

X1-137 (2019/01/22)

ذره ی باردار در میدان مغناطیسی ی یک سیم دراز

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

میدان مغناطیسی ی یک سیم دراز، هم تقارن سمتی دارد و هم تقارن انتقالی. به هم بین خاطر حرکت یک ذره ی باردار در آن حل-پذیر است. این حرکت بررسی میشود.

1 میدان مغناطیسی، پتانسیل برداری، و لگرانژی

جریان ثابت I از یک سیم دراز میگذرد. محور z را روی این سیم میگذارم، چنان که سمت قراردادی ی جریان به سوی z ها ی مثبت باشد. B (میدان مغناطیسی) میشود

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad (1)$$

که (ρ, ϕ, z) مختصات استوانی یند. A (پتانسیل برداری) این را بر میآورد.

$$B = \nabla \times A. \quad (2)$$

ذره ی باردار در میدان مغناطیسی ی یک سیم دراز

این رابطه A را به طر یکتا مشخص نمیکند. برای A این حدس را به کار میبریم.

$$A = A(\rho) \hat{z}. \quad (3)$$

دیده میشود

$$\frac{dA}{d\rho} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \quad (4)$$

که نتیجه میدهد

$$A = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{a}, \quad (5)$$

که a پارامتری ثابت است.

لگرانژی ی یک ذره به جرم m و بار q که در میدان مغناطیسی ی متناظر با پتانسیل برداری ی A حرکت میکند چنین است.

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (6)$$

L لگرانژی و v سرعت است. L را بر حسب مختصات استوائی و با A متناظر با (3) و (5) مینویسیم:

$$L = m \left[\frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - b \dot{z} \ln \frac{\rho}{a} \right], \quad (7)$$

که \dot{x} مشتق نسبت به t (زمان) است و

$$b = \frac{\mu_0 I q}{2\pi m}. \quad (8)$$

2 تقارنها و ثابت - - حرکتها

z و ϕ در لگرانژی نیستند، پس p_z و p_ϕ (تکانهای متناظر) ثابت - حرکت نند.

$$p_z = m \left(\dot{z} - b \ln \frac{\rho}{a} \right). \quad (9)$$

$$p_\phi = m \rho^2 \dot{\phi}. \quad (10)$$

ثابتها ی متناظر، تقسیم بر m ، را با، به ترتیب، w و ℓ نشان میدهم:

$$w = \dot{z} - b \ln \frac{\rho}{a}. \quad (11)$$

$$\ell = \rho^2 \dot{\phi}. \quad (12)$$

t هم در لگرانژی نیست. پس H (همیلتنی) هم ثابت - حرکت است.

$$H = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2). \quad (13)$$

($2H/m$) را، که طی حرکت ثابت میماند، با ε نشان میدهم:

$$\varepsilon = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2. \quad (14)$$

با استفاده از (11) و (12) میشود \dot{z} و $\dot{\phi}$ را بر حسب ρ حساب کرد و در (14) گذاشت. به این ترتیب یک معادله ی مرتبه-ی-یک برای ρ به دست میآید:

$$\varepsilon = \dot{\rho}^2 + f(\rho), \quad (15)$$

که

$$f(\rho) = \frac{\ell^2}{\rho^2} + \left(w + b \ln \frac{\rho}{a} \right)^2. \quad (16)$$

مسئله ی سه-بُعدی به یک مسئله ی یک-بُعدی تبدیل میشود.

3 حرکت

$f(\rho)$ در $\rho = \rho_0$ کمینه میشود، که

$$\frac{\ell^2}{\rho_0^2} = b \left(w + b \ln \frac{\rho_0}{a} \right). \quad (17)$$

همچنین،

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [f(\rho)] = \infty. \quad (18)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} [f(\rho)] = \infty. \quad (19)$$

ذره ی باردار در میدان مغناطیسی ی یک سیم دراز

اینها نشان میدهند د نقطه ی بازگشت (ρ_1 و ρ_2) هستند که ρ_0 بین آنها است و

$$\varepsilon = f(\rho_j), \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

البته

$$\varepsilon \geq f(\rho_0). \quad (21)$$

ρ_1 را نقطه ی بازگشت کوچکتر میگیریم. ρ_1 و ρ_2 ، به ترتیب، کمینه و بیشینه ی ρ هستند.

