

چگالی ی احتمال، و تابع مولد I

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

چگالی ی احتمال، مقدار چشمداشتی، و گشتاورها بررسی میشوند. تابع مولد و لگاریتم آن معرفی میشوند. دُسادترین-حالت، تُربیع تعینی و تُربیع گاوسی، به عنوان مثال بررسی میشوند.

1 چگالی ی احتمال

چگالی ی احتمال برا ی متغیر تصادفی ی x را با ρ_x نشان میدهم. البته ممکن است x گسسته باشد. در این صورت

$$\rho_x(\xi) = \sum_a P_a \delta(\xi - \xi_a). \quad (1)$$

که ξ_a ها مقدارها ی ممکن برا ی x یند، و P_a احتمال این که x برابر با ξ_a شود. در حالت کلی (برای x ی که پیوسته یا گسسته است)

$$\rho_x(\xi) = \langle \delta(\xi - x) \rangle. \quad (2)$$

که $\langle f(x) \rangle$ ، مقدار چشمداشتی ی $[f(x)]$ ، چنین تعریف میشود.

$$\langle f(x) \rangle = \int d\xi \rho_x(\xi) f(\xi). \quad (3)$$

از این پس فرض میکنم متغیر - تصادفها بی که با آنها کار میکنم اسکالرند و مقادیرها ی شان حقیقی ست. میانگین x را با $[\mu(x)]$ و وردایی ی x را با $[V(x)]$ نشان میدهم:

$$\mu(x) = \langle x \rangle. \quad (4)$$

$$V(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle. \quad (5)$$

یا،

$$V(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (6)$$

مشتق m م \mathfrak{X} را هم با $\mathfrak{X}^{(m)}$ نشان میدهم.

2 تابع مولد

تابع مولد برا ی متغیر تصادفی ی x را با Z_x نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$Z_x(u) = \langle \exp(ux) \rangle. \quad (7)$$

یعنی،

$$Z_x(u) = \int d\xi \rho_x(\xi) \exp(u\xi). \quad (8)$$

در حالت کلی متغیر u مختلط است، و انتگرال طرف راست (8) به ازا ی u در یک نوار عمودی در صفحه ی مختلط همگرا ست، و Z_x درون این نوار تمام-ریخت است.

مبدل - لپلاس [1] ρ_x را با $(\mathfrak{L} \rho_x)$ ، و مبدل - فوریه [2] ρ_x را با $(\mathfrak{F} \rho_x)$ نشان میدهم:

$$(\mathfrak{L} \rho_x)(u) = \int d\xi \rho_x(\xi) \exp(-u\xi). \quad (9)$$

$$(\mathfrak{F} \rho_x)(k) = \int d\xi \rho_x(\xi) \exp(-ik\xi). \quad (10)$$

دیده میشود

$$(\mathfrak{L} \rho_x)(u) = Z_x(-u). \quad (11)$$

$$(\mathfrak{F} \rho_x)(u) = Z_x(-i k). \quad (12)$$

البته در تعریف تابع - مولد و مبدلها، قراردادها ی مختلف ی به کار میرود. این قراردادها در بودن یا نبودن علامت منفی برای متغیر، و در بودن یا نبودن توانها یی از (2π) با هم فرق دارند. چگالی-ی-احتمال نامنفی ست، و

$$\int d\xi \rho_x(\xi) = 1. \quad (13)$$

از اینها نتیجه میشود محور موهومی در ناحیه ی همگرایی تابع - مولد است. پس مبدل - فوریه [2] ی چگالی-ی-احتمال خُش-تعریف است. از جمله، چگالی-ی-احتمال بر حسب تابع - مولد چنین میشود.

$$\rho_x(\xi) = \int \frac{d k}{2\pi} Z_x(-i k) \exp(i k x). \quad (14)$$

دیده میشود

$$Z_x^{(m)}(0) = \mu_m(x). \quad (15)$$

که $\mu_m(x)$ گشتاور m م x است:

$$\mu_m(x) = \langle x^m \rangle. \quad (16)$$

از جمله،

$$\mu_0 = 1. \quad (17)$$

$$\mu_1 = \mu. \quad (18)$$

$$\mu_2 = V + \mu^2. \quad (19)$$

لگاریتم تابع - مولد را با W نشان میدهم:

$$W_x = \ln Z_x. \quad (20)$$

به W_x همبند-مولد x میگوییم. مشتق m م W_x در 0 را با $c_m(x)$ نشان میدهم:

$$W_x^{(m)}(0) = c_m(x). \quad (21)$$

به $c_m(x)$ همبند-گشتاور m م x میگوییم. رُشن است که $[c_1(x), \dots, c_m(x)]$ تابع ی وارون-پذیر از $[\mu_1(x), \dots, \mu_m(x)]$ است. از جمله دیده میشود

