

# تثبیت پیمانہ، و تبدیل بی-آر-اس-تی

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

سیستم ی بررسی میشود که با کنش تصیف میشود و تقارن ی دارد که بهنجار است (تقارن کوانتمی ی سیستم هم هست). شکل سازگار تثبیت پیمانہ، و به دنبال آن وارد-کردن شبح و ظهور تقارن بی-آر-اس-تی [1] بررسی میشود.

## 1 تقارن بهنجار

یک سیستم با کنش  $S$  تصیف میشود. متغیر-دینامیکیها ی این سیستم را با  $\Phi$ ، و مجموعه ی مقادیرها ی ممکن  $\Phi$  را با  $\mathbb{V}$  نشان میدهم. یک راه کوانتس این سیستم انتگرال مسیر است:

$$\begin{aligned}\langle F(\Phi) \rangle &= \mathcal{N} \langle F(\Phi) \rangle_n, \\ &= \frac{\langle F(\Phi) \rangle_n}{\langle 1 \rangle_n},\end{aligned}\tag{1}$$

که  $\langle \mathcal{X} \rangle$  مقدار چشم-داشتی ی  $\mathcal{X}$  است، و

$$\langle F(\Phi) \rangle_n = \int_{\mathbb{V}} d\phi F(\phi) \exp[-\beta S(\phi)].\tag{2}$$

تثبیت پیمانه، و تبدیل بی-آر-اس-تی

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{-1} &= \langle 1 \rangle_{\mathfrak{n}}, \\ &= \int_{\mathfrak{V}} d\phi \exp[-\beta S(\phi)].\end{aligned}\quad (3)$$

$$\beta^{-1} = i\hbar. \quad (4)$$

بررسی سیستمها ی آماری ی در تعادل هم مشابه است. فقط کنش با همیلتنی و  $\beta$  با  $\beta$  جایگزین میشود، که

$$\beta^{-1} = k_B T. \quad (5)$$

میگویم  $\mathfrak{D}$  یک تقارن کنش است، اگر

$$S[\mathfrak{D}(\phi)] = S(\phi). \quad (6)$$

میگویم تقارن  $\mathfrak{D}$  بهنجار است (تقارن کوانتمی هم هست)، اگر  $\mathfrak{D}$  تقارن عنصر-حجم انتگرال-گیری هم باشد:

$$d[\mathfrak{D}(\phi)] = d\phi. \quad (7)$$

در هر-د-مُرد فرض شده  $\mathfrak{D}$  وارون-پذیر است و مانسیتها ی (6) و (7) با  $\mathfrak{D}^{-1}$  به جای  $\mathfrak{D}$  هم برقرار نند.

## 2 کمیتها ی ناورد

یک نمایش  $\ell$  از گروه  $\mathcal{G}$  بر  $\mathfrak{V}$  اثر میکند. مدار متناظر با  $\phi$  (تحت گروه  $\mathcal{G}$ ) را با  $\text{or}(\phi)$  نشان میدهم:

$$\text{or}(\phi) = \{(\ell_U \phi) \mid U \in \mathcal{G}\}. \quad (8)$$

میگویم  $F(\Phi)$  (تحت گروه  $\mathcal{G}$ ) ناورد است، اگر برای هر  $U$  در  $\mathcal{G}$ ،

$$F(\ell_U \Phi) = F(\Phi). \quad (9)$$

گیرم همه ی اعضا ی  $\ell_{\mathcal{G}}$  تقارن بهنجار کنش نند، و  $F(\Phi)$  تحت  $\mathcal{G}$  ناورد است. نشان میدهم در این صورت  $\langle F(\Phi) \rangle$  را میشود با انتگرال-گیری بر فضا یی کاسته به دست آورد. این فضا یی کاسته از هر مدار  $\mathfrak{V}$  یک و فقط یک نقطه دارد. به جانشانی ی فضا یی کاسته به جای  $\mathfrak{V}$  تثبیت پیمانه میگویند.

### 3 تثبیت پیمانہ

گیریم  $h$  تابعی با دامنه  $\mathbb{V}$  است، چنان که  $h^{-1}(0)$  شامل یک و فقط یک نقطه از هر مدار  $\mathbb{V}$  است، و فقط همانی  $h^{-1}(0)$  است که اثرش بر یک عضو  $h^{-1}(0)$  در  $h^{-1}(0)$  است. در این صورت،

$$1 = \int_G dU \left| \det\{D_U[h(\ell_U \phi)]\} \right| \delta[h(\ell_U \phi)]. \quad (10)$$

