

کاملیت، و حالتها ی مقید

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

ویژه- بردارها ی همیلتی ی یک ذره در یک- بُعد در انرژی ی- پتانسیل دلتا- ی- دیرک [1] بررسی میشود. نشان داده میشود شرط این که رابطه ی کاملیت برا ی این بردارها برقرار باشد این است که حالت مقید هم، اگر باشد، به حساب آید.

1 همیلتی و ویژه- بردارها

یک ذره به جرم m مقید به یک خط، و در یک انرژی ی- پتانسیل دلتا- ی- دیرک [1] است. همیلتی ی این ذره را با H نشان میدهم:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \Upsilon \delta(X). \quad (1)$$

X عملگر مکان و P عملگر تکانه است. Υ ثابت است: مثبت متناظر با جاذبه، و منفی متناظر با دافعه. مبدئ رو ی مرکز انرژی ی- پتانسیل گذاشته شده. پارامتر κ را چنین تعریف میکنم.

$$\Upsilon = \frac{\hbar^2 \kappa}{m}. \quad (2)$$

ویژه-بردارها ی فرد و زوج، متناظر با عدد-مُج k ، را با، به ترتیب، $|\psi_o(k)\rangle$ و $|\psi_e(k)\rangle$ ؛ انرژی و تابع-مُج متناظر را با، به ترتیب، E و $\psi_a(k, \cdot)$ ؛ و مشتق-گیری نسبت به x را با D نشان میدهم:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (3)$$

$$-k^2 \psi_a(k, x) = (D^2 \psi_a)(k, x) + 2\kappa [\delta(x)] \psi_a(k, x). \quad (4)$$

ψ_o در مبدئ صفر است. پس جمله ی دوم در طرف راست (4)، برای ویژه-بردارها ی فرد صفر میشود: ویژه-بردارها ی فرد، هم ان ویژه-بردارها ی فرد همیلتنی ی ذره-ی آزادند:

$$\frac{\psi_o(k, x)}{N_o(k)} = \sin(kx). \quad (5)$$

که N_o ضریب بهنجارش است. برای ویژه-بردارها ی زوج،

$$\frac{\psi_e(k, x)}{N_e(k)} = \cos(kx) - [a(k)] \sin(k|x|). \quad (6)$$

که a یک ثابت، و N_e ضریب بهنجارش است. شرط این که ψ_e معادله ی (5) را برآورد این است.

$$0 = -2ka(k) + 2\kappa. \quad (7)$$

که یعنی،

$$a(k) = \frac{\kappa}{k}. \quad (8)$$

عدد-مُج نامنفی ست (برای ویژه-بردارها ی فرد مثبت است): عدد-مُجها ی منفی (یا صفر برای ویژه-بردارها ی فرد) به ویژه-بردارها ی جدید نمینجامند.

تا اینجا فرض شده بود k حقیقی ست. اگر k حقیقی نباشد، $\psi_o(k, \cdot)$ یا در متغیر به سو ی $(-\infty)$ بینهایت میشود، یا در متغیر به سو ی $(+\infty)$ بینهایت میشود. پس برای ویژه-بردارها ی فرد، k باید حقیقی باشد. برای ویژه-بردارها ی زوج، یک امکان هست که k حقیقی نباشد (این k را با k_b نشان میدهم) ولی تابع-مُج هم در متغیر به سو ی $(-\infty)$ و هم در متغیر به سو ی $(+\infty)$ محدود بماند:

$$a(k_b) = i. \quad (9)$$

$$(ik_b) \in \mathbb{R}_+. \quad (10)$$

که \mathbb{R}_+ مجموعه ی عددها ی حقیقی ی مثبت است. (البته میشود علامت k_b و a را هم-زمان عوض کرد: تابع - مٌج عوض نمیشود.) (9) را در (8) میگذارم. نتیجه میشود

$$k_b = -i\kappa. \quad (11)$$

دیده میشود این امکان فقط وقت ی هست که Υ مثبت باشد (جاذبه). $\langle \psi(k_b, \bullet) | \psi(k_b, \bullet) \rangle$ و ویژه-بردار و تابع - مٌج متناظر، را با، به ترتیب، $\langle \psi_b |$ و ψ_b نشان میدهم:

$$\frac{\psi_b(x)}{N_b} = \exp(-\kappa|x|). \quad (12)$$

که N_b ضریب بهنجارش است. $\langle \psi_b |$ حالت مقید است.