$$c_0 = 0. \quad (22)$$

$$c_1 = \mu. \quad (23)$$

$$c_2 = V. \quad (24)$$

یک انگیزه برای اسم همبند، این نمایش برای گشتاورهاست. c_m را با چیز ی یک-پارچه (همبند) با m پای یکسان نظیر میکنم. یعنی به یک-پارچه ای با m پا عدد c_m را نسبت میدهم. به یک بسته ی b شامل تعداد ی از این یک-پارچه ها عدد ν_b را نسبت میدهم، که برابر است با حاصل - ضرب عددها ی متناظر با اجزا ی بسته. یک بسته ممکن است از یک ی از یک-پارچه ها بیش از یک تا داشته باشد، یا اصلن نداشته باشد:

$$\nu_b = \prod_m (c_m)^{b_m}. \quad (25)$$

که b_m تعداد یک-پارچه ی m پای در بسته ی b است. تعداد پاها ی بسته ی b را با l_b نشان میدهم. رُشن است که

$$l_b = \sum_m m b_m. \quad (26)$$

مجموعه ی بسته ها یی که z پا دارند را با \mathbb{B}_z نشان میدهم:

$$\mathbb{B}_z = \{b \mid l_b = z\}. \quad (27)$$

δ_j را چنین تعریف میکنم.

$$\delta_j = \sum_{\mathbf{b}}^{\mathbf{b} \in \mathbb{B}_j} n_{\mathbf{b}} \nu_{\mathbf{b}}. \quad (28)$$

جمع-بندی بر \mathbb{B}_j است، و $n_{\mathbf{b}}$ تعداد حالتها یی ست که پاها ی بسته ی \mathbf{b} بین یک-پارچه ی سازنده ی آن تزیع شده اند؛ به این شکل که پاها ی درون یک یک-پارچه از-هم-تشخیص-ناپذیرند، و یک-پارچه ی با تعداد-پا-ی-یکسان هم از-هم-تشخیص-ناپذیرند. به این ترتیب،

$$n_{\mathbf{b}} = (l_{\mathbf{b}})! \prod_m \frac{1}{b_m! (m!)^{b_m}}. \quad (29)$$

از اینجا،

$$\frac{\delta_j}{j!} = \sum_{\mathbf{b}}^{\mathbf{b} \in \mathbb{B}_j} \prod_m \frac{(c_m)^{b_m}}{b_m! (m!)^{b_m}}. \quad (30)$$

د-طرف را در u^j ضرب میکنم. با استفاده از (26) و (27)، نتیجه میشود

$$\frac{\delta_j u^j}{j!} = \sum_{\mathbf{b}}^{\mathbf{b} \in \mathbb{B}_j} \prod_m \frac{(c_m u^m)^{b_m}}{b_m! (m!)^{b_m}}. \quad (31)$$

این هم نتیجه میدهد

$$\sum_j \frac{\delta_j u^j}{j!} = \sum_j \sum_{\mathbf{b}}^{\mathbf{b} \in \mathbb{B}_j} \prod_m \frac{(c_m u^m)^{b_m}}{b_m! (m!)^{b_m}}. \quad (32)$$

یا،

$$\sum_j \frac{\delta_j u^j}{j!} = \sum_{\mathbf{b}} \prod_m \frac{(c_m u^m)^{b_m}}{b_m! (m!)^{b_m}}. \quad (33)$$

هر \mathbf{b} با b_m ها مشخص میشود. جمع-بندی ی طرف-راست بر \mathbf{b} نامقید است. پس میشود در آن جمع-بندی بر b_m ها را مستقل از هم انجام داد. و رابطه ی (33) چنین میشود.

$$\sum_j \frac{\delta_j u^j}{j!} = \prod_m \sum_{b_m} \frac{(c_m u^m)^{b_m}}{b_m! (m!)^{b_m}}. \quad (34)$$

به این ترتیب،

$$\sum_j \frac{\delta_j u^j}{j!} = \prod_m \exp\left(\frac{c_m u^m}{m!}\right). \quad (35)$$

یا،

$$\sum_j \frac{\delta_j u^j}{j!} = \exp\left(\sum_m \frac{c_m u^m}{m!}\right). \quad (36)$$

از (21) دیده میشود

$$W(u) = \sum_m \frac{c_m u^m}{m!}. \quad (37)$$

پس،

$$\sum_j \frac{\delta_j u^j}{j!} = \exp[W(u)]. \quad (38)$$

یعنی،

$$\sum_j \frac{\delta_j u^j}{j!} = Z(u). \quad (39)$$

از (15) دیده میشود

$$Z(u) = \sum_m \frac{\mu_m u^m}{m!}. \quad (40)$$

پس،

$$\delta_j = \mu_j. \quad (41)$$

یعنی δ هم آن μ است. و رابطه ی (30) هم آن رابطه ی μ_j بر حسب c_m ها است:

$$\frac{\mu_j}{j!} = \sum_b \prod_m \frac{(c_m)^{b_m}}{b_m! (m!)^{b_m}}. \quad (42)$$

و البته بزرگترین m ی که در طرف راست ظاهر میشود هم آن j است: μ_j تابع ی از c_1 تا c_j است.

