

میدان یک ذره ی باردار فرانوری

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

درون ماده، ذرات باردار میتوانند سریعتر از نور حرکت کنند. میدانها ی الکتریکی و مغناطیسی ی یک ذره ی باردار به دست میآید که درون ماده سریعتر از نور حرکت میکند.

1 معادلات میدان

چنان که در مثلن فصل 6 از [1] آمده، معادلات میدانها ی الکترومغناطیسی درون ماده (معادلات ماکروسکپی ی مکسول [2]) چنین است.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla_0 \mathbf{B} = 0. \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \nabla_0 \mathbf{D} = \mathbf{J}. \quad (4)$$

میدان یک ذره ی باردار فرانوری

E میدان الکتریکی، B میدان مغناطیسی، D چگالی ی شار الکتریکی، و H چگالی ی گردش مغناطیسی است. ∇ مشتق-گیری نسبت به مکان (r) ، و ∇_0 مشتق-گیری نسبت به زمان (t) است. ρ و J ، به ترتیب، چگالی-ی بار و چگالی-ی جریان آزاد ند. چشمها $(J$ و $\rho)$ معادله ی پیوستگی را بر میناورند:

$$\nabla_0 \rho + \nabla \cdot J = 0. \quad (5)$$

البته این معادله از (3) و (4) مستقل نیست.

معادلات (1) و (2) را میشود بر حسب پتانسیلها ی اسکالر و برداری $(\phi$ و $A)$ حل کرد:

$$B = \nabla \times A. \quad (6)$$

$$E = -\nabla \phi - \nabla_0 A. \quad (7)$$

برای حل معادلات (3) و (4)، روابط ساختاری (بستگی ی D و H به E و B) لازم است. در سادترین حالت، این بستگیها با پارامترها ی عددی و ثابت ϵ و μ (گذردهی ی و تراوایی) داده میشود:

$$D = \epsilon E. \quad (8)$$

$$H = \frac{B}{\mu}. \quad (9)$$

البته ماده ای نیست که برای آن این روابط همواره (در همه ی بسامدها و شدت- میدانها) برقرار باشند، جز خلئ. اما در ادامه فرض میشود این روابط برقرار ند. در این صورت (3) و (4) میشوند

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (10)$$

$$\nabla \times B - \mu \epsilon \nabla_0 E = \mu J. \quad (11)$$

بر حسب پتانسیلها،

$$-\nabla \cdot \nabla \phi - \nabla_0 \nabla \cdot A = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (12)$$

$$-\nabla \cdot \nabla A + \nabla(\nabla \cdot A) + \mu \epsilon \nabla \nabla_0 \phi + \mu \epsilon \nabla_0 \nabla_0 A = \mu J. \quad (13)$$

جواب این معادلات برای پتانسیلها، با شرایط اولیه، یکتا نیست. برای به-دست-آوردن جواب تثبیت پیمانه لازم است. یک انتخاب پیمانه ی لرنس [3] است:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \nabla_0 \phi = 0. \quad (14)$$

معادلات میشوند

$$(-\nabla \cdot \nabla + \mu \varepsilon \nabla_0 \nabla_0) \phi = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (15)$$

$$(-\nabla \cdot \nabla + \mu \varepsilon \nabla_0 \nabla_0) \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}. \quad (16)$$

اینها معادله-ی-مُج ساده با سرعت- انتشار u اند، که

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}. \quad (17)$$

u سرعت انتشار نور در محیط است. (15) و (16) حالتها بی از معادله ی

$$\left(-\nabla \cdot \nabla + \frac{1}{u^2} \nabla_0 \nabla_0 \right) \mathfrak{X} = \mathfrak{S} \quad (18)$$

اند. جواب این معادله، با این شرط که برای \mathfrak{S} ها ی جایگزیده-در-زمان \mathfrak{X} در گذشته ی دور صفر شود، چنین است.

$$\mathfrak{X}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 r' dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u} \right) \mathfrak{S}(t', \mathbf{r}'), \quad (19)$$