2 - حاصل - ضرب درونی

$\psi_o(k, \bullet)$ فرد و $\psi_e(k, \bullet)$ زوج است. پس،

$$\langle \psi_o(k) | \psi_e(l) \rangle = 0. \quad (13)$$

برای ویژه-بردارها ی فرد،

$$\begin{aligned} \frac{\langle \psi_o(k) | \psi_o(l) \rangle}{[N_o(k)][N_o(l)]} &= 2 \int_0^\infty (dx) [\sin(kx)] [\sin(lx)], \\ &= \int_0^\infty (dx) \{ \cos[(k-l)x] - \cos[(k+l)x] \}, \\ &= \pi [\delta(k-l) - \delta(k+l)]. \end{aligned} \quad (14)$$

چون k و l مثبت ند، جمله ی دوم درون کروشه صفر است. پس،

$$\langle \psi_o(k) | \psi_o(l) \rangle = \pi |N_o(k)|^2 \delta(k-l). \quad (15)$$

انتخاب میکنم

$$\langle \psi_o(k) | \psi_o(l) \rangle = \delta(k-l). \quad (16)$$

نتیجه میشود

$$|N_o(k)|^2 = \frac{1}{\pi}. \quad (17)$$

برای ویژه-بردارها ی زوج (نامقید)،

$$\begin{aligned} \frac{\langle \psi_e(k) | \psi_e(l) \rangle}{[N_e(k)] [N_e(l)]} &= 2 \int_0^\infty (dx) \{ \cos(kx) - [a(k)] \sin(kx) \} \\ &\quad \times \{ \cos(lx) - [a(l)] \sin(lx) \}, \\ &= \int_0^\infty (dx) \left(\{1 + [a(k)] [a(l)]\} \cos[(k-l)x] \right. \\ &\quad + \{1 - [a(k)] [a(l)]\} \cos[(k+l)x] \\ &\quad - [a(k) + a(l)] \sin[(k+l)x] \\ &\quad \left. - [a(k) - a(l)] \sin[(k-l)x] \right), \\ &= \pi \left(\{1 + [a(k)] [a(l)]\} \delta(k-l) + \{1 - [a(k)] [a(l)]\} \delta(k+l) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a(k) + a(l)}{k+l} - \frac{a(k) - a(l)}{k-l} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

مجموع جملها ی سوم و چهارم درون پرانتز بزرگ صفر است. چون k و l مثبت ند، جمله ی دوم درون پرانتز بزرگ هم صفر است. پس،

$$\langle \psi_e(k) | \psi_e(l) \rangle = \pi |N_e(k)|^2 \{1 + [a(k)] [a(l)]\} \delta(k-l). \quad (19)$$

انتخاب میکنم

$$\langle \psi_e(k) | \psi_e(l) \rangle = \delta(k-l). \quad (20)$$

نتیجه میشود

$$|N_e(k)|^2 = \frac{1}{\pi \{1 + [a(k)] [a(l)]\}}. \quad (21)$$

گیرم Υ مثبت است. پس حالت مقید هم هست. ψ_b زوج، و $\psi_o(k, \cdot)$ فرد است. پس،

$$\langle \psi_o(k) | \psi_b \rangle = 0. \quad (22)$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \frac{\langle \psi_e(k) | \psi_b \rangle}{[N_e(k)] N_b} &= 2 \int_0^\infty (dx) \{ \cos(kx) - [a(k)] \sin(kx) \} \exp(-\kappa x), \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1 - i a(k)}{\kappa + i k} \right], \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i k} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

که نشان میدهد،

$$\langle \psi_e(k) | \psi_b \rangle = 0. \quad (24)$$

سرانجام،

$$\begin{aligned} \frac{\langle \psi_b | \psi_b \rangle}{|N_b|^2} &= 2 \int_0^\infty (dx) \exp(-2\kappa x), \\ &= \frac{1}{\kappa}. \end{aligned} \quad (25)$$

انتخاب میکنم

$$\langle \psi_b | \psi_b \rangle = 1. \quad (26)$$

نتیجه میشود

$$|N_b|^2 = \kappa. \quad (27)$$

3 کاملیت

هر بردار را میشود بر حسب هر پایه بسط داد. بسط بردار $|v\rangle$ بر حسب پایه ی $|e\rangle$ چنین است.

$$|v\rangle = \sum_i v^i |e_i\rangle. \quad (28)$$

$$v^i = \langle e^* |^i |v\rangle. \quad (29)$$

که $|e^*\rangle$ دگان $|e\rangle$ است:

$$\langle e^* |^i |e_j\rangle = \delta_j^i. \quad (30)$$

پس،

$$|v\rangle = \sum_i |e_i\rangle \langle e^* |^i |v\rangle. \quad (31)$$

این برا ی هر بردار $|v\rangle$ درست است. پس،

$$1 = \sum_i |e_i\rangle \langle e^* |^i. \quad (32)$$

این رابطه ی کاملیت برا ی پایه ی $|e\rangle$ است. یک حالت خاص این است که $|e\rangle$ یک-متعامد است:

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (33)$$

که یعنی،

$$\langle e^* |^i = \langle e_i|. \quad (34)$$

و رابطه ی کاملیت چنین میشود.

$$1 = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i|. \quad (35)$$

بر حسب تابع - مخرج،

$$\delta(x - y) = \sum_i [e_i(x)] \overline{[e_i(y)]}. \quad (36)$$

البته وقت ی شاخصها پیوسته باشند، جمع انتگرال و دلتا-ی-کرنیکر [2] دلتا-ی-دیرک [1] میشود. 1_o ، و متناظر با آن δ_o ، را چنین تعریف میکنم.

