X1-184 (2024/11/03)

کاملیت، و حالتها یِ مقید

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

ویژه- بردارها یِ هَمیلتِنی یِ یک ذره در یک- بُعد در انرژی یِ- پتانسیلِ دلتا- یِ- دیرَک [1] بررسی میشود. نشان داده میشود شرطِ این که رابطه یِ کاملیت برا یِ این بردارها برقرار باشد این است که حالتِ مقید هم، اگر باشد، به حساب آید.

1 هَمیلتِنی و ویژه- بردارها

یک ذره به جرمِ m مقید به یک خط، و در یک انرژی-یِ-پتانسیلِ دلتا-یِ-دیرَک [1] است. هَمیلتِنی یِ این ذره را با H نشان میدهم:

$$H = \frac{P^2}{2\,m} - \Upsilon\,\delta(X). \tag{1}$$

X عملگرِ مکان و P عملگرِ تکانه است. Υ ثابت است: مثبت متناظر با جاذبه، و منفی متناظر با دافعه. مبدئ رو یِ مرکزِ انرژی-یِ-پتانسیل گذاشته شده. پارامترِ κ را چنین تعریف میکنم.

$$\Upsilon = \frac{\hbar^2\,\kappa}{m}. \tag{2}$$

ویژه-بردارها یِ فرد و زُج، متناظر با عدد- ـِ مُجِ k، را با، به ترتیب، $\langle\psi_{\rm o}(k)|$ و $\langle\psi_{\rm e}(k)|$؛ انرژی و تابع- ـِ مُجِ متناظر را با، به ترتیب، E و $\psi_{\mathfrak a}(k,\bullet)$؛ و مشتق-گیری نسبت به x را با D نشان میدهم:

$$E=\frac{\hbar^2\,k^2}{2\,m}. \tag{3}$$

$$-k^2\,\psi_{\mathfrak a}(k,x)=(\mathrm{D}^2\,\psi_{\mathfrak a})(k,x)+2\,\kappa\,[\delta(x)]\,\psi_{\mathfrak a}(k,x). \tag{4}$$

$\psi_{\rm o}$ در مبدئ صفر است. پس جمله یِ دوم در طرفِ راستِ (4)، برا یِ ویژه-بردارها یِ فرد صفر میشود: ویژه-بردارها یِ فرد، هم ان ویژه-بردارها یِ فردِ هَمیلتِنی یِ ذره-یِ-آزاد َند:

$$\frac{\psi_{\rm o}(k,x)}{N_{\rm o}(k)}=\sin(k\,x). \tag{5}$$

که $N_{\rm o}$ ضریبِ بهنجارش است. برا یِ ویژه-بردارها یِ زُج،

$$\frac{\psi_{\rm e}(k,x)}{N_{\rm e}(k)}=\cos(k\,x)-[a(k)]\,\sin(k\,|x|). \tag{6}$$

که a یک ثابت، و $N_{\rm e}$ ضریبِ بهنجارش است. شرطِ این که $\psi_{\rm e}$ معادله یِ (5) را براورَد این است.

$$0=-2\,k\,a(k)+2\,\kappa. \tag{7}$$

که یعنی،

$$a(k)=\frac{\kappa}{k}. \tag{8}$$

عدد- ـِ مُج نامنفی ست (برا یِ ویژه-بردارها یِ فرد مثبت است): عدد- ـِ مُجها یِ منفی (یا صفر برا یِ ویژه-بردارها یِ فرد) به ویژه-بردارها یِ جدید نمینجامند.

تا اینجا فرض شده بود k حقیقی ست. اگر k حقیقی نباشد، $\psi_{\rm o}(k,\bullet)$ یا در متغیر به سو یِ $(-\infty)$ بینهایت میشود، یا در متغیر به سو یِ $(+\infty)$ بینهایت میشود. پس برا یِ ویژه-بردارها یِ فرد، k باید حقیقی باشد. برا یِ ویژه-بردارها یِ زُج، یک امکان هست که k حقیقی نباشد (این k را با $k_{\rm b}$ نشان میدهم) ولی تابع ـِ مُج، هم در متغیر به سو یِ $(-\infty)$ و هم در متغیر به سو یِ $(+\infty)$ محدود بماند:

$$a(k_{\rm b})=i. \tag{9}$$

$$(\mathrm{i}\,k_{\rm b})\in\mathbb{R}_+. \tag{10}$$

که $\mathbb{R}_+$ مجموعه یِ عددها یِ حقیقی یِ مثبت است. (البته میشود علامت ِ k_b و a را هم-زمان عوض کرد: تابع- ِ-مُج عوض نمیشود.) (9) را در (8) میگذارم. نتیجه میشود

$$k_\mathrm{b} = -\mathrm{i}\,\kappa. \tag{11}$$

دیده میشود این امکان فقط وقت ی هست که Υ مثبت باشد (جاذبه). $|\psi(k_\mathrm{b})\rangle$ و $\psi(k_\mathrm{b},\boldsymbol{.})$، ویژه-بردار و تابع- ِ-مُج ِ متناظر، را با، به ترتیب، $|\psi_\mathrm{b}\rangle$ و ψ_b نشان میدهم:

$$\frac{\psi_\mathrm{b}(x)}{N_\mathrm{b}} = \exp(-\kappa\,|x|). \tag{12}$$

که N_b ضریب ِ بهنجارش است. $|\psi_\mathrm{b}\rangle$ حالت ِ مقید است.

2 حاصل- ِ-ضرب ِ درونی

$\psi_\mathrm{o}(k,\boldsymbol{.})$ فرد و $\psi_\mathrm{e}(k,\boldsymbol{.})$ زُج است. پس،

$$\langle\psi_\mathrm{o}(k)|\psi_\mathrm{e}(l)\rangle = 0. \tag{13}$$

برا یِ ویژه-بردارها یِ فرد،

$$\begin{aligned}\frac{\langle\psi_\mathrm{o}(k)|\psi_\mathrm{o}(l)\rangle}{\overline{[N_\mathrm{o}(k)]}\,[N_\mathrm{o}(l)]} &= 2\int_0^\infty (\mathrm{d}\,x)\,[\sin(k\,x)]\,[\sin(l\,x)],\\ &= \int_0^\infty (\mathrm{d}\,x)\,\{\cos[(k-l)\,x] - \cos[(k+l)\,x]\},\\ &= \pi\,[\delta(k-l) - \delta(k+l)].\end{aligned} \tag{14}$$

چون k و l مثبت َند، جمله یِ دوم ِ درون ِ کروشه صفر است. پس،

$$\langle\psi_\mathrm{o}(k)|\psi_\mathrm{o}(l)\rangle = \pi\,|N_\mathrm{o}(k)|^2\,\delta(k-l). \tag{15}$$