که با انتگرال-گیری بر t' میشود

$$\mathfrak{X}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathfrak{S} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}, \mathbf{r}' \right). \quad (20)$$

به این ترتیب جوابها ی معادلات (15) و (16) میشوند.

$$\phi(t, \mathbf{r}) = K \int \frac{d^3 r' dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u} \right) \rho(t', \mathbf{r}'), \quad (21)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{K}{u^2} \int \frac{d^3 r' dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u} \right) \mathbf{J}(t', \mathbf{r}'), \quad (22)$$

که

$$K = \frac{1}{4\pi \varepsilon}. \quad (23)$$

و البته (21) و (22) را هم میشود چنین نوشت.

$$\phi(t, \mathbf{r}) = K \int \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}, \mathbf{r}' \right). \quad (24)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{K}{u^2} \int \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{J} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}, \mathbf{r}' \right). \quad (25)$$

اینها هم مشابه هم اند که در فصل 6 از [1] آمده، اگر ε و μ به جای ε_0 و μ_0 به کار روند.

2 پتانسیل و میدان ذره ای که با سرعت ثابت حرکت میکند

برای ذره ای با بار q که مکان \mathbf{r}_s (وابسته به زمان) است،

$$\rho(t, \mathbf{r}) = q \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)]. \quad (26)$$

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}_s(t) \rho(t, \mathbf{r}), \quad (27)$$

که \mathbf{v}_s سرعت ذره است:

$$\mathbf{v}_s = D \mathbf{r}_s. \quad (28)$$

D مشتق-گیری ست. (21) و (22) میشوند

$$\phi(t, \mathbf{r}) = K q \int \frac{dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')|} \delta \left[t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')|}{u} \right]. \quad (29)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{K q}{u^2} \int \frac{dt' \mathbf{v}_s(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')|} \delta \left[t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')|}{u} \right]. \quad (30)$$

تعریف میکنم

$$-t + t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t')|}{u} =: f(t, t', \mathbf{r}). \quad (31)$$

مشتق f نسبت به t' را با λ ، و t' ها بی که در آنها f صفر میشود (زمانها یِ تئخیری) را با t_a ها نشان میدهم:

$$f(t, t_a, \mathbf{r}) = 0. \quad (32)$$

تعریف میکنم

$$\mathbf{r}_s(t_a) =: \mathbf{r}_a. \quad (33)$$

$$\mathbf{v}_s(t_a) =: \mathbf{v}_a. \quad (34)$$

$$\lambda(t, t_a, \mathbf{r}) =: \lambda_a. \quad (35)$$

پس،

$$(t - t_a)u = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|. \quad (36)$$

همچنین،

$$\phi(t, \mathbf{r}) = Kq \sum_a \frac{1}{|\lambda_a| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (37)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{Kq}{u^2} \sum_a \frac{\mathbf{v}_a}{|\lambda_a| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (38)$$

از این پس \mathbf{v}_s را ثابت میگیریم. در این صورت \mathbf{v}_a هم ان \mathbf{v}_s است، و

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}_s}{u^2} \phi(t, \mathbf{r}). \quad (39)$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{E} = - \left(\nabla + \frac{\mathbf{v}_s}{u^2} \nabla_0 \right) \phi. \quad (40)$$

$$\mathbf{B} = - \frac{\mathbf{v}_s}{u^2} \times \nabla \phi. \quad (41)$$

از جمله روشن است که

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_s}{u^2} \times \mathbf{E}. \quad (42)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
\lambda_a^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|^2 &= \left[|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a| - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{v}_s}{u} \right]^2, \\
&= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - 2(t - t_a)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{v}_s \\
&\quad + \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{v}_s}{u} \right]^2, \\
&= [\mathbf{r} - \mathbf{r}_a - (t - t_a)\mathbf{v}_s] \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{r}_a - (t - t_a)\mathbf{v}_s] - [(t - t_a)\mathbf{v}_s]^2 \\
&\quad + \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot \mathbf{v}_s}{u} \right]^2, \\
&= [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)] \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)] - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s}{u^2} \\
&\quad + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)_{\parallel} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)_{\parallel} \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s}{u^2}, \\
&= [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)] \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)] - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)_{\perp} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)_{\perp} \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s}{u^2}, \quad (43)
\end{aligned}$$

