

## تانسِرِ انرژِی-تکانه III

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

سیستمها بی بررسی میشوند که لگرانژی ایشان شامل چندپایه است. تانسِرِ انرژِی-تکانه برای این سیستمها به دست میآید.

### 0 درآمد

در [1] و [2] دُشکل برای تانسِر-انرژِی-تکانه ی میدان تعریف و بررسی شد: تانسِر-انرژِی-تکانه ی کائُنیک و تانسِر-انرژِی-تکانه ی متقارن. تانسِر-انرژِی-تکانه ی متقارن و رابطه ی آن با تانسِر-انرژِی-تکانه ی کائُنیک به چیز ی وابسته است که به آن هموردایی ی عام میگویم، به این معنی که کنش (لگرانژی) شامل فقط میدان (و مشتقها ی آن) و هندسه است. اگر هندسه به ضربِ درونی محدود شود (مثلن دستیدگی ی کنجها در آن وارد نشود)، نتیجه ی هموردایی ی عام این خواهد بود که کنش (لگرانژی ی) میدانها ی تانسری شامل فقط میدان (و مشتقها ی آن) و متریک (و مشتقها ی آن) است. اما این نتیجه برای میدانها ی سپیتری درست نیست. سپیترها بر اساس میدانپایها ی یکه-متعامد تعریف میشوند و در نتیجه در لگرانژی ی آنها این میدانپایها (چندپایها) هم وارد میشود. وقت ی کنش شامل فقط میدان و متریک باشد، تانسِر-انرژِی-تکانه ی متقارن بر حسب مشتقِ کنش نسبت به

متریک به دست میآید. اما اگر چندپایه هم در کنش وارد شده باشد، مشتقِ کنش نسبت به متریک لزومنْ خُش-تعریف نیست، چون با تغییر-دادنِ متریک چندپایه هم تغییر میکند، اما تغییرِ چندپایه به طرّ یکتا از روی تغییرِ متریک به دست نمیآید: متریک تابعِ چندپایه هست، اما این تابعیت یک-به-یک نیست و در نتیجه چندپایه تابعِ متریک نیست.

اینجا شکلِ گسترش-یافته ای از همورداییِ عام را تعریف میکنم و نشان میدهم اگر همورداییِ عام به این معنی برقرار باشد، مشتقِ کنش نسبت به متریک خُش-تعریف است. به این ترتیب تعریفِ (و ویژگیها ی) تانسِر انرژى-تکانه به این حالتها (از جمله سَپینرها) گسترش میابد.

## 1 همورداییِ عام بر حسبِ چندپایه

میدانپایه ی مختصاتی سرعتها ی خمها ی مختصاتی یَند (خمها بی که بر آنها یک مختصه با آهنگِ یک تغییر میکند و بقیه ی مختصات ثابت نَند). میدانپایه ی متریک-دِگرتی آنها بی یَند که حاصل- - ضربها یشان ثابت است. مثلثها ی متناظر با میدانپایه ی مختصاتی را با شاخصها ی پریمدار، و مثلثها ی متناظر با میدانپایه ی متریک-دِگرتی را با شاخصها ی بدون- - پریم نشان میدهم. از جمله،

$$e^a = g_{\mu'}^a dx^{\mu'}, \quad (1)$$

که  $g$  متریک است. شاخصها با متریک پایین- - بالا میروند، از جمله،

$$g_{\mu' \nu'} = g_{\mu'}^a g_{\nu'}^b g_{ab}. \quad (2)$$

دترمینانِ ماتریس ی که عنصرها یَش مثلثها ی متریک در میدانپایه ی مختصاتی یَند را با  $\mathfrak{D}$ ، و دترمینانِ ماتریس ی که عنصرها یَش  $g_{\mu'}^a$  ها یَند را با  $\mathfrak{D}_e$  نشان میدهم. دیده میشود

$$\mathfrak{D} = c(\mathfrak{D}_e)^2, \quad (3)$$

که  $c$  ثابت است، دترمینانِ ماتریس ی ست که عنصرها یَش مثلثها ی متریک در میدانپایه ی متریک-دِگرتی یَند. به این ترتیب،

$$\sqrt{|\mathfrak{D}|} = \mathfrak{D} \mathfrak{D}_e \quad (4)$$

که  $\mathfrak{D}$  ثابت است. اگر  $e^a$  ها یکبه و دُ-به-دُ بر هم عمود باشند،

$$g^{ab} = \pm \delta^{ab}, \quad (5)$$

آنگاه،

$$|c| = 1. \quad (6)$$

اگر علاوه بر این

$$\mathfrak{D}_e > 0. \quad (7)$$

آنگاه،

$$\sqrt{|\mathfrak{D}|} = \mathfrak{D}_e. \quad (8)$$

(5) و (7) را میشود با انتخاب مناسب میدانپایه ی متریک-دِکرتی برآورد.

