X1-186 (2025/02/03)

سیم-لوله ای آرمانی، که بینهایت-دراز نیست

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

سیم-لوله ای آرمانی بررسی میشود که بینهایت-دراز نیست. میدانِ مغناطیسی و خُد-القایی یِ این سیم-لوله به دست میئایند و حالتها یِ حدی مطالعه میشوند. برا یِ حالتها یی که مقطعِ سیم-لوله یک دایره، یا دُ خط-ِ-راستِ موازی-با-هم است، محاسبه با تفصیلِ بیشتر انجام میشود و نتایج یِ صریحتر به دست میئایند.

0 هندسه یِ مسئله

یک استوانه (یِ محدود):

درونِ استوانه را با $\mathbb{V}$، قاعدهها یِ آن را با $\mathbb{S}_+$ و $\mathbb{S}_-$، و ارتفاعِ استوانه را با h نشان میدهم. محورِ z را موازی با محورِ استوانه میگیرم، چنان که بردارِ یکه یِ عمود بر $\mathbb{S}_\mathfrak{s}$ به سو یِ بیرونِ استوانه ($\mathfrak{s}\,\hat{z}$) است، که $\mathfrak{s}$ مقدارها یِ $+$ و $-$ را میگیرد. بردارِ یکه یِ عمود بر سطحِ جانبی یِ استوانه را با $\hat{\boldsymbol{n}}$ نشان میدهم، و $\boldsymbol{e}$ را بر سطحِ جانبی یِ استوانه چنین تعریف میکنم.

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{n}}. \qquad (1)$$

$\boldsymbol{e}$ بر سطحِ جانبی یِ استوانه مماس، و بر محورِ استوانه عمود است، و $(\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{e}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ یک کنجِ یکه-متعامدِ راست-گرد است. بردارِ مکان را با $\boldsymbol{r}$، و تصویرِ آن بر صفحه ای عمود بر محورِ z را با $\boldsymbol{\rho}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{2}$$

مبدئ را هم، هم-فاصله از قاعدهِا یِ سیم-لوله میگیرم.

1 سیم-لوله یِ آرمانی

سیم-لوله یِ آرمانی یک استوانه است، که از آن یک جریان-ِ-سطحی یِ سمتی میگذرد:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) = J_{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{r}). \tag{3}$$

که $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$ چگالی یِ این جریان-ِ-سطحی ست، و J_{s} ثابت است. جریان-ِ-سطحی یِ این سیم-لوله متناظر است با مغناطیدگی یِ $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}. \tag{4}$$

مغناطیدگی را چنین میگیرم.

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = J_{\mathrm{s}}\,[\delta_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r})]\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{5}$$

که $\delta_{\mathbb{V}}$ درونِ استوانه یک و بیرونِ استوانه صفر است:

$$\delta_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{r} \in \mathbb{V} \\ 0, & \boldsymbol{r} \notin \mathbb{V} \end{cases}. \tag{6}$$

یا،

$$\delta_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{V}} (\mathrm{d}\,V')\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{7}$$

δ دلتا یِ دیرَک [1] است. برا یِ $\boldsymbol{M}$ ی که با 5 تعریف شده، 4 براورده میشود؛ و البته $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M})$ هم درون و بیرونِ استوانه صفر است. که یعنی جریان- ِ-حجمی یِ متناظر با این مغناطیدگی صفر است. این مغناطیدگی متناظر است با یک بارِ سطحی بر قاعدها یِ استوانه. چگالی یِ این بار را با σ نشان میدهم:

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \mathfrak{s}\, J_{\mathrm{s}}, \quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{S}_{\mathfrak{s}}. \tag{8}$$

با این بار- ِ-سطحی، میشود $\boldsymbol{B}$ (میدانِ مغناطیسی) را چنین حساب کرد.

$$\boldsymbol{B} = \mu_\circ\,(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}). \tag{9}$$

$$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{\nabla}\,\phi. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\phi = -J_{\mathrm{s}}\,[\delta_{\mathbb{S}_+}(\boldsymbol{r}) - \delta_{\mathbb{S}_-}(\boldsymbol{r})]. \tag{11}$$

که،

$$\delta_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\,S')\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{12}$$