( $dU$ ) اندازه  $U$  ناوردا  $U$  گروه است.  $D$  مشتق-گیری است، و  $D_U$  مشتق نسبت به  $U$  است. با تعریف  $\tilde{\phi}$  و  $\tilde{U}$  با

$$\tilde{\phi} = [h^{-1}(0)] \cap [\text{or}(\phi)], \quad (11)$$

$$\tilde{\phi} = \ell_{\tilde{U}} \phi, \quad (12)$$

$$U = U' \tilde{U}, \quad (13)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} 1 &= \int_G dU \left| \det \left( \{D_{U'}[h(\ell_{U'} \tilde{\phi})]\} [D_U(U')] \right) \right| \delta[h(\ell_{U'} \tilde{\phi})], \\ &= \int_G dU \left| \det\{D_{U'}[h(\ell_{U'} \tilde{\phi})]\} \right| \left| \det[D_U(U')] \right| \delta[h(\ell_{U'} \tilde{\phi})], \\ &= \int_G dU' \left| \det\{D_{U'}[h(\ell_{U'} \tilde{\phi})]\} \right| \delta[h(\ell_{U'} \tilde{\phi})]. \end{aligned} \quad (14)$$

متغیر  $\tilde{\phi}$  به ازای  $U'$  برابر با یک (همانی) صفر میشود. پس در ضریب  $\tilde{\phi}$  در انتگرال-ده میشود  $U'$  را برابر با یک گذاشت. همچنین، با فرض این که درمینان صفر نشود (یا جایی که درمینان صفر میشود همبند باشد)، میشود ترتیب مختصات متناظر با  $U'$  را چنان گرفت که درمینان مثبت شود. پس میشود قدر-مطلق را برداشت. به این ترتیب، با نماد-گذاری  $\mathfrak{r}$

$$(Df)(\mathfrak{r}) = [(Df)(\cdot)](\mathfrak{r}), \quad (15)$$

دیدہ میشود

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{\mathcal{G}} dU' \left[ \left( \det\{D[h(\ell, \tilde{\phi})]\} \right) (1) \right] \delta[h(\ell_{U'}, \tilde{\phi})], \\
&= \int_{\mathcal{G}} dU' \left[ \left( \det\{D[h(\ell, \ell_{U'}, \tilde{\phi})]\} \right) (1) \right] \delta[h(\ell_{U'}, \tilde{\phi})], \quad (16)
\end{aligned}$$

یا

$$1 = \int_{\mathcal{G}} dU' \left[ \left( \det\{D[h(\ell, \ell_U \phi)]\} \right) (1) \right] \delta[h(\ell_U \phi)]. \quad (17)$$

گیرم  $F(\Phi)$  ناوردا ست. دیدہ میشود

$$\begin{aligned}
\langle F(\Phi) \rangle_n &= \int_{\mathbb{V}} d\phi F(\phi) \exp[-\beta S(\phi)] \\
&\quad \int_{\mathcal{G}} dU' \left[ \det \left( \{D[h(\ell, \ell_U \phi)]\} (1) \right) \right] \delta[h(\ell_U \phi)], \\
&= \int_{\mathcal{G}} dU' \int_{\mathbb{V}} d\phi F(\phi) \exp[-\beta S(\phi)] \\
&\quad \left[ \det \left( \{D[h(\ell, \ell_U \phi)]\} (1) \right) \right] \delta[h(\ell_U \phi)], \\
&= \int_{\mathcal{G}} dU' \int_{\mathbb{V}} d(\ell_U \phi) F(\ell_U \phi) \exp[-\beta S(\ell_U \phi)] \\
&\quad \left[ \det \left( \{D[h(\ell, \ell_U \phi)]\} (1) \right) \right] \delta[h(\ell_U \phi)], \quad (18)
\end{aligned}$$

کہ با تعریفها ی

$$\text{vol}(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} dU, \quad (19)$$

$$M(\phi) = \{D[h(\ell, \phi)]\} (1), \quad (20)$$

$$\langle F(\Phi) \rangle_r = \int_{\mathbb{V}} d\phi F(\phi) \exp[-\beta S(\phi)] \{ \det[M(\phi)] \} \delta[h(\phi)] \quad (21)$$

نتیجہ میدهد

$$\langle F(\Phi) \rangle_n = \text{vol}(\mathcal{G}) \langle F(\Phi) \rangle_r. \quad (22)$$

## 4 کنشِ مئثر

از (1) و (22) دیده میشود مقدار چشم-داشتی ی یک کمیت ناوردا ی  $F(\Phi)$  را میشود با انتگرال-گیری بر یک فضا ی کاسته به دست آورد. البته ضریب  $F(\phi)$  در انتگرال-ده دیگر نمایی ی کنش نیست. میشود با وارد-کردن میدانها بی اضافی این ضریب را به شکل انتگرالِ نمایی ی یک تابعِ دیگر (بر میدانها ی اضافی) درآورد. به آن تابع کنشِ مئثر میگویم.

