد ِ 2 هست، و آن این که علامت ِ α ثابت است: در بُعدها یِ بیشتر از 2، یک دَوَران ِ Θ_0 هست که

$$\Theta_0\,\hat{\boldsymbol{e}}=\hat{\boldsymbol{e}}. \tag{43}$$

$$\Theta_0\,\hat{\boldsymbol{e}}'=-\hat{\boldsymbol{e}}'. \tag{44}$$

به این ترتیب،

$$\Theta_0\,\Theta_2\,\boldsymbol{r}_1=r_1\,(-\hat{\boldsymbol{e}}'\,\sin\alpha+\hat{\boldsymbol{e}}\,\cos\alpha). \tag{45}$$

$$\Theta_0\,\Theta_2\,\boldsymbol{r}_2=r_2\,\hat{\boldsymbol{e}}. \tag{46}$$

پس در بُعدها یِ بیشتر از 2، میشود (با دَوَران) α را به $(-\alpha)$ تبدیل کرد. در بُعد ِ 2، این شدنی نیست. نتیجه این که اگر بُعد بیش از 2 باشد، $f_{\mathrm{e}\,i}(t,r_1,r_2,\alpha)$ نسبت به α زُج است. در بُعد ِ 2، چنین-محدودیت ی نیست.

به این ترتیب تقارن تحت ِ دَوَران نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(t)&=[\boldsymbol{r}_1(t)]\,f_{\mathrm{e}\,1}[t,r_1(t),r_2(t),\alpha(t)]\\&\quad+[\boldsymbol{r}_2(t)]\,f_{\mathrm{e}\,2}[t,r_1(t),r_2(t),\alpha(t)]\\&\quad+[\boldsymbol{r}_1(t)]\times[\boldsymbol{r}_2(t)]\,f_{\mathrm{e}\,3}[t,r_1(t),r_2(t),\alpha(t)].\end{aligned} \tag{47}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_1\, f_{\mathrm{e}\,1}(t, r_1, r_2, \alpha) + \boldsymbol{r}_2\, f_{\mathrm{e}\,2}(t, r_1, r_2, \alpha) + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\, f_{\mathrm{e}\,3}(t, r_1, r_2, \alpha). \qquad (48)$$

فرض شده $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ خطی-مستقل‌َند. همچنین، $f_{\mathrm{e}\,3}$ صفر است، مگر بُعد 3 باشد؛ و $f_{\mathrm{e}\,i}(t, r_1, r_2, \alpha)$ نسبت به α زُج است، مگر بُعد 2 باشد.

4 ترکیبِ تقارنها

وقت ی بیش از یک یِ از تقارنها (انتقال-ِ-زمان، انتقال-ِ-مکان، دَوَران) برقرار باشد، محدودیت بر شکلِ نیرو بیشتر میشود.

4.1 انتقال-ِ-زمان و انتقال-ِ-مکان

فرض میشود انتقال-ِ-زمان و انتقال-ِ-مکان، هر-دُ تقارنِ سیستم‌َند. پس (11) و (21) هر-دُ برقرار‌َند. از ترکیبِ اینها نتیجه میشود

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{c\,d}}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1). \qquad (49)$$

پس،

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{c\,d}}[\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t)]. \qquad (50)$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{c\,d}}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1). \qquad (51)$$

4.2 انتقال-ِ-زمان و دَوَران

فرض میشود انتقال-ِ-زمان و دَوَران، هر-دُ تقارنِ سیستم‌َند. پس (11) و (42) هر-دُ برقرار‌َند (دومی با این فرض که $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ خطی-مستقل‌َند، همراه با این گزاره که $f_{\mathrm{e}\,3}$ صفر است، مگر بُعدِ فضا 3

باشد). از ترکیبِ اینها نتیجه میشود

$$\boldsymbol{F}_{\rm s}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{r}_1\,f_{\rm c\,e\,1}(r_1,r_2,\alpha)+\boldsymbol{r}_2\,f_{\rm c\,e\,2}(r_1,r_2,\alpha)+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\,f_{\rm c\,e\,3}(r_1,r_2,\alpha). \tag{52}$$