$\boldsymbol{H}$ چگالی یِ گردشِ مغناطیسی، و ϕ پتانسیل- ِ-اسکالرِ مغناطیسی ست. از (11) نتیجه میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{J_{\mathrm{s}}}{4\,\pi}\int_{\mathbb{S}_+-\mathbb{S}_-}\frac{\mathrm{d}\,S'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{13}$$

از جمله دیده میشود ϕ نسبت به z فرد است:

$$\phi(\boldsymbol{\rho},-z) = -\phi(\boldsymbol{\rho},z). \tag{14}$$

2 خُد-القایی

جریان- ِ-سطحی یِ سیم-لوله ناشی از N حلقه یِ جریان است. جریانِ هر حلقه را با I نشان میدهم:

$$J_{\mathrm{s}} = \frac{N\,I}{h}. \tag{15}$$

شارِ مغناطیسی یِ مئثرِ سیم-لوله (آن که مشتقِ زمانی یَ ش نیرو-یِ-محرکه یِ القایی یِ سیم-لوله است) را با Ψ نشان میدهم. Ψ مجموعِ شار- ِ-مغناطیسیها یی ست که از حلقِها یِ سیم-لوله میگذرند:

$$\Psi = \frac{N}{h}\int_{-h/2}^{h/2} (\mathrm{d}\,z)\,\psi(z). \tag{16}$$

که $\psi(z)$ شار- ِ-مغناطیسی یی ست که از حلقه ای در ارتفاعِ z میگذرد. به این ترتیب،

$$\Psi = \frac{N}{h}\int_{-h/2}^{h/2} (\mathrm{d}\,z)\int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\,S)\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}). \tag{17}$$

که $\mathbb{S}$ تصویرِ $\mathbb{V}$ بر صفحه یِ $(z=0)$ است. نتیجه میشود

$$\Psi = \frac{\mu_\circ\,N}{h}\left[h\,S\,J_{\mathrm{s}} - \int_{\mathbb{S}_+-\mathbb{S}_-} (\mathrm{d}\,S)\,\phi(\boldsymbol{r})\right]. \tag{18}$$

که S مساحتِ $\mathbb{S}$ است. ϕ نسبت به z فرد است. پس،

$$\Psi = \frac{\mu_\circ\,N}{h}\left[h\,S\,J_{\mathrm{s}} - 2\int_{\mathbb{S}_+} (\mathrm{d}\,S)\,\phi(\boldsymbol{r})\right]. \tag{19}$$

یا،

$$\Psi = \frac{\mu_\circ\,N^2\,I}{h}\left[S - \frac{1}{2\,\pi\,h}\int_{\mathbb{S}_+} (\mathrm{d}\,S)\int_{\mathbb{S}_+-\mathbb{S}_-} \frac{\mathrm{d}\,S'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]. \tag{20}$$

خُد-القایی یِ سیم-لوله را با L نشان میدهم. :

$$L = \frac{\Psi}{I}. \tag{21}$$

به این ترتیب،

$$L = \frac{\mu_\circ\,N^2\,S}{h}\,(1-\Upsilon). \tag{22}$$

$$\Upsilon = \frac{1}{2\,\pi\,h\,S}\int_{\mathbb{S}_+} (\mathrm{d}\,S)\int_{\mathbb{S}_+-\mathbb{S}_-} \frac{\mathrm{d}\,S'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{23}$$

یا،

$$\Upsilon = \frac{1}{2\,\pi\,h\,S}\int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\,S)\int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\,S')\left(\frac{1}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|} - \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2+h^2}}\right). \tag{24}$$

مختصاتِ قطبی یِ متناظر با $(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho})$ را با (p,θ) نشان میدهم:

$$p=|\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}|. \tag{25}$$

$$\int_{\mathbb{S}}\mathrm{d}\,S'=\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{d}\,\theta)\,\int_0^{R(\boldsymbol{\rho},\theta)}(p\,\mathrm{d}\,p). \tag{26}$$