انتخاب میکنم

$$\langle\psi_\mathrm{o}(k)|\psi_\mathrm{o}(l)\rangle = \delta(k-l). \tag{16}$$

نتیجه میشود

$$|N_{\rm o}(k)|^2 = \frac{1}{\pi}. \tag{17}$$

برا یِ ویژه-بردارها یِ زُج (ِ نامقید)،

$$\begin{aligned}
\frac{\langle\psi_{\rm e}(k)|\psi_{\rm e}(l)\rangle}{\overline{[N_{\rm e}(k)]}\,[N_{\rm e}(l)]} &= 2\int_0^\infty(\mathrm{d}\,x)\,\{\cos(k\,x)-[a(k)]\,\sin(k\,x)\}\\
&\quad\times\{\cos(l\,x)-[a(l)]\,\sin(l\,x)\},\\
&=\int_0^\infty(\mathrm{d}\,x)\,\Big(\{1+[a(k)]\,[a(l)]\}\,\cos[(k-l)\,x]\\
&\quad+\{1-[a(k)]\,[a(l)]\}\,\cos[(k+l)\,x]\\
&\quad-[a(k)+a(l)]\,\sin[(k+l)\,x]\\
&\quad-[a(k)-a(l)]\,\sin[(k-l)\,x]\Big),\\
&=\pi\,\Big(\{1+[a(k)]\,[a(l)]\}\,\delta(k-l)+\{1-[a(k)]\,[a(l)]\}\,\delta(k+l)\\
&\quad-\frac{a(k)+a(l)}{k+l}-\frac{a(k)-a(l)}{k-l}\Big).
\end{aligned} \tag{18}$$

مجموعِ جملِها یِ سوم و چهارمِ درونِ پرانتزِ بزرگ صفر است. چون k و l مثبت َند، جمله یِ دومِ درونِ پرانتزِ بزرگ هم صفر است. پس،

$$\langle\psi_{\rm e}(k)|\psi_{\rm e}(l)\rangle = \pi\,|N_{\rm e}(k)|^2\,\{1+[a(k)]\,[a(l)]\}\,\delta(k-l). \tag{19}$$

انتخاب میکنم

$$\langle\psi_{\rm e}(k)|\psi_{\rm e}(l)\rangle = \delta(k-l). \tag{20}$$

نتیجه میشود

$$|N_{\rm e}(k)|^2 = \frac{1}{\pi\,\{1+[a(k)]\,[a(l)]\}}. \tag{21}$$

گیرم Υ مثبت است. پس حالتِ مقید هم هست. ψ_{b} زُج، و $\psi_{\mathrm{o}}(k,\cdot)$ فرد است. پس،

$$\langle\psi_{\mathrm{o}}(k)|\psi_{\mathrm{b}}\rangle = 0. \tag{22}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\frac{\langle\psi_{\mathrm{e}}(k)|\psi_{\mathrm{b}}\rangle}{\overline{[N_{\mathrm{e}}(k)]}\,N_{\mathrm{b}}} &= 2\int_0^\infty (\mathrm{d}\,x)\,\{\cos(k\,x)-[a(k)]\,\sin(k\,x)\}\,\exp(-\kappa\,x),\\ &= 2\,\mathsf{Re}\left[\frac{1-\mathrm{i}\,a(k)}{\kappa+\mathrm{i}\,k}\right],\\ &= 2\,\mathsf{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\,k}\right).\end{aligned} \tag{23}$$

که نشان میدهد،

$$\langle\psi_{\mathrm{e}}(k)|\psi_{\mathrm{b}}\rangle = 0. \tag{24}$$

سرانجام،

$$\begin{aligned}\frac{\langle\psi_{\mathrm{b}}|\psi_{\mathrm{b}}\rangle}{|N_{\mathrm{b}}|^2} &= 2\int_0^\infty (\mathrm{d}\,x)\,\exp(-2\,\kappa\,x),\\ &= \frac{1}{\kappa}.\end{aligned} \tag{25}$$

انتخاب میکنم

$$\langle\psi_{\mathrm{b}}|\psi_{\mathrm{b}}\rangle = 1. \tag{26}$$

نتیجه میشود

$$|N_{\mathrm{b}}|^2 = \kappa. \tag{27}$$

3 کاملیت

هر بردار را میشود بر حسبِ هر پایه بسط داد. بسطِ بردارِ $|\mathfrak{v}\rangle$ بر حسبِ پایه یِ $|\mathfrak{e}\rangle$ چنین است.

$$|\mathfrak{v}\rangle = \mathfrak{v}^{\mathrm{i}}\,|\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}\rangle. \tag{28}$$

$$\mathfrak{v}^{\mathrm{i}} = \langle(\mathfrak{e}^*)^{\mathrm{i}}|\mathfrak{v}\rangle. \tag{29}$$