پس،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(t)=&[\boldsymbol{r}_1(t)]\,f_{\rm c\,e\,1}[r_1(t),r_2(t),\alpha(t)]\\&+[\boldsymbol{r}_2(t)]\,f_{\rm c\,e\,2}[r_1(t),r_2(t),\alpha(t)]\\&+[\boldsymbol{r}_1(t)]\times[\boldsymbol{r}_2(t)]\,f_{\rm c\,e\,3}[r_1(t),r_2(t),\alpha(t)].\end{aligned} \tag{53}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}_1\,f_{\rm c\,e\,1}(r_1,r_2,\alpha)+\boldsymbol{r}_2\,f_{\rm c\,e\,2}(r_1,r_2,\alpha)+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\,f_{\rm c\,e\,3}(r_1,r_2,\alpha). \tag{54}$$

4.3 انتقال-ِ-مکان و دَوَران

فرض میشود انتقال-ِ-مکان و دَوَران، هر-دُ تقارنِ سیستم‌َند. این که انتقال-ِ-مکان تقارن است، (21) را نتیجه میدهد. این که دَوَران هم تقارن است، مانسته یِ (29) را نتیجه میدهد:

$$\Theta\,[\boldsymbol{F}_{\rm d}(t,\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]=\boldsymbol{F}_{\rm d}[t,\Theta\,(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]. \tag{55}$$

$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$ را با $\boldsymbol{r}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1. \tag{56}$$

رابطه یِ (55) چنین میشود.

$$\Theta\,[\boldsymbol{F}_{\rm d}(t,\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{F}_{\rm d}(t,\Theta\,\boldsymbol{r}). \tag{57}$$

گیرم $\boldsymbol{r}$ ناصفر است. خطِ شاملِ $\boldsymbol{r}$ را با $\mathbb{L}$ نشان میدهم. $\Theta_{\mathbb{L}}$ را دَوَران ی میگیرم که $\boldsymbol{r}$ را تغییر نمیدهد:

$$\Theta_{\mathbb{L}}\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}. \tag{58}$$

رابطه یِ (57) نتیجه میدهد

$$\Theta_{\mathbb{L}}\, [\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r})] = \boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r}). \tag{59}$$

بر حسبِ بُعدِ فضا، دُ حالت پیش میئاید.

4.3.1 فضا دُ- بُعدی نیست

گیرم بُعدِ فضا 2 نیست. در این صورت مجموعه یِ بردارها یی که تحتِ همه یِ دَوَرانها یِ $\Theta_{\mathbb{L}}$ ناوردا یَند، هم ان $\mathbb{L}$ است. پس،

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\, f_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r}). \tag{60}$$

این را در (57) میگذارم:

$$0 = \Theta\, \boldsymbol{r}\, [f_{\mathrm{d}}(t, \Theta\, \boldsymbol{r}) - f_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r})]. \tag{61}$$

که نتیجه میدهد

$$f_{\mathrm{d}}(t, \Theta\, \boldsymbol{r}) = f_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r}). \tag{62}$$

به این ترتیب،

$$f_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r}) = f_{\mathrm{d\,e}}(t, r). \tag{63}$$

که r طولِ بردارِ $\boldsymbol{r}$ است. رابطه یِ (60) چنین میشود.