$\mathcal{L}$  (چگالی ی لگرانژی) را تابع فقط میدان  $\psi$  (و مشتقها یَش) و میدانپایه ی متریک-دِکرتی (و مشتقها یَش) میگیریم.  $\tilde{\mathcal{L}}$  را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{L} = \mathfrak{D} \mathfrak{D}_e \tilde{\mathcal{L}}. \quad (9)$$

این در واقع هم ان تعریف ی ست که در [2] آمده.

چندپایه یکتا نیست. اگر

$$e^a = \Lambda^a_c e^c, \quad (10)$$

که  $\Lambda$  متعامد است:

$$g_{ab} \Lambda^a_c \Lambda^b_d = g_{cd}, \quad (11)$$

آنگاه

$$e^a \cdot e^b = e^a \cdot e^b. \quad (12)$$

این رابطه اگر  $\Lambda$  ثابت نباشد هم درست است.

تغییر-دادن چندپایه یک تغییر در مثلثها ی میدانِ تانسِرِ القا میکند:

$$\psi = U \psi. \quad (13)$$

رُشن است که  $U$  به  $\Lambda$  مربوط است.

یک تبدیلِ دیگرِ چندپایه تبدیل ی ست که متریک را با پیشرانِ یک تابع تبدیل میکند: اگر  $f$

یک وابریختی از فضا-زمان به فضا-زمان باشد،  $f_* e$  را چنان میگیرم که

$$\left[ \frac{\partial f^\mu}{\partial r^\alpha} \frac{\partial f^\nu}{\partial r^\beta} (f_* g)_{\mu' \nu'} \right] [f(r)] = g_{\alpha' \beta'}(r). \quad (14)$$

$$(f_* g)_{ab} = g_{ab}. \quad (15)$$

$$(f_* g)_{\mu' \nu'} = (f_* g)_{\mu'}^a (f_* g)_{\nu'}^b (f_* g)_{ab}. \quad (16)$$

البته (16) اثرِ  $f_*$  بر چندپایه را یکتا نمیدهد. اما دیده میشود اگر

$$\left[ \frac{\partial f^\mu}{\partial r^\alpha} (f_* g)_{\mu'}^a \right] [f(r)] = g_{\alpha'}^a(r), \quad (17)$$

آنگاه (16) برآورده میشود.

هموردایی یِ عام را به شکلِ دُ شرط تعریف میکنم:

**a** اگر چندپایه و میدان با، به ترتیب، (10) و (13) تبدیل شوند، کنش ( $S$ ) تغییر نمیکند.

**b** اگر چندپایه با (16)، یا در حالتِ خاص (17)، تبدیل شود، و ناحیه یِ انتگرالگیری برای یِ

کنش با  $f$  تبدیل شود، کنش تغییر نمیکند.

شرطِ **a** این است که

$$S(\underline{e}, \psi) = S(e, \psi), \quad (18)$$

یا بر حسبِ چگالی-ی-لگرانژی:

$$\mathcal{L}(\underline{e}, \psi) = \mathcal{L}(e, \psi). \quad (19)$$

رُشن است که

$$\mathfrak{D}_e = \mathfrak{D}_{e.} \quad (20)$$

به این ترتیب (19) همترز است با

$$\tilde{\mathcal{L}}(e, \psi) = \tilde{\mathcal{L}}(e, \psi). \quad (21)$$

اگر  $\Lambda$  یک تبدیل متعامد پیوسته-به-همانی باشد

$$\Lambda = \exp(\theta). \quad (22)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \theta^{ab} M_{ba}, \quad (23)$$