که $R(\boldsymbol{\rho},\theta)$ شعاعِ $\mathbb{S}$ از نقطه یِ $\boldsymbol{\rho}$ در جهتِ متناظر با زاویه یِ θ است: طولِ پاره-خط ی که از $\boldsymbol{\rho}$ شروع میشود و در جهتِ متناظر با θ تا مرزِ $\mathbb{S}$ میرود $R(\boldsymbol{\rho},\theta)$ است. البته ممکن است $R(\boldsymbol{\rho},\theta)$، نسبت به θ چند-مقدار باشد: ممکن است نیم-خط ی که از $\boldsymbol{\rho}$ شروع میشود و در جهتِ متناظر با θ است، مرزِ $\mathbb{S}$ را در بیش از یک نقطه قطع کند. شکلِ دقیقترِ (26) این است.

$$\int_{\mathbb{S}}\mathrm{d}\,S'=\int_{\mathfrak{t}_1}^{\mathfrak{t}_2}(\mathrm{d}\,\mathfrak{t})\,\frac{\mathrm{d}\,[\theta(\mathfrak{t})]}{\mathrm{d}\,\mathfrak{t}}\,\int_0^{\mathfrak{R}(\boldsymbol{\rho},\mathfrak{t})}(p\,\mathrm{d}\,p). \tag{27}$$

که $\mathfrak{t}$ پارامترِ خم برا یِ مرزِ $\mathbb{S}$ است، و $\mathfrak{R}(\boldsymbol{\rho},\mathfrak{t})$ فاصله یِ $\boldsymbol{\rho}$ با نقطه ای از مرزِ $\mathbb{S}$ است که متناظر با پارامترِ $\mathfrak{t}$ است:

$$\mathfrak{R}(\boldsymbol{\rho},\mathfrak{t})=R[\boldsymbol{\rho},\theta(\mathfrak{t})]. \tag{28}$$

روابطِ (25) و (26) را در (24) میگذارم. انتگرال بر p گرفته میشود:

$$\Upsilon=\frac{1}{2\,\pi\,h\,S}\,\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S)\,\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{d}\,\theta)\,\{R(\boldsymbol{\rho},\theta)-\sqrt{[R(\boldsymbol{\rho},\theta)]^2+h^2}+h\}. \tag{29}$$

$$1-\Upsilon=\frac{1}{2\,\pi\,h\,S}\,\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S)\,\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{d}\,\theta)\,\{\sqrt{[R(\boldsymbol{\rho},\theta)]^2+h^2}-R(\boldsymbol{\rho},\theta)\}. \tag{30}$$

3 استوانه یِ کوتاه

وقت ی ارتفاعِ استوانه خیل ی کمتر از مقیاس- ِطولِ نُعی یِ قاعده یِ استوانه است، بخشِ عمده یِ انتگرالِ طرف- ِراستِ (30) از جاها یی میئاید که $R(\boldsymbol{\rho},\theta)$ کوچک است، خیلی کوچکتر از مقیاس- ِطولِ نُعی یِ قاعده یِ استوانه. (30) را میشود چنین نوشت.

$$1-\Upsilon=\frac{1}{2\,\pi\,h\,S}\,\int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S)\,\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{d}\,\theta)\,\int_0^h\frac{(\mathrm{d}\,z)\,z}{\sqrt{[R(\boldsymbol{\rho},\theta)]^2+z^2}}. \tag{31}$$

برا یِ $R(\boldsymbol{\rho},\theta)$ خیل ی کوچکتر از مقیاس- ِ-طول ِ نُعی یِ قاعده یِ استوانه، مختصات ِ (ξ,η) را برا یِ $\boldsymbol{\rho}$ به کار میبَرم، که ξ کمینه یِ $\boldsymbol{\rho}$ از مرز ِ $\mathbb{S}$ است، و η مختصه یِ طولی در راستا یِ مرز ِ $\mathbb{S}$ است، چنان که $(\eta=0)$ متناظر با نزدیکترین نقطه به $\boldsymbol{\rho}$ بر مرز ِ $\mathbb{S}$ است. مبدئ برا یِ θ را هم هم ین نقطه میگیرم:

$$\xi = [R(\boldsymbol{\rho},\theta)]\,(\cos\theta)\,(1+\cdots). \tag{32}$$

$$\mathrm{d}\,S = (\mathrm{d}\,\eta)\,(\mathrm{d}\,\xi)\,(1+\cdots). \tag{33}$$

بخش ِ عمده یِ انتگرال ِ طرف- ِ-راست ِ (31) از θ ها یِ نزدیک ِ 0 میئاید. این بخش، با تغییر ِ ناحیه یِ انتگرال بر θ به $(-\pi/2,\pi/2)$ تغییر نمیکند. ناحیه یِ انتگرال بر θ را به $(-\pi/2,\pi/2)$ تغییر میدهم، و متغیر ِ θ را به q تبدیل میکنم:

$$q = \sin\theta. \tag{34}$$

$$1-\Upsilon = \frac{1}{2\,\pi\,h\,S}\int_{\mathbb{C}}(\mathrm{d}\,\eta)\int_{-1}^{1}(\mathrm{d}\,q)\int_0^h(\mathrm{d}\,z)\,z\int_0^D\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\sqrt{\xi^2+z^2\,(1-q^2)}} + \cdots\,. \tag{35}$$

که $\mathbb{C}$ مرز ِ $\mathbb{S}$ است، و D مقیاس- ِ-طول ِ نُعی یِ قاعده یِ استوانه، در راستا یِ عمود بر مرز ِ قاعده یِ استوانه، است. نتیجه میشود

$$1-\Upsilon = \frac{C}{2\,\pi\,h\,S}\int_{-1}^{1}(\mathrm{d}\,q)\int_0^h(\mathrm{d}\,z)\,z\,\sinh^{-1}\frac{D}{z\,\sqrt{1-q^2}} + \cdots\,. \tag{36}$$

که C محیط ِ قاعده یِ استوانه است. و چون h خیل ی کوچکتر از D است،

$$1-\Upsilon = \frac{C}{2\,\pi\,h\,S}\int_{-1}^{1}(\mathrm{d}\,q)\int_0^h(\mathrm{d}\,z)\,z\,\ln\frac{2\,D}{z\,\sqrt{1-q^2}} + \cdots\,. \tag{37}$$

که نتیجه میدهد

$$1-\Upsilon = \frac{C\,h}{2\,\pi\,S}\,\ln\frac{\tilde{D}}{h} + \cdots\,. \tag{38}$$

که $\tilde{D}$ از مرتبه یِ D است. پس میشود D را جایگزین ِ آن کرد:

$$1-\Upsilon = \frac{C\,h}{2\,\pi\,S}\,\ln\frac{D}{h} + \cdots\,. \tag{39}$$

به این ترتیب،

$$L = \frac{\mu_\circ\, N^2\, C}{2\,\pi}\ \ln\frac{D}{h} + \cdots\ . \tag{40}$$

یک راه ِ دیگر برا یِ به-دست-آوردن ِ این رفتار- ِ-حدی، استفاده از شکل ِ تقریبی یِ میدان ِ مغناطیسی ست. استوانه یِ کوتاه را با یک سطح ِ تخت تقریب میکنم، که مرز ِ آن سطح- ِ-جانبی یِ استوانه (تقریب-شده با یک خم) است. میدان ِ مغناطیسی در این سطح، در فاصله یِ ξ از مرز ِ آن، وقت ی ξ بسیار بزرگتر از h و بسیار کوچکتر از D است، بخش ِ غالب َ ش میدان ِ مغناطیسی یِ حاصل از یک سیم ِ بسیار دراز است که جریان ِ $(N\,I)$ از آن میگذرد:

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{\mu_\circ\, N\, I}{2\,\pi\,\xi} + \cdots\ . \tag{41}$$

جاها یِ دیگر، میدان ِ مغناطیسی ضعیفتر است. به این ترتیب، بخش ِ غالب ِ شار ِ مغناطیسی میشود انتگرال ِ این میدان بر هم ین ناحیه (که ξ بین ِ h و D است):

$$\Psi = \int_{\mathbb{C}}(\mathrm{d}\,\eta)\ \int_h^D\ \frac{\mu_\circ\, N^2\, I\,\mathrm{d}\,\xi}{2\,\pi\,\xi} + \cdots\ . \tag{42}$$

که نتیجه میدهد

$$\Psi = \frac{\mu_\circ\, N^2\, I\, C}{2\,\pi}\ \ln\frac{D}{h} + \cdots\ . \tag{43}$$

این هم ان (40) است.