با استفاده از

$$\delta(x) = \int d q \exp(-\beta q_a x^a), \quad (23)$$

دیده میشود

$$\delta[h(\phi)] = \int d B \exp[-\beta B_a h^a(\phi)]. \quad (24)$$

البته (23) با یک بهنجارشِ خاص برا ی اندازه ی انتگرال-گیری درست است، و به شرطی که نما ی انتگرال-ده مهُومی ی محض باشد.  $B$  و اندازه ی متناظر با آن در (24) را چنان میگیریم که این شرطها برآورده شوند. به این ترتیب، با وارد-کردن میدانِ اضافی ی  $B$  میشود دلتا در انتگرالده ی (21) را به شکلِ انتگرالِ یک نمایی نوشت.

میآند دترمینان ی که در رابطه ی (21) آمده. برا ی نوشتنِ دترمینانِ یک عملگرِ خطی، میشود متغیرها ی گراسمانی را به کار برد (مثلن [2]). یک دسته متغیرِ گراسمانی ی  $\xi$  چیزها بی یند که با هم پادجأیجا میشوند:

$$\xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a = 0. \quad (25)$$

از جمله مجذورِ هر یک از این متغیرها صفر است. به این ترتیب هر تابع ی از این متغیرها، نسبت به هر متغیر دست-بالاتر خطی ست. انتگرال-گیری بر این متغیرها را با ویژگی ی معمولِ خطی-بودن نسبت انتگرال-ده تعریف میکنم، همراه با این که اگر انتگرال-ده انتقال یابد، انتگرال تغییر نکند. نتیجه ی این دومی آن است که

$$\int d \xi (\xi - \eta) = \int d \xi (\xi), \quad (26)$$

تثبیت پیمانانه، و تبدیل بی-آر-اس-تی

که در ترکیب با خطی-بودن انتگرال نسبت به انتگرال-ده به این مینجامد که

$$\int d\xi = 0. \quad (27)$$

به این ترتیب متناظر با تابع  $f$  از متغیرها ی گراسمانی ی  $\xi$  و  $\bar{\xi}$  و ماتریس  $\mathcal{M}$

$$\int d\bar{\xi} d\xi f(\bar{\xi}_a \mathcal{M}^a_b \xi^b) = \mathcal{F} \int d\bar{\xi} d\xi (\bar{\xi}_a \mathcal{M}^a_b \xi^b)^n, \quad (28)$$

که  $n$  تعداد  $\xi^a$  ها (برابر با تعداد  $\bar{\xi}_a$  ها) است، و  $\mathcal{F}$  ضریب جمله ی با بزرگترین درجه ( $n$ ) در  $f$  است. طرف راست رابطه ی بالا نسبت به سطرها (یا ستونها) ی  $\mathcal{M}$  پادمتقارن است، پس متناسب با دترمینان  $\mathcal{M}$  است. به این ترتیب، با بهنجارش مناسب اندازه ی انتگرال-گیری،

$$\det[M(\phi)] = \int d\bar{C} dC \exp\{-\bar{\beta} \bar{C}_a [M^a_b(\phi)] C^b\}. \quad (29)$$

روابط (24) و (29) را در (21) میگذارم:

$$\langle F(\Phi) \rangle_T = \int_{\mathbb{V}} d\phi d B d \bar{C} d C F(\phi) \exp[-\bar{\beta} S_e(\phi, B, \bar{C}, C)], \quad (30)$$

که

$$S_e(\phi, B, \bar{C}, C) = S(\phi) + B h(\phi) + \bar{C} [M(\phi)] C. \quad (31)$$

با شاخصها،

$$S_e(\phi, B, \bar{C}, C) = S(\phi) + B_a h^a(\phi) + \bar{C}_a [M^a_b(\phi)] C^b. \quad (32)$$

به  $S_e$  کنش مثر، و به متغیرها ی گراسمانی ی  $\bar{C}$  و  $C$  شبیح میگویند. از (20) دیده میشود

$$M(\phi) = [(Dh)(\phi)] \{ [D(\ell.\phi)](1) \}, \quad (33)$$

که با تعریف

$$\ell_T \phi = [D(\ell.\phi)](1), \quad (34)$$

میشود

$$M(\phi) = [(Dh)(\phi)](\ell_T \phi). \quad (35)$$

با شاخصها،

$$M^a_b(\phi) = [(D_i h^a)(\phi)](\ell_{T_b} \phi^i). \quad (36)$$

به این ترتیب،

$$S_e(\phi, B, \bar{C}, C) = S(\phi) + B h(\phi) + \bar{C} [(Dh)(\phi)](\ell_T \phi) C. \quad (37)$$

