

X1-168 (2022/11/23)

تابش از یک استوانه ی دایرئی با جریان محوری

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

از یک استوانه ی دایرئی جریان ی محوری، یکنواخت، و سینوسی-با-زمان میگذرد. میدانها ی
مغناطیسی و الکتریکی ی حاصل، و نیز نوان تابشی محاسبه میشوند.

0 درآمد

این ادامه ی [1] است. هم ان نماد-گذاری و ابزارها یی که در [1] به کار رفت اینجا هم به کار میرود.
مختصات استوائی (ρ, ϕ, z) اند. تابعها ی سینوسی-با-زمان را با فآزر نشان میدهم:

$$\mathfrak{X}(t) = \text{Re}[\mathfrak{X} \exp(-i\omega t)]. \quad (1)$$

تابش از یک استوانه ی دایره ای با جریان محوری

که t زمان است، بستگی ی $\mathfrak{X}(t)$ به زمان سینوسی با بسامد ω - زاویه ای ی ω است، و \mathfrak{X} یک عدد مختلط (فازور متناظر با تابع) است. میدان الکتریکی را با E ، میدان مغناطیسی را با B ، چگالی ی جریان را با J ، و چگالی ی بار را با ρ نشان میدهم. گذردهی الکتریکی، تراوایی ی مغناطیسی، و سرعت نور (همه در خلئ) را هم با، به ترتیب، ϵ_0 و μ_0 و c نشان میدهم:

$$0 = \nabla \times E - i\omega B. \quad (2)$$

$$\mu_0 J = \nabla \times B + c^{-2} i\omega E. \quad (3)$$

$$\epsilon_0^{-1} \rho = \nabla \cdot E. \quad (4)$$

$$0 = \nabla \cdot B. \quad (5)$$

$$0 = -i\omega \rho + \nabla \cdot J. \quad (6)$$

$$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}. \quad (7)$$

وقت ی ω صفر نیست، معادله ی (4) از معادلات (3) و (6)، و معادله ی (5) از معادله ی (2) نتیجه میشود.

1 تقارنها

بردار مکان را با r نشان میدهم. گیرم میدان برداری ی \mathfrak{X} تحت انتقال در جهت \hat{z} تقارن دارد. در این صورت،

$$\mathfrak{X}(r) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_\rho(\rho, \phi) + \hat{\phi} \mathfrak{X}_\phi(\rho, \phi) + \hat{z} \mathfrak{X}_z(\rho, \phi). \quad (8)$$

گیرم میدان برداری ی \mathfrak{X} تحت دوران حُل \hat{z} تقارن دارد. در این صورت،

$$\mathfrak{X}(r) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_\rho(\rho, z) + \hat{\phi} \mathfrak{X}_\phi(\rho, z) + \hat{z} \mathfrak{X}_z(\rho, z). \quad (9)$$

گیرم میدان برداری ی \mathfrak{X} تحت انتقال در جهت \hat{z} و دوران حُل \hat{z} تقارن دارد. در این صورت،

$$\mathfrak{X}(r) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_\rho(\rho) + \hat{\phi} \mathfrak{X}_\phi(\rho) + \hat{z} \mathfrak{X}_z(\rho). \quad (10)$$

گیرم میدان برداری \mathfrak{X}_e تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی \hat{z} زوج است. در این صورت،

$$\mathfrak{X}_e(\mathbf{r}) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_{e\rho}(\rho) + \hat{\phi} \mathfrak{X}_{e\phi}(\rho). \quad (11)$$

گیرم میدان برداری \mathfrak{X}_o تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی \hat{z} فرد است. در این صورت،

$$\mathfrak{X}_o(\mathbf{r}) = \hat{z} \mathfrak{X}_{oz}(\rho). \quad (12)$$

گیرم میدان برداری \mathfrak{X}_e تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی \hat{z} زوج است. در این صورت،

$$\mathfrak{X}_e(\mathbf{r}) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_{e\rho}(\rho) + \hat{z} \mathfrak{X}_{ez}(\rho). \quad (13)$$

گیرم میدان برداری \mathfrak{X}_o تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی \hat{z} فرد است. در این صورت،

$$\mathfrak{X}_o(\mathbf{r}) = \hat{\phi} \mathfrak{X}_{o\phi}(\rho). \quad (14)$$

2 جریان محوری و میدانها

از یک استوانه ی دایرئی به شعاع a جریان ی محوری و یکنواخت میگذرد. محور \hat{z} را محور استوانه میگیرم. این جریان (سطحی) تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی \hat{z} فرد است. پس به شکل (12) است. چگالی ی جریان -سطحی را با \mathbf{J}_s نشان میدهم:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = [\mathbf{J}_s(\phi, z)] \delta(\rho - a). \quad (15)$$

$$\mathbf{J}_s(\phi, z) = \hat{z} J_s. \quad (16)$$

تابش از یک استوانه ی دایره ای با جریان محوری

که J_s مستقل از مکان است.

