X1-180 (2024/05/03)

تابع- ِ-گرین ِ دیریکله در یک نوار

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

تابع- ِ-گرین [1] با شرط- ِ-مرزی یِ دیریکله [2]، برا یِ یک نوار، با چند روش حساب میشود.

0 درامد

مختصات ِ دِکرتی در صفحه را با (x, y)، و متغیر- ِ-مختلط ِ متناظر را با z نشان میدهم:

$$x + \mathrm{i}\, y = z. \tag{1}$$

نوار ِ افقی را با $\mathbb{D}$ نشان میدهم:

$$(-\infty, \infty) \times (-a, b) = \mathbb{D}. \tag{2}$$

تابع- ِ-گرین [1] ِ متناظر با شرط- ِ-مرزی یِ دیریکله [2] در این نوار را با G نشان میدهم:

$$(\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial}\, \mathsf{G})(z; z') = \delta(z - z'), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3}$$

$$\mathsf{G}(0; z') = 0, \qquad z \in (\mathbf{b}\, \mathbb{D}). \tag{4}$$

که $(\mathbf{b}\, \mathbb{S})$ مرز ِ $\mathbb{S}$ است.

1 بسط بر حسبِ ویژه-بردارها یِ تقارن

مشتق-گیری در جهتِ x را با ∂_x، و مشتق-گیری در جهتِ y را با ∂_y نشان میدهم. $(\partial_y)^2$ تقارنِ مسئله است. تابع-ِگرین [1] را بر حسبِ ویژه-بردارها یِ آن بسط میدهم:

$$\mathsf{G}(z;z') = \sum_{n=1}^{\infty} [\mathsf{G}_n(x;z')]\, f_n(y). \tag{5}$$

که f_n ها ویژه-بردارها یِ $(\partial_y)^2$ اند، که (بخشِ مربوط-به-yِ) شرط-ِمرزی یِ (4) را بر میئاورَند:

$$f_n(y) = \sin \frac{\pi\, n\, (a+y)}{a+b}. \tag{6}$$

$$(\partial_y)^2\,[f_n(y)] = \lambda_n\, f_n(y). \tag{7}$$

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2\, n^2}{(a+b)^2}. \tag{8}$$

طرفِ راستِ (3) را هم بر حسبِ هم ین ویژه-بردارها بسط میدهم:

$$\delta(z-z') = [\delta(x-x')]\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, f_n(y')}{a+b}\, f_n(y). \tag{9}$$

معادله یِ (3) چنین میشود.

$$[(\partial_x)^2 + \lambda_n]\,[\mathsf{G}_n(x;z')] = [\delta(x-x')]\, \frac{2\, f_n(y')}{a+b}. \tag{10}$$

چیز ی که از شرط-ِمرزی یِ (4) مانده هم این است.

$$\lim_{|x|\to\infty} [\mathsf{G}_n(x;z')] = 0. \tag{11}$$

جوابِ (10) و (11) این است.

$$\mathsf{G}_n(x;z') = -\frac{g_n(|x-x'|)}{\pi\, n}\, f_n(y'). \tag{12}$$

$$g_n(\xi) = \exp\left(-\frac{\pi\, n\, |\xi|}{a+b}\right). \tag{13}$$

تابع-ِگرین [1] هم چنین میشود.

$$\mathsf{G}(z;z') = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[g_n(|x-x'|)]\,[f_n(y)]\,[f_n(y')]}{\pi\, n}. \tag{14}$$

1.1 جمع-زدنِ سری

رابطه یِ (14) را میشود چنین نوشت.

$$\mathsf{G}(z,z') = -\mathsf{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\,\pi\,n}\,(Z^n - \tilde{Z}^n)\right]. \tag{15}$$

$$Z = \exp\left[-\pi\,\frac{|x-x'| + \mathrm{i}\,(y-y')}{a+b}\right]. \tag{16}$$

$$\tilde{Z} = \exp\left[-\pi\,\frac{|x-x'| + \mathrm{i}\,(y+y'+2\,a)}{a+b}\right]. \tag{17}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{G}(z,z') = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left|\frac{1-Z}{1-\tilde{Z}}\right|. \tag{18}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{G}(z,z') = \frac{1}{4\,\pi}\,\ln\frac{1-2\,[g(|x-x'|)]\,f(y-y') + [g(|x-x'|)]^2}{1-2\,[g(|x-x'|)]\,f(y+y'+2\,a) + [g(|x-x'|)]^2}. \tag{19}$$

