X1-181 (2024/07/03)

امواجِ مغناطُ-هیدرُ-دینامیکی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

حرکتِ یک شاره یِ رسانا در حضورِ یک میدانِ مغناطیسی یِ بیرونی بررسی میشود. برا یِ نوسانها یِ کوچکِ حُلِ تعادل، روابطِ پاشندگی به دست میئایند.

1 معادلاتِ میدان

معادلاتِ مَکسوِل [1] برا یِ میدانِ الکترُمغناطیسی را میشود در مثلَن [2] یافت. میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی را با، به ترتیب، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{E}$؛ مشتق-گیری نسبت به $\boldsymbol{r}$ (مکان) را با $\boldsymbol{\partial}$؛ و مشتق-گیری نسبت به t (زمان) را با ∂_0 نشان میدهم. معادلاتِ بدون-ِ-چشمه یِ مَکسوِل [1] چنین‌َند.

$$0 = \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{1}$$

$$0 = \boldsymbol{\partial} \times \boldsymbol{E} + \partial_0 \boldsymbol{B}. \tag{2}$$

چگالی یِ گردشِ مغناطیسی و چگالی یِ شارِ الکتریکی را با ، به ترتیب، $\boldsymbol{H}$ و $\boldsymbol{D}$؛ و چگالی یِ جریانِ الکتریکی و چگالی یِ بارِ الکتریکی را با، به ترتیب، $\boldsymbol{J}$ و J^0 نشان میدهم. معادلاتِ با-چشمه یِ مَکسوِل [1] چنین‌َند.

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\partial} \times \boldsymbol{H} - \partial_0\, \boldsymbol{D}. \tag{3}$$

$$J^0 = \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{D}. \tag{4}$$

یک نتیجه یِ (3) و (4)، معادله یِ پیوستگی یِ جریانِ الکتریکی ست:

$$0 = \partial_0\, J^0 + \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{J}. \tag{5}$$

معادلاتِ مَکسوِل [1]، همراه با روابطِ ساختاری که $\boldsymbol{H}$ و $\boldsymbol{D}$ را به $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{E}$ مربوط میکنند، میدانِ الکترُمغناطیسی را بر حسبِ چشمه (چگالی یِ جریانِ الکتریکی و چگالی یِ بارِ الکتریکی) تعیین میکنند. البته معادلاتِ مَکسوِل [1] مستقل-از-هم نیستند. از (2) و (3)، به ترتیب، نتیجه میشود.

$$0 = \partial_0\, (\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{B}). \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\partial}\, \cdot \boldsymbol{J} = -\partial_0\, (\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{D}). \tag{7}$$

از ترکیبِ (5) با این هم نتیجه میشود

$$0 = \partial_0\, (J^0 - \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{D}). \tag{8}$$

معادلاتِ (6) و (8) دقیقَن هم ان معادلاتِ (1) و (4) نیستند، مشتقِ زمانی یِ (1) و (4) اند: (2) و (3) بخشِ ناثابت (وابسته-به-رمان) ِ، به ترتیب، (1) و (4) را میدهند.

2 معادلاتِ شاره

چگالی-یِ-جرمِ شاره را با ρ، و سرعتِ شاره را $\boldsymbol{v}$ نشان میدهم. معادله یِ پیوستگی چنین است.

$$0 = \partial_0\, \rho + \boldsymbol{\partial} \cdot (\rho\, \boldsymbol{v}). \tag{9}$$

چگالی یِ نیرو را با $\boldsymbol{f}$ نشان میدهم. معادله یِ نیرو (قانونِ دومِ نیوتُن [3]) چنین است.

$$\boldsymbol{f} = \rho\,(\partial_0\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\,\boldsymbol{v}). \tag{10}$$

معادلاتِ (9) و (10)، چگالی-یِ-جرم و سرعت را بر حسبِ نیرو تعیین میکنند. در یک شاره یِ رسانا، $\boldsymbol{f}$ مجموعِ $\boldsymbol{f}_1$ (ناشی از فشار)، $\boldsymbol{f}_2$ (ناشی از گرانرَوی)، و $\boldsymbol{f}_3$ (ناشی از الکترُمغناطیس) است:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3. \tag{11}$$

$$\boldsymbol{f}_1 = -\boldsymbol{\partial}\,P. \tag{12}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \eta\,\left[(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})\,\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{\partial}\,(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{v})}{3}\right]. \tag{13}$$

$$\boldsymbol{f}_3 = J^0\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}. \tag{14}$$

P فشار و η ضریب-ِ-گرانرَوی است. اینها را میشود در مثلَن [4] یافت.

