

X1-167 (2022/10/20)

تابش از یک استوانه ی دایرئی با جریان سمتی

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

از یک استوانه ی دایرئی جریان ی سمتی، یکنواخت، و سینوسی-با-زمان میگذرد. میدانها ی مغناطیسی و الکتریکی ی حاصل، و نیز نوان تابشی محاسبه میشوند.

0 درآمد

مختصات استوانئی (ρ, ϕ, z) اند. تابعها ی سینوسی-با-زمان را با فازر نشان میدهم:

$$\mathfrak{X}(t) = \text{Re}[\mathfrak{X} \exp(-i\omega t)]. \quad (1)$$

که t زمان است، بستگی ی $\mathfrak{X}(t)$ به زمان سینوسی با بسامد-زاویئی ی ω است، و \mathfrak{X} یک عدد مختلط فازر متناظر با تابع است. بر حسب فازرها، معادلات برداری ی مکسول [1] (در خلئ) چنین میشوند.

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B}. \quad (2)$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} + c^{-2} i\omega \mathbf{E}. \quad (3)$$

تابش از یک استوانه ی دایره‌ای با جریان سمتی

E میدان الکتریکی، B میدان مغناطیسی، و J چگالی ی جریان است. ϵ_0 و μ_0 و c هم، به ترتیب، گذردهی ی الکتریکی و تراوایی ی مغناطیسی و سرعت نور (همه در خلئ) ند:

$$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}. \quad (4)$$

جز اینها معادله ی پیوستگی هم هست:

$$0 = -i\omega \rho + \nabla \cdot J. \quad (5)$$

که ρ چگالی ی بار است. د معادله ی اسکالر هم برا ی میدانها هست:

$$\epsilon_0^{-1} \rho = \nabla \cdot E. \quad (6)$$

$$0 = \nabla \cdot B. \quad (7)$$

اما وقت ی ω صفر نیست، معادلات (6) و (7) مستقل از معادلات قبلی نیستند: معادله ی (6) از معادله ی (3) و معادله ی (5) نتیجه میشود. معادله ی (7) هم از معادله ی (2) نتیجه میشود.

1 تقارنها

بردار مکان را با r نشان میدهم. گیرم میدان برداری ی \mathfrak{X} تحت انتقال در جهت \hat{z} تقارن دارد. در این صورت، مثلثها ی \mathfrak{X} در مختصات استوانی تابع فقط ρ و ϕ اند:

$$\mathfrak{X}(r) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_\rho(\rho, \phi) + \hat{\phi} \mathfrak{X}_\phi(\rho, \phi) + \hat{z} \mathfrak{X}_z(\rho, \phi). \quad (8)$$

گیرم میدان برداری ی \mathfrak{X} تحت دوران حل \hat{z} تقارن دارد. در این صورت، مثلثها ی \mathfrak{X} در مختصات استوانی تابع فقط ρ و z اند:

$$\mathfrak{X}(r) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_\rho(\rho, z) + \hat{\phi} \mathfrak{X}_\phi(\rho, z) + \hat{z} \mathfrak{X}_z(\rho, z). \quad (9)$$

پس رشن است که اگر میدان برداری ی \mathfrak{X} تحت هر-د-عمل (انتقال در جهت \hat{z} و دوران حل \hat{z}) تقارن داشته باشد، مثلثها ی \mathfrak{X} در مختصات استوانی تابع فقط ρ اند:

$$\mathfrak{X}(r) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_\rho(\rho) + \hat{\phi} \mathfrak{X}_\phi(\rho) + \hat{z} \mathfrak{X}_z(\rho). \quad (10)$$

گیرم میدان برداری \mathfrak{X}_e تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی \hat{z} زوج است. در این صورت،

$$\mathfrak{X}_e(\mathbf{r}) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_{e\rho}(\rho) + \hat{\phi} \mathfrak{X}_{e\phi}(\rho). \quad (11)$$

گیرم میدان برداری \mathfrak{X}_o تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی \hat{z} فرد است. در این صورت،

$$\mathfrak{X}_o(\mathbf{r}) = \hat{z} \mathfrak{X}_{oz}(\rho). \quad (12)$$

گیرم میدان برداری \mathfrak{X}_e تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی $\hat{\phi}$ زوج است. در این صورت،

$$\mathfrak{X}_e(\mathbf{r}) = \hat{\rho} \mathfrak{X}_{e\rho}(\rho) + \hat{z} \mathfrak{X}_{ez}(\rho). \quad (13)$$