که موازی (\parallel) و قائم (\perp) نسبت به \mathbf{v}_s اند. روشن است که

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)_{\perp} = [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)]_{\perp}. \quad (44)$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\lambda_a^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|^2 &= [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)]_{\parallel} \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)]_{\parallel} \\
&\quad + [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)]_{\perp} \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)]_{\perp} \left(1 - \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s}{u^2} \right). \quad (45)
\end{aligned}$$

دیده میشود طرف راست مستقل از a است و به فقط مکان نقطه ی مشاهده، مکان بار در زمان مشاهده (و البته سرعت بار) بستگی دارد. تعریف میکنم

$$1 - \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s}{u^2} =: g. \quad (46)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t) =: \mathfrak{R}(t, \mathbf{r}). \quad (47)$$

به این ترتیب،

$$\lambda_a^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|^2 = \mathfrak{R}_{\parallel}^2(t, \mathbf{r}) + g |\mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r})|^2. \quad (48)$$

\mathfrak{R}_{\parallel} تصویر \mathfrak{R} در جهت \mathbf{v}_s است. رابطه ی (37) میشود

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{m K q}{[\mathfrak{R}_{\parallel}^2(t, \mathbf{r}) + g |\mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r})|^2]^{1/2}}, \quad (49)$$

که m تعداد جوابها ی معادله ی (32) برای t_a است. رابطه ی (40) میشود

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{m K q}{[\mathfrak{R}_{\parallel}^2(t, \mathbf{r}) + g |\mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r})|^2]^{3/2}} \left(\mathfrak{R}_{\parallel}(t, \mathbf{r}) + g \mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r}) - \frac{\mathbf{v}_s}{u^2} \{ [\mathfrak{R}_{\parallel}(t, \mathbf{r})] \cdot \mathbf{v}_s \} \right), \quad (50)$$

یا

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{m K q g \mathfrak{R}(t, \mathbf{r})}{[\mathfrak{R}_{\parallel}^2(t, \mathbf{r}) + g |\mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r})|^2]^{3/2}}. \quad (51)$$

دیده میشود میدان الکتریکی در راستای خطی است که بار (در زمان مشاهده) را به نقطه ی مشاهده وصل میکند. تصویر میدان در جهت خطی که بار (در زمان مشاهده) را به نقطه ی مشاهده وصل میکند را با E نشان میدهم:

$$E(t, \mathbf{r}) = \frac{m K q g |\mathfrak{R}(t, \mathbf{r})|}{[\mathfrak{R}_{\parallel}^2(t, \mathbf{r}) + g |\mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r})|^2]^{3/2}}. \quad (52)$$

تعریف میکنم

$$\cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{v}_s \cdot [\mathfrak{R}(t, \mathbf{r})]}{|\mathbf{v}_s| |\mathfrak{R}(t, \mathbf{r})|} \right] =: \theta. \quad (53)$$

$$\frac{m g}{(\cos^2 \theta + g \sin^2 \theta)^{3/2}} =: W(\theta). \quad (54)$$

به این ترتیب،

$$E(t, \mathbf{r}) = \frac{K q}{|\mathfrak{R}(t, \mathbf{r})|^2} W(\theta). \quad (55)$$

ضریب W در طرف راست، هم ان میدان بار ساکن است. W بستگی ی میدان بار متحرک به زاویه را میدهد. قضیه ی گاؤس [4] برای گوی ی که مرکز اش جای بار است، نتیجه میدهد انتگرال W بر زاویه ی فضایی (4π) است، که یعنی

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta W(\theta) = 2. \quad (56)$$

3 شکل میدان

شکل میدان الکتریکی به این وابسته است که نسبت سرعت بار به سرعت نور در محیط کوچکتر از یک است (فرانوری)، برابر با یک است (نوری)، یا بزرگتر از یک است (فرانوری). این نسبت، از جمله مقدار m را تعیین میکند.