3 میدان و شاره

روابطِ (2) و (3) و (9) و (10)، شاملِ میدانها و چگالیها یِ الکترُمغناطیسی، چشمِها یِ الکترُمغناطیسی (بار و جریان)، و نیز چگالی-یِ-جرم، سرعت، و فشار َند. چگالی یِ بارِ الکتریکی را میشود از رابطه یِ (4) بر حسبِ چگالی یِ شارِ الکتریکی نوشت. رابطه یِ (14)، با استفاده از (3) و (4) چنین میشود.

$$\boldsymbol{f}_3 = (\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{\partial}\times\boldsymbol{H} - \partial_0\,\boldsymbol{D})\times\boldsymbol{B}. \tag{15}$$

به این ترتیب 3 معادله یِ (2) و (3) و (9) و (10) برا یِ 8 متغیر میمانَد: میدانها و چگالیها یِ الکترُمغناطیسی (4 تا)، چگالی یِ جریانِ الکتریکی، چگالی-یِ-جرم، سرعت، و فشار. روابطِ ساختاری 2 معادله میدهند که چگالی-یِ-گردشِ مغناطیسی و چگالی-یِ-شارِ الکتریکی را به میدانِ الکترُمغناطیسی مربوط میکنند. معادله یِ اُهم [5] چگالی-یِ-جریان را بر حسبِ میدانِ الکترُمغناطیسی میدهد. معادله یِ حالت هم یک رابطه بینِ فشار و چگالی-یِ-جرم است. رُ-رابطه یِ اخیر چنین َند.

$$\boldsymbol{J} = \sigma\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}). \tag{16}$$

$$s^2 = \frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,\rho}. \tag{17}$$

σ رسانندگی یِ شاره، و s سرعتِ صُت در شاره (یِ بی-بار) است. با اینها میشود $\boldsymbol{J}$ و P را هم حذف کرد: (3) و (12)، به ترتیب، چنین میشوند.

$$0 = \boldsymbol{\partial} \times \boldsymbol{H} - \partial_0\, \boldsymbol{D} - \sigma\, (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{18}$$

$$\boldsymbol{f}_1 = -s^2\, \boldsymbol{\partial}\, \rho. \tag{19}$$

و (10) میشود

$$0 = \rho\, (\partial_0\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \boldsymbol{v}) + s^2\, \boldsymbol{\partial}\, \rho - \eta\, \left[(\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial})\, \boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{\partial}\, (\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{v})}{3}\right]$$
$$- [(\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{D})\, \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{\partial} \times \boldsymbol{H} - \partial_0\, \boldsymbol{D}) \times \boldsymbol{B}]. \tag{20}$$

معادلاتِ (2) و (9) و (18) و (20) مانده اند، همراه با 2 رابطه یِ ساختاری. اینها شاملِ میدانها و چگالیها یِ الکترُمغناطیسی (4 تا)، چگالی-یِ-جرم، و سرعت اند.