گیرم میدان برداری \mathfrak{X}_o تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی $\hat{\phi}$ فرد است. در این صورت،

$$\mathfrak{X}_o(\mathbf{r}) = \hat{\phi} \mathfrak{X}_{o\phi}(\rho). \quad (14)$$

2 جریان سمتی و میدانها

از یک استوانه ی دایرئی به شعاع a جریان ی سمتی و یکنواخت میگذرد. محور \hat{z} را محور استوانه میگیرم. این جریان (سطحی) تحت انتقال در جهت \hat{z} و دَوَران حُل \hat{z} تقارن دارد و تحت وارونی $\hat{\phi}$ فرد است. پس به شکل (14) است. چگالی ی جریان - سطحی را با \mathbf{J}_s نشان میدهم:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = [\mathbf{J}_s(\phi, z)] \delta(\rho - a). \quad (15)$$

$$\mathbf{J}_s(\phi, z) = \hat{\phi} J_s. \quad (16)$$

تابش از یک استوانه ی دایره‌ای با جریان سمتی

که J_s مستقل از مکان است.

میدانها ی الکتریکی و مغناطیسی ی حاصل هم ان تقارنهای انتقالی و دورانی را دارند. ولی رفتار شان تحت واورنی ی ϕ یکسان نیست. میدان الکتریکی مثل \hat{x} جریانی است: تحت واورنی ی ϕ فرد است. اما میدان مغناطیسی تحت واورنی ی ϕ زوج است. به این ترتیب میدان الکتریکی به شکل (14) و میدان مغناطیسی به شکل (13) است:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\phi} E(\rho). \quad (17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{\rho} B_\rho(\rho) + \hat{z} B_z(\rho). \quad (18)$$

البته دیورژانس B صفر است: معادله ی (7). شکل (18) برای B را در (7) میگذارم. نتیجه میشود

$$B_\rho = 0. \quad (19)$$

و (18) چنین میشود.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{z} B(\rho). \quad (20)$$

که B_z با \hat{x} نشان داده شده.

3 جواب معادلات

معادلات مکسول [1] (نسبت به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی) از مرتبه ی یک ند. با حذف هر یک از این میدانها یک معادله به دست میآید که شامل فقط میدان دیگر، و (نسبت به میدان باقی-مانده) از مرتبه ی دو است:

$$\epsilon_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mu_0 i \omega \mathbf{J} = (\nabla \cdot \nabla + k^2) \mathbf{E}. \quad (21)$$

$$-\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} = (\nabla \cdot \nabla + k^2) \mathbf{B}. \quad (22)$$

که k عدد-مُج است:

$$k = c^{-1} \omega. \quad (23)$$

از جمله، معادلات بی-چشمه چنین میشوند.

$$0 = (\nabla \cdot \nabla + k^2) E. \quad (24)$$

$$0 = (\nabla \cdot \nabla + k^2) B. \quad (25)$$

برای جریان Y که به شکل (15) و (16) است، میدان مغناطیسی به شکل (20) است. پس (25) چنین میشود.

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dB}{d\rho} \right) + k^2 B, \quad \rho \neq a. \quad (26)$$

این معادله بیسل [2] از مرتبه Y صفر، با متغیر $(k\rho)$ ، است. یک شرط مرزی این است که جواب در $\rho = 0$ تکین نیست. نتیجه میشود

$$B(\rho) = C J_0(k\rho), \quad \rho < a. \quad (27)$$

که C یک ثابت، و J_m تابع بیسل [2] از مرتبه m است. یک شرط-مرزی دیگر هم این است که جواب در $\rho \rightarrow \infty$ مثل یک مُج بیرون-رونده است. از این نتیجه میشود

$$B(\rho) = D H_0^{(1)}(k\rho), \quad \rho > a. \quad (28)$$

که D یک ثابت، و $H_m^{(1)}$ تابع هانکِل [3] از نُع اول و از مرتبه m است.

از شکل بی-چشمه Y معادله Y (3)، همراه با شکلها Y (17) و (20) برای میدانها الکتریکی و مغناطیسی، نتیجه میشود

$$E(\rho) = c^2 (i\omega)^{-1} B'(\rho), \quad \rho \neq a. \quad (29)$$

که \mathcal{X}' مشتق \mathcal{X} است. به این ترتیب،

$$E(\rho) = -i c C J_0'(k\rho), \quad \rho < a. \quad (30)$$

$$E(\rho) = -i c D H_0^{(1)'}(k\rho), \quad \rho > a. \quad (31)$$

تابش از یک استوانه ی دایره ای با جریان سمتی

بر پوسته ی حامل - جریان، این شرطها برقرار است.

