X1-162 (2022/02/19)

سینتیک ِ گازها یِ کامل ِ نسبیتی II

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

خروج ِ یک گاز ِ کامل ِ تک-اتمی یِ نسبیتی از یک رُزنه بررسی میشود. رابطه یِ تعداد ِ ذرات، انرژی-بر-ذره، و دما، با یک-دیگر و با زمان مطالعه میشوند.

0 درامد

این در ادامه یِ [1] و [2] است. نمادها یِ [2] را به کار میبَرم. تکانه را با $\boldsymbol{p}$، و $|\mathfrak{z}|$ را با $\mathfrak{z}$ نشان میدهم. متناظر با هر $\mathfrak{X}$ که تابع ی از تکانه است، یک $\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}$ هست که

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}). \tag{1}$$

پارامتر ِ α (تندی) را تابع ی از تکانه تعریف میکنم، چنان که

$$p = c\, m\, \sinh[\alpha_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p})]. \tag{2}$$

که m جرم ِ ذره است. گیرم $\mathfrak{X}$ تابع ی از فقط اندازه ی ِ تکانه است. این یعنی $[\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ تابع ِ فقط ξ است. در این صورت $\mathfrak{X}_\alpha$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\alpha(\alpha). \tag{3}$$

چگالی ی ِ متناظر با $\mathfrak{z}$ را با $\rho_{\mathfrak{z}}$ نشان میدهم. $\rho_{\boldsymbol{p}}$ چگالی ی ِ متناظر با تکانه، و ρ_p چگالی ی ِ متناظر با اندازه ی ِ تکانه است. $[\rho_p(\xi)]$ با انتگرال-گیری از $[\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ بر مجموعه ی ِ $(p = \xi)$ به دست میئاید. و اگر $[\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ تابع ِ فقط ξ باشد،

$$\rho_p(\xi) = 4\,\pi\,\xi^2\,\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi}). \tag{4}$$

چگالی ی ِ متناظر با تندی هم ρ_α است:

$$[\rho_\alpha(\lambda)]\,\mathrm{d}\,\lambda = [\rho_p(\xi)]\,\mathrm{d}\,\xi. \tag{5}$$

که،

$$\xi = c\,m\,\sinh\lambda. \tag{6}$$

به این ترتیب،

$$\rho_\alpha(\lambda) = c\,m\,(\cosh\lambda)\,\rho_p(c\,m\,\sinh\lambda) \tag{7}$$

و اگر $[\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]$ تابع ِ فقط ξ باشد،

$$\rho_\alpha(\lambda) = 4\,\pi\,(c\,m)^3\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\,\rho_{\boldsymbol{p}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}\,c\,m\,\sinh\lambda). \tag{8}$$

که $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ یک بردار ِ یکه است.

مقدار ِ چشمداشتی ی ِ $\mathfrak{X}$ را با $\langle\mathfrak{X}\rangle$ نشان میدهم. وقت ی $\mathfrak{X}$ تابع ی از تکانه است،

$$\langle\mathfrak{X}\rangle = \int \mathrm{d}^3\,\xi\,[\rho_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi})]\,\mathfrak{X}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\xi}). \tag{9}$$

و اگر $\mathfrak{X}$ تابع ِ فقط اندازه ی ِ تکانه باشد،

$$\langle\mathfrak{X}\rangle = \int \mathrm{d}\,\lambda\,[\rho_\alpha(\lambda)]\,\mathfrak{X}_\alpha(\lambda). \tag{10}$$

1 تعدادِ ذرات، انرژی، و دما

یک گازِ کاملِ کلاسیک (ناکوانتمی) را بررسی میکنم که در ظرف ی به حجمِ V است. ظرف رُزنه ای کوچک به مساحتِ A دارد، که گاز از آن بیرون میرود، اما رُزنه چنان کوچک است که میشود همیشه گازِ درونِ ظرف را مثلِ گاز ی در تعادل در دما یِ T گرفت. تعدادِ ذراتِ گازِ درون- ِظرف را با N، و (میانگینِ) انرژی-بر-ذره یِ گازِ درونِ ظرف را با u نشان میدهم. است. البته N و T و u تابعِ زمان‌َند. تحولِ N و u و T در (از جمله) [1] بررسی شده. معادله یِ تحولِ N چنین است.