4 معادلاتِ خطی-شده، و مُجِ تخت

برا یِ $\mathfrak{X}$ این نهاده را به کار میبَرم.

$$\mathfrak{X}(t, \boldsymbol{r}) = \mathfrak{X}_\circ + \tilde{\mathfrak{X}}\, \exp(-\mathrm{i}\, \omega\, t + \mathrm{i}\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}). \tag{21}$$

$\mathfrak{X}_\circ$ مقدارِ مختل-نشده یِ $\mathfrak{X}$، و $\tilde{\mathfrak{X}}$ دامنه یِ انحرافِ $\mathfrak{X}$ از $\mathfrak{X}_\circ$ است. انحرافِ $\mathfrak{X}$ از $\mathfrak{X}_\circ$ یک مُجِ تخت است، که بسامد- ِ-زاویئی یَ ش ω و بردار- ِ-مُج َ ش $\boldsymbol{k}$ است. تنها-کمیتها یِ متغیر در طرفِ راست t و $\boldsymbol{r}$ اند، و ω و $\boldsymbol{k}$ برا یِ همه یِ کمیتها یکسان َند. البته نهاده یِ (21) فقط برا یِ معادلاتِ خطی-شده-نسبت به انحراف معتبر است.

دیده میشود

$$(\partial_0\, \mathfrak{X})(t, \boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\, \omega\, \tilde{\mathfrak{X}}\, \exp(-\mathrm{i}\, \omega\, t + \mathrm{i}\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}). \tag{22}$$

$$(\boldsymbol{\partial}\, \mathfrak{X})(t, \boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\, \boldsymbol{k}\, \tilde{\mathfrak{X}}\, \exp(-\mathrm{i}\, \omega\, t + \mathrm{i}\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}). \tag{23}$$

حالت ی را بررسی میکنم که شاره یِ مختل-نشده ساکن است:

$$\boldsymbol{v}_\circ = 0. \tag{24}$$

برا یِ معادلاتِ ساختاری هم این شکلِ ساده را به کار میبَرم.

$$\mu\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}. \tag{25}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\,\boldsymbol{E}. \tag{26}$$

خطی-شده یِ روابطِ (2) و (9) و (18) و (20)، به ترتیب، چنین میشود.

$$0 = \mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{E}} - \mathrm{i}\,\omega\,\tilde{\boldsymbol{B}}. \tag{27}$$

$$0 = -\mathrm{i}\,\omega\,\tilde{\rho} + \mathrm{i}\,\rho_\circ\,\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}. \tag{28}$$

$$0 = \mathrm{i}\,\mu^{-1}\,\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{B}} - (\sigma - \mathrm{i}\,\varepsilon\,\omega)\,\tilde{\boldsymbol{E}} - \sigma\,\tilde{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{B}_\circ. \tag{29}$$

$$\begin{aligned} 0 = {}& -\mathrm{i}\,\rho_\circ\,\omega\,\tilde{\boldsymbol{v}} + \mathrm{i}\,s^2\,\boldsymbol{k}\,\tilde{\rho} + \eta\,\left[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\,\tilde{\boldsymbol{v}} + \frac{\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})}{3}\right] \\ & - \mathrm{i}\,(\mu^{-1}\,\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{B}} + \varepsilon\,\omega\,\tilde{\boldsymbol{E}})\times\boldsymbol{B}_\circ. \end{aligned} \tag{30}$$

از (27) نتیجه میشود

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{E}}}{\omega}. \tag{31}$$

این را در (29) میگذارم:

$$0 = (1 + \mathrm{i}\,\xi\,a^{-2}\,\omega\,\mathsf{O})\,\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{B}_\circ. \tag{32}$$

که

$$\mathsf{O}\,\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\mathfrak{X}} - \hat{\boldsymbol{k}}\,(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}) - c^{-2}\,a^2\,\boldsymbol{\mathfrak{X}}. \tag{33}$$

$$\xi = (\mu\,\sigma)^{-1}. \tag{34}$$

$$c = (\mu\,\varepsilon)^{-1/2}. \tag{35}$$

$$a = \omega\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})^{-1/2}. \tag{36}$$

پس،

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = -(1 + \mathrm{i}\,\xi\, a^{-2}\,\omega\,\mathsf{O})^{-1}\,(\tilde{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{B}_\circ). \tag{37}$$

$$\boldsymbol{k} \times \tilde{\boldsymbol{B}} + \mu\,\varepsilon\,\omega\,\tilde{\boldsymbol{E}} = a^{-2}\,\omega\,\mathsf{O}\,(1 + \mathrm{i}\,\xi\, a^{-2}\,\omega\,\mathsf{O})^{-1}\,(\tilde{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{B}_\circ). \tag{38}$$