با شاخصها،

$$S_e(\phi, B, \bar{C}, C) = S(\phi) + B_a h^a(\phi) + \bar{C}_a [(D_i h^a)(\phi)](\ell_{T_b} \phi^i) C^b \quad (38)$$

## 5 تبدیل بی-آر-اس-تی

نتیجه ی تقارن کنش  $S$  تحت گروه  $G$  این است که

$$[(DS)(\phi)](\ell_T \phi) = 0. \quad (39)$$

از جمله،

$$[(DS)(\phi)](\ell_T \phi) C = 0. \quad (40)$$

اثر تبدیل گراسمانی  $Q$  بر  $\phi$  را چنین تعریف میکنم.

$$Q \phi = (\ell_T \phi) C. \quad (41)$$

با شاخصها،

$$Q \phi^i = (\ell_{T_b} \phi^i) C^b. \quad (42)$$

تثبیت پیمانانه، و تبدیل بی-آر-اس-تی

به این ترتیب،

$$Q[S(\phi)] = 0. \quad (43)$$

میخواهم اثر  $Q$  بر متغیرها ی دیگر را چنان تعریف کنم که اثر  $Q$  بر  $S_e$  صفر شود. دیده میشود

$$Q[h(\phi)] = [(Dh)(\phi)](\ell_T \phi)C. \quad (44)$$

پس (با توجه به این که  $Q$  و  $\bar{C}$  هر-دُگراسمانی یَند)،

$$\begin{aligned} Q[\bar{C}h(\phi)] &= (Q\bar{C})h(\phi) - \bar{C}\{Q[h(\phi)]\}, \\ &= (Q\bar{C})h(\phi) - \bar{C}[(Dh)(\phi)](\ell_T \phi)C. \end{aligned} \quad (45)$$

با تعریف اثر  $Q$  بر  $\bar{C}$  به شکل

$$Q\bar{C} = -B, \quad (46)$$

دیده میشود

$$Q[\bar{C}h(\phi)] = -Bh(\phi) - \bar{C}[(Dh)(\phi)](\ell_T \phi)C. \quad (47)$$

پس،

$$S_e(\phi, B, \bar{C}, C) = S(\phi) - Q[\bar{C}h(\phi)]. \quad (48)$$

اثر  $Q$  بر جمله ی اول طرف راست صفر است: رابطه ی (43). اثر  $Q$  بر جمله ی دوم هم صفر خواهد بود، به شرطی که  $Q^2$  صفر باشد. البته انتظار میرود  $Q^2$  صفر باشد، چون  $Q$  گراسمانی ست. ولی برای تحقق این انتظار باید اثر  $Q$  بر متغیرها ی باقی-مانده مناسب تعریف شود. از (46) دیده میشود

$$QB = 0. \quad (49)$$



برای تعیین اثر  $Q$  بر  $C$  هم (42) را به کار میبریم:

$$\begin{aligned} 0 &= Q^2 \phi^i, \\ &= [D_j(\ell_{T_b} \phi^i)](\ell_{T_a} \phi^j) C^a C^b + (\ell_{T_b} \phi^i)(Q C^b), \\ &= \frac{1}{2} \{ [D_j(\ell_{T_b} \phi^i)](\ell_{T_a} \phi^j) - [D_j(\ell_{T_a} \phi^i)](\ell_{T_b} \phi^j) \} C^a C^b \\ &\quad + (\ell_{T_c} \phi^i)(Q C^c). \end{aligned} \quad (50)$$

این به کار رفته که  $(C^a C^b)$  نسبت به جایجایی شاخصها پادمتقارن است. از این که  $\ell_{T_a}$  ها نمایش جبر متناظر با گروه  $\mathcal{G}$  اند، نتیجه میشود

$$f^c{}_{ab}(\ell_{T_c} \phi^i) = -\{ [D_j(\ell_{T_b} \phi^i)](\ell_{T_a} \phi^j) - [D_j(\ell_{T_a} \phi^i)](\ell_{T_b} \phi^j) \}, \quad (51)$$

که  $f$  ثابت - ساختار جبر متناظر با  $\mathcal{G}$  است. به این ترتیب،

$$0 = (\ell_{T_c} \phi^i) \left( -\frac{1}{2} f^c{}_{ab} C^a C^b + Q C^c \right). \quad (52)$$

پس با تعریف

$$Q C^c = \frac{1}{2} f^c{}_{ab} C^a C^b, \quad (53)$$

سازگاری تضمین میشود. به  $Q$  تبدیل بی-آر-اس-تی میگویند.

## 6 پانوشتها

[1] BRST

[2] Lev V. Prokhorov & Sergei V. Shabanov; "Hamiltonian mechanics of gauge systems" (Cambridge, 2011) chapter 1