$$\frac{\mathrm{d}\,N}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{A}{V}\,\frac{\langle v\rangle}{4}\,N. \tag{11}$$

که t زمان است و $\boldsymbol{v}$ سرعت است. معادله یِ تحولِ u هم از اینجا به دست میئاید.

$$\frac{\mathrm{d}\,(N\,u)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,N}{\mathrm{d}\,t}\,u_{\mathrm{o}}. \tag{12}$$

که $\mathfrak{X}_{\mathrm{o}}$ هم ان کمیتِ $\mathfrak{X}$ برا یِ گاز ی ست که دارد بیرون میرود. از (12) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{N}\,\frac{\mathrm{d}\,N}{\mathrm{d}\,t}\,(u_{\mathrm{o}} - u). \tag{13}$$

و، با استفاده از (11)،

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{A}{V}\,\frac{\langle v\rangle}{4}\,(u_{\mathrm{o}} - u). \tag{14}$$

u و u_{o} و $\langle v\rangle$ تابعِ دما یَند. پس (14) یک معادله برا یِ تحولِ دماست:

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,T}\,\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{A}{V}\,\frac{\langle v\rangle}{4}\,(u_{\mathrm{o}} - u). \tag{15}$$

البته میشود این را بر حسبِ x نوشت:

$$x = c^2\,m\,\beta. \tag{16}$$

که،

$$\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}\,T}. \tag{17}$$

و معادله یِ تحول برا یِ x چنین میشود.

$$\dot{x} = -\frac{A}{V}\,\frac{\langle v\rangle}{4}\,\frac{u_{\text{o}} - u}{u'}. \tag{18}$$

که $\dot{\mathfrak{X}}$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبت به زمان، و $\mathfrak{X}'$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ نسبته به x است.

معادله یِ (18) جداشدنی ست. τ و کمیتها یِ بی-بُعدِ σ و γ و w را چنین تعریف میکنم.

$$\tau = \frac{4\,V}{c\,A}. \tag{19}$$

$$\sigma = \frac{t}{\tau}. \tag{20}$$

$$\gamma = \frac{u}{c^2\,m}. \tag{21}$$

$$w = \frac{\langle v\rangle}{c}. \tag{22}$$

و معادله یِ (18) را چنین مینویسم.

$$\mathrm{d}\,\sigma = -\frac{\gamma'\,\mathrm{d}\,x}{(\gamma_{\text{o}} - \gamma)\,w}. \tag{23}$$

جوابِ این معادله میشود

$$\sigma = F(x) - F(x_0). \tag{24}$$

که $\mathfrak{X}_0$ مقدارِ $\mathfrak{X}$ در ابتدا، $(t=0)$، است؛ و

$$F' = -\frac{\gamma'}{(\gamma_{\text{o}} - \gamma)\,w}. \tag{25}$$

معادله یِ (24) زمان (بی-بُعد-شده) را بر حسبِ x میدهد. با وارون-کردنِ آن، x بر حسبِ زمان به دست میئاید:

$$x = F^{-1}[F(x_0) + \sigma]. \tag{26}$$

معادله یِ (11) هم چنین میشود.

$$\frac{\mathrm{d}\,N}{N} = -w\,\mathrm{d}\,\sigma. \tag{27}$$

یا، با استفاده از (23)،

$$\frac{\mathrm{d}\,N}{N}=\frac{\gamma'\,\mathrm{d}\,x}{\gamma_\text{o}-\gamma}. \tag{28}$$

که نتیجه میدهد

$$\ln\frac{N}{N_0}=G(x)-G(x_0). \tag{29}$$

که،

$$G'=\frac{\gamma'}{\gamma_\text{o}-\gamma}. \tag{30}$$

روابطِ (24) و (29)، به ترتیب، σ و N را بر حسبِ x میدهند. γ و w هم تابعِ x اند. به این ترتیب، σ و N و γ و w بر حسبِ x معلوم‌َند، و (احتمالَن با حذفِ x) رابطه یِ هر دُ-تا از متغیرها یِ σ و N و x و γ و w با هم به دست میئاید.