$$f(y) = \cos\frac{\pi\,y}{a+b}. \tag{20}$$

$$g(\xi) = \exp\left(-\frac{\pi\,\xi}{a+b}\right). \tag{21}$$

دیده میشود

$$1 = [g(-\xi)]\,[g(\xi)]. \tag{22}$$

صورت و مخرج را در $[g(-|x-x'|)]^2$ ضرب میکنم و (22) را به کار میبَرم:

$$\mathsf{G}(z,z') = \frac{1}{4\,\pi}\,\ln\frac{1-2\,[g(-|x-x'|)]\,f(y-y') + [g(-|x-x'|)]^2}{1-2\,[g(-|x-x'|)]\,f(y+y'+2\,a) + [g(-|x-x'|)]^2}. \tag{23}$$

از مقایسه یِ (19) با (23) نتیجه میشود

$$\mathsf{G}(z,z') = \frac{1}{4\,\pi}\,\ln\frac{1-2\,[g(x-x')]\,f(y-y') + [g(x-x')]^2}{1-2\,[g(x-x')]\,f(y+y'+2\,a) + [g(x-x')]^2}. \tag{24}$$

یعنی در طرف-ِ-راستِ (19)، میشود قدر-ِ-مطلق را از متغیرِ g برداشت.

2 نگاشت ِ همدیس

ناحیه یِ $\mathbb{D}$ را با یک نگاشت ِ همدیس به ناحیه یِ $\mathbb{A}$ تبدیل میکنم. تبدیل-یافته یِ z با این نگاشت را با w نشان میدهم:

$$w = \exp\left(\frac{\pi\, z}{a+b}\right). \tag{25}$$

به این ترتیب $\mathbb{A}$ یک نیم-صفحه میشود، که مرز ِ آن خطی ست که از مبدئ میگذرد:

$$\mathbf{b}\,\mathbb{A} = \left[\exp\left(\frac{\pi\,\mathrm{i}\,b}{a+b}\right)\right]\,\mathbb{R}. \tag{26}$$

که $\mathbb{R}$ خط ِ حقیقی (در صفحه یِ مختلط) است. تابع- ِ-گرین [1] ِ دیریکله [2] در یک نیم-صفحه را، از جمله میشود با روش ِ تصویر حساب کرد: چشمه یِ تصویر، منعکس-شده یِ چشمه بر مرز ِ نیم-صفحه است. به این ترتیب،

$$\mathsf{G}(z, z') = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\frac{|w - w'|}{|w - \tilde{w}'|}. \tag{27}$$

که $\tilde{w}'$ منعکس-شده یِ w' بر مرز ِ $\mathbb{A}$ است:

$$\tilde{w}' = \bar{w}'\,\exp\left(-\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,a}{a+b}\right). \tag{28}$$

متناظر با آن،

$$\tilde{z}' = -2\,a\,\mathrm{i} - z'. \tag{29}$$

و (27) چنین میشود.

$$\mathsf{G}(z, z') = \frac{1}{4\,\pi}\,\ln\frac{[g(-x)]^2 - 2\,[g(x)]\,[g(-x')]\,f(y-y') + [g(-x')]^2}{[g(-x)]^2 - 2\,[g(x)]\,[g(-\tilde{x}')]\,f(y-y') + [g(-\tilde{x}')]^2}. \tag{30}$$

با استفاده از (22)، دیده میشود (30) هم ان (24) است.

3 روشِ تصویر

مرزِ نوار اجتماعِ دُ خط است. یک خط را بر میدارم و چشمه و خطِ دیگر را بر آن منعکس میکنم. نتیجه یک نوار است که پهنا یَ ش دُ-برابرِ پهنا یِ نوارِ اول است، و دُ چشمه یِ نقطِئی در آن هستند: چشمه یِ اولیه و منعکس-شده یِ آن، که مقدارِ چشمه یِ منعکس-شده قرینه یِ مقدارِ چشمه یِ اولیه است. این کار را از هر-دُ-طرف (برا یِ هر-دُ-خطِ مرز) ادامه میدهم تا نوار به همه یِ صفحه تبدیل شود. ناحیه یِ حاصل بینهایت چشمه دارد: چشمِها یی که مقدارِ شان با مقدارِ چشمه یِ اولیه برابر است، در z'_n ها؛ و چشمِها یی که مقدارِ شان قرینه یِ مقدارِ چشمه یِ اولیه برابر است، در $\tilde{z}'_n$ ها:

$$z'_n = z' - 2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,(a+b). \tag{31}$$

$$\tilde{z}'_n = \tilde{z}' - 2\,\pi\,\mathrm{i}\,n\,(a+b). \tag{32}$$

پس تابع-ِ-گرین [1] چنین میشود.

