X1-185 (2025/01/03)

کره یِ رسانا در میدانِ یکنواخت: نیرو

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

بر یک کره یِ رسانا در یک میدانِ الکتریکی که دور از کره یکنواخت است، بارِ سطحی القا میشود. نیرو یِ وارد بر هر تکه از کره ناشی از میدانِ یکنواخت و تکه یِ دیگر است. هر یک از ای نیروها و نیز نیرو یِ کل، برا یِ یک نیمکره که صفحه یِ مرزَ ش عمود بر میدان (ِ دور) است محاسبه میشود.

1 یک کره یِ رسانا در یک میدانِ الکتریکی یِ یکنواخت

یک کره یِ رسانا به شعاعِ a در یک میدانِ الکتریکی ست که دور از کره یکنواخت است. جز کره، هیچ جا بار نیست (مگر در بینهایت، که میدانِ یکنواخت درست شود). میدانِ الکتریکی را با $\boldsymbol{E}$، و حدِ آن در بینهایت را با $\boldsymbol{E}_{\circ}$ نشان میدهم. پتانسیلِ الکتریکی را با ϕ، و پتانسیل- ِ-الکتریکی یِ متناظر با $\boldsymbol{E}_{\circ}$ را با $\phi_{\circ}$ نشان میدهم. بردارِ مکان را با $\boldsymbol{r}$، طولِ بردار- ِ-مکان را با r، زاویه یِ بردار- ِ-مکان

با $\hat{\boldsymbol{z}}$ را با θ، و کسینوسِ این زاویه را با u نشان میدهم:

$$\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{r} = r\,u. \tag{1}$$

$$u = \cos\theta. \tag{2}$$

محورِ z را هم-راستا با $\boldsymbol{E}_\circ$ میگیرم:

$$\boldsymbol{E}_\circ = E_\circ\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{3}$$

مبدئِ مختصات را هم مرکزِ کره میگیرم. پتانسیلِ الکتریکی بیرونِ کره معادله یِ لَپلَس [1] را بر میئاوَرَد:

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\,\phi. \tag{4}$$

پتانسیلِ الکتریکی سمتی-متقارن است: تابعِ فقط (r,θ) است. پس میشود (درونِ یک ناحیه یِ کروی-متقارن که بی-بار است) برا یَ ش چنین-بسط ی نوشت.

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [\phi_n(r)]\,\mathsf{P}_n(u). \tag{5}$$

که P_n چند-جملِئی یِ لُژاندر [2] از درجه یِ n است، و

$$\phi_n(r) = b_n\,r^n + c_n\,r^{-(n+1)}. \tag{6}$$

که b_n ها و c_n ها ثابتَند. اینها را میشود در مثلَن [3] یافت. از این که $\boldsymbol{E}$ در $(r \to \infty)$ به $\boldsymbol{E}_\circ$ میگراید نتیجه میشود

$$0 = E_\circ + \lim_{r\to\infty} [(\boldsymbol{\nabla}\,\phi)(r,\theta)]. \tag{7}$$

این هم نتیجه میدهد

$$0 = b_1 + E_\circ. \tag{8}$$

$$0 = b_n, \qquad n > 1. \tag{9}$$

به این ترتیب،

$$\phi(r,\theta)=b_0+c_0\,r^{-1}+(-E_\circ\,r+c_1\,r^{-2})\,u+\sum_{n=2}^{\infty}c_n\,r^{-(n+1)}\,\mathsf{P}_n(u). \qquad (10)$$

کره رسانا ست. پس پتانسیل بر آن ثابت است. این ثابت را با ϕ_a نشان میدهم:

$$\phi(a,\theta)=\phi_a. \qquad (11)$$

که، با استفاده از (10)، نتیجه میدهد

$$\phi_a=b_0+c_0\,a^{-1}. \qquad (12)$$

$$0=-E_\circ\,a+c_1\,a^{-2}. \qquad (13)$$

$$0=c_n, \qquad n>1. \qquad (14)$$

به این ترتیب،

$$\phi(r,\theta)=b_0+\frac{V\,a}{r}-E_\circ\,a\,\left(\frac{r}{a}-\frac{a^2}{r^2}\right)\,u. \qquad (15)$$