2 انرژی-بر-ذره، سرعت

انرژی یِ ذره را با h نشان میدهم. گاز تک-اتمی (بی-ساختار) است. پس،

$$h=c^2\,m\,\cosh\alpha. \tag{31}$$

برا یِ گازِ درونِ ظرف،

$$\rho_\alpha(\lambda)=\mathcal{N}_\alpha\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\;\exp(-x\,\cosh\lambda). \tag{32}$$

که $\mathcal{N}_\alpha$ یک ثابتِ بهنجارش است. و γ چنین میشود

$$\gamma=-\frac{Z'_\alpha}{Z_\alpha}. \tag{33}$$

که،

$$Z_\alpha=\int_0^\infty \mathrm{d}\,\lambda\,(\cosh\lambda)\,(\sinh^2\lambda)\;\exp(-x\,\cosh\lambda). \tag{34}$$

آهنگِ خروجِ گاز با v متناسب است، که

$$v = c\ \tanh\alpha. \tag{35}$$

پس برا یِ گاز ی که دارد بیرون میرود،

$$\rho_{\alpha\,\mathrm{o}}(\lambda) \propto (c\ \tanh\lambda)\,\rho_\alpha(\lambda). \tag{36}$$

که یعنی،

$$\rho_{\alpha\,\mathrm{o}}(\lambda) = \mathcal{N}_{\alpha\,\mathrm{o}}\,(\sinh^3\lambda)\ \exp(-x\ \cosh\lambda). \tag{37}$$

که $\mathcal{N}_{\alpha\,\mathrm{o}}$ یک ثابتِ بهنجارش است. و γ_o چنین میشود

$$\gamma_\mathrm{o} = -\frac{Z'_{\alpha\,\mathrm{o}}}{Z_{\alpha\,\mathrm{o}}}. \tag{38}$$

که،

$$Z_{\alpha\,\mathrm{o}} = \int_0^\infty \mathrm{d}\,\lambda\,(\sinh^3\lambda)\ \exp(-x\ \cosh\lambda). \tag{39}$$

سرانجام، از (32) و (35)، همراه با تعریفها یِ (34) و (39)، نتیجه میشود

$$w = \frac{Z_{\alpha\,\mathrm{o}}}{Z_\alpha}. \tag{40}$$

چنان که در [2] آمده، Z_α و $Z_{\alpha\,\mathrm{o}}$ را میشود بر حسبِ S_n و مشتقَ ش نوشت، که S_n چنین تعریف میشود.

$$S_n(x) = \int_0^\infty\ \mathrm{d}\,\lambda\,(\sinh^n\lambda)\ \exp(-x\ \cosh\lambda). \tag{41}$$

و، مثلَن با استفاده از [3]، دیده میشود

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \left(\frac{2}{x}\right)^{n/2}\ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\ \mathsf{K}_{n/2}(x). \tag{42}$$

که K_ν تابعِ بِسِل [4] ِ دگرگون ِ نُع ِ دوم از مرتبه یِ ν است. به این ترتیب،

$$Z_\alpha = x^{-2}\,\mathsf{K}_1(x) - x^{-1}\,\mathsf{K}_1'(x). \tag{43}$$

$$\gamma = \frac{(x^2+3)\,\mathsf{K}_1(x) - 3\,x\,\mathsf{K}_1'(x)}{x\,\mathsf{K}_1(x) - x^2\,K_1'(x)}. \tag{44}$$

$$Z_{\alpha\,\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\,x^{-3/2}\,\mathsf{K}_{3/2}(x). \tag{45}$$

که یعنی،

$$Z_{\alpha\,\mathrm{o}} = 2\,(x^{-2} + x^{-3})\,\exp(-x). \tag{46}$$

همچنین،

$$\gamma_{\mathrm{o}} = \frac{x^2 + 3\,x + 3}{x^2 + x}. \tag{47}$$

$$w = \frac{2\,(x+1)\,\exp(-x)}{x\,\mathsf{K}_1(x) - x^2\,\mathsf{K}_1'(x)}. \tag{48}$$

حد ِ $(x \gg 1)$ حد ِ دما-یِ-کم (نانسبیتی)، و حد ِ $(x \ll 1)$ حد ِ دما-یِ-زیاد (فرانسبیتی) است. با استفاده از رفتار ِ $[\mathsf{K}_\nu(x)]$ برا یِ مقدارها یِ بزرگ و کوچک ِ x، چنین نتیجه میشود.