که  $M$  مولد تبدیل است.  $M_{ba}$  ها یک پایه برای ماتریسها ی پادمتقارن میسازند:

$$(M_{ab})^c{}_d = g_{ad} \delta_b^c - g_{bd} \delta_a^c. \quad (24)$$

اگر  $\psi$  یک جواب معادله ی حرکت باشد، تغییر کنش تا مرتبه ی یک (جز بخش ی که از مرز ناحیه ی انتگرالگیری میثاید) نسبت به تغییر  $\psi$  صفر است. به این ترتیب با  $\Lambda$  به شکل (22) و (23)، وقت ی  $\theta$  کوچک است،

$$\begin{aligned} 0 &= [S(e, \psi) - S(e, \psi)]_{\text{in}} + o(\theta), \\ &= [S(e, \psi) - S(e, \psi)]_{\text{in}} + o(\theta). \end{aligned} \quad (25)$$

شاخص  $\text{in}$  یعنی بخش ی از تغییر که از مرز ناحیه ی انتگرالگیری میثاید در نظر گرفته نشده. البته رابطه ی بالا وقت ی درست است که  $\psi$  معادله ی حرکت را برآورد. به این ترتیب، این رابطه را میشود چنین نوشت.

$$\left( \frac{\delta S}{\delta \theta^{ab}} \right)_{\text{in}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \quad (26)$$

نماد  $\stackrel{\text{ns}}{=}$  یعنی دُ-طرف آن رو ی لاک (وقت ی معادله ی حرکت برآورده میشود) برابر نَد. رُشن است که

$$\frac{\delta S}{\delta \theta^{ab}} = \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}^c} \frac{\partial g_{\mu\nu}^c}{\partial \theta^{ab}}. \quad (27)$$

از (1) و (10) و (22) و (23) هم دیده میشود

$$\frac{\partial g_{\mu'}^c}{\partial \theta^{ab}} = \frac{1}{2} (M_{ba})^c_d g_{\mu'}^d. \quad (28)$$

به این ترتیب،

$$\left( \frac{\delta S}{\delta g_{\mu'}^c} \right)_{\text{in}} g_{\mu'}^d (M_{ba})^c_d \stackrel{\text{ns}}{=} 0, \quad (29)$$

که با استفاده از (24) نتیجه میدهد

$$\left( \frac{\delta S}{\delta g_{\mu'}^b} \right)_{\text{in}} g_{a\mu'} \stackrel{\text{ns}}{=} \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\mu'}^a} \right)_{\text{in}} g_{b\mu'}. \quad (30)$$

## 2 تانسِرِ انرژى-تکانه

تعریف میکنم

$$\tilde{T}_{ab} = \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\mu'}^a} \right)_{\text{in}} g_{b\mu'}. \quad (31)$$

رابطه ی (30) یعنی  $\tilde{T}$  روی لاک متقارن است:

$$\tilde{T}_{ba} \stackrel{\text{ns}}{=} \tilde{T}_{ab}. \quad (32)$$

از (31) دیده میشود

$$\tilde{T}^{\rho'\sigma'} = g^{a\rho'} \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\sigma'}^a} \right)_{\text{in}}, \quad (33)$$

و البته

$$\tilde{T}^{\sigma'\rho'} \stackrel{\text{ns}}{=} \tilde{T}^{\rho'\sigma'}. \quad (34)$$

از (33) دیده میشود

$$\left( \frac{\delta S}{\delta g_{\sigma'}^b} \right)_{\text{in}} = g_{b\rho'} \tilde{T}^{\rho'\sigma'}, \quad (35)$$

که با استفاده از تقارن  $T$  (روی لاک) نتیجه میدهد

$$\left( \frac{\delta S}{\delta g_{\sigma'}^b} \right)_{\text{in}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{1}{2} T^{\mu' \nu'} (g_{b \mu'} \delta_{\nu'}^{\sigma'} + g_{b \nu'} \delta_{\mu'}^{\sigma'}). \quad (36)$$

این هم، با استفاده از

$$\frac{\partial g_{\mu' \nu'}}{\partial g_{\sigma'}^b} = g_{b \mu'} \delta_{\nu'}^{\sigma'} + g_{b \nu'} \delta_{\mu'}^{\sigma'}, \quad (37)$$

نتیجه میدهد

$$\left( \frac{\delta S}{\delta g_{\sigma'}^b} \right)_{\text{in}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{1}{2} T^{\mu' \nu'} \frac{\partial g_{\mu' \nu'}}{\partial g_{\sigma'}^b}. \quad (38)$$