$$\mathsf{G}(z,z') = \frac{1}{2\,\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln\frac{|z - z' + 2\,\mathrm{i}\,n\,(a+b)|}{|z - \tilde{z}' + 2\,\mathrm{i}\,n\,(a+b)|}. \tag{33}$$

تابعِ F را چنین تعریف میکنم.

$$F(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln\frac{\zeta + 2\,\pi\,\mathrm{i}\,n}{1 + 2\,\pi\,\mathrm{i}\,n}. \tag{34}$$

دیده میشود

$$(\mathrm{D}\,F)(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\zeta + 2\,\pi\,\mathrm{i}\,n}. \tag{35}$$

$$(\mathrm{D}\,F)(\infty) = \lim_{\zeta\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,\zeta}{\zeta^2 + (2\,\pi\,n)^2}. \tag{36}$$

وقت یِ ζ بزرگ است، سری یِ طرف-ِ-راست را میشود به انتگرال تبدیل کرد:

$$(\mathrm{D}\,F)(\infty) = \int_0^{\infty}\frac{(\mathrm{d}\,\nu)\,(2\zeta)}{\zeta^2 + (2\,\pi\,\nu)^2}. \tag{37}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathrm{D}\,F)(\infty) = \frac{\mathsf{sgn}[\mathsf{Re}(\zeta)]}{2}. \tag{38}$$

تابع ِ H را چنین تعریف میکنم.

$$H(\zeta) = \frac{1}{1 - \exp(-\zeta)}. \tag{39}$$

دیده میشود $[(\mathrm{D}\,F) - H]$ بر کل ِ صفحه ی ِ مختلط تمام-ریخت است: $[(\mathrm{D}\,F) - H]$ تام است. همچنین،

$$H(\infty) = \frac{1 + \mathsf{sgn}[\mathsf{Re}(\zeta)]}{2}. \tag{40}$$

که نتیجه میدهد

$$[(\mathrm{D}\,F) - H](\infty) = -\frac{1}{2}. \tag{41}$$

پس $[(\mathrm{D}\,F) - H]$، بر کل ِ صفحه کراندار هم هست. تابع ی که تام و کراندار باشد، ثابت است. از این، همراه با (41)، نتیجه میشود

$$(\mathrm{D}\,F)(\zeta) = -\frac{1}{2} + H(\zeta). \tag{42}$$

از این رابطه انتگرال میگیرم:

$$F(\zeta) = c - \frac{\zeta}{2} + \ln[\exp(\zeta) - 1]. \tag{43}$$

ثابت ِ c را میشود از اینجا حساب کرد که

$$F(1) = 0. \tag{44}$$

پس،

$$c = \frac{1}{2} - \ln[\exp(1) - 1]. \tag{45}$$

دیده میشود

$$\mathsf{G}(z, z') = \frac{1}{4\,\pi}\,[F(\zeta) + F(\bar{\zeta}) - F(\tilde{\zeta}) - F(\bar{\tilde{\zeta}})]. \tag{46}$$

که،

$$\zeta = \frac{\pi\,(z - z')}{a + b}. \tag{47}$$

$$\tilde{\zeta} = \frac{\pi\,(z - \tilde{z}')}{a + b}. \tag{48}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{G}(z, z') = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left|\frac{(w/w') - 1}{(w/\tilde{w}') - 1}\right|. \tag{49}$$

البته،

$$|\tilde{w}'| = |w'|. \tag{50}$$

پس،

$$G(z, z') = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left|\frac{w - w'}{w - \tilde{w}'}\right|. \tag{51}$$

که هم ان (27) است.

4 پانوشتها

[1] Green

[2] Dirichlet