که،

$$V=\phi_a-b_0. \qquad (16)$$

البته b_0 یک ثابت است که میشود آن را از پتانسیل کم کرد. بخشِ مشاهده-پذیرِ شرط- ِ-مرزی بر پتانسیل، اختلاف ِ ϕ_a با b_0 است. اینها یعنی میشود b_0 را صفر گرفت:

$$\phi(r,\theta)=\frac{V\,a}{r}-E_\circ\,a\,\left(\frac{r}{a}-\frac{a^2}{r^2}\right)\,u. \qquad (17)$$

این را میشود بر حسب ِ Q (بارِ کل ِ کره) هم نوشت. چگالی یِ سطحی یِ بار بر کره را با σ نشان میدهم:

$$\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_\circ}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}_+(a,\theta). \qquad (18)$$

که $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردارِ یکه یِ عمود بر سطحِ کره و به سو یِ بیرونِ آن است، و $\boldsymbol{E}_+$ و $\boldsymbol{E}_-$ چنین تعریف شده اند.

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{s}}(a,\theta) = \lim_{r\to a^{\mathfrak{s}}} [\boldsymbol{E}(r,\theta)]. \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_\circ} = \frac{V}{a} + 3\,E_\circ\,u. \tag{20}$$

$$\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_\circ} = V\,a. \tag{21}$$

$$\phi(r,\theta) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_\circ\,r} - E_\circ\,a\,\left(\frac{r}{a} - \frac{a^2}{r^2}\right)\,u. \tag{22}$$

2 نیرو

چگالی یِ نیرو یِ وارد بر سطحِ کره را با $\boldsymbol{f}$، و نیرو یِ وارد بر نیم- کره یِ شمالی را با $\boldsymbol{F}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{f} = \frac{\sigma\,\boldsymbol{E}_+}{2}. \tag{23}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{f} = \hat{\boldsymbol{n}}\,\frac{\varepsilon_\circ}{2}\,\left(\frac{V}{a} + 3\,E_\circ\,u\right)^2. \tag{24}$$

$$\frac{\boldsymbol{F}}{\pi\,\varepsilon_\circ\,a^2} = \hat{\boldsymbol{z}}\,\int_0^1 (\mathrm{d}\,u)\,\left(\frac{V}{a} + 3\,E_\circ\,u\right)^2\,u. \tag{25}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\boldsymbol{F}}{\pi\,\varepsilon_\circ\,a^2} = \hat{\boldsymbol{z}}\,\left(\frac{V^2}{2\,a^2} + 2\,\frac{V\,E_\circ}{a} + \frac{9\,E_\circ^2}{4}\right). \tag{26}$$

3 پتانسیلِ حاصل از نیمکره یِ جنوبی

پتانسیلِ حاصل از نیمکره یِ جنوبی را با $\tilde{\phi}$ نشان میدهم:

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{r}) = \frac{a^2}{4\,\pi\,\varepsilon_\circ}\,\int_{u'<0} \frac{(\mathrm{d}\,\Omega')\,\sigma(\theta')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{27}$$

چشمه یِ متناظر با این پتانسیل، چگالی-یِ-بارِ نیم-کره یِ جنوبی ست، که سمتی-متقارن است. پس $\tilde{\phi}$ هم سمتی-متقارن است. این پتانسیل را میشود (از جمله) از دُ راه حساب کرد. $r_<$ و $r_>$ را چنین تعریف میکنم.