3.1 تعداد زمانهای تأخیری

با مجذور-کردن رابطه ی (36) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} u^2(t-t_a)^2 &= |\mathfrak{A}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{v}_s(t-t_a)|^2, \\ &= |\mathfrak{A}(t, \mathbf{r})|^2 + 2\mathbf{v}_s \cdot [\mathfrak{A}(t, \mathbf{r})](t-t_a) + \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s(t-t_a)^2, \end{aligned} \quad (57)$$

یا

$$-g(t-t_a)^2 + 2\frac{\mathbf{v}_s \cdot [\mathfrak{A}(t, \mathbf{r})]}{u^2}(t-t_a) + \frac{|\mathfrak{A}(t, \mathbf{r})|^2}{u^2} = 0. \quad (58)$$

البته از (36) دیده میشود $(t-t_a)$ نامنفی است. پس فقط جوابهای نامنفی ی (58) برای $(t-t_a)$ پذیرفتنی یند.

در حالت فرانوری g مثبت است. در این حالت (58) برای $(t-t_a)$ یک جواب مثبت و یک ریشه ی منفی دارد. پس m یک است.

در حالت فرانوری g منفی است. در این حالت (58) برای $(t-t_a)$ د ریشه ی هم-علامت دارد، به شرط آن که مبین معادله مثبت باشد. این جوابها مثبت ند (پذیرفتنی یند)، به شرط این که $\{v_s \cdot [\mathfrak{A}(t, \mathbf{r})]\}$ منفی باشد. برای حالت فرانوری تعریف میکنم

$$\sin^{-1}\left(\frac{u}{|v_s|}\right) =: \psi. \quad (59)$$

نتیجه میشود m صفر است اگر θ کوچکتر از $(\pi - \psi)$ باشد، و دُاست اگر θ بزرگتر از $(\pi - \psi)$ باشد.

خلاصه،

$$m = \begin{cases} 1, & |v_s| < u \\ 0, & |v_s| > u \wedge \theta < (\pi - \psi) \\ 2, & |v_s| > u \wedge \theta > (\pi - \psi) \end{cases} \quad (60)$$

3.2 حالت فرونوری

رابطه ی (54) میشود

$$W(\theta) = \frac{g}{(\cos^2 \theta + g \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (61)$$

g بین صفر و یک است. W نسبت به $\cos^2 \theta$ نزولی ست (مگر بار ساکن باشد، که در این صورت g یک و W مستقل از θ میشود). این یعنی خطها ی میدان به طرف صفحه ی عمود بر سرعت بار (و گذرنده از بار) جمع میشوند. هر چه سرعت بار بیشتر باشد این ناهمسانگردی شدیدتر میشود. البته میدان نسبت به صفحه ی عمود بر سرعت بار (و گذرنده از بار) متقارن است. با محاسبه ی مستقیم، معلوم میشود (56) برقرار است.

3.3 حالت فرانوری

ظاهران رابطه ی (54) میشود

$$W(\theta) = -2 \cot^2 \psi \frac{\Theta(\theta + \psi - \pi)}{(\cos^2 \theta - \cot^2 \psi \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (62)$$

که Θ تابع هویساید [5] (پله ی واحد) است. از این رابطه دیده میشود میدان فقط درون مخروط چرنکوف [6] ناصفر است. این ناحیه مخروطی ست که رئس اش جا ی بار، محور اش مسیر گذشته ی بار، و نیم-زاویه-ی-رئس اش ψ است. اما رابطه ی (62) مشکلاتی دارد. یک مشکل جهت میدان الکتریکی ست. برای حالت فرانوری g منفی ست. پس اگر بار مثبت باشد میدان الکتریکی به سوی بار است. مشکل دیگر این که انتگرال W بر زاویه ی فضایی بینهایت میشود: W در θ ی نزدیک به $(\pi - \psi)$ مثل $(\theta + \psi - \pi)^{-3/2}$ رفتار میکند. در نتیجه طرف راست (56)، به جا ی این که 2 بشود $(-\infty)$ میشود.