$$0 = \hat{n} \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-). \quad (32)$$

$$\mu_0 \mathbf{J}_s = \hat{n} \times (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-). \quad (33)$$

که \hat{n} بردار یکه ی عمود بر سطح است و

$$\mathfrak{X}_{\pm}(\mathbf{r}) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathfrak{X}(\mathbf{r} \pm s \hat{n}). \quad (34)$$

از روابط (32) و (33)، به ترتیب، نتیجه میشود

$$0 = D H_0^{(1)'}(ka) - C J_0'(ka). \quad (35)$$

$$\mu_0 J_s = -[D H_0^{(1)}(ka) - C J_0(ka)]. \quad (36)$$

به این ترتیب،

$$C = \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{i W(ka)} (\mu_0 J_s). \quad (37)$$

$$D = \frac{J_0'(ka)}{i W(ka)} (\mu_0 J_s). \quad (38)$$

که،

$$W = J_0 N_0' - J_0' N_0. \quad (39)$$

و N_m تابع بُنمان [4] از مرتبه ی m است:

$$H_m^{(1)} = J_m + i N_m. \quad (40)$$

از تعریف J_0 و N_0 نتیجه میشود

$$W(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi \mathbf{r}}. \quad (41)$$

پس،

$$C = \frac{\pi k a H_0^{(1)'}(k a)}{2i} (\mu_0 J_s). \quad (42)$$

$$D = \frac{\pi k a J_0'(k a)}{2i} (\mu_0 J_s). \quad (43)$$

4 توان تابشی

شدت تابش (چگالی ی سطحی ی توان تابشی) بردار پُینتینگ [5] است، که آن را با S نشان میدهم:

$$S = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{B}}). \quad (44)$$

$\hat{\rho}$ مزدوج - مختلط $\hat{\rho}$ است. درون استوانه بردار پُینتینگ [5] صفر است. بیرون استوانه،

$$\begin{aligned} S &= \frac{-i c |D|^2 \hat{\rho}}{4\mu_0} \{ [H_0^{(1)'}(k\rho)] \overline{[H_0^{(1)}(k\rho)]} - \overline{[H_0^{(1)'}(k\rho)]} [H_0^{(1)}(k\rho)] \}, \\ &= \frac{c |D|^2 \hat{\rho}}{2\mu_0} W(k\rho). \end{aligned} \quad (45)$$

پس،

$$S = \frac{c |D|^2}{\pi \mu_0 k \rho} \hat{\rho}. \quad (46)$$

که میشود

$$S = \frac{\pi \mu_0 c |k a J_0'(k a)|^2}{4 k \rho} |J_s|^2 \hat{\rho}. \quad (47)$$

توان ی که از یک سطح میگذرد انتگرال بردار پُینتینگ [5] بر این سطح است. توان-بر-طول ی که از یک استوانه میگذرد انتگرال بردار پُینتینگ [5] بر محیط این استوانه است. برای یک استوانه ی دایرئی که محور z است و شعاع قاعده اش ρ است، این توان-بر-طول را با P' نشان میدهم. دیده میشود

$$P' = \frac{\pi^2 \mu_0 c |k a J_0'(k a)|^2}{2 k} |J_s|^2. \quad (48)$$

5 حالت‌های خاص

چند حالت خاص را بررسی میکنم:

5.1 بسامد کم

در این حالت،

$$k a \ll 1. \quad (49)$$

از شکل‌های مجانبی ی توابع بسل [2] و هانکِل [3] برای متغیرهای کوچک نتیجه میشود

$$C = (1 + \dots) (\mu_0 J_s). \quad (50)$$

$$D = \frac{i\pi}{4} (k a)^2 (1 + \dots) (\mu_0 J_s). \quad (51)$$

$$P' = \frac{\pi^2 \mu_0 c}{8 k} (k a)^4 (1 + \dots) |J_s|^2. \quad (52)$$

از جمله؛ در بسامد صفر میدان الکتریکی صفر است، میدان مغناطیسی بیرون استوانه صفر است و درون استوانه هم ان است که در حالت ایستا به دست می‌آید (چنان که انتظار میرود)، و توان تابشی هم صفر است.