این رابطه نشان میدهد روی لاک، تغییر کنش ناشی از تغییر فقط متلفها ی متریک است، یعنی اگر چارپایه تغییر کند ولی متریک تغییر نکند کنش تغییر نمیکند. به این ترتیب، روی لاک مشتق کنش نسبت به متریک خُش- تعریف است:

$$\left( \frac{\delta S}{\delta g_{\mu' \nu'}} \right)_{\text{in}} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{1}{2} T^{\mu' \nu'}. \quad (39)$$

از اینجا تانسُر انرژی-تکانه را مشابه با وقت ی بستگی کنش به چارپایه از طریق فقط متریک است تعریف میکنم:

$$\begin{aligned} T^{\mu' \nu'} &\stackrel{\text{ns}}{=} \frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\mu' \nu'}} \right)_{\text{in}}, \\ &\stackrel{\text{ns}}{=} \frac{1}{\mathfrak{D}_e} g^{a \mu'} \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\nu'}^a} \right)_{\text{in}}, \\ &\stackrel{\text{ns}}{=} \frac{1}{\mathfrak{D}_e} T^{\mu' \nu'}. \end{aligned} \quad (40)$$

به این ترتیب شرط  $\mathfrak{a}$  نتیجه میدهد تانسُر انرژی-تکانه، حتا اگر بستگی ی کنش به هندسه را نشود فقط از طریق متریک وارد کرد، دست- کم روی لاک خُش- تعریف و متقارن است.

$f$  را یک خانواده ی یک- پارامتری ی وابریختها فضا- زمان میگیرم که پیوسته به همانی ست و

نسبت به پارامتر مشتقپذیر است:

$$f^\mu(r) = r^\mu + s \xi^{\mu'}(r) + o(s). \quad (41)$$

$\xi$  را چنان میگیریم که روی مرز ناحیه ی انتگرالگیری برای کنش،  $\xi$  و تعداد کافی از مشتقها ییش صفر شود، از جمله این که روی مرز ناحیه ی انتگرالگیری تغییر چندپایه و تعداد کافی از مشتقها ییش صفر شود. شرط **b** نتیجه میدهد

$$\int \frac{dV}{\mathfrak{D}_e} \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\sigma'}^b} \right)_{in} \delta g_{\sigma'}^b = 0. \quad (42)$$

با استفاده از (38) نتیجه میشود

$$\frac{1}{2} \int \frac{dV}{\mathfrak{D}_e} T^{\mu' \nu'} \delta g_{\mu' \nu'} \stackrel{ns}{=} 0, \quad (43)$$

که با استفاده از

$$-\delta g_{\mu' \nu'} = (\nabla_{\mu'} \xi)_{\nu'} + (\nabla_{\nu'} \xi)_{\mu'}, \quad (44)$$

و تقارن  $T$  نتیجه میدهد

$$-\int dV \frac{1}{\mathfrak{D}_e} T^{\mu' \nu'} (\nabla_{\mu'} \xi)_{\nu'} \stackrel{ns}{=} 0, \quad (45)$$

یا،

$$\int dV \{ [-\nabla_{\mu'} (T \xi)]^{\mu'} + (\nabla_{\mu'} T)^{\mu' \nu'} \xi_{\nu'} \} \stackrel{ns}{=} 0. \quad (46)$$

جمله ی اول طرف چپ، به یک انتگرال بر مرز تبدیل میشود، و چون  $\xi$  بر مرز صفر است صفر میشود. رابطه ی بالا برای هر  $\xi$  (با این شرط که بر مرز  $\xi$  و تعداد کافی از مشتقها ییش صفر شود) برقرار است. پس،

$$(\nabla_{\mu'} T)^{\mu' \nu'} \stackrel{ns}{=} 0. \quad (47)$$

روش کار هم ان بود که در [2] به کار رفته بود. نتیجه هم هم ان است. ولی این نتیجه حتا اگر کنش صریحَن به چندپایه بستگی داشته باشد هم درست است.



### 3 تانسِرِ انرژِی-تکانه برای میدانِ سپینری

تعریفِ هموستار و مشتقِ هموردا برای میدانِ سپینری، در مثلث [3] آمده است. برای نمایشِ سپینری،  $U$  ی متناظر با  $\Lambda$  در (22) و (23) میشود

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^{ab}\sigma_{ba}\right). \quad (48)$$

$$\sigma_{ab} = -\frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]. \quad (49)$$

$\gamma_a$  ها ماتریسها ی دیرک [4] اند، