X1-183 (2024/10/03)

مسئله یِ کِپلِر و مختصاتِ سهموی، کوانتمی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

حلِ مسئله یِ کوانتمی یِ نانسبیتی یِ کِپلِر [1]، با استفاده از مختصاتِ سهموی بررسی میشود.

0 درامد

این در ادامه یِ [2] است و نماد-گذاریها یِ [2] اینجا هم به کار میرود. مسئله یِ کِپلِر [1]مسئله یِ حرکتِ یک ذره در یک نیرو یِ مرکزی یِ متناسب با عکسِ مجذورِ فاصله است. جرمِ ذره با μ، مکانِ ذره با $\boldsymbol{r}$، اندازه یِ مکانِ ذره با r، تکانه با $\boldsymbol{P}$، و هَمیلتنی با H نشان داده میشود:

$$H = \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}}{2\,\mu} - \frac{\alpha}{r}. \tag{1}$$

ثابتِ α، برا یِ جاذبه مثبت و برا یِ دافعه منفی است. برا یِ مسئله یِ کوانتمی، عملگرها یِ تکانه و هَمیلتنی را با، به ترتیب، P و H نشان میدهم. در تصویرِ مکان (تابع-ِ-مُج)،

$$\mathsf{P} = -\mathrm{i}\,\hbar\,\boldsymbol{\partial}. \tag{2}$$

و عملگرِ هَمیلتنی هم چنین میشود.

$$\mathsf{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,\mu}\,\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial} - \frac{\alpha}{r}. \tag{3}$$

مختصاتِ کروی را با (r,θ,ϕ)، مختصاتِ استوانِئی را با (ρ,ϕ,z)، و مختصاتِ سهموی (در سه-بُعد) را با (ξ,η,ϕ) نشان میدهم:

$$r = \xi + \eta. \tag{4}$$

$$r\,\cos\theta = \xi - \eta. \tag{5}$$

$$z = \xi - \eta. \tag{6}$$

$$\rho = 2\,\sqrt{\xi\,\eta}. \tag{7}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}\,\psi = \frac{\partial_\xi\,(\xi\,\partial_\xi\,\psi) + \partial_\eta\,(\eta\,\partial_\eta\,\psi)}{\xi+\eta} + \frac{(\partial_\phi)^2\,\psi}{4\,\xi\,\eta}. \tag{8}$$

که $(\partial_{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{X})$ مشتقِ پارِئی یِ $\mathfrak{X}$ نسبت به $\mathfrak{y}$ است.

1 جدا-سازی

تکانه یِ زاویِئی در صفحه یِ عمود بر محورِ z را با J نشان میدهم:

$$\mathsf{J} = -\mathrm{i}\,\hbar\,\partial_\phi. \tag{9}$$

دیده میشود H با J جا-به-جا میشود:

$$[\mathsf{H},\mathsf{J}] = 0. \tag{10}$$

پس میشود H و J را هم-زمان قطری کرد. ψ را ویژه-بردارِ هم-زمانِ H و J میگیرم:

$$\mathsf{H}\,\psi = E\,\psi. \tag{11}$$

$$\mathsf{J}\,\psi = (\hbar\,m)\,\psi. \tag{12}$$

E و m ثابت‌َند و m صحیح است. از (12) نتیجه میشود

$$\psi(\boldsymbol{r}) = [\exp(\mathrm{i}\, m\, \phi)]\, Z(\xi, \eta). \tag{13}$$

به این ترتیب، اثرِ (2) بر ψ همئرز است با

$$E\, Z = -\frac{\hbar^2}{2\,\mu} \left[\frac{\partial_\xi\,(\xi\, \partial_\xi\, Z) + \partial_\eta\,(\eta\, \partial_\eta\, Z)}{\xi + \eta} - \frac{m^2\, Z}{4\, \xi\, \eta}\right] - \frac{\alpha}{\xi + \eta}\, Z. \tag{14}$$

a و σ و ε را چنین تعریف میکنم.

$$a = \frac{\hbar^2}{\mu\, |\alpha|}. \tag{15}$$

$$\sigma = \frac{\alpha}{|\alpha|}. \tag{16}$$

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2\, E}{\mu\, \alpha^2}. \tag{17}$$

a بُعدِ طول دارد و ε بی-بُعد است. σ هم $(+1)$ یا (-1) است. (ξ, η) را با a بی-بُعد میکنم:

$$(\xi, \eta) = a\, (x, y). \tag{18}$$

بی-بُعد-شده یِ (14) چنین میشود.

$$\varepsilon\, Z = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial_x\,(x\, \partial_x\, Z) + \partial_y\,(y\, \partial_y\, Z)}{x + y} - \frac{m^2\, Z}{4\, x\, y}\right] - \frac{\sigma}{x + y}\, Z. \tag{19}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$(\mathsf{G}_1 + \mathsf{G}_2)\, Z = -2\, \sigma\, Z. \tag{20}$$

که

$$\mathsf{G}_1\, Z = \partial_x\,(x\, \partial_x\, Z) - \frac{m^2}{4\, x}\, Z + 2\, \varepsilon\, x\, Z. \tag{21}$$

$$\mathsf{G}_2\, Z = \partial_y\,(y\, \partial_y\, Z) - \frac{m^2}{4\, y}\, Z + 2\, \varepsilon\, y\, Z. \tag{22}$$

رابطه یِ (20) یک معادله یِ ویژه-مقداری برا یِ عملگرِ $(\mathsf{G}_1 + \mathsf{G}_2)$ است. دیده میشود

$$[\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2] = 0. \tag{23}$$

پس میشود G_1 و G_2 را هم-زمان قطری کرد. Z را ویژه-بردارِ هم-زمانِ G_1 و G_2 میگیرم:

$$\mathsf{G}_1\, Z = g_1\, Z. \tag{24}$$

$$\mathsf{G}_2\, Z = g_2\, Z. \tag{25}$$

g_1 و g_2 ثابت‌َند، و

$$g_1 + g_2 = -2\,\sigma. \tag{26}$$

از (24) و (25) هم نتیجه میشود

$$Z(\xi, \eta) = [X(x)]\,[Y(y)]. \tag{27}$$

$$\mathsf{G}_1\, X = g_1\, X. \tag{28}$$

$$\mathsf{G}_2\, Y = g_2\, Y. \tag{29}$$

2 رفتارِ مجانبی، و محدودیت بر انرژی

مشتقِ $\mathfrak{X}$ را با $\mathfrak{X}'$ نشان میدهم. (28) وقت ی ξ بزرگ است، و (29) وقت ی η بزرگ است، به ترتیب، چنین میشوند:

$$X'' + 2\,\varepsilon\, X \sim 0. \tag{30}$$

$$Y'' + 2\,\varepsilon\, Y = 0. \tag{31}$$

وقت ی ε منفی باشد، رفتارِ جوابها برا یِ مقدارها یِ بزرگ ِ متغیر نمایی یِ کاهنده است. این متناظر است با حالتها یِ مقید. وقت ی ε مثبت باشد، رفتارِ جوابها برا یِ مقدارها یِ بزرگ ِ متغیر نوسانی ست. این متناظر است با حالتها یِ نامقید.

برا یِ $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ (که هر کدام تابع ِ فقط (x,y) اند)، $\langle\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\rangle$ را چنین تعریف میکنم.

$$\langle\mathfrak{X},\mathfrak{Y}\rangle=\int_0^\infty(\mathrm{d}\,x)\,\int_0^\infty(\mathrm{d}\,y)\,\bar{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y}. \tag{32}$$

دیده میشود، برا یِ حالتها یِ مقید،

$$\langle Z,(\mathsf{G}_1+\mathsf{G}_2)\,Z\rangle=-2\,\sigma\,\langle Z,Z\rangle. \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\langle Z,(\mathsf{G}_1+\mathsf{G}_2)\,Z\rangle=&-\int_0^\infty(\mathrm{d}\,x)\,\int_0^\infty(\mathrm{d}\,y)\,(x\,|\partial_x\,Z|^2+y\,|\partial_\eta\,Z|^2)\\&-\frac{m^2}{4}\,\int_0^\infty(\mathrm{d}\,x)\,\int_0^\infty(\mathrm{d}\,y)\,\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\,|Z|^2\\&+2\,\varepsilon\,\int_0^\infty(\mathrm{d}\,x)\,\int_0^\infty(\mathrm{d}\,y)\,(x+y)\,|Z|^2.\end{aligned} \tag{34}$$

اگر E منفی باشد، طرف ِ راست ِ (34) منفی ست. در این حالت، از (33) نتیجه میشود α مثبت است. پس حالتها یِ مقید فقط وقت ی ممکن َند که α مثبت باشد، یعنی وقت ی برهم-کنش جاذبه است. البته این هم ان است که انتظار میرفت.

3 حالتها یِ مقید

حالتها یِ مقید وقت ی ممکن َند که α مثبت باشد، و برا یِ این حالتها E منفی ست:

$$\sigma=1. \tag{35}$$

$$\varepsilon<0. \tag{36}$$

به این ترتیب،

$$g_1+g_2=-2. \tag{37}$$

u و $\tilde{X}$ را چنین تعریف میکنم.

$$u = \sqrt{-2\,\varepsilon}. \tag{38}$$

$$X(x) = [\exp(-u\,x)]\,\tilde{X}(x). \tag{39}$$

و (28) میشود.

$$0 = x\,\tilde{X}'' + (1 - 2\,u\,x)\,\tilde{X}' - \left(\frac{m^2}{4\,x} + u + g_1\right)\,\tilde{X}. \tag{40}$$

برا یِ حلِ این معادله، روشِ فْرُبِنیوس [3] را به کار میبَرَم:

$$\tilde{X} = \sum_j^\infty c_j\,x^{j+s}. \tag{41}$$

$$c_0 \neq 0. \tag{42}$$

$$c_j = 0, \quad j < 0. \tag{43}$$

نهاده یِ (41) را در معادله یِ (40) میگذارم:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \sum_j \left[(j+s)^2 - \frac{m^2}{4}\right]\,c_j\,x^{j-1} \\ & - \sum_j [(1 + 2\,j + 2\,s)\,u + g_1]\,c_j\,x^j. \end{aligned} \tag{44}$$

که با تغییرِ شاخص- ِ-جمع-بندی در جمله یِ اول چنین میشود.

$$\begin{aligned} 0 = \sum_j \Bigg\{ & \left[(j+s+1)^2 - \frac{m^2}{4}\right]\,c_{j+1} \\ & - [(1 + 2\,j + 2\,s)\,u + g_1]\,c_j \Bigg\}\,x^j. \end{aligned} \tag{45}$$

این یک معادله یِ بازگشتی برا یِ c_j ها میدهد:

$$\left[(j+s+1)^2 - \frac{m^2}{4}\right]\,c_{j+1} = [(1 + 2\,j + 2\,s)\,u + g_1]\,c_j. \tag{46}$$

این رابطه، برا یِ $(j < -1)$ اتحاد است، و برا یِ $(j = -1)$ نتیجه میدهد

$$s^2 = \frac{m^2}{4}. \tag{47}$$

جواب ی برا یِ s که $\tilde{X}$ و در نتیجه X را در $(x = 0)$ خُش-رفتار میکند این است.

$$s = \frac{|m|}{2}. \tag{48}$$

با این، معادله یِ (46) برا یِ j ها یِ نامنفی چنین میشود.

$$c_{j+1} = \frac{(1 + 2\,j + |m|)\,u + g_1}{(j + 1)\,(j + 1 + |m|)}\,c_j. \tag{49}$$

از اینجا دیده میشود اگر c_j ها یِ با j ِ مثبت صفر، از جا یی به بَعد صفر نباشند،

$$\lim_{j\to\infty}\left[\left(\frac{2}{j+1}\right)^{-1}\frac{c_{j+1}}{c_j}\right] = 1. \tag{50}$$

این نشان میدهد رفتارِ غالب ِ $\tilde{X}$ برا یِ x ها یِ بزرگ چنین است.

$$\tilde{X} \sim \exp(2\,u\,x). \tag{51}$$

که نتیجه میدهد رفتارِ غالب ِ X برا یِ x ها یِ بزرگ چنین است.

$$X \sim \exp(u\,x). \tag{52}$$

این رفتار پذیرفتنی نیست، چون X را در x ها یِ بزرگ نمایی بزرگ میکند. پس این که c_j ها یِ با j ِ مثبت، از جا یی به بَعد صفر نباشند، به جواب ِ پذیرفتنی برا یِ X نمینجامد. این یعنی یک n_1 (ِ صحیح ِ نامنفی) هست که

$$c_j = 0, \quad j > n_1. \tag{53}$$

از (49) دیده میشود (53) همئرز است با

$$0 = (1 + 2\,n_1 + |m|)\,u + g_1. \tag{54}$$

روند ی مشابه، برا یِ Y و معادله یِ (29)، به این مینجامد.

$$0 = (1 + 2\,n_2 + |m|)\,u + g_2. \tag{55}$$

g_1 و g_2 را بینِ روابطِ (37) و (54) و (55) حذف میکنم:

$$1 = (1 + n_1 + n_2 + |m|)\,u. \tag{56}$$

پس،

$$u = \frac{1}{n}. \tag{57}$$

که n یک عددِ صحیحِ مثبت است:

$$n = 1 + n_1 + n_2 + |m|. \tag{58}$$

از جمله،

$$n > |m|. \tag{59}$$

به این ترتیب،

$$\varepsilon = -\frac{2}{2\,n^2}. \tag{60}$$

$$E = \frac{E_1}{n^2}. \tag{61}$$

که،

$$E_1 = -\frac{\mu\,\alpha^2}{2\,\hbar^2}. \tag{62}$$

چندگانگی یِ حالتها یِ با (n, m) ِ معین را با $\mathsf{deg}_m(n)$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\mathsf{deg}_m(n) = n - |m|. \tag{63}$$

چندگانگی یِ حالتها یِ با n ِ معین را با $\mathsf{deg}(n)$ نشان میدهم:

$$\mathsf{deg}(n) = \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} \mathsf{deg}_m(n). \tag{64}$$

که نتیجه میدهد،

$$\mathsf{deg}(n) = n^2. \tag{65}$$

این هم ان است که با جدا-سازی در مختصات ِ کروی به دست میئاید (مثلَن [4]).

4 حالتها یِ نامقید

یک دسته از حالتها یِ نامقید آنها یی یَند که مجموعِ یک مُجِ تخت و یک مُجِ کروی یِ بیرون-رونده اند. یک دسته یِ دیگر هم آنها یی یَند که مجموعِ یک مُجِ تخت و یک مُجِ کروی یِ درون-آینده اند. یک حالت- ِ-نامقید ِ کلی، یک ترکیب ِ خطی از این دُ-دسته است؛ و اگر در گذشته یِ دور به شکل ِ یک بسته-یِ-مُج ِ جایگزیده باشد که به سو یِ مرکزِ پراکنش حرکت میکند، یک ترکیب ِ خطی از فقط دسته یِ اول است.

یک ی از حالتها یِ دسته یِ اول را بررسی میکنم. محورِ z را در جهت ِ انتشارِ مُج- ِ-تخت ِ متناظر با این حالت میگیرم. ψ (تابع- ِ-مُج ِ متناظر) چنین میشود.

$$\psi = \exp(\mathrm{i}\, k\, z) + \psi_{\mathrm{sc}}. \tag{66}$$

که k ثابت ی مثبت است؛ و دور از مبدئ،

$$\psi_{\mathrm{sc}} = \frac{\exp(\mathrm{i}\, k\, r)}{r}\, f. \tag{67}$$

که f تابع ِ فقط $\hat{\boldsymbol{r}}$ است، یعنی تابع ِ فقط (θ, ϕ) است. البته تقارن ِ کروی یِ پراکننده نتیجه میدهد f تابع ِ فقط θ است. این متناظر است با

$$m = 0. \tag{68}$$

روابط ِ (66) و (67) نشان میدهند، دور از مبدئ رفتار ِ ψ نسبت به ξ مثل ِ یک مُج ِ بیرون-رونده است:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \sim [\exp(\mathrm{i}\, k\, \xi)]\, Y(y). \tag{69}$$