که $\langle\mathfrak{e}^*|$ دُگانِ $|\mathfrak{e}\rangle$ است:

$$\langle\mathfrak{e}^{*\,\mathrm{i}}|\mathfrak{e}_{\mathrm{j}}\rangle = \delta^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}. \tag{30}$$

پس،

$$|\mathfrak{v}\rangle = |\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}\rangle\,\langle\mathfrak{e}^{*\,\mathrm{i}}|\mathfrak{v}\rangle. \tag{31}$$

این برا یِ هر بردارِ $|\mathfrak{v}\rangle$ درست است. پس،

$$1 = |\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}\rangle\,\langle\mathfrak{e}^{*\,\mathrm{i}}|. \tag{32}$$

این رابطه یِ کاملیت برا یِ پایه یِ $|\mathfrak{e}\rangle$ است. یک حالتِ خاص این است که $|\mathfrak{e}\rangle$ یکه-متعامد است:

$$\langle\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}|\mathfrak{e}_{\mathrm{j}}\rangle = \delta_{\mathrm{i\,j}}. \tag{33}$$

که یعنی،

$$\langle\mathfrak{e}^{*\,\mathrm{i}}| = \langle\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}|. \tag{34}$$

و رابطه یِ کاملیت چنین میشود.

$$1 = \sum_i |\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}\rangle\,\langle\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}|. \tag{35}$$

بر حسبِ تابع-ِ-مُج،

$$\delta(x-y) = \sum_i [\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}(x)]\,\overline{[\mathfrak{e}_{\mathrm{i}}(y)]}. \tag{36}$$

البته وقت ی شاخصها پیوسته باشند، جمع انتگرال و دلتا-یِ-کْرُنِکِر [2] دلتا-یِ-دیرَک [1] میشود.

1_o، و متناظر با آن δ_o، را چنین تعریف میکنم.

$$1_\mathrm{o} = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,k)\,|\psi_\mathrm{o}(k)\rangle\,\langle\psi_\mathrm{o}(k)|. \tag{37}$$

$$\delta_\mathrm{o}(x,y) = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,k)\,[\psi_\mathrm{o}(k,x)]\overline{[\psi_\mathrm{o}(k,y)]}. \tag{38}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\delta_\mathrm{o}(x,y) &= \int_0^\infty (\mathrm{d}\,k)\,|N_\mathrm{o}(k)|^2\,[\sin(k\,x)]\,[\sin(k\,y)],\\ &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,k}{2\,\pi}\,\{\cos[k\,(x-y)]-\cos[k\,(x+y)]\}.\end{aligned} \tag{39}$$

که نتیجه میدهد

$$\delta_\mathrm{o}(x,y) = \frac{\delta(x-y)-\delta(x+y)}{2}. \tag{40}$$

مشابه، 1_e و δ_e را چنین تعریف میکنم.

$$1_\mathrm{e} = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,k)\,|\psi_\mathrm{e}(k)\rangle\,\langle\psi_\mathrm{e}(l)|. \tag{41}$$

$$\delta_\mathrm{e}(x,y) = \int_0^\infty (\mathrm{d}\,k)\,[\psi_\mathrm{e}(k,x)]\overline{[\psi_\mathrm{e}(k,y)]}. \tag{42}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\delta_\mathrm{e}(x,y) &= \int_0^\infty (\mathrm{d}\,k)\,|N_\mathrm{e}(k)|^2\,\{\cos(k\,x)-[a(k)]\,\sin(k\,|x|)\}\\ &\quad\times\{\cos(k\,y)-[a(k)]\,\sin(k\,|y|)\},\\ &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,k}{2\,\pi\,(k^2+\kappa^2)}\bigg(k^2\,\{\cos[k\,(x-y)]+\cos[k\,(x+y)]\}\\ &\quad-2\,\kappa\,k\,\sin[k\,(|x|+|y|)]+\kappa^2\,\{\cos[k\,(|x|-|y|)]-\cos[k\,(|x|+|y|)]\}\bigg),\\ &= \mathfrak{I}_1-\mathfrak{I}_2-\mathfrak{I}_3.\end{aligned} \tag{43}$$