5.2 سیم

سیم حالت حدی ی استوانه است، وقت ی شعاع استوانه به صفر می‌گراید. شرط (49) با کاهش شعاع استوانه هم برآورده میشود. شعاع استوانه را به صفر می‌گیرانم. در این حالت C مهم نیست، چون درون استوانه وجود ندارد. D هم (با جریان - سطحی ی محدود) صفر میشود، چون د-قطبی - ی-مغناطیسی - بر-طول صفر میشود. در نتیجه میدانها بیرون استوانه صفر میشوند، و توان تابشی هم صفر میشود. اما میشود جریان - سطحی را چنان مقیاس کرد که د-قطبی - ی-مغناطیسی - بر-طول به مقدار ی ناصفر بگراید. د-قطبی - ی-مغناطیسی - بر-طول را با m' نشان میدهم:

$$m' = \pi a^2 J_s. \quad (53)$$

m' را ثابت میگیریم و a را به صفر میگیرانیم. نتیجه میشود

$$D = \frac{i}{4} k^2 (1 + \dots) (\mu_0 m'). \quad (54)$$

$$P' = \frac{\mu_0 c}{8} k^3 (1 + \dots) |m'|^2. \quad (55)$$

5.3 بسامد زیاد

در این حالت،

$$ka \gg 1. \quad (56)$$

از شکلهای مجانبی توابع بسل [2] و هانکسل [3] برای متغیرهای بزرگ نتیجه میشود

$$C = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \exp \left[i \left(ka - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} (ka)^{1/2} (1 + \dots) (\mu_0 J_s). \quad (57)$$

$$D = \left[i \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \sin \left(ka - \frac{\pi}{4} \right) \right] (ka)^{1/2} (1 + \dots) (\mu_0 J_s). \quad (58)$$

$$P' = \left[\frac{\pi \mu_0 c}{k} \sin^2 \left(ka - \frac{\pi}{4} \right) \right] (ka) (1 + \dots) |J_s|^2. \quad (59)$$

5.4 صفحه

صفحه حالت حدی استوانه است، وقتی شعاع استوانه به بینهایت میگراید. شرط (56) با افزایش شعاع استوانه هم برآورده میشود. شعاع استوانه را به بینهایت میگیرانیم. در این حالت C و D به حد معین نمیگرایند: با دامنه P' هم با دامنه C و D یک میانگین ناصفر دارد، که آن میانگین به بینهایت میگراید. البته این که توان-بر-طول بینهایت شود عجیب نیست: مقطع استوانه بینهایت شده. اما توان-بر-مساحت (توان-بر-طول تقسیم بر محیط استوانه) بینهایت نمیشود. توان-بر-مساحت را با P'' نشان میدهم:

$$P'' = \frac{P'}{2\pi a}. \quad (60)$$

از (59) دیده میشود

$$P'' = \left[\frac{\mu_0 c}{2} \sin^2 \left(ka - \frac{\pi}{4} \right) \right] (1 + \dots) |J_s|^2. \quad (61)$$

تابش از یک استوانه ی دایره‌ای با جریان سمتی

این را میشد مستقیم‌ن هم حساب کرد: از یک صفحه یک جریان سطحی میگذرد. مختصات دگرته ی (x, y, z) را چنان میگیرم که صفحه $x = 0$ است و

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = [\mathbf{J}_s(y, z)] \delta(x). \quad (62)$$

$$\mathbf{J}_s(y, z) = \hat{\mathbf{y}} J_s. \quad (63)$$

این جریان تحت انتقال در هر جهت ی موازی با صفحه تقارن دارد، و تحت وارونی ی y فرد است. با فرض این که میدانها ی الکتریکی و مغناطیسی هم مانسته ی این تقارنها را دارند،

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}} E(x). \quad (64)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{x}} B_x(x) + \hat{\mathbf{z}} B_z(x). \quad (65)$$

مانسته ی فرد-بودن تحت وارونی ی y ، برای میدانها ی الکتریکی و مغناطیسی این است که تحت وارونی ی y ، میدان الکتریکی فرد و میدان مغناطیسی زوج است. از این که دیورژانس \mathbf{B} صفر است، از (65) نتیجه میشود

$$B_x = 0. \quad (66)$$

و (65) چنین میشود.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} B(x). \quad (67)$$

که B_z با B نشان داده شده.

معادله ی میدان برای B میشود

$$0 = \frac{d^2 B}{dx^2} + k^2 B, \quad x \neq 0. \quad (68)$$

این معادله یک جواب دارد که به شکل موج ی بیرون-رونده است. این جواب را با \tilde{B} نشان میدهم:

$$\tilde{B}(x) = \tilde{C} \exp(-i k x), \quad x < 0. \quad (69)$$

$$\tilde{B}(x) = \tilde{D} \exp(i k x), \quad x > 0. \quad (70)$$

که \tilde{C} و \tilde{D} ثابت نند.