حد ِ نانسبیتی:

$$\gamma = 1 + \frac{3}{2\,x} + \cdots, \qquad x \gg 1. \tag{49}$$

$$\gamma_{\mathrm{o}} = 1 + \frac{2}{x} + \cdots, \qquad x \gg 1. \tag{50}$$

$$w = \sqrt{\frac{8}{\pi\,x}} + \sqrt{\frac{49}{8\,\pi\,x^3}} + \cdots, \quad x \gg 1. \tag{51}$$

حد ِ فرانسبیتی:

$$\gamma = \frac{3}{x} + \frac{x}{2} + \cdots, \qquad x \ll 1. \tag{52}$$

$$\gamma_{\mathrm{o}} = \frac{3}{x} + x + \cdots, \qquad x \ll 1. \tag{53}$$

$$w = 1 - \frac{x^2}{4} + \cdots, \qquad x \ll 1. \tag{54}$$

به این ترتیب،

حدِ نانسبیتی:

$$F' = \sqrt{\frac{9\,\pi}{8\,x}} + \cdots\,, \qquad x \gg 1. \tag{55}$$

$$F = \sqrt{\frac{9\,\pi\,x}{2}} + \cdots\,, \qquad x \gg 1. \tag{56}$$

$$G' = -\frac{3}{x} + \cdots\,, \qquad x \gg 1. \tag{57}$$

$$G = -3\,\ln x + \cdots\,, \qquad x \gg 1. \tag{58}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{9\,\pi\,x}{2}} - \sqrt{\frac{9\,\pi\,x_0}{2}} + \cdots\,, \qquad x \gg 1. \tag{59}$$

$$\frac{x}{x_0} = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{9\,\pi\,x_0}}\,\sigma\right)^2 + \cdots\,, \qquad x \gg 1. \tag{60}$$

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-3} + \cdots\,, \qquad x \gg 1. \tag{61}$$

$$\frac{N}{N_0} = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{9\,\pi\,x_0}}\,\sigma\right)^{-6} + \cdots\,, \qquad x \gg 1. \tag{62}$$

حدِ فرانسبیتی:

$$F' = \frac{6}{x^3} + \cdots\,, \qquad x \ll 1. \tag{63}$$

$$F = -\frac{3}{x^2} + \cdots\,, \qquad x \ll 1. \tag{64}$$

$$G' = -\frac{6}{x^3} + \cdots\,, \qquad x \ll 1. \tag{65}$$

$$G = \frac{3}{x^2} + \cdots\,, \qquad x \ll 1. \tag{66}$$

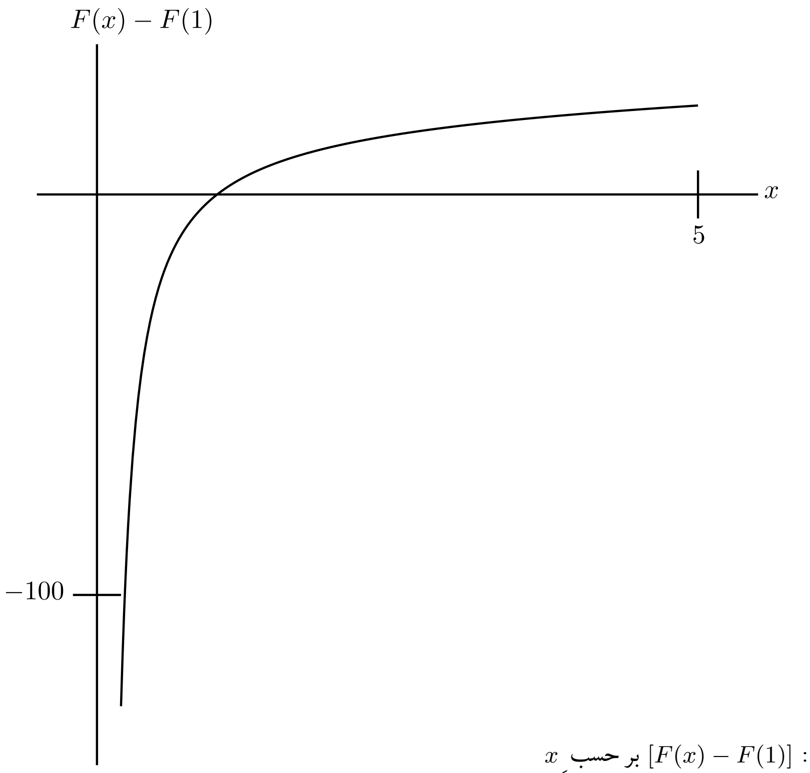
$$\sigma = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x_0^2} + \cdots\,, \qquad x \ll 1. \tag{67}$$