دور از مبدئ، هَمیلتنی هم مثل ِ هَمیلتنی ی ِ ذره-ی ِ-آزاد میشود؛ که یعنی دور از مبدئ،

$$E\, \psi \approx -\frac{\hbar^2}{2\, \mu}\, \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \psi. \tag{70}$$

پس،

$$E = \frac{\hbar^2\, k^2}{2\, \mu}. \tag{71}$$

یا،

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2}. \tag{72}$$

که،

$$v = k\, a. \tag{73}$$

مثل ِ بخش ِ پیش، $\tilde{X}$ را چنین تعریف میکنم.

$$X(x) = [\exp(\mathrm{i}\, v\, x)]\, \tilde{X}(x). \tag{74}$$

استدلال ی مشابه با آن چه در بخش ِ پیش آمد نشان میدهد شرط ِ این که (69) براورده شود (مُج- ِ-کروی ی ِ متناظر با ψ بیرون-رونده باشد) این است که $\tilde{X}$ یک چندجملِئی باشد. اگر چنین نباشد، دور از مبدئ $[\tilde{X}(x)]$ بخش ی متناسب با $[\exp(-2\, \mathrm{i}\, v\, x)$ هم خاهد داشت، که یعنی دور از مبدئ $[X(x)]$ بخش ی متناسب با $[\exp(-\mathrm{i}\, v\, x)$ هم خاهد داشت: مُج- ِ-کروی ی ِ متناظر با ψ فقط-بیرون-رونده نمیشود.

اما $\tilde{X}$، اگر چندجملِئی باشد باید ثابت باشد؛ اگر نَ X در x ها ی ِ بزرگ نامحدود بزرگ میشود. ثابت را میشود در Y جذب کرد. پس،

$$X(x) = \exp(\mathrm{i}\, v\, x). \tag{75}$$

و (69) چنین میشود.

$$\psi(\boldsymbol{r})=[\exp(\mathrm{i}\,v\,x)]\,Y(y). \tag{76}$$

از مانسته یِ (40) نتیجه میشود

$$g_1=\mathrm{i}\,v. \tag{77}$$

و Y باید این معادله را براورَد.

$$0=y\,Y''+Y'+(v^2\,y+2\,\sigma+\mathrm{i}\,v)\,Y. \tag{78}$$

$\tilde{Y}$ را چنین تعریف میکنم.

$$Y(y)=[\exp(-\mathrm{i}\,v\,y)]\,\tilde{Y}(y). \tag{79}$$

و معادله یِ (78) چنین میشود.

$$0=y\,\tilde{Y}''+(1-2\,\mathrm{i}\,v\,y\,)\tilde{Y}'+2\,\sigma\,\tilde{Y}. \tag{80}$$

برا یِ حل ِ این معادله، تبدیل ِ لَپلَس [5] را به کار میبَرم. مبدَل- ِ-لَپلَس [5] ِ Y را با W نشان میدهم:

$$W(\zeta)=\int_0^\infty(\mathrm{d}\,y)\,[\exp(-\zeta\,y)]\,Y(y). \tag{81}$$

معادله یِ (80) را در $[\exp(-\zeta\,y)]$ ضرب میکنم و از حاصل بر y، از 0 تا ∞، انتگرال میگیرم:

$$\begin{aligned}0=&-\frac{\mathrm{d}\,[\zeta^2\,W(\zeta)-\zeta\,Y(0)-Y'(0)]}{\mathrm{d}\,\zeta}+\zeta\,W(\zeta)-Y(0)\\&+2\,\mathrm{i}\,v\,\frac{\mathrm{d}\,[\zeta\,W(\zeta)-Y(0)]}{\mathrm{d}\,\zeta}+2\,\sigma\,W(\zeta).\end{aligned} \tag{82}$$

که نتیجه میدهد

$$0=\frac{\mathrm{d}\,[(2\,\mathrm{i}\,v\,\zeta-\zeta^2)\,W(\zeta)]}{\mathrm{d}\,\zeta}+(2\,\sigma+\zeta)\,W(\zeta). \tag{83}$$

یا،

$$0=\frac{\mathrm{d}\,[(\zeta^2-2\,\mathrm{i}\,v\,\zeta)\,W(\zeta)]}{[(\zeta^2-2\,\mathrm{i}\,v\,\zeta)\,W(\zeta)]}-\frac{(\zeta+2\,\sigma)\,\mathrm{d}\,\zeta}{\zeta^2-2\,\mathrm{i}\,v\,\zeta}. \tag{84}$$