با استفاده از (15) میشود t را بر حسب ρ به دست آورد:

$$t = \int^{\rho} \frac{\pm ds}{\sqrt{\varepsilon - f(s)}}. \quad (22)$$

وارون رابطه ی t بر حسب ρ ، رابطه ی ρ بر حسب t را میدهد. با گذاشتن ρ بر حسب t در

روابط (11) و (12)، به ترتیب، \dot{z} و $\dot{\phi}$ و از آنجا z و ϕ بر حسب t به دست میآیند.

میشود زمان را بین معادلات حذف کرد و معادله ی مسیر را به دست آورد. از (12) دیده میشود

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{\rho^2} \frac{d}{d\phi}. \quad (23)$$

مشتق \mathcal{X} نسبت به ϕ را با \mathcal{X}' نشان میدهم. (11) و (15)، به ترتیب، میشوند

$$w = \frac{\ell}{\rho^2} z' - b \ln \frac{\rho}{a}. \quad (24)$$

$$\varepsilon = \frac{\ell^2}{\rho^4} \rho'^2 + f(\rho). \quad (25)$$

u و g را چنین تعریف میکنم.

$$u = \frac{1}{\rho}. \quad (26)$$

$$\begin{aligned} g(u) &= f(\rho), \\ &= \ell^2 u^2 + [w - b \ln(au)]^2. \end{aligned} \quad (27)$$

به این ترتیب،

$$z' = \frac{w - b \ln(au)}{\ell u^2}. \quad (28)$$

$$\varepsilon = \ell^2 u'^2 + g(u). \quad (29)$$

پس،

$$\phi = \int^u \frac{\pm \ell d\sigma}{\sqrt{\varepsilon - g(\sigma)}}. \quad (30)$$

این ϕ را بر حسب u میدهد، که با وارون-کردن u بر حسب ϕ به دست می‌تاید. u بر حسب ϕ را در (28) میگذارم. z' ، و از آنجا z بر حسب ϕ به دست می‌تاید.

4 مسیر ماریچی

یک حالت خاص حرکت این است که ρ ثابت بماند. چنین میشود، اگر و تنها اگر

$$\varepsilon = f(\rho_0). \quad (31)$$

در این حالت ρ برابر با ρ_0 میماند و \dot{z} و $\dot{\phi}$ هم ثابت میمانند. مقادیرهای متناظر با این حالت را با شاخص 0 نشان میدهیم. دیده میشود

$$\rho_0^2 \dot{\phi}_0^2 = b \dot{z}_0, \quad (32)$$

که البته یعنی

$$m \rho_0 \dot{\phi}_0^2 = q B_0 \dot{z}_0. \quad (33)$$

حرکت بر یک ماریچ منظم به شعاع ρ_0 و پای Δ_0 است. Δ_0 جا-به-جایی در جهت محور z به ازای تغییر (2π) در زاویه است. از (32) نتیجه میشود

$$\Delta_0 = \frac{2\pi \rho_0^2 \dot{\phi}_0}{b}, \quad (34)$$

ذره ی باردار در میدان مغناطیسی ی یک سیم دراز

یا،

$$\Delta_0 = \frac{2\pi\ell}{b}. \quad (35)$$

زاویه ی ماریچ با صفحه ی $z = 0$ را با θ_0 نشان میدهیم. دیده میشود

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\phi})_0}{b}. \quad (36)$$

اینها یک حالت خاص از یک مسله ی کلیتر ند: یک ذره ی باردار در یک خط میدان مغناطیسی میگردد و ضمن در راستا ی آن خط حرکت میکند. اگر میدان یکنواخت نباشد و جایی که ذره حرکت میکند چشمه ی میدان صفر باشد (و البته میدان الکتریکی هم صفر باشد)، v_D (سرعت انحراف از خط- میدان) چنین میشود [1].

$$\mathbf{v}_D = \frac{m}{q|\mathbf{B}||\mathbf{R}|} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{R}||\mathbf{B}|}. \quad (37)$$

\mathbf{R} بردار شعاع انحنای خط- میدان است، v_{\parallel} تصویر سرعت ذره در راستای خط- میدان، و v_{\perp} تصویر سرعت ذره بر صفحه ی عمود بر خط- میدان است. رابطه ی بالا، با استفاده از (1) و (8) میشود

$$\mathbf{v}_D = \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\hat{z}}{b}. \quad (38)$$

برای مسیر ماریچی،

$$v_{\perp} = 0. \quad (39)$$

همچنین، از (32) دیده میشود

$$v_{\parallel}^2 = b \dot{z}_0. \quad (40)$$

که نشان میدهند (38) برقرار است.

5 پانوشتها

- [1] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 12