$$\frac{x}{x_0} = \left(1 - \frac{x_0^2\,\sigma}{3}\right)^{-1/2} + \cdots\,, \qquad x \ll 1. \tag{68}$$

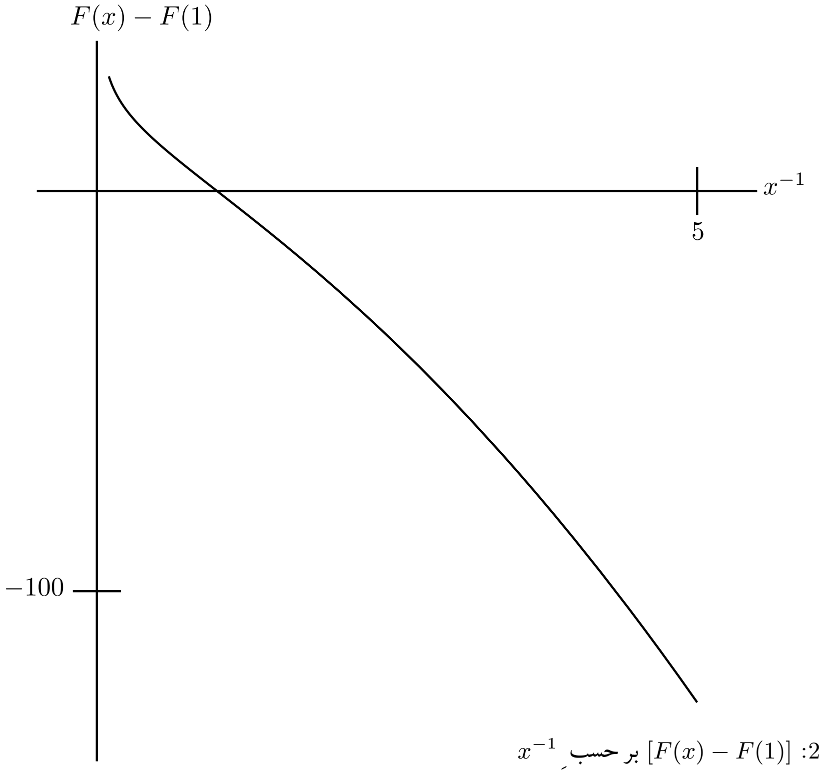
$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(\frac{3}{x^2} - \frac{3}{x_0^2}\right) + \cdots\,, \qquad x \ll 1. \tag{69}$$

$$\frac{N}{N_0} = \exp(-\sigma) + \cdots\,, \qquad x \ll 1. \tag{70}$$

شکلها یِ 1 و 2 نمودارِ F بر حسبِ ، به ترتیب، x و x^{-1} است.