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\, f_{\mathrm{d\,e}}(t, r). \tag{64}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{F}_{\rm s}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}\, f_{\rm d\, e}(t, r). \tag{65}$$

پس،

$$\boldsymbol{F}(t) = [\boldsymbol{r}(t)]\, f_{\rm d\, e}[t, r(t)|]. \tag{66}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\, f_{\rm d\, e}(t, r). \tag{67}$$

4.3.2 فضا دُ-بُعدی ست

گیرم بُعدِ فضا 2 است. در این صورت فقط یک $\Theta_{\mathbb{L}}$ هست که (58) را بر میئاورَد، یعنی $\boldsymbol{r}$ را تغییر نمیدهد. این $\Theta_{\mathbb{L}}$ همانی ست. پس (59) بدیهی میشود. اما هر بردار را میشود بر حسبِ $\boldsymbol{r}$ و $(\Theta_\perp\, \boldsymbol{r})$ بسط داد، که $\Theta_\perp$ دَوَران (پادساعتگرد) به اندازه یِ $(\pi/2)$ است. از جمله،

$$\boldsymbol{F}_{\rm d}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\, f_{\rm d\,\|}(t, \boldsymbol{r}) + \Theta_\perp\, \boldsymbol{r}\, f_{\rm d\,\perp}(t, \boldsymbol{r}). \tag{68}$$

در بُعدِ 2، همه یِ دَوَرانها با هم جا-به-جا میشوند. از جمله $\Theta_\perp$ با همه یِ دَوَرانها جا-به-جا میشود:

$$\Theta_\perp\, \Theta = \Theta\, \Theta_\perp. \tag{69}$$

شکلِ (68) برا یِ $\boldsymbol{F}_{\rm d}$ را در (57) میگذارم، و (69) را به کار میبَرم. نتیجه میشود

$$\begin{aligned} 0 = \Theta\, \{&\boldsymbol{r}\, [f_{\rm d\,\|}(t, \Theta\, \boldsymbol{r}) - f_{\rm d\,\|}(t, \boldsymbol{r})] \\ &+ \Theta_\perp\, \boldsymbol{r}\, [f_{\rm d\,\perp}(t, \Theta\, \boldsymbol{r}) - f_{\rm d\,\perp}(t, \boldsymbol{r})]\}. \end{aligned} \tag{70}$$

که نتیجه میدهد $f_{{\rm d}\, i}$ ها تحتِ دَوَران ناوردا یَند:

$$f_{{\rm d}\, i}(t, \Theta\, \boldsymbol{r}) = f_{{\rm d}\, i}(t, \boldsymbol{r}). \tag{71}$$

به این ترتیب،

$$f_{\mathrm{d}\,i}(t,\boldsymbol{r})=f_{\mathrm{d\,e}\,i}(t,r). \qquad (72)$$

و رابطه یِ (68) چنین میشود.

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}(t,\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\,f_{\mathrm{d\,e}\,\|}(t,r)+\Theta_\perp\,\boldsymbol{r}\,f_{\mathrm{d\,e}\,\perp}(t,r). \qquad (73)$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{r}\,f_{\mathrm{d\,e}\,\|}(t,r)+\Theta_\perp\,\boldsymbol{r}\,f_{\mathrm{d\,e}\,\perp}(t,r). \qquad (74)$$

پس،

$$\boldsymbol{F}(t)=[\boldsymbol{r}(t)]\,f_{\mathrm{d\,e}\,\|}[t,r(t)|]+\Theta_\perp\,[\boldsymbol{r}(t)]\,f_{\mathrm{d\,e}\,\perp}[t,r(t)|]. \qquad (75)$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\,f_{\mathrm{d\,e}\,\|}(t,r)+\Theta_\perp\,\boldsymbol{r}\,f_{\mathrm{d\,e}\,\perp}(t,r). \qquad (76)$$

جمله یِ سمتی، یعنی جمله یِ دوم در طرفِ راستِ (73) تا (76)، خاصِ بُعدِ 2 است. در بُعدها یِ دیگر، این که انتقال- ِ مکان و دَوَران تقارن باشند نتیجه میدهد مانسته یِ این جمله صفر است. البته در بُعدها یِ دیگر $\Theta_\perp$ خُش-تعریف نیست، چون دَوَران (ِ نابدیهی) با زاویه یِ معین یکتا نیست (یا وجود ندارد، در بُعدِ 1). در نتیجه جمله یِ سمتی خُش-تعریف نیست.