$$r_< = \min(r, a). \tag{28}$$

$$r_> = \max(r, a). \tag{29}$$

همچنین،

$$\frac{\sigma(u)}{\varepsilon_\circ} = B_0 + B_1\, u. \tag{30}$$

که،

$$B_0 = \frac{V}{a}. \tag{31}$$

$$B_1 = 3\, E_\circ. \tag{32}$$

3.1 راهِ اول

چون $\tilde{\phi}$ سمتی-متقارن است، میشود آن را از مقدارَش بر نیمه یِ مثبتِ محورِ z تعیین کرد (مثلَن [3]). برا یِ $\tilde{\phi}$ بر نیمه یِ مثبتِ محورِ z هم،

$$\frac{2\,\tilde{\phi}(r\,\hat{\boldsymbol{z}})}{a^2} = \int_{-1}^{0} \frac{(\mathrm{d}\,u')\,(B_0 + B_1\,u')}{(r^2 - 2\,a\,r\,u' + a^2)^{1/2}}. \tag{33}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{2\,\tilde{\phi}(r\,\hat{\boldsymbol{z}})}{a^2} = B_0\,\frac{r + a - (r^2 + a^2)^{1/2}}{a\,r} + B_1\,\frac{r^3 + a^3 - (r^2 + a^2)^{3/2}}{a^2\,r^2}. \tag{34}$$

این را میشود بر حسبِ توانها یِ صحیحِ r بسط داد:

$$\begin{aligned}\frac{2\,\tilde{\phi}(r\,\hat{\boldsymbol{z}})}{a^2} = {}& B_0\left\{\frac{1}{r_>} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,[(2\,k-3)!!]}{(2\,k)!!}\,\frac{r_<^{2\,k-1}}{r_>^{2\,k}}\right\}\\ &+ B_1\left\{\frac{r_<}{r_>^2} - 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,[(2\,k-5)!!}{(2\,k)!!]}\,\frac{r_<^{2\,k-2}}{r_>^{2\,k-1}}\right\}.\end{aligned} \tag{35}$$

که،

و پتانسیلِ حاصل از نیم-کره یِ جنوبی (در کلِ فضا) چنین میشود.

$$\frac{2\,\tilde{\phi}(r,\theta)}{a^2} = B_0\,\left\{\frac{1}{r_>} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,[(2\,k-1)!!]}{(2\,k+2)!!}\,\frac{r_<^{2\,k+1}}{r_>^{2\,k+2}}\,\mathsf{P}_{2\,k+1}(u)\right\} + B_1\,\left\{\frac{1}{3}\,\frac{r_<}{r_>^2}\,u + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,[(2\,k-3)!!]}{(2\,k+2)!!}\,\frac{r_<^{2\,k}}{r_>^{2\,k+1}}\,\mathsf{P}_{2\,k}(u)\right\}. \tag{36}$$

3.2 راهِ دوم

چون $\tilde{\phi}$ سمتی-متقارن است،

$$\tilde{\phi}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}\,\mathsf{P}_n(u). \tag{37}$$

که،

$$A_n = \frac{a^2}{4\,\pi\,\varepsilon_\circ}\,\int_{u<0}(\mathrm{d}\,\Omega)\,\sigma(\theta). \tag{38}$$

دیده میشود

$$\frac{2\,A_n}{a^2} = \sum_{\alpha=0}^{1} B_\alpha\,C_{\alpha\,n}. \tag{39}$$

که،

$$C_{\alpha\,n} = \int_{-1}^{0}(\mathrm{d}\,u)\,u^\alpha\,\mathsf{P}_n(u). \tag{40}$$

به این ترتیب،

$$C_{0\,(2\,k)} = \delta_k^0. \tag{41}$$

$$C_{0\,(2\,k+1)} = -(-1)^k\,\frac{(2\,k-1)!!}{(2\,k+2)!!}. \tag{42}$$

$$C_{1\,(2\,k)} = (-1)^k\,\frac{(2\,k-3)!!}{(2\,k+2)!!}. \tag{43}$$

$$C_{1\,(2\,k+1)} = \frac{1}{3}\,\delta_k^0. \tag{44}$$

روابطِ (41) تا (44) را در (39) میگذارم. A_n به دست میئاید. این را در (37) میگذارم. حاصل (36) است.