4 استوانه یِ دراز

وقت ی ارتفاع ِ استوانه خیل ی بیشتر از مقیاس- ِ-طول ِ نُعی یِ قاعده یِ استوانه است، (29) میشود.

$$\Upsilon = \frac{\Upsilon_1}{h} + \frac{\Upsilon_2}{h^2} + \cdots\ . \tag{44}$$

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{2\,\pi\,S}\ \int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S)\ \int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{d}\,\theta)\ R(\boldsymbol{\rho},\theta). \tag{45}$$

$$\Upsilon_2 = -\frac{1}{2\,\pi\,S}\ \int_{\mathbb{S}}(\mathrm{d}\,S)\ \int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{d}\,\theta)\ \frac{[R(\boldsymbol{\rho},\theta)]^2}{2}. \tag{46}$$

دیده میشود

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{\mathrm{d}\,S'}{|\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|} = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{d}\,\theta)\, \int_{0}^{R(\boldsymbol{\rho},\theta)} (\mathrm{d}\,p). \tag{47}$$

یا،

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{\mathrm{d}\,S'}{|\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|} = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{d}\,\theta)\, R(\boldsymbol{\rho},\theta). \tag{48}$$

پس،

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{2\,\pi\,S}\, \int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\,S)\, \int_{\mathbb{S}} \frac{\mathrm{d}\,S'}{|\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}|}. \tag{49}$$

که یعنی،

$$\Upsilon_1 = \frac{S}{2\,\pi}\, \left\langle \frac{1}{\mathfrak{D}} \right\rangle. \tag{50}$$

که $\langle \mathfrak{X} \rangle$ میانگینِ $\mathfrak{X}$ (بر مساحت) است، و $\mathfrak{D}$ فاصله یِ دُ نقطه (هر-دُ در $\mathbb{S}$) از هم است. همچنین،

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{d}\,\theta)\, \frac{[R(\boldsymbol{\rho},\theta)]^2}{2}. \tag{51}$$

پس،

$$\Upsilon_2 = -\frac{S}{2\,\pi}. \tag{52}$$

5 مثالها

این حالت- ِ-خاصها را بررسی میکنم، که تقارن حلِ مسئله را سادتِر میکند.

5.1 استوانه یِ دوار

مقطعِ استوانه یک دایره به شعاعِ a است. پس

$$S = \pi\, a^2. \tag{53}$$

این مسئله تقارنِ سمتی دارد. محورِ z را هم ان محورِ تقارن میگیرم، و مختصاتِ قطبی یِ متناظر با $\boldsymbol{\rho}$ را با (ρ, φ) نشان میدهم. در (29) و (30)،

$$\int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}\, S) = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{d}\, \varphi) \int_0^a (\rho\, \mathrm{d}\, \rho). \tag{54}$$

$$R(\boldsymbol{\rho}, \theta) = -\rho\, \cos\theta + \sqrt{a^2 - (\rho\, \sin\theta)^2}. \tag{55}$$

این تغییر- ِ-متغیر از (ρ, θ) به (u, v) را به کار میبَرم.

$$u = \rho\, \cos\theta. \tag{56}$$

$$v = \rho\, \sin\theta. \tag{57}$$

پس،

$$R(\boldsymbol{\rho}, \theta) = -u + \sqrt{a^2 - v^2}. \tag{58}$$

طرفِ راست را با $\tilde{u}$ نشان میدهم:

$$\tilde{u} = -u + \sqrt{a^2 - v^2}. \tag{59}$$

و (30) چنین میشود.

$$1 - \Upsilon = \frac{1}{\pi\, h\, a^2} \int_{-a}^{a} (\mathrm{d}\, v) \int_{-\sqrt{a^2 - v^2}}^{\sqrt{a^2 - v^2}} (\mathrm{d}\, u)\, (\sqrt{\tilde{u}^2 + h^2} - \tilde{u}). \tag{60}$$

یا،

$$1 - \Upsilon = \frac{1}{\pi\, h\, a^2} \int_{-a}^{a} (\mathrm{d}\, v) \int_0^{2\sqrt{a^2 - v^2}} (\mathrm{d}\, \tilde{u})\, (\sqrt{\tilde{u}^2 + h^2} - \tilde{u}). \tag{61}$$