اما یک تقارنِ دیگر هست که وجودَ ش، در بُعدِ 2 هم جمله یِ سمتی را حذف میکند. انعکاس با ماتریسِ Σ را با $\mathsf{U}(\Sigma)$ نشان میدهم:

$$\{[\mathsf{U}(\Sigma)](\boldsymbol{r}_i)\}(t)=\Sigma\,[\boldsymbol{r}_i(t)]. \qquad (77)$$

$$\{[\mathsf{U}(\Sigma)](\boldsymbol{F})\}(t)=\Sigma\,[\boldsymbol{F}(t)]. \qquad (78)$$

گیرم انعکاس یک تقارنِ سیستم است. یعنی اگر مکانها با ماتریسِ ثابتِ Σ منعکس شوند، نیرو هم با هم ان ماتریس منعکس میشود:

$$\{[\mathsf{U}(\Sigma)](\boldsymbol{F})\}(t)=\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}\Big(t,\{[\mathsf{U}(\Sigma)](\boldsymbol{r}_1)\}(t),\{[\mathsf{U}(\Sigma)](\boldsymbol{r}_2)\}(t)\Big). \qquad (79)$$

که نتیجه میدهد

$$\Sigma\,[\boldsymbol{F}(t)] = \boldsymbol{F}_{\rm s}\{t, \Sigma\,[\boldsymbol{r}_1(t)], \Sigma\,[\boldsymbol{r}_2(t)]\}. \tag{80}$$

یا،

$$\Sigma\,\{\boldsymbol{F}_{\rm s}[t, \boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)]\} = \boldsymbol{F}_{\rm s}\{t, \Sigma\,[\boldsymbol{r}_1(t)], \Sigma\,[\boldsymbol{r}_2(t)]\}. \tag{81}$$

مختصرتر،

$$\Sigma\,[\boldsymbol{F}_{\rm s}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)] = \boldsymbol{F}_{\rm s}(t, \Sigma\,\boldsymbol{r}_1, \Sigma\,\boldsymbol{r}_2). \tag{82}$$

انعکاس طولِ بردارها را تغییر نمیدهد. همچنین،

$$\Theta_\perp\,\Sigma = -\Sigma\,\Theta_\perp. \tag{83}$$

شکلِ (74) برا یِ $\boldsymbol{F}_{\rm s}$ را در (82) میگذارم، و (83) را به کار میبرَم، همراه با این که انعکاس طولِ بردارها را تغییر نمیدهد. نتیجه میشود

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma\,\{&\boldsymbol{r}\,[f_{\rm d\,e\,\parallel}(t, r) - f_{\rm d\,e\,\parallel}(t, r)] \\ &+ \Theta_\perp\,\boldsymbol{r}\,[-f_{\rm d\,e\,\perp}(t, r) - f_{\rm d\,e\,\perp}(t, r)]\}. \end{aligned} \tag{84}$$

که نتیجه میدهد

$$f_{\rm d\,e\,\perp} = 0. \tag{85}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{F}_{\rm s}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}\,f_{\rm d\,e\,\parallel}(t, r). \tag{86}$$

پس،

$$\boldsymbol{F}(t) = [\boldsymbol{r}(t)]\,f_{\rm d\,e\,\parallel}[t, r(t)|]. \tag{87}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\, f_{\mathrm{d\,e}\,\|}(t, r). \tag{88}$$

روابط ِ (86) تا (88) مانستِها یِ (65) تا (67) اند، که برا یِ حالت ی به دست آمدند که بعد ِ فضا 2 نیست. وقت ی بُعد ِ فضا 2 است، برا یِ رسیدن به اینها تقارن-بودن ِ انعکاس هم به کار رفت.

4.4 انتقال- ِ-زمان، انتقال- ِ-مکان، و دَوَران

فرض میشود انتقال- ِ-زمان، انتقال- ِ-مکان، و دَوَران، هر-سه تقارن ِ سیستم َند. چون انتقال- ِ-زمان تقارن است، (11) برقرار است.