3 انتقال متغیر - تصادفی

انتقال به اندازه a را با T_a نشان میدهیم:

$$T_a(x) = x + a. \quad (43)$$

از (2) دیده میشود

$$\rho_{T_a(x)}(\xi) = \langle \delta(x + a - \xi) \rangle. \quad (44)$$

که نتیجه میدهد

$$\rho_{T_a(x)}(\xi) = \rho(x - a). \quad (45)$$

از (7) هم نتیجه میشود

$$Z_{T_a(x)}(u) = \exp(a u) Z_x(u). \quad (46)$$

و از این، همراه با (20)،

$$W_{T_a(x)}(u) = a u + W_x(u). \quad (47)$$

یک حالت خاص، انتقال به اندازه $\langle x \rangle$ است. کمیتها $\langle x \rangle$ متناظر با متغیر - تصادفی $(x - \langle x \rangle)$ را با پریم نشان میدهیم:

$$\rho'_x(\xi) = \rho_x(\xi + \langle x \rangle). \quad (48)$$

$$Z'_x(u) = \exp(-\langle x \rangle u) Z_x(u). \quad (49)$$

$$W'_x(u) = -\langle x \rangle u + W_x(u). \quad (50)$$

$$\mu'_m(x) = \mu_m(x - \langle x \rangle). \quad (51)$$

$$c'_m(x) = c_m(x - \langle x \rangle). \quad (52)$$

رُشن است که

$$(x + a) - \langle x + a \rangle = x - \langle x \rangle. \quad (53)$$

پس کمیتها ی پریم-دار، برا ی یک متغیر و انتقال-یافته ی آن یکسان نَد. به (همبند-) گشتاور m $\langle x - \langle x \rangle \rangle$ (همبند-) انحراف m x میگویم. از (21) و (50) دیده میشود

$$c_m = c'_m + \mu \delta_m^1. \quad (54)$$

به این ترتیب همبند-گشتاورها ی x هم ان همبند-انحرافها ی x اند، جز همبند-گشتاور اول. از جمله،

$$c'_1 = 0. \quad (55)$$

$$V' = V. \quad (56)$$

انحرافها ی x هم، مثل (42)، بر حسب همبند-انحرافها ی x چنین میشوند.

$$\frac{\mu'_j}{j!} = \sum_b \prod_m \frac{(c'_m)^{b_m}}{b_m! (m!)^{b_m}}. \quad (57)$$

4 حالتها ی خاص

رابطه ی گشتاورها بر حسب همبند-گشتاورها، (42) یا (57)، هر چه تعداد همبند-گشتاورها ی ناصفر کمتر باشد سادتر میشود.

4.1 تَزیعِ تعینی

سادترین حالت این است که همه ی همبند-انحرافها ی x صفرَند:

$$c'_m = 0. \quad (58)$$

$$W'(u) = 0. \quad (59)$$

$$Z'(u) = 1. \quad (60)$$

$$\mu'_m = \delta_m^0. \quad (61)$$

$$\rho'(\xi) = \delta(\xi). \quad (62)$$

همچنین،

$$c_m = \mu \delta_m^1. \quad (63)$$

$$W(u) = \mu u. \quad (64)$$

$$Z(u) = \exp(\mu u). \quad (65)$$

$$\mu_m = \mu^m. \quad (66)$$

$$\rho(\xi) = \delta(\xi - \mu). \quad (67)$$

این حالت متناظر با یک تَزیعِ تعینی است: مقدارِ متغیرِ تصادفی μ است، که هم ان میانگینِ متغیر - - تصادفی است. و البته همه ی انحرافها صفرَند.

4.2 تزیع گاوسی

همبند-انحراف اول هر متغیر-تصادفی بی صفر است. سادترین حالت بعد از تزیع تعینی این است که همبند-انحراف دوم ناصفر است، و بقیه ی همبند-انحرافها صفرند:

$$c'_m = V \delta_m^2. \quad (68)$$

$$W'(u) = \frac{V u^2}{2}. \quad (69)$$

$$Z'(u) = \exp\left(\frac{V u^2}{2}\right). \quad (70)$$

$$\mu'_{2\ell} = \frac{(2\ell)! V^\ell}{2^\ell \ell!}. \quad (71)$$

$$\mu'_{2\ell+1} = 0. \quad (72)$$

$$\rho'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2V}\right). \quad (73)$$

همچنین،

$$c_m = \mu \delta_m^1 + V \delta_m^2. \quad (74)$$

$$W(u) = \mu u + \frac{V u^2}{2}. \quad (75)$$

$$Z(u) = \exp\left(\mu u + \frac{V u^2}{2}\right). \quad (76)$$

$$\mu_m = \sum_{\ell}^{m/2} \frac{m!}{2^\ell \ell! (m-2\ell)!} V^\ell \mu^{m-2\ell}. \quad (77)$$

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left[-\frac{(\xi - \mu)^2}{2V}\right]. \quad (78)$$

این حالت متناظر با یک تزیع گاوسی ست.

5 پانوشتها

[1] Laplace

[2] Fourier