4 نیرو (یک بارِ دیگر)

نیرو یِ وارد بر نیم-کره یِ شمالی، ناشی از نیم-کره یِ جنوبی و میدانِ یکنواختِ بیرونی ست: نیم-کره یِ شمالی به خُدَش نیرو وارد نمیکند. چگالی یِ نیرو یِ وارد بر سطح به خاطرِ نیم-کره یِ جنوبی را با $\tilde{\boldsymbol{f}}$ نشان میدهم. این را بر نیم-کره یِ شمالی حساب میکنم:

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \sigma\, \tilde{\boldsymbol{E}}. \tag{45}$$

$\tilde{\boldsymbol{E}}$ میدانِ ناشی از نیم-کره یِ جنوبی ست، که بر نیم-کره یِ شمالی پیوسته است. از (37) نتیجه میشود

$$a^2\, \tilde{\boldsymbol{E}}_+(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, [(n+1)\, \hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, \sqrt{1-u^2}\, (\mathrm{D}\, \mathsf{P}_n)(u)]. \tag{46}$$

$$a^2\, \tilde{\boldsymbol{E}}_-(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, [-n\, \hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, \sqrt{1-u^2}\, (\mathrm{D}\, \mathsf{P}_n)(u)]. \tag{47}$$

که D مشتق-گیری ست. با استفاده از (39) هم،

$$2\, \tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathfrak{s}}(a,\theta) = \sum_{\alpha=0}^{1} B_\alpha\, \boldsymbol{G}_{\alpha\,\mathfrak{s}}(a,\theta). \tag{48}$$

که،

$$\boldsymbol{G}_{\alpha\,+}(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha\,n}\, [(n+1)\, \hat{\boldsymbol{r}}\, \mathsf{P}_n(u) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, \sqrt{1-u^2}\, (\mathrm{D}\, \mathsf{P}_n)(u)]. \tag{49}$$

$$\boldsymbol{G}_{\alpha\,-}(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha\,n}\, [-n\, \hat{\boldsymbol{r}}\, \mathsf{P}_n(u) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, \sqrt{1-u^2}\, (\mathrm{D}\, \mathsf{P}_n)(u)]. \tag{50}$$

البته $\tilde{\boldsymbol{E}}$ و $\boldsymbol{G}_\alpha$ بر نیم-کره یِ شمالی پیوسته اند:

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathfrak{s}}(a,\theta) = \tilde{\boldsymbol{E}}(a,\theta), \qquad u > 0. \tag{51}$$

$$\boldsymbol{G}_{\alpha\,\mathfrak{s}}(a,\theta) = \boldsymbol{G}_\alpha(a,\theta), \quad u > 0. \tag{52}$$

نیرو یِ وارد بر نیم- کره یِ شمالی به خاطرِ نیم- کره یِ جنوبی را با $\tilde{\boldsymbol{F}}$ نشان میدهم:

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{z}}\,\tilde{F}. \tag{53}$$

$$\frac{2\,\tilde{F}}{a^2} = \sum_{\alpha=0}^{1} B_\alpha \int_{u>0} (\mathrm{d}\,\Omega)\,[\sigma(\theta)]\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{G}_\alpha(a,\theta). \tag{54}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\tilde{F}}{\pi\,\varepsilon_\circ\,a^2} = \sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{1} B_\alpha\,B_\beta\,H_{\alpha\,\beta}. \tag{55}$$

که،

$$H_{\alpha\,\beta} = H_{\alpha\,\beta\,\mathfrak{s}}. \tag{56}$$

$$H_{\alpha\,\beta\,\mathfrak{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha\,n}\,I_{\beta\,n\,s}. \tag{57}$$

$$I_{\beta\,n\,+} = \int_0^1 (\mathrm{d}\,u)\,u^\beta\,[(n+1)\,u\,\mathsf{P}_n(u) - (1-u^2)\,(\mathrm{D}\,\mathsf{P}_n)(u)]. \tag{58}$$

$$I_{\beta\,n\,-} = \int_0^1 (\mathrm{d}\,u)\,u^\beta\,[-n\,u\,\mathsf{P}_n(u) - (1-u^2)\,(\mathrm{D}\,\mathsf{P}_n)(u)]. \tag{59}$$