4.4.1 فضا دُ-بُعدی نیست

گیرم بُعد ِ فضا 2 نیست. پس (65) برقرار است. ترکیب ِ (11) با (65) نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}\, f(r). \tag{89}$$

پس،

$$\boldsymbol{F}(t) = [\boldsymbol{r}(t)]\, f[r(t)]. \tag{90}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\, f(r). \tag{91}$$

4.4.2 فضا دُ-بُعدی ست

گیرم بُعد ِ فضا 2 است. پس (74) برقرار است. ترکیب ِ (11) با (74) نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}\, f_{\|}(r) + \Theta_{\perp}\, \boldsymbol{r}\, f_{\perp}(r). \tag{92}$$

پس،

$$\boldsymbol{F}(t) = [\boldsymbol{r}(t)]\, f_{\|}[r(t)|] + \Theta_{\perp}\, f_{\perp}[r(t)|]. \tag{93}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\, f_{\|}(r) + \Theta_{\perp}\, \boldsymbol{r}\, f_{\perp}(r). \tag{94}$$

گیرم انعکاس یک تقارنِ سیستم است. در این صورت (85) هم برقرار است، که نتیجه میدهد

$$f_{\perp} = 0. \tag{95}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}\, f_{\|}(r). \tag{96}$$

پس،

$$\boldsymbol{F}(t) = [\boldsymbol{r}(t)]\, f_{\|}[r(t)|]. \tag{97}$$

مختصرتر،

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\, f_{\|}(r). \tag{98}$$

روابطِ (96) تا (98) مانستِها یِ (89) تا (91) اند، که برا یِ حالت ی به دست آمدند که بعدِ فضا 2 نیست. وقت ی بُعدِ فضا 2 است، برا یِ رسیدن به اینها تقارن-بودنِ انعکاس هم به کار رفت.

5 پایستگی یِ شار

نتیجه یِ تقارنها یِ انتقال- ِ-زمان، انتقال- ِمکان، و دَوَران (و انعکاس، وقت ی بُعدِ فضا 2 است)، این است که نیرو یی که جسمِ 1 به جسمِ 2 وارد میکند با بردارِ مکانِ جسمِ 2 نسبت به مکانِ جسمِ 1 موازی ست، و تصویرِ آن نیرو بر این بردار هم تابعِ فقط فاصله یِ جسمِ 2 از جسمِ 1 است. اینها هم ان روابطِ (89) تا (91) اند. چیز ی که مانده شکلِ f است. بستگی یِ f به r را میشود با یک فرضِ

اضافی به دست آورد.

یک تصویر:

اثرِ جسمِ 1 بر جسمِ 2 را مثلِ اثرِ جریانِ حاصل از یک چشمه (جسمِ 1) میگیرم. این جریان پایسته است، یعنی کلِ جریان ی که از مرزِ هر حجمِ شاملِ مکانِ جسمِ 1 میگذرد ثابت است.

این تصویر چیز ی را ثابت نمیکند، اما شاید به موجه-نشان-دادنِ فرضِ پایستگی-یِ-شار کمک کند. نیرو یِ حاصل از جسمِ 1 را، وقت یِ جسمِ 2 عوض نمیشود، فقط جا یَ ش تغییر میکند، مثلِ چگالی یِ یک جریانِ پایسته میگیرم. شارِ (متناظر با این چگالی) گذرنده از $\mathbb{S}$ را با $C(\mathbb{S})$ نشان میدهم:

$$C(\mathbb{S}) = \oint_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}_2) \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2). \tag{99}$$

پایستگی-یِ-شار این است که شارِ گذرنده از مرزِ همه یِ حجمها یِ شاملِ $\boldsymbol{r}_1$ یکسان است. یعنی برا یِ همه یِ $\mathbb{S}$ ها یی که مرزِ حجم ی شاملِ $\boldsymbol{r}_1$ اند، $C(\mathbb{S})$ یکسان است. گیرم پایستگی-یِ-شار برقرار است. ثابتِ $C(\mathbb{S})$، متناظر با $\mathbb{S}$ ها یی که مرزِ حجم ی شاملِ $\boldsymbol{r}_1$ اند، را با C نشان میدهم:

$$C = \oint_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}_2) \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}(t, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2). \tag{100}$$