$$1_o = \int_0^\infty (dk) |\psi_o(k)\rangle \langle \psi_o(k)|. \quad (37)$$

$$\delta_o(x, y) = \int_0^\infty (dk) [\psi_o(k, x)] \overline{[\psi_o(k, y)]}. \quad (38)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \delta_o(x, y) &= \int_0^\infty (dk) |N_o(k)|^2 [\sin(kx)] [\sin(ky)], \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \{\cos[k(x-y)] - \cos[k(x+y)]\}. \end{aligned} \quad (39)$$

که نتیجه میدهد

$$\delta_o(x, y) = \frac{\delta(x-y) - \delta(x+y)}{2}. \quad (40)$$

مشابه، 1_e و δ_e را چنین تعریف میکنم.

$$1_e = \int_0^\infty (dk) |\psi_e(k)\rangle \langle \psi_e(k)|. \quad (41)$$

$$\delta_e(x, y) = \int_0^\infty (dk) [\psi_e(k, x)] \overline{[\psi_e(k, y)]}. \quad (42)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \delta_e(x, y) &= \int_0^\infty (dk) |N_e(k)|^2 \{\cos(kx) - [a(k)] \sin(k|x|)\} \\ &\quad \times \{\cos(ky) - [a(k)] \sin(k|y|)\}, \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi(k^2 + \kappa^2)} \left(k^2 \{\cos[k(x-y)] + \cos[k(x+y)]\} \right. \\ &\quad \left. - 2\kappa k \sin[k(|x| + |y|)] + \kappa^2 \{\cos[k(|x| - |y|)] - \cos[k(|x| + |y|)]\} \right), \\ &= \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_3. \end{aligned} \quad (43)$$

که،

$$\mathfrak{J}_1 = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \{ \cos[k(x-y)] + \cos[k(x+y)] \}. \quad (44)$$

$$\mathfrak{J}_2 = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi(k^2 + \kappa^2)} \kappa k \sin[k(|x| + |y|)]. \quad (45)$$

$$\mathfrak{J}_3 = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi(k^2 + \kappa^2)} \kappa^2 \{ \cos[k(|x| + |y|)] \}. \quad (46)$$

محاسبه ی \mathfrak{J}_1 شبیه محاسبه ی δ_0 است:

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\delta(x-y) + \delta(x+y)}{2}. \quad (47)$$

برای محاسبه ی \mathfrak{J}_2 و \mathfrak{J}_3 هم انتگرال-گیری در صفحه ی مختلط را به کار میبریم:

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\kappa}{2} \exp[-\kappa(|x| + |y|)]. \quad (48)$$

$$\mathfrak{J}_3 = \frac{|\kappa|}{2} \exp[-\kappa(|x| + |y|)]. \quad (49)$$

به این ترتیب،

$$\delta_e(x, y) = \frac{\delta(x-y) + \delta(x+y)}{2} - \kappa [\Theta(\kappa)] \exp[-\kappa(|x| + |y|)]. \quad (50)$$

که Θ تابع هویساید [3] (پله ی واحد) است:

$$\Theta(x) = \frac{x}{|x|}. \quad (51)$$

سرانجام، 1_b و δ_b را چنین تعریف میکنم.

$$1_b = |\psi_b(k)\rangle \langle \psi_b | \Theta(\kappa). \quad (52)$$

$$\delta_b(x, y) = [\psi_b(x)] [\overline{\psi_b(y)}] \Theta(\kappa). \quad (53)$$

دیده میشود

$$\delta_b(x, y) = \kappa [\Theta(\kappa)] \exp[-\kappa(|x| + |y|)]. \quad (54)$$

از (40) و (50) و (53) نتیجه میشود

$$\delta(x - y) = \delta_o(x, y) + \delta_e(x, y) + \delta_b(x, y). \quad (55)$$

یعنی،

$$1 = 1_o + 1_e + 1_b. \quad (56)$$

این هم ان رابطه ی (35) است: رابطه ی کاملیت برای یک پایه ی یکه-متعامد. رابطه ی (55) هم هم ان رابطه ی (36) است: رابطه ی کاملیت بر حسب تابع - مُج، برای یک پایه ی یکه-متعامد. از (55) و (56) دیده میشود وقت ی حالت - مقید ی نیست (Υ منفی ست، دافعه) حالتها ی زُج (نامقید) و فرد با هم کامل نند. اما وقت ی حالت - مقید هم هست (Υ مثبت است، جاذبه) چنین نیست: باید حالت - مقید را هم افزود تا پایه کامل شود:

$$1 \neq 1_o + 1_e, \quad \Upsilon > 0. \quad (57)$$

یعنی،

$$\delta(x - y) \neq \delta_o(x, y) + \delta_e(x, y), \quad \Upsilon > 0. \quad (58)$$

4 پانوشتها

[1] Dirac

[2] Kronecker

[3] Heaviside