دیده میشود

$$I_{0\,(2\,k)\,+} = (-1)^k\,\frac{(2\,k+1)!!}{(2\,k+2)!!}. \tag{60}$$

$$I_{0\,(2\,k+1)\,+} = 0. \tag{61}$$

$$I_{0\,(2\,k)\,-} = (-1)^k\,\frac{(2\,k-3)!!}{(2\,k-2)!!}. \tag{62}$$

$$I_{0\,(2\,k+1)\,-} = -\delta_k^0. \tag{63}$$

$$I_{1\,(2\,k)\,+} = \frac{1}{3}\,\delta_k^0. \tag{64}$$

$$I_{1\,(2\,k+1)\,+} = (-1)^k\,\frac{(2\,k-1)!!}{(2\,k+2)!!}\,\frac{k+1}{k+2}. \tag{65}$$

$$I_{1\,(2\,k)\,-} = -\frac{2}{3}\,\delta_k^1. \tag{66}$$

$$I_{1\,(2\,k+1)\,-} = (-1)^k\,\frac{(2\,k-1)!!}{(2\,k+2)!!}\,\frac{2\,k+1}{2\,k-1}. \tag{67}$$

با گذاشتنِ (41) تا (44)، و (60) تا (67) در (57)؛ نتیجه میشود

$$H_{0\,0\,+}=\frac{1}{2}. \tag{68}$$

$$H_{0\,0\,-}=\frac{1}{2}. \tag{69}$$

$$H_{0\,1\,+}=\frac{1}{3}-\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(2\,k-1)!!}{(2\,k+2)!!}\right]^2\,\frac{k+1}{k+2}. \tag{70}$$

$$H_{0\,1\,-}=-\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(2\,k-1)!!}{(2\,k+2)!!}\right]^2\,\frac{2\,k+1}{2\,k-1}. \tag{71}$$

$$H_{1\,0\,+}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(2\,k-1)!!}{(2\,k+2)!!}\right]^2\,\frac{2\,k+1}{2\,k-1}. \tag{72}$$

$$H_{1\,0\,-}=-\frac{1}{3}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(2\,k-1)!!}{(2\,k+2)!!}\right]^2\,\frac{k+1}{k+2}. \tag{73}$$

$$H_{1\,1\,+}=-\frac{1}{12}. \tag{74}$$

$$H_{1\,1\,-}=-\frac{1}{12}. \tag{75}$$

البته $H_{\alpha\,\beta\,\mathfrak{s}}$ مستقل از $\mathfrak{s}$ است، و هم ان $H_{\alpha\,\beta}$: رابطه یِ (56). به این ترتیب،

$$H_{0\,0}=\frac{1}{2}. \tag{76}$$

$$H_{0\,1}+H_{1\,0}=0. \tag{77}$$

$$H_{1\,1}=-\frac{1}{12}. \tag{78}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\tilde{F}}{\pi\,\varepsilon_\circ\,a^2}=\frac{(B_0)^2}{2}-\frac{(B_1)^2}{12}. \tag{79}$$

نیرو یِ وارد بر نیم- کره یِ شمالی ناشی از میدانِ یکنواختِ بیرونی را با $\boldsymbol{F}_\circ$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{F}_\circ=\boldsymbol{E}_\circ\int_{u>0}(\mathrm{d}\,\Omega)\,\sigma(\theta). \tag{80}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\boldsymbol{F}_\circ}{\pi\,\varepsilon_\circ\,a^2}=\hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{(2\,B_0+B_1)\,B_1}{3}. \tag{81}$$

همچنین،

$$\boldsymbol{F} = \tilde{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{F}_\circ. \tag{82}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\boldsymbol{F}}{\pi\,\varepsilon_\circ\,a^2} = \hat{\boldsymbol{z}}\,\left[\frac{(B_0)^2}{2} + \frac{2\,B_0\,B_1}{3} + \frac{(B_1)^2}{4}\right]. \tag{83}$$

و این هم ان (26) است، چنان که انتظار میرفت.

5 پانوشتها

[1] Laplace

[2] Legendre

[3] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)