که میشود

$$\begin{aligned} 1 - \Upsilon = \frac{1}{\pi\, h\, a^2} \int_{-a}^{a} (\mathrm{d}\, v) \Bigg[& \sqrt{a^2 - v^2}\, \sqrt{h^2 + 4\, (a^2 - v^2)} \\ & + \frac{h^2}{2}\, \sinh^{-1} \frac{2\sqrt{a^2 - v^2}}{h} - 2\, (a^2 - v^2) \Bigg]. \end{aligned} \tag{62}$$

متغیرِ v را به α تبدیل میکنم، و پارامترِ s را تعریف میکنم:

$$v = a\,\sin\alpha. \tag{63}$$

$$s = \frac{2\,a}{h} \tag{64}$$

و (62) میشود

$$1 - \Upsilon = f(s). \tag{65}$$

که،

$$f(s) = \frac{2}{\pi\,s}\left[-\frac{2\,s^2}{3} + \int_0^{\pi/2} (\mathrm{d}\,\alpha)\,g(s,\alpha)\right]. \tag{66}$$

$$g(s,\alpha) = s\,(\cos^2\alpha)\,\sqrt{1+s^2\,\cos^2\alpha} + (\cos\alpha)\,\sinh^{-1}(s\,\cos\alpha). \tag{67}$$

5.1.1 استوانه یِ دوار: ارتفاعِ کم

در این حالت، ارتفاعِ استوانه خیل ی کوچکتر از شعاعِ استوانه است:

$$h \ll a. \tag{68}$$

یعنی،

$$s \gg 1. \tag{69}$$

به این ترتیب،

$$g(s,\alpha) = s^2\,\cos^3\alpha + (\cos\alpha)\,\ln(2\,s\,\cos\alpha) + \frac{\cos\alpha}{2} + \cdots. \tag{70}$$

$$f(s) = \frac{2}{\pi\,s}\,(\ln s + \beta + \cdots). \tag{71}$$

$$\beta = 2\,\ln 2 - \frac{1}{2}. \tag{72}$$

رابطه یِ (71) را با رابطه یِ (39) مقایسه میکنم:

$$C = 2\,\pi\,a. \tag{73}$$

$$\frac{C}{2\,\pi\,S} = \frac{1}{\pi\,a}. \tag{74}$$

$$\frac{C\,h}{2\,\pi\,S} = \frac{2}{\pi\,s}. \tag{75}$$

همچنین،

$$D \sim a. \tag{76}$$

$$\frac{D}{h} \sim s. \tag{77}$$

و البته، ضمنَن،

$$\ln\frac{D}{h} \sim \ln s + \beta. \tag{78}$$

پس (71) با (39) سازگار است.

5.1.2 استوانه یِ دوار: ارتفاعِ زیاد

در این حالت، ارتفاعِ استوانه خیل ی بزرگتر از شعاعِ استوانه است:

$$h \gg a. \tag{79}$$

یعنی،

$$s \ll 1. \tag{80}$$

به این ترتیب،

$$g(s,\alpha) = 2\,s\,\cos^2 + \frac{s^3\,\cos^4\alpha}{3} + \cdots. \tag{81}$$

$$f(s) = 1 - \frac{4\,s}{3\,\pi} + \frac{s^2}{8} + \cdots. \tag{82}$$

رابطه یِ (82) را با رابطه یِ (44) مقایسه میکنم. از (45) و (55) دیده میشود

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= \int_0^a \frac{\rho\,\mathrm{d}\,\rho}{S}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{d}\,\theta)\,[-\rho\,\cos\theta+\sqrt{a^2-(\rho\,\sin\theta)^2}],\\ &= \frac{4\,a^3}{3\,S}\int_0^{\pi/2}(\mathrm{d}\,\theta)\,\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta},\\ &= \frac{4\,a^3}{3\,S}\int_0^{\pi/2}(\mathrm{d}\,\theta)\,\frac{1+\cos\theta+\cos^2\theta}{1+\cos\theta}.\end{aligned} \tag{83}$$

که نتیجه میدهد

$$\Upsilon_1 = \frac{8\,a}{3\,\pi}. \tag{84}$$

$$\frac{\Upsilon_1}{h} = \frac{4\,s}{3\,\pi}. \tag{85}$$

از (52) هم نتیجه میشود

$$\frac{\Upsilon_2}{h^2} = -\frac{s^2}{8}. \tag{86}$$

روابطِ (85) و (86) نشان میدهند (82) با (44) سازگار است.