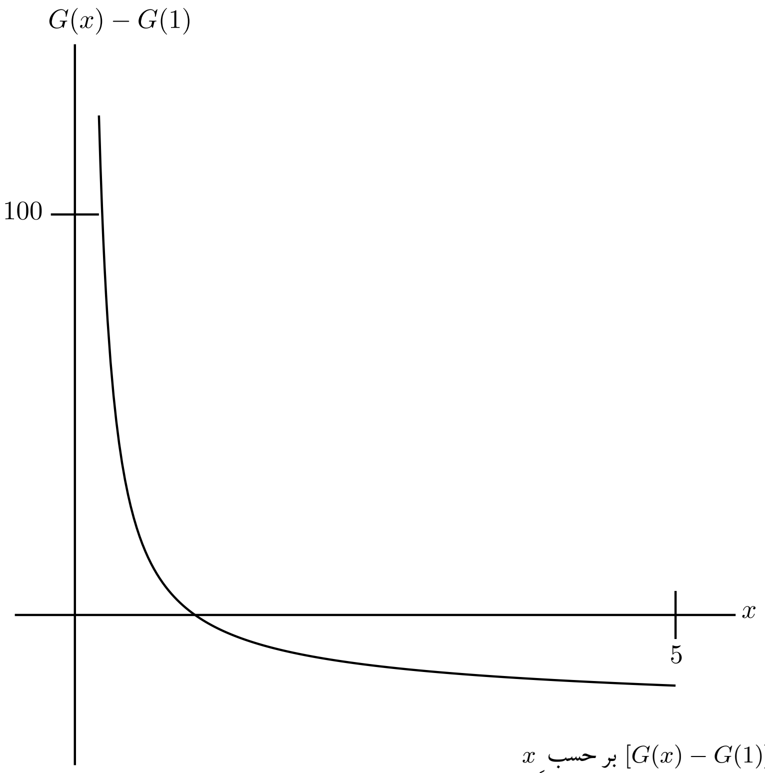


شکلِ 1: $[F(x) - F(1)]$ بر حسبِ x

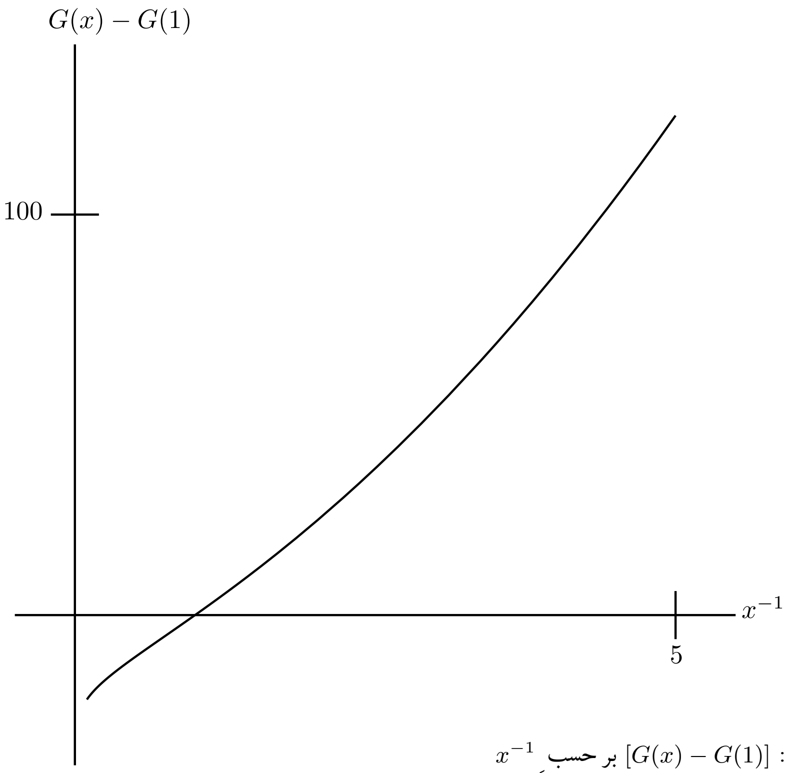


شکلِ 2: $[F(x) - F(1)]$ بر حسبِ x^{-1}

شکلها یِ 3 و 4 نمودارِ G بر حسبِ ، به ترتیب، x و x^{-1} است.



شکلِ 3: $[G(x)-G(1)]$ بر حسبِ x



شکلِ 4: $[G(x)-G(1)]$ بر حسبِ x^{-1}

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «نفوذِ گاز از یک رُزنه یِ ریز» X1-033 (2005/09/03)

[2] محمد خرمی؛ «سینتیکِ گازها یِ کاملِ نسبیتی I» X1-160 (2021/11/26)

[3] I. S. Gradsgteyn & I. M. Ryzhik; "Table of integrals, series, and products" 7th edition (Academic Press, 2007) section 3.387

[4] Bessel