میدان یک ذره ی باردار فرانوری

ریشه ی این مشکلها در مشتق-گیری ی نادقیق از پتانسیل الکتریکی، رابطه ی (49)، است. این پتانسیل برای حالت فرانوری و در θ ی نزدیک به $(\pi - \psi)$ مثل $(\theta + \psi - \pi)^{-1/2}$ رفتار میکند. خُذ این پتانسیل مشکل ی ندارد: هر چند در θ به سو ی $(\pi - \psi)$ بینهایت میشود، انتگرال-پذیر است. اما مشتق پتانسیل که در میدان ظاهر میشود، با شکل معمول مشتق-گیری انتگرال-پذیر نیست. آن چه در میدان ظاهر میشود مشتق تزیعی ی پتانسیل است. مشتق تزیعی ی \mathfrak{F} ، با اثر آن بر تابع-آزمون p ، چنین تعریف میشود (مثلن فصل 2 از [7]):

$$\int d\xi [(D\mathfrak{F})(\xi)][p(\xi)] := - \int d\xi [\mathfrak{F}(\xi)][(Dp)(\xi)]. \quad (63)$$

این رابطه را برای

$$\mathfrak{F}(\xi) = \frac{\Theta(\xi)}{\xi^{1/2}} \quad (64)$$

به کار میبرم. برای مشتق تزیعی ی طرف راست هم علامت شبه-تابع (pf) را به کار میبرم:

$$(D\mathfrak{F})(\xi) = -\frac{1}{2} \text{pf} \left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{3/2}} \right]. \quad (65)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \int d\xi \left\{ \text{pf} \left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{3/2}} \right] \right\} [p(\xi)] &= 2 \int d\xi \left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{1/2}} \right] [(Dp)(\xi)], \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[2 \int_s^\infty d\xi \frac{(Dp)(\xi)}{\xi^{1/2}} \right], \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[-2 \frac{p(s)}{s^{1/2}} + \int_s^\infty d\xi \frac{p(\xi)}{\xi^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

از اینجا یک نمایش برای $\text{pf}[\xi^{-3/2} \Theta(\xi)]$ به دست میآید:

$$\text{pf} \left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{3/2}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ -2s^{-3/2}, & 0 < \xi < s \\ \xi^{-3/2}, & \xi > s \end{cases}. \quad (67)$$

البته نمایش بالا به این معنی است که حد-گیری بعد از انتگرال-گیری انجام شود. از جمله دیده میشود

$$\int_{-\infty}^x d\xi \text{pf} \left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{3/2}} \right] = -\frac{2\Theta(x)}{x^{1/2}}. \quad (68)$$

به این ترتیب به جا ی (62) باید نوشت

$$W(\theta) = -2 \cot^2 \psi \operatorname{pf} \left[\frac{\Theta(\theta + \psi - \pi)}{(\cos^2 \theta - \cot^2 \psi \sin^2 \theta)^{3/2}} \right]. \quad (69)$$

این یعنی برای بار مثبت میدان درون مخروط چرنکف [6] به سوی بار هست، اما روی مخروط بینهایت میشود و جهت ش از بار به بیرون است. به علاوه،

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin \theta W(\theta) &= -2 \cot^2 \psi \lim_{s \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{2s \sin \psi}{[\cos^2(\psi - s) - \cot^2 \psi \sin^2(\psi - s)]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi - \psi + s}^\pi \frac{d\theta \sin \theta}{(\cos^2 \theta - \cot^2 \psi \sin^2 \theta)^{3/2}} \right\}, \\ &= -2 \cot^2 \psi \lim_{s \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{2s \sin^4 \psi}{[\cos^2(\psi - s) - \cos^2 \psi]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \psi \tan \psi}{[\cos^2(\psi - s) - \cos^2 \psi]^{1/2}} - \tan^2 \psi \right\}. \quad (70) \end{aligned}$$

حد مجموع د- جمله ی اول درون آکلاد صفر است. به این ترتیب، (56) برقرار است.