با یک تغییر-ِ-متغیر، رابطه یِ (100) را میشود چنین نوشت.

$$C = \oint_{\mathbb{S}'} (\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}) \cdot \boldsymbol{r}\, f(r). \tag{101}$$

$$\mathbb{S}' = \mathbb{S} - \boldsymbol{r}_1. \tag{102}$$

یک حالتِ خاص این است که $\mathbb{S}$ یک کره به شعاعِ x به مرکزِ $\boldsymbol{r}_1$ است، که یعنی $\mathbb{S}'$ یک کره به شعاعِ x به مرکزِ مبدَئ است. در این حالت،

$$C = [\mathsf{S}_{n-1}(x)]\, x\, f(x). \tag{103}$$

که n بُعدِ فضا ست و $\mathsf{S}_{n-1}(x)$ مساحتِ یک کره یِ $(n-1)$-بُعدی به شعاعِ x است. $\mathsf{S}_{n-1}(x)$ با x^{n-1} متناسب است:

$$\mathsf{S}_{n-1}(x) = [\mathsf{S}_{n-1}(1)]\, x^{n-1}. \tag{104}$$

به این ترتیب،

$$f(x) = \frac{C}{[\mathsf{S}_{n-1}(1)]\, x^n}. \tag{105}$$

که C مستقل از x است.

6 بار

نتیجه یِ تقارنها، همراه با پایستگی-یِ-شار این است که $\boldsymbol{F}_{i\to j}$ (نیرو یی که جسم ِ i به جسم ِ j وارد میکند) چنین است.

$$\boldsymbol{F}_{i\to j} = \mathfrak{Q}_{i\,j}\, \frac{(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^n}. \tag{106}$$

$\mathfrak{Q}_{i\,j}$ مستقل از مکانها ست، و فقط به خُد ِ جسمها یِ i و j بستگی دارد. (شکل ِ ضعیف ِ) قانون ِ سوم ِ نیوتُن [1] این است.

$$\boldsymbol{F}_{j\to i} = -\boldsymbol{F}_{i\to j}. \tag{107}$$

از (106) و (107) نتیجه میشود $\mathfrak{Q}$ متقارن است:

$$\mathfrak{Q}_{j\,i} = \mathfrak{Q}_{i\,j}. \tag{108}$$

گیرم جا یِ جسمها ثابت است و فقط خُد ِ جسمها تغییر میکنند. رُشن است که

$$\boldsymbol{F}_{i\to k} = \mathfrak{b}_{i\,k\,j}\, \boldsymbol{F}_{i\to j}. \tag{109}$$

که $\mathfrak{b}_{i\,k\,j}$ یک عدد ِ مستقل از مکان است. دیده میشود

$$\mathfrak{b}_{i\,k\,j} = \frac{\mathfrak{Q}_{i\,k}}{\mathfrak{Q}_{i\,j}}. \tag{110}$$

$\mathfrak{b}_{i\,k\,j}$ نسبتِ نیرو یِ وارد بر جسمِ k به نیرو یِ وارد بر جسمِ j است. (بردارها را نمیشود به هم تقسیم کرد. اما اینجا نیروها هم-راستا یَند. منظور از نسبتِ نیروها، نسبتِ تصویرِ نیروها بر خطِ واصلِ جسمِ i به جسمِ دیگر است.) مشاهده نشان میدهد این نسبت مستقل از جسمِ i است، که نیرو را وارد میکند: $\mathfrak{b}_{i\,k\,j}$ مستقل از i است. با استفاده از این، و یک جسمِ خاصِ 0، کمیتِ Q را چنین تعریف میکنم.