میدانها ی الکتریکی و مغناطیسی ی حاصل هم ان تقارنهای انتقالی و دورانی را دارند. ولی رفتار شان تحت واورنی ی z یکسان نیست. میدان الکتریکی مثل \hat{x} جریانی است: تحت واورنی ی z فرد است. اما میدان مغناطیسی تحت واورنی ی z زوج است. به این ترتیب میدان الکتریکی به شکل (12) و میدان مغناطیسی به شکل (11) است:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{z} E(\rho). \quad (17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{\rho} B_\rho(\rho) + \hat{\phi} B_\phi(\rho). \quad (18)$$

البته دیورژانس B صفر است: معادله ی (5). شکل (18) برای B را در (5) میگذارم. نتیجه میشود

$$B_\rho = 0. \quad (19)$$

و (18) چنین میشود.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{\phi} B(\rho). \quad (20)$$

که B_ϕ با \hat{x} نشان داده شده.

3 جواب معادلات

با حذف هر یک از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی از معادلات (2) تا (5) (معادلات مکسول [2]) یک معادله ی از-مرتبه-ی-دُ برای میدان دیگر به دست میآید:

$$\varepsilon_0^{-1} \nabla \cdot \rho - \mu_0 i \omega \mathbf{J} = (\nabla \cdot \nabla + k^2) \mathbf{E}. \quad (21)$$

$$-\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} = (\nabla \cdot \nabla + k^2) \mathbf{B}. \quad (22)$$

که k عدد-مُج است:

$$k = c^{-1} \omega. \quad (23)$$

از جمله، معادلات بی-چشمه چنین میشوند.

$$0 = (\nabla \cdot \nabla + k^2) E. \quad (24)$$

$$0 = (\nabla \cdot \nabla + k^2) B. \quad (25)$$

برای جریان‌های که به شکل (15) و (16) است، میدان الکتریکی به شکل (17) است. پس (24) چنین میشود.

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dE}{d\rho} \right) + k^2 E, \quad \rho \neq a. \quad (26)$$

این معادله بیسل [3] از مرتبه صفر، با متغیر $(k\rho)$ ، است. یک شرط مرزی این است که جواب در $\rho = 0$ تکین نیست. نتیجه میشود

$$E(\rho) = cC J_0(k\rho), \quad \rho < a. \quad (27)$$

که C یک ثابت، و J_m تابع بیسل [3] از مرتبه m است. یک شرط -مرزی دیگر هم این است که جواب در $\rho \rightarrow \infty$ مثل یک موج بیرون-رونده است. از این نتیجه میشود

$$E(\rho) = cD H_0^{(1)}(k\rho), \quad \rho > a. \quad (28)$$

که D یک ثابت، و $H_m^{(1)}$ تابع هانکِل [4] از نوع اول و از مرتبه m است. c در روابط (27) و (28) برای این وارد شده که قراردادها بیشتر شبیه قراردادها بی باشند که در [1] به کار رفتند.

از معادله (2)، همراه با شکل‌های (17) و (20) برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، نتیجه

میشود

$$B(\rho) = -(i\omega)^{-1} E'(\rho), \quad \rho \neq a. \quad (29)$$

که \mathcal{X}' مشتق \mathcal{X} است. به این ترتیب،

$$B(\rho) = iC J_0'(k\rho), \quad \rho < a. \quad (30)$$

$$B(\rho) = iD H_0^{(1)'}(k\rho), \quad \rho > a. \quad (31)$$

تابش از یک استوانه ی دایرئی با جریان محوری

بر پوسته ی حامل - جریان، این شرطها برقرار است.

$$0 = \hat{n} \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-). \quad (32)$$

$$\mu_0 \mathbf{J}_s = \hat{n} \times (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-). \quad (33)$$

که \hat{n} بردار یکه ی عمود بر سطح است و

$$\mathfrak{X}_{\pm}(\mathbf{r}) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathfrak{X}(\mathbf{r} \pm s \hat{n}). \quad (34)$$