3.4 حالت نوری

این حالت را میشود حد هر یک از حالتها ی فرونوری یا فرانوری در g به صفر گرفت. \mathfrak{G} را چنین تعریف میکنم.

$$\frac{1}{[\xi^2 + g \eta^2]^{1/2}} =: \mathfrak{G}(\xi, \eta). \quad (71)$$

دیده میشود

$$\mathfrak{G}(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{g \eta^2}} \right). \quad (72)$$

برای g ها ی مثبت و کوچک،

$$\sinh^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{g \eta^2}} = \frac{\operatorname{sgn}(\xi)}{2} \left[\ln \frac{4}{g} + \ln \frac{\xi^2}{\eta^2} \right] + o(g), \quad (73)$$

که sgn تابع علامت است. به این ترتیب،

$$\mathfrak{G}(\xi, \eta) = \delta(\xi) \ln \frac{\xi^2}{\eta^2} + \left(\ln \frac{4}{g} \right) \delta(\xi) + \operatorname{pf} \left(\frac{1}{|\xi|} \right) + o(g), \quad (74)$$

که δ دلتا ی دیرک [8] است. پس (49) میشود

$$\phi = \phi_{\text{eff}} + \phi_1 + o(g), \quad (75)$$

که

$$\phi_{\text{eff}}(t, \mathbf{r}) = K q \delta[\mathfrak{R}_{\parallel}(t, \mathbf{r})] \ln \frac{\mathfrak{R}_{\parallel}^2(t, \mathbf{r})}{|\mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r})|^2}. \quad (76)$$

$$\phi_1(t, \mathbf{r}) = K q \left(\ln \frac{4}{g} \right) \delta[\mathfrak{R}_{\parallel}(t, \mathbf{r})] + \text{pf} \left(\frac{1}{|\mathfrak{R}_{\parallel}(t, \mathbf{r})|} \right). \quad (77)$$

رابطه ی (40) میشود

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} \phi - e \left(\nabla_{\parallel} + \frac{1}{u} \nabla_0 \right) \phi + o(g) \phi. \quad (78)$$

دیده میشود

$$\left(\nabla_{\parallel} + \frac{1}{u} \nabla_0 \right) [\mathfrak{R}_{\parallel}(t, \mathbf{r})] = 0. \quad (79)$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} \phi_{\text{eff}} + o(g \ln g). \quad (80)$$

پس در g به صفر،

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 2 K q \delta[\mathfrak{R}_{\parallel}(t, \mathbf{r})] \frac{\mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r})}{|\mathfrak{R}_{\perp}(t, \mathbf{r})|}. \quad (81)$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= 2 K q \delta[|\mathfrak{R}(t, \mathbf{r})| \cos \theta] \frac{\mathfrak{R}(t, \mathbf{r})}{|\mathfrak{R}(t, \mathbf{r})|}, \\ &= \frac{K q \mathfrak{R}(t, \mathbf{r})}{|\mathfrak{R}(t, \mathbf{r})|^2} [2 \delta(\cos \theta)]. \end{aligned} \quad (82)$$

با حد-گیری از (61) هم نتیجه میشود

$$W(\theta) = 2 \delta[\cos(\theta)], \quad (83)$$

که هم ان است که از (83) به دست میآید. دیده میشود $W(\theta)$ صفر است مگر $\cos(\theta)$ صفر باشد.

4 پانوشتها

- [1] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)
- [2] Maxwell
- [3] Lorentz
- [4] Gauss
- [5] Heaviside
- [6] Cherenkov
- [7] Ivar Stakgold; "Green's functions and boundary value problems" 2nd edition (John Wiley & Sons, 1998)
- [8] Dirac