\tilde{E} (جواب متناظر برای میدان الکتریکی) هم چنین میشود.

$$\tilde{E}(x) = c^2 (i\omega)^{-1} \tilde{B}'(x). \quad (71)$$

به این ترتیب،

$$\tilde{E}(x) = -c \tilde{C} \exp(-ikx), \quad x < 0. \quad (72)$$

$$\tilde{E}(x) = c \tilde{D} \exp(ikx), \quad x > 0. \quad (73)$$

از روابط (32) و (33)، به ترتیب، نتیجه میشود

$$0 = \tilde{D} + \tilde{C}. \quad (74)$$

$$\mu_0 J_s = -(\tilde{D} - \tilde{C}). \quad (75)$$

به این ترتیب،

$$\tilde{C} = \frac{\mu_0 J_s}{2}. \quad (76)$$

$$\tilde{D} = -\frac{\mu_0 J_s}{2}. \quad (77)$$

اینها با حالت حدی جواب متناظر با استوانه فرق دارند: در جواب متناظر با استوانه، درون استوانه موج منتشر نمیشود. اما در جوابی که برای صفحه به دست آمد هر دو سوی صفحه انتشار - موج هست: در $x < 0$ انتشار - موج به چپ، و در $x > 0$ انتشار - موج به راست. برای این که جواب متناظر با صفحه حالت حدی جواب متناظر با استوانه باشد، باید در آن سوی صفحه که متناظر با درون استوانه (در حالت حدی) است انتشار - موج نباشد. برای ساختن جوابی برای مسئله‌ی صفحه که چنین باشد، به جوابی که در بالا به دست آمد یک موج تخت میفزاییم که در جهت x منتشر

تابش از یک استوانه ی دایره ای با جریان سمتی

میشود. جواب متناظر (برای، به ترتیب، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی) را با \check{E} و \check{B} نشان میدهم:

$$\check{B}(x) = \check{C} \exp(-i k x) + F \exp(i k x), \quad x < 0. \quad (78)$$

$$\check{B}(x) = (\check{D} + F) \exp(i k x), \quad x > 0. \quad (79)$$

$$\check{E}(x) = -c \check{C} \exp(-i k x) + c F \exp(i k x), \quad x < 0. \quad (80)$$

$$\check{E}(x) = c(\check{D} + F) \exp(i k x), \quad x > 0. \quad (81)$$

F ثابت است. چیزی که به جواب اضافه شده معادلات (2) و (3) در حالت بی-چشمه را بر میآورد. پس \check{E} و \check{B} معادله-ی دیفرانسیلیها ی لازم را بر میآورند. اما جواب متناظر با \check{E} و \check{B} همه ی تقارنهای چشمه را ندارد: جریان تحت وارونی ی x زوج است. مانسته ی این تقارن در جواب متناظر با \check{E} و \check{B} نیست. البته این تقارن حالت حدی ی یک تقارن مسئله ی استوانه هم نیست: این تقارن در حالت حدی به مسئله اضافه میشود.

با جواب جدید (که حالت کلی ی جواب قبلی برا ی صفحه است)، توان-بر-مساحت

بیرون-رونده چنین میشود.

$$\check{P}'' = \frac{\mu_0 c}{8} \left(1 - \frac{|F|^2}{|\check{C}|^2} \right) |J_s|^2, \quad x < 0. \quad (82)$$

$$\check{P}'' = \frac{\mu_0 c}{8} \left| 1 + \frac{F}{\check{D}} \right|^2 |J_s|^2, \quad x > 0. \quad (83)$$

این که در $x < 0$ انتشار-مُج نباشد، یعنی \check{P}'' در $x < 0$ صفر باشد، که همترز است با

$$|F| = |\check{C}|. \quad (84)$$

از (76) و (77) و (84) نتیجه میشود

$$F = \check{D} \exp(i \alpha). \quad (85)$$

که α ثابت ی حقیقی ست. به این ترتیب،

$$\check{P}'' = \left(\frac{\mu_0 c}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) |J_s|^2, \quad x > 0. \quad (86)$$

این هم ان 61 است، در حدی که (ka) به بینهایت بگراید، و البته با یک تناظر مناسب که بین α و (ka) برقرار شود.

5.5 تشدید

در این حالت،

$$J'_0(ka) = 0. \quad (87)$$

و نتیجه میشود

$$C = \frac{\pi k a N'_0(ka)}{2} (\mu_0 J_s). \quad (88)$$

$$D = 0. \quad (89)$$

$$P' = 0. \quad (90)$$

میدانها بیرون استوانه صفرند. پس توان تابشی هم صفر است.

6 پانوشتها

- [1] Maxwell
- [2] Bessel
- [3] Hankel
- [4] Neumann
- [5] Poynting