از روابط (32) و (33)، به ترتیب، نتیجه میشود

$$0 = D H_0^{(1)}(ka) - C J_0(ka). \quad (35)$$

$$\mu_0 J_s = i [D H_0^{(1)'}(ka) - C J_0'(ka)]. \quad (36)$$

به این ترتیب،

$$C = -\frac{H_0^{(1)}(ka)}{W(ka)} (\mu_0 J_s). \quad (37)$$

$$D = -\frac{J_0(ka)}{W(ka)} (\mu_0 J_s). \quad (38)$$

که،

$$W = J_0 N_0' - J_0' N_0. \quad (39)$$

و N_m تابع نیمنان [5] از مرتبه ی m است:

$$H_m^{(1)} = J_m + i N_m. \quad (40)$$

از تعریف J_0 و N_0 نتیجه میشود

$$W(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi \mathbf{r}}. \quad (41)$$

پس،

$$C = -\frac{\pi k a H_0^{(1)}(k a)}{2} (\mu_0 J_s). \quad (42)$$

$$D = -\frac{\pi k a J_0(k a)}{2} (\mu_0 J_s). \quad (43)$$

4 توان تابشی

شدت تابش (چگالی ی سطحی ی توان تابشی) بردار پُنینتینگ [6] است، که آن را با S نشان می‌دهم:

$$S = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{B}}). \quad (44)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ مزدوج - مختلط $\hat{\mathbf{x}}$ است. درون استوانه بردار پُنینتینگ [6] صفر است. بیرون استوانه،

$$\begin{aligned} S &= \frac{ic|D|^2 \hat{\rho}}{4\mu_0} \{ [H_0^{(1)}(k\rho)] \overline{[H_0^{(1)'(k\rho)}]} - \overline{[H_0^{(1)}(k\rho)]} [H_0^{(1)'(k\rho)}] \}, \\ &= \frac{c|D|^2 \hat{\rho}}{2\mu_0} W(k\rho). \end{aligned} \quad (45)$$

پس،

$$S = \frac{c|D|^2}{\pi\mu_0 k\rho} \hat{\rho}. \quad (46)$$

که میشود

$$S = \frac{\pi\mu_0 c |k a J_0(k a)|^2}{4k\rho} |J_s|^2 \hat{\rho}. \quad (47)$$

توان ی که از یک سطح میگذرد انتگرال بردار پُنینتینگ [6] بر این سطح است. توان-بر-طول ی که از یک استوانه میگذرد انتگرال بردار پُنینتینگ [6] بر محیط این استوانه است. برای یک استوانه ی دایرئی که محور z است و شعاع قاعده اش ρ است، این توان-بر-طول را با P' نشان می‌دهم. دیده میشود

$$P' = \frac{\pi^2 \mu_0 c |k a J_0(k a)|^2}{2k} |J_s|^2. \quad (48)$$

5 حالتها ی خاص

چند حالت خاص را بررسی میکنم:

5.1 بسامد کم

در این حالت،

$$k a \ll 1. \quad (49)$$

از شکلهای مجانبی ی توابع بسل [3] و هانکِل [4] برای متغیرهای کوچک نتیجه میشود

$$C = -i(k a) \left(\ln \frac{k a}{2} \right) (1 + \dots) (\mu_0 J_s). \quad (50)$$

$$D = -\frac{\pi}{2} (k a) (1 + \dots) (\mu_0 J_s). \quad (51)$$

$$P' = \frac{\pi^2 \mu_0 c}{2 k} (k a)^2 (1 + \dots) |J_s|^2. \quad (52)$$

از جمله؛ در بسامد صفر میدان الکتریکی صفر است، میدان مغناطیسی درون استوانه صفر است و بیرون استوانه هم ان است که در حالت ایستا به دست میآید (چنان که انتظار میرود)، و توان تابشی هم صفر است.

5.2 سیم

سیم حالت حدی ی استوانه است، وقت ی شعاع استوانه به صفر میگراید. شرط (49) با کاهش شعاع استوانه هم برآورده میشود. شعاع استوانه را به صفر میگیرانم. در این حالت C مهم نیست، چون درون استوانه وجود ندارد. D هم (با جریان - سطحی ی محدود) صفر میشود، چون جریان سیم صفر میشود. در نتیجه میدانها بیرون استوانه صفر میشوند، و توان تابشی هم صفر میشود. اما میشود جریان - سطحی را چنان مقیاس کرد که جریان سیم به مقداری نا صفر بگراید. جریان سیم را با I نشان میدهم:

$$I = 2 \pi a J_s. \quad (53)$$

I را ثابت میگیریم و a را به صفر میگیرانیم. نتیجه میشود

$$D = -\frac{1}{4} k (1 + \dots) (\mu_0 I). \quad (54)$$

$$P' = \frac{\mu_0 c}{8} k (1 + \dots) |I|^2. \quad (55)$$

5.3 بسامد زیاد

در این حالت،

$$k a \gg 1. \quad (56)$$

از شکلهای مجانبی توابع بسل [3] و هانکل [4] برای متغیرهای بزرگ نتیجه میشود

$$C = \left\{ -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(ka - \frac{\pi}{4}\right)\right] \right\} (ka)^{1/2} (1 + \dots) (\mu_0 J_s). \quad (57)$$

$$D = \left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cos\left(ka - \frac{\pi}{4}\right) \right] (ka)^{1/2} (1 + \dots) (\mu_0 J_s). \quad (58)$$

$$P' = \left[\frac{\pi \mu_0 c}{k} \cos^2\left(ka - \frac{\pi}{4}\right) \right] (ka) (1 + \dots) |J_s|^2. \quad (59)$$

5.4 صفحه

صفحه حالت حدی استوانه است، وقتی شعاع استوانه به بینهایت میگراید. شرط (56) با افزایش شعاع استوانه هم برآورده میشود. شعاع استوانه را به بینهایت میگیرانیم. در این حالت C و D به حد معین نمیگرایند: با دامنه‌ی فزاینده نوسان میکنند. P' هم با دامنه‌ی فزاینده نوسان میکند، اما برخلاف C و D یک میانگین ناصفر دارد، که آن میانگین به بینهایت میگراید. البته این که توان-بر-طول بینهایت شود عجیب نیست: مقطع استوانه بینهایت شده. اما توان-بر-مساحت (توان-بر-طول تقسیم بر محیط استوانه) بینهایت نمیشود. توان-بر-مساحت را با P'' نشان میدهم:

$$P'' = \frac{P'}{2\pi a}. \quad (60)$$

از (59) دیده میشود

$$P'' = \left[\frac{\mu_0 c}{2} \cos^2\left(ka - \frac{\pi}{4}\right) \right] (1 + \dots) |J_s|^2. \quad (61)$$

تابش از یک استوانه ی دایرئی با جریان محوری

این را میشد مستقیمً هم حساب کرد: از یک صفحه یک جریان سطحی میگذرد. مختصات دگرئی (x, y, z) را چنان میگیرم که صفحه $x = 0$ است و

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = [\mathbf{J}_s(y, z)] \delta(x). \quad (62)$$

$$\mathbf{J}_s(y, z) = \hat{z} J_s. \quad (63)$$

این جریان تحت انتقال در هر جهت ی موازی با صفحه تقارن دارد، و تحت وارونی z فرد است. با فرض این که میدانها ی الکتریکی و مغناطیسی هم مانسته ی این تقارنها را دارند،

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{z} E(x). \quad (64)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{x} B_x(x) + \hat{y} B_y(x). \quad (65)$$

مانسته ی فرد-بودن تحت وارونی z ، برای میدانها ی الکتریکی و مغناطیسی این است که تحت وارونی z ، میدان الکتریکی فرد و میدان مغناطیسی زوج است. از این که دیورژانس \mathbf{B} صفر است، از (65) نتیجه میشود

$$B_x = 0. \quad (66)$$

و (65) چنین میشود.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{y} B(x). \quad (67)$$

که B_y با \hat{x} نشان داده شده.

معادله ی میدان برای B میشود

$$0 = \frac{d^2 B}{dx^2} + k^2 B, \quad x \neq 0. \quad (68)$$

این معادله یک جواب دارد که به شکل موج ی بیرون-رونده است. این جواب را با \tilde{B} نشان میدهم:

$$\tilde{B}(x) = \tilde{C} \exp(-ikx), \quad x < 0. \quad (69)$$

$$\tilde{B}(x) = \tilde{D} \exp(ikx), \quad x > 0. \quad (70)$$

که \tilde{C} و \tilde{D} ثابت نند.