ℓ را چنین تعریف میکنم.

$$\ell=\frac{\sigma}{v}. \tag{85}$$

از (84) نتیجه میشود

$$\ln\frac{(\zeta^2-2\,\mathrm{i}\,v\,\zeta)\,W(\zeta)}{A}=(1-\mathrm{i}\,\ell)\,\ln(\zeta-2\,\mathrm{i}\,v)+\mathrm{i}\,\ell\,\ln\zeta. \tag{86}$$

که A ثابت است. به این ترتیب،

$$W(\zeta)=A\,(\zeta-2\,\mathrm{i}\,v)^{-\mathrm{i}\,\ell}\,\zeta^{-1+\mathrm{i}\,\ell}. \tag{87}$$

W، جز بر $[\mathbb{R}_{-0}\cup(\mathbb{R}_{-0}+2\,\mathrm{i}\,v)]$ تمام-ریخت است، که $\mathbb{R}_{-0}$ مجموعه یِ عددها یِ حقیقی یِ نامثبت است. وارون ِ (81) چنین میشود.

$$Y(y)=\int_{\mathbb{L}}\frac{\mathrm{d}\,\zeta}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,[\exp(\zeta\,y)]\,W(\zeta). \tag{88}$$

که $\mathbb{L}$ یک خط ِ عمودی یِ رو-به-بالا در صفحه یِ مختلط است، که بخش- ِ-حقیقی یِ آن مثبت است. (88) را میشود، با تغییر-دادن ِ پربند، چنین نوشت.

$$Y=Y_1+Y_2. \tag{89}$$

که،

$$Y_1(y)=\int_{\mathbb{M}}\frac{\mathrm{d}\,\zeta}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,[\exp(\zeta\,y)]\,W(\zeta). \tag{90}$$

$$Y_2(y)=\int_{\mathbb{M}+2\,\mathrm{i}\,v}\frac{\mathrm{d}\,\zeta}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,[\exp(\zeta\,y)]\,W(\zeta). \tag{91}$$

و $\mathbb{M}$ پربندی ست که $\mathbb{R}_{-0}$ را مثلثاتی دُر میزند. (90) و (91) میشوند

$$\frac{Y_1(y)}{A} = \int_{\mathbb{M}} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,[\exp(\zeta\,y)]\,(\zeta - 2\,\mathrm{i}\,v)^{-\mathrm{i}\,\ell}\,\zeta^{-1+\mathrm{i}\,\ell}. \tag{92}$$

$$\frac{Y_2(y)}{A\,\exp(2\,\mathrm{i}\,v\,y)} = \int_{\mathbb{M}} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,[\exp(\zeta\,y)]\,\zeta^{-\mathrm{i}\,\ell}\,(\zeta + 2\,\mathrm{i}\,v)^{-1+\mathrm{i}\,\ell}. \tag{93}$$

برا یِ y ها یِ بزرگ، بخشِ غالبِ انتگرالها یِ بالا از نزدیکی یِ $(\zeta = 0)$ میئاید: ضریبِ $[\exp(\zeta\,y)]$ را میشود برا یِ ζ ها یِ کوچک بسط داد:

$$(\zeta - 2\,\mathrm{i}\,v)^{-\mathrm{i}\,\ell}\,\zeta^{-1+\mathrm{i}\,\ell} = (-2\,\mathrm{i}\,v)^{-\mathrm{i}\,\ell}\,\zeta^{-1+\mathrm{i}\,\ell}\,[1 - (2\,\mathrm{i}\,v)^{-1}\,\zeta]^{-\mathrm{i}\,\ell}. \tag{94}$$

$$\zeta^{-\mathrm{i}\,\ell}\,(\zeta + 2\,\mathrm{i}\,v)^{-1+\mathrm{i}\,\ell} = (2\,\mathrm{i}\,v)^{-1+\mathrm{i}\,\ell}\,\zeta^{-\mathrm{i}\,\ell}\,[1 + (2\,\mathrm{i}\,v)^{-1}\,\zeta]^{-1+\mathrm{i}\,\ell}. \tag{95}$$

. به این ترتیب، برا یِ y ها یِ بزرگ،

$$\frac{Y_1(y)}{A} = (-2\,\mathrm{i}\,v)^{-\mathrm{i}\,\ell}\,\int_{\mathbb{M}} \frac{\mathrm{d}\,\zeta}{2\,\pi\,\mathrm{i}}\,[\exp(\zeta\,y)]\,\zeta^{-1+\mathrm{i}\,\ell}[1 + o(y^{-1})]. \tag{96}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{Y_1(y)}{A} = \frac{\mathrm{i}\,\sinh(\pi\,\ell)}{\pi}\,[\Gamma(\mathrm{i}\,\ell)]\,(-2\,\mathrm{i}\,v\,y)^{-\mathrm{i}\,\ell}\,[1 + o(y^{-1})]. \tag{97}$$

به شکل ی مشابه،

$$\frac{Y_2(y)}{A\,\exp(2\,\mathrm{i}\,k\,y)} = \frac{\mathrm{i}\,\sinh(\pi\,\ell)}{\pi}\,[\Gamma(1 - \mathrm{i}\,\ell)]\,(2\,\mathrm{i}\,v\,y)^{-1+\mathrm{i}\,\ell}\,[1 + o(y^{-1})]. \tag{98}$$

یا،

$$\frac{Y_2(y)}{A\,\exp(2\,\mathrm{i}\,k\,y)} = -\frac{\ell}{2\,v\,y}\,\frac{\mathrm{i}\,\sinh(\pi\,\ell)}{\pi}\,[\Gamma(-\mathrm{i}\,\ell)]\,(2\,\mathrm{i}\,v\,y)^{+\mathrm{i}\,\ell}\,[1 + o(y^{-1})]. \tag{99}$$

ثابتِ A را چنین انتخاب میکنم.

$$\frac{1}{A} = \frac{\mathrm{i}\,\sinh(\pi\,\ell)}{\pi}\,[\Gamma(\mathrm{i}\,\ell)]\,\mathrm{i}^{\mathrm{i}\,\ell}. \tag{100}$$

به این ترتیب،

$$Y(y) = (2\,v\,y)^{-\mathrm{i}\,\ell}\,[1+o(y^{-1})] - \frac{\ell\,(2\,v\,y)^{\mathrm{i}\,\ell}}{2\,v\,y}\,\frac{\Gamma(-\mathrm{i}\,\ell)}{\Gamma(\mathrm{i}\,\ell)}\,[\exp(2\,\mathrm{i}\,v\,y)]\,[1+o(y^{-1})]. \tag{101}$$

و نتیجه میشود

$$\psi = \psi_1 + \psi_2. \tag{102}$$

که،

$$\psi_1(\boldsymbol{r}) = \Big(\exp\{\mathrm{i}\,k\,z\ -\mathrm{i}\,\ell\,\ln[k\,(r-z)]\}\Big)\,(1+\cdots). \tag{103}$$

$$\psi_2(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\Gamma(-\mathrm{i}\,\ell)}{\Gamma(\mathrm{i}\,\ell)}\,\frac{-\ell}{k\,(1-\cos\theta)}\,\frac{\exp\{\mathrm{i}\,k\,r\ +\mathrm{i}\,\ell\,\ln[k\,(r-z)]\}}{r}\right)(1+\cdots). \tag{104}$$

این دقیقَن به شکل ِ (66) نیست، حتا جاها یِ دور، که میشود $(1+\cdots)$ را هم ان 1 گرفت: باریکه ای که از یک نیرو یِ مرکزی یِ متناسب-با-عکس-ِ-مجذور-ِ-فاصله پراکنده میشود، چاها یِ دور هم کاملَن آزاد نمیشود.

5 پانوشتها

[1] Kepler

[2] محمد خرمی؛ «مسئله یِ کِپلِر و مختصات ِ سهموی، کلاسیک» (2024/08/03) X1-182

[3] Frobenius

[4] Ramamurti Shankar; “Principles of quantum mechanics” 2nd edition (Plenum Press, 1994)

[5] Laplace