با استفاده از (28) هم،

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_\circ\,\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}}{\omega}. \tag{39}$$

روابطِ (38) و (39) را در (30) میگذارم:

$$0 = \rho_\circ\,\left[\omega\,\tilde{\boldsymbol{v}} - \frac{s^2\,\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})}{\omega}\right] + \mathrm{i}\,\eta\,\left[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\,\tilde{\boldsymbol{v}} + \frac{\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}})}{3}\right] + \mu^{-1}\,a^{-2}\,\omega\,[\mathsf{O}\,(1 + \mathrm{i}\,\xi\, a^{-2}\,\omega\,\mathsf{O})^{-1}\,(\tilde{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{B}_\circ)] \times \boldsymbol{B}_\circ. \tag{40}$$

پارامترها یِ ν (گرانروی یِ سینماتیکی) و $\boldsymbol{b}$ (سرعتِ آلوِن [5]) را چنین تعریف میکنند.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \tag{41}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{B}_\circ}{\sqrt{\rho\,\mu}}. \tag{42}$$

معادله یِ (40) چنین میشود.

$$0 = \mathsf{M}\,\tilde{\boldsymbol{v}}. \tag{43}$$

که

$$\mathsf{M}\,\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\mathfrak{X}} - s^2\,a^{-2}\,\hat{\boldsymbol{k}}\,(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}) + \mathrm{i}\,\nu\,a^{-2}\,\omega\,\left[\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \frac{\hat{\boldsymbol{k}}\,(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}})}{3}\right] + b^2\,a^{-2}\,\hat{\boldsymbol{b}} \times [\mathsf{O}\,(1 + \mathrm{i}\,\xi\, a^{-2}\,\omega\,\mathsf{O})^{-1}\,(\hat{\boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{\mathfrak{X}})]. \tag{44}$$

5 پاشندگی

بردارها یِ $e_{\|}$ و $e_{\perp}$ را، به ترتیب، موازی با و عمود بر $\boldsymbol{k}$ میگیرم. از (33) دیده میشود

$$\lambda_{\|}\, \boldsymbol{e}_{\|} = \mathsf{O}\, (1 + \mathrm{i}\, \xi\, a^{-2}\, \omega\, \mathsf{O})^{-1}\, \boldsymbol{e}_{\|}. \tag{45}$$

$$\lambda_{\perp}\, \boldsymbol{e}_{\perp} = \mathsf{O}\, (1 + \mathrm{i}\, \xi\, a^{-2}\, \omega\, \mathsf{O})^{-1}\, \boldsymbol{e}_{\perp}. \tag{46}$$

که،

$$\lambda_{\|} = -\frac{c^{-2}\, b^2}{1 - \mathrm{i}\, \xi\, c^{-2}\, \omega}. \tag{47}$$

$$\lambda_{\perp} = \frac{b^2\, a^{-2}\, (1 - c^{-2}\, a^2)}{1 + \mathrm{i}\, \xi\, a^{-2}\, \omega\, (1 - c^{-2}\, a^2)}. \tag{48}$$

بردارِ یکه یِ $\hat{\boldsymbol{u}}$ در صفحه یِ $\hat{\boldsymbol{k}}$ و $\hat{\boldsymbol{b}}$، و عمود بر $\hat{\boldsymbol{k}}$ است:

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{k}}\, \cos\theta + \hat{\boldsymbol{u}}\, \sin\theta. \tag{49}$$

$$\cos\theta = \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}. \tag{50}$$

از (44) تا (48) نتیجه میشود

$$\mathsf{M}\, \hat{\boldsymbol{k}} = \mathsf{M}^1{}_1\, \hat{\boldsymbol{k}} + \mathsf{M}^2{}_1\, \hat{\boldsymbol{u}}. \tag{51}$$

$$\mathsf{M}\, \hat{\boldsymbol{u}} = \mathsf{M}^1{}_2\, \hat{\boldsymbol{k}} + \mathsf{M}^2{}_2\, \hat{\boldsymbol{u}}. \tag{52}$$

$$\mathsf{M}\, (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{u}}) = \mathsf{M}^3{}_3\, (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{u}}). \tag{53}$$