\tilde{E} (جواب متناظر برای میدان الکتریکی) هم چنین میشود.

$$\tilde{E}(x) = -c^2 (i\omega)^{-1} \tilde{B}'(x). \quad (71)$$

به این ترتیب،

$$\tilde{E}(x) = c\tilde{C} \exp(-ikx), \quad x < 0. \quad (72)$$

$$\tilde{E}(x) = -c\tilde{D} \exp(ikx), \quad x > 0. \quad (73)$$

از روابط (32) و (33)، به ترتیب، نتیجه میشود

$$0 = \tilde{D} + \tilde{C}. \quad (74)$$

$$\mu_0 J_s = \tilde{D} - \tilde{C}. \quad (75)$$

به این ترتیب،

$$\tilde{C} = -\frac{\mu_0 J_s}{2}. \quad (76)$$

$$\tilde{D} = \frac{\mu_0 J_s}{2}. \quad (77)$$

اینها با حالت حدی جواب متناظر با استوانه فرق دارند: در جواب متناظر با استوانه، درون استوانه موج منتشر نمیشود. اما در جوابی که برای صفحه به دست آمد هر دو سوی صفحه انتشار - موج هست: در $x < 0$ انتشار - موج به چپ، و در $x > 0$ انتشار - موج به راست. برای این که جواب متناظر با صفحه حالت حدی جواب متناظر با استوانه باشد، باید در آن سوی صفحه که متناظر با درون استوانه (در حالت حدی) است انتشار - موج نباشد. برای ساختن جوابی برای مسئله‌ی صفحه که چنین باشد، به جوابی که در بالا به دست آمد یک موج تخت میفزاییم که در جهت x منتشر

تابش از یک استوانه ی دایرئی با جریان محوری

میشود. جواب متناظر (برای، به ترتیب، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی) را با \check{E} و \check{B} نشان میدهم:

$$\check{B}(x) = \check{C} \exp(-i k x) + F \exp(i k x), \quad x < 0. \quad (78)$$

$$\check{B}(x) = (\check{D} + F) \exp(i k x), \quad x > 0. \quad (79)$$

$$\check{E}(x) = c \check{C} \exp(-i k x) - c F \exp(i k x), \quad x < 0. \quad (80)$$

$$\check{E}(x) = -c(\check{D} + F) \exp(i k x), \quad x > 0. \quad (81)$$

F ثابت است. چیزی که به جواب اضافه شده معادلات (2) و (3) در حالت بی-چشمه را بر میآورد. پس \check{E} و \check{B} معادله-ی دیفرانسیلیها ی لازم را بر میآورند. اما جواب متناظر با \check{E} و \check{B} همه ی تقارنهای چشمه را ندارد: جریان تحت وارونی ی x زوج است. مانسته ی این تقارن در جواب متناظر با \check{E} و \check{B} نیست. البته این تقارن حالت حدی ی یک تقارن مسئله ی استوانه هم نیست: این تقارن در حالت حدی به مسئله اضافه میشود.

با جواب جدید (که حالت کلی ی جواب قبلی برا ی صفحه است)، توان-بر-مساحت

بیرون-رونده چنین میشود.

$$\check{P}'' = \frac{\mu_0 c}{8} \left(1 - \frac{|F|^2}{|\check{C}|^2} \right) |J_s|^2, \quad x < 0. \quad (82)$$

$$\check{P}'' = \frac{\mu_0 c}{8} \left| 1 + \frac{F}{\check{D}} \right|^2 |J_s|^2, \quad x > 0. \quad (83)$$

این که در $x < 0$ انتشار-مُج نباشد، یعنی \check{P}'' در $x < 0$ صفر باشد، که همترز است با

$$|F| = |\check{C}|. \quad (84)$$

از (76) و (77) و (84) نتیجه میشود

$$F = \check{D} \exp(i \alpha). \quad (85)$$

که α ثابت ی حقیقی ست. به این ترتیب،

$$\check{P}'' = \left(\frac{\mu_0 c}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) |J_s|^2, \quad x > 0. \quad (86)$$

این هم ان 61 است، در حدی که (ka) به بینهایت بگراید، و البته با یک تناظر مناسب که بین α و (ka) برقرار شود. جوابهای اینجا برای صفحه، ضمن هم آن جوابها بی بند که در [1] برای صفحه به دست آمدند، با این تفاوت که اینجا جریان در راستای z است ولی در [1] جریان در راستای y است.

5.5 تشدید

در این حالت،

$$J_0(ka) = 0. \quad (87)$$

و نتیجه میشود

$$C = \frac{\pi k a N_0(ka)}{2i} (\mu_0 J_s). \quad (88)$$

$$D = 0. \quad (89)$$

$$P' = 0. \quad (90)$$

میدانها بیرون استوانه صفرند. پس توان تابشی هم صفر است.

6 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «تابش از یک استوانه ی دایرئی با جریان سمتی» (2022/10/20) X1-167

[2] Maxwell

[3] Bessel

[4] Hankel

[5] Neumann

[6] Poynting