$$Q_i = \mathfrak{b}_{j\,i\,0}\,Q_0. \tag{111}$$

در طرفِ راست، Q_0 اختیاری ست. انتخابِ Q_0 مثلِ انتخابِ واحد است. Q_i در طرفِ چپ هم (بعد از انتخابِ Q_0) خُش-تعریف است: طرفِ راست به j بستگی ندارد. دیده میشود

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{i\,j} &= \mathfrak{b}_{i\,j\,0}\,\mathfrak{Q}_{i\,0}, \\ &= \mathfrak{b}_{i\,j\,0}\,\mathfrak{Q}_{0\,i}, \\ &= \mathfrak{b}_{i\,j\,0}\,\mathfrak{b}_{0\,i\,0}\,\mathfrak{Q}_{0\,0}. \end{aligned} \tag{112}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{Q}_{i\,j} = \frac{\mathfrak{Q}_{0\,0}}{(Q_0)^2}\,Q_i\,Q_j. \tag{113}$$

ثابتِ K را چنین تعریف میکنم.

$$K = \frac{\mathfrak{Q}_{0\,0}}{(Q_0)^2}. \tag{114}$$

نتیجه میشود

$$\mathfrak{Q}_{i\,j} = K\,Q_i\,Q_j. \tag{115}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{F}_{i\to j} = K\,Q_i\,Q_j\,\frac{(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^n}. \tag{116}$$

به Q بارِ الکتریکی میگویند.

7 علامتها و قراردادها

چنان که در (116) دیده میشود، نیرو یِ بینِ دُ بارِ یکسان جاذبه است، اگر K منفی باشد، و دافعه است، اگر K مثبت باشد. تجربه نشان میدهد نیرو یِ بینِ دُ بارِ یکسان دافعه است، که یعنی K مثبت است. تجربه، همچنین نشان میدهد نیرو یِ بینِ دُ بار، موارد ی هست که جاذبه است و موارد ی هست که دافعه است. این نشان میدهد بارها یی هستند که مثبت‌َند، و بارها یی هستند که منفی یَند. از (111) دیده میشود، تعریفِ بار به انتخابِ Q_0 وابسته است. از جمله با تغییرِ علامتِ (انتخابی یِ) Q_0، علامتِ همه یِ بارها عوض میشود. اما با این کار علامتِ نسبی یِ دُ-بار عوض نمیشود: علامتِ $(Q_i\,Q_j)$ ثابت میمانَد. علامتِ K هم، چنان که از (114) دیده میشود، مستقل از انتخابِ Q_0 است، چنان که انتظار میرود: علامتِ K تعیین میکند نیرو یِ بینِ دُ بارِ یکسان جاذبه است یا دافعه، و این مشاهده-پذیر (مستقل از قرارداد) است.

خلاصه این که تجربه نشان میدهد دُ دسته بار هست: منفی و مثبت. اما این که کدام دسته منفی ست و کدام دسته مثبت، به قرارداد بستگی دارد. همچنین، تجربه نشان میدهد K مثبت است. اما مقدارِ K به قرارداد بستگی دارد.

یک قرارداد این است.

$$K = 1. \tag{117}$$

این قرارداد ی ست که شکلِ نیرو را ساده میکند. این قرارداد در دستگاهها یِ گاؤسی [2] و الکترُستاتیک به کار میرود.

یک قراردادِ دیگر این است.

$$K = \frac{1}{S_{n-1}(1)}. \tag{118}$$

این قرارداد ی ست که شکلِ معادله یِ پایستگی-یِ-شار را ساده میکند. این قرارداد در دستگاهِ هِویساید-لُرِنتس [3] به کار میرود.

سرانجام، یک دگرگونشِ قراردادِ (118) این است.

$$K = \frac{1}{[S_{n-1}(1)]\,\varepsilon_\circ}. \tag{119}$$

به $\varepsilon_\circ$ گذردهی یِ خلئ میگویند. این قرارداد ی ست که در اِس-آی [4] به کار میرود.

8 پانوشتها

[1] Newton

[2] Gaussian

[3] Heaviside-Lorentz

[4] SI