که،

$$\mathsf{M}^1{}_1 = 1 - s^2\, a^{-2} + \mathrm{i}\, \frac{4\, \nu\, a^{-2}\, \omega}{3} - \lambda_{\perp}\, \sin^2\theta. \tag{54}$$

$$\mathsf{M}^2{}_1 = \lambda_{\perp}\, (\cos\theta)\, (\sin\theta). \tag{55}$$

$$\mathsf{M}^1{}_2 = \lambda_{\perp}\, (\cos\theta)\, (\sin\theta). \tag{56}$$

$$\mathsf{M}^2{}_2 = 1 + \mathrm{i}\, \nu\, a^{-2}\, \omega - \lambda_{\perp}\, \cos^2\theta. \tag{57}$$

$$\mathsf{M}^3{}_3 = 1 + \mathrm{i}\, \nu\, a^{-2}\, \omega - \lambda_{\|}\, \sin^2\theta - \lambda_{\perp}\, \cos^2\theta. \tag{58}$$

برا یِ (43) دُ دسته جواب هست. یک ی این که $\tilde{\boldsymbol{v}}$ در صفحه یِ شاملِ $\boldsymbol{k}$ و $\boldsymbol{b}$ است:

$$\tilde{\boldsymbol{v}} \in \mathsf{span}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}). \tag{59}$$

$$0 = \mathsf{M}^1{}_1\,\mathsf{M}^2{}_2 - \mathsf{M}^2{}_1\,\mathsf{M}^1{}_2. \tag{60}$$

رابطه یِ اخیر یک معادله برا یِ a (سرعتِ فاز) است. به ازا یِ هر جوابِ آن برا یِ a، راستا یِ $\tilde{\boldsymbol{v}}$ از (43) به دست میئاید. رابطه یِ (60) چنین میشود.

$$0 = \Upsilon_\parallel\,\Upsilon_\perp - \lambda_\perp\,(\Upsilon_\parallel\,\cos^2\theta + \Upsilon_\perp\,\sin^2\theta). \tag{61}$$

که،

$$\Upsilon_\parallel = 1 - s^2\,a^{-2} + \mathrm{i}\,\frac{4\,\nu\,a^{-2}\,\omega}{3}. \tag{62}$$

$$\Upsilon_\perp = 1 + \mathrm{i}\,\nu\,a^{-2}\,\omega. \tag{63}$$

یک جوابِ دیگر هم این است که $\tilde{\boldsymbol{v}}$ بر $\boldsymbol{k}$ و $\boldsymbol{b}$ عمود است:

$$\tilde{\boldsymbol{v}} \parallel (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{b}). \tag{64}$$

$$0 = \mathsf{M}^3_3. \tag{65}$$

و رابطه یِ اخیر میشود

$$0 = \Upsilon_\perp - \lambda_\parallel\,\sin^2\theta - \lambda_\perp\,\cos^2\theta. \tag{66}$$

5.1 سرعتِ نور زیاد است

در روابطِ پاشندگی سه سرعتِ معلوم ظاهر میشود: s و c و b، و البته یک سرعتِ (a) که قرار است از معادلات به دست اید. معمولَن c (سرعتِ نور در پلاسما) خیل ی بیش از سرعتها یِ دیگر است. پس یک تقریبِ خوب این است که از نسبتِ سرعتها یِ دیگر به سرعتِ نور در پلاسما چشم پوشیده شود.