5.2 استوانه ای که قاعده اَ ش یک نوارِ نامحدود است

قاعده یِ استوانه یک نوارِ نامحدود به پهنا یِ w است (مقطعِ استوانه دُ خط- ِ-راستِ موازی-با-هم است). پس S بینهایت میشود. این مسئله تقارنِ انتقالی دارد. به جا یِ L (خُد-القایی)، خُد-القایی-بر-طول (در راستا یِ موازی-با-نوار) را به کار میبَرم. خُد-القایی-بر-طول را با ℓ نشان میدهم. مختصاتِ دِکَرتی یِ $\boldsymbol{\rho}$ را با (x, y) نشان میدهم، محورِ x را موازی با نوار، و لبِها یِ نوار را $(y = 0)$ و $(y = w)$ میگیرم. رابطه یِ متناظر با (22) میشود

$$\ell = \frac{\mu_\circ\,N^2\,w}{h}\,(1-\Upsilon). \tag{87}$$

که،

$$\Upsilon = \frac{1}{2\,\pi\,h\,w}\int_0^w (\mathrm{d}\,y)\int_0^w (\mathrm{d}\,y')\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{d}\,\zeta)\,\Xi. \tag{88}$$

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2+(y-y')^2}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2+(y-y')^2+h^2}}. \tag{89}$$

پس،

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \frac{1}{2\,\pi\,h\,w}\int_0^w (\mathrm{d}\,y)\int_0^w (\mathrm{d}\,y')\,\ln\frac{(y-y')^2+h^2}{(y-y')^2},\\ &= \frac{1}{2\,\pi\,h\,w}\left(w^2\,\ln\frac{w^2+h^2}{w^2} - h^2\,\ln\frac{w^2+h^2}{h^2} + 4\,h\,w\,\tan^{-1}\frac{w}{h}\right).\end{aligned} \tag{90}$$

یا،

$$\Upsilon = \frac{1}{2\,\pi}\,[\varsigma\,\ln(1+\varsigma^{-2}) - \varsigma^{-1}\,\ln(\varsigma^2+1) + 4\,\tan^{-1}\varsigma]. \tag{91}$$

$$\varsigma = \frac{w}{h}. \tag{92}$$

5.2.1 استوانه ای که قاعده اَ ش یک نوارِ نامحدود است: ارتفاعِ کم

در این حالت، ارتفاعِ استوانه خیل ی کوچکتر از پهنا یِ نوار است:

$$h \ll w. \tag{93}$$

یعنی،

$$\varsigma \gg 1. \tag{94}$$

به این ترتیب،

$$1-\Upsilon = \frac{\ln\varsigma}{\pi\,\varsigma} + \cdots\,. \tag{95}$$

این را با (39) مقایسه میکنم:

$$\frac{C}{S} = 2\,w. \tag{96}$$

$$\frac{C\,h}{2\,\pi\,S} = \frac{1}{\pi\,\varsigma}. \tag{97}$$

همچنین،

$$D \sim w. \tag{98}$$

$$\frac{D}{h} \sim \varsigma. \tag{99}$$

پس (95) با (39) سازگار است.

5.2.2 استوانه ای که قاعده اَ ش یک نوارِ نامحدود است: ارتفاعِ زیاد

در این حالت، ارتفاعِ استوانه خیل ی بزرگتر از پهنا یِ نوار است:

$$h \gg w. \tag{100}$$

یعنی،

$$\varsigma \ll 1. \tag{101}$$

به این ترتیب،

$$\Upsilon = \frac{-\varsigma\,\ln\varsigma}{\pi} + \cdots . \tag{102}$$

این را نمیشود مستقیمَن با (44) مقایسه کرد. چون اینجا S بینهایت میشود، و در نتیجه Υ_1 و Υ_2 بینهایت میشوند. بستگی یِ Υ به h توانی نیست:

$$\Upsilon = \frac{w}{\pi\,h}\,\ln\frac{h}{w} + \cdots . \tag{103}$$

6 پانوشتها

[1] Dirac