که،

$$\mathfrak{I}_1 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,k}{2\,\pi}\,\{\cos[k\,(x-y)] + \cos[k\,(x+y)]\}. \tag{44}$$

$$\mathfrak{I}_2 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,k}{\pi\,(k^2+\kappa^2)}\,\kappa\,k\,\sin[k\,(|x|+|y|)]. \tag{45}$$

$$\mathfrak{I}_3 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,k}{\pi\,(k^2+\kappa^2)}\,\kappa^2\,\{\cos[k\,(|x|+|y|)]\}. \tag{46}$$

محاسبه یِ $\mathfrak{I}_1$ شبیهِ محاسبه یِ δ_o است:

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{\delta(x-y)+\delta(x+y)}{2}. \tag{47}$$

برا یِ محاسبه یِ $\mathfrak{I}_2$ و $\mathfrak{I}_3$ هم انتگرال-گیری در صفحه یِ مختلط را به کار میبَرم:

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{\kappa}{2}\,\exp[-\kappa\,(|x|+|y|)]. \tag{48}$$

$$\mathfrak{I}_3 = \frac{|\kappa|}{2}\,\exp[-\kappa\,(|x|+|y|)]. \tag{49}$$

به این ترتیب،

$$\delta_\mathrm{e}(x,y) = \frac{\delta(x-y)+\delta(x+y)}{2} - \kappa\,[\Theta(\kappa)]\,\exp[-\kappa\,(|x|+|y|)]. \tag{50}$$

که Θ تابعِ هِویسایِد [3] (پله یِ واحد) است:

$$\Theta(\mathfrak{x}) = \frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}. \tag{51}$$

سرانجام، 1_b و δ_b را چنین تعریف میکنم.

$$1_\mathrm{b} = |\psi_\mathrm{b}(k)\rangle\,\langle\psi_\mathrm{b}|\,\Theta(\kappa). \tag{52}$$

$$\delta_\mathrm{b}(x,y) = [\psi_\mathrm{b}(x)]\overline{[\psi_\mathrm{b}(y)]}\,\Theta(\kappa). \tag{53}$$

دیده میشود

$$\delta_\mathrm{b}(x,y) = \kappa\,[\Theta(\kappa)]\,\exp[-\kappa\,(|x|+|y|)]. \tag{54}$$

از (40) و (50) و (53) نتیجه میشود

$$\delta(x-y) = \delta_{\rm o}(x,y) + \delta_{\rm e}(x,y) + \delta_{\rm b}(x,y). \tag{55}$$

یعنی،

$$1 = 1_{\rm o} + 1_{\rm e} + 1_{\rm b}. \tag{56}$$

این هم ان رابطه یِ (35) است: رابطه یِ کاملیت برا یِ یک پایه یِ یکه-متعامد. رابطه یِ (55) هم هم ان رابطه یِ (36) است: رابطه یِ کاملیت بر حسب ِ تابع- ِ مُج، برا یِ یک پایه یِ یکه-متعامد.

از (55) و (56) دیده میشود وقت ی حالت- ِ مقید ی نیست (Υ منفی ست، دافعه) حالتها یِ زُج (ِ نامقید) و فرد با هم کامل َند. اما وقت ی حالت- ِ مقید هم هست (Υ مثبت است، جاذبه) چنین نیست: باید حالت- ِ مقید را هم افزود تا پایه کامل شود:

$$1 \neq 1_{\rm o} + 1_{\rm e}, \qquad \Upsilon > 0. \tag{57}$$

یعنی،

$$\delta(x-y) \neq \delta_{\rm o}(x,y) + \delta_{\rm e}(x,y), \quad \Upsilon > 0. \tag{58}$$

4 پانوشتها

[1] Dirac

[2] Kronecker

[3] Heaviside