با این تقریب،

$$\lambda_\parallel = 0. \tag{67}$$

$$\lambda_\perp = \frac{b^2\, a^{-2}}{1 + \mathrm{i}\,\xi\, a^{-2}\,\omega}. \tag{68}$$

$$\mathsf{M}^3{}_3 = 1 + \mathrm{i}\,\nu\, a^{-2}\,\omega - \lambda_\perp\, \cos^2\theta. \tag{69}$$

6 پلاسما یِ آرمانی

(بینهایت-نبودنِ) رسانندگی، و (صفر-نببودنِ) گرانروی عالمها یِ اتلاف در پلاسما یَند. در پلاسما یِ آرمانی اینها نیستند: رسانندگی بینهایت و گرانروی صفر است. در این حالت،

$$\xi = 0. \tag{70}$$

$$\nu = 0. \tag{71}$$

به این ترتیب،

$$\lambda_\parallel = -c^{-2}\, b^2. \tag{72}$$

$$\lambda_\perp = b^2\,(a^{-2} - c^{-2}). \tag{73}$$

$$\Upsilon_\parallel = 1 - s^2\, a^{-2}. \tag{74}$$

$$\Upsilon_\perp = 1. \tag{75}$$

و رابطه یِ (60)، یا (61)، میشود

$$0 = (1 - s^2\, a^{-2}) - b^2\,(a^{-2} - c^{-2})\,[(1 - s^2\, a^{-2})\, \cos^2\theta + \sin^2\theta]. \tag{76}$$

این یک معادله یِ درجه-یِ-دُ برا یِ a^2 است. جوابها یَ ش چنین میشوند.

$$(a^2)_{1,2} = \frac{g^2 \pm \sqrt{g^4 - 4\,(1 + c^{-2}\, b^2)\, b^2\, s^2\, \cos^2\theta}}{2\,(1 + c^{-2}\, b^2)}. \tag{77}$$

که،

$$g = \sqrt{b^2 + s^2 + c^{-2}\, b^2\, s^2\, \cos^2\theta}. \tag{78}$$

رابطه یِ (66) هم میشود

$$0 = 1 + c^{-2}\, b^2 - b^2\, a^{-2}\, \cos^2\theta. \tag{79}$$

که یک جوابِ دیگر برا یِ a^2 میدهد:

$$(a^2)_3 = \frac{b^2\, \cos^2\theta}{1 + b^2\, c^{-2}}. \tag{80}$$

یک حالتِ خاص این است که $\boldsymbol{k}$ با $\boldsymbol{b}$ موازی است:

$$\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(a^2)_1 = s^2. \tag{81}$$

$$(a^2)_{2,3} = \frac{b^2}{1 + c^{-2}\, b^2}. \tag{82}$$

یک حالتِ خاص هم این است که $\boldsymbol{k}$ بر $\boldsymbol{b}$ عمود است:

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(a^2)_1 = \frac{b^2 + s^2}{1 + c^{-2}\, b^2}. \tag{83}$$

$$(a^2)_{2,3} = 0. \tag{84}$$

6.1 سرعتِ نور زیاد است

وقت ی اتلاف نیست و سرعتِ نور در پلاسما هم از بقیه یِ سرعتها خیل ی بیشتر است، روابط سادِتر میشوند. در این حالت، از c^{-2} چشم میپوشم:

$$g = \sqrt{b^2 + s^2}. \tag{85}$$

و روابطِ (77) و (80) چنین میشوند.

$$(a^2)_{1,2} = \frac{b^2 + s^2 \pm \sqrt{(b^2+s^2)^2 - 4\,b^2\,s^2\,\cos^2\theta}}{2}. \tag{86}$$

$$(a^2)_3 = b^2\,\cos^2\theta. \tag{87}$$

یک حالتِ خاص این است که $\boldsymbol{k}$ با $\boldsymbol{b}$ موازی است:

$$\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(a^2)_1 = s^2. \tag{88}$$

$$(a^2)_{2,3} = b^2. \tag{89}$$

یک حالتِ خاص هم این است که $\boldsymbol{k}$ بر $\boldsymbol{b}$ عمود است:

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(a^2)_1 = b^2 + s^2. \tag{90}$$

$$(a^2)_{2,3} = 0. \tag{91}$$

7 پانوشتها

[1] Maxwell

[2] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[3] Newton

[4] T. E. Faber; “Fluid dynamics for physicists” (Cambridge University Press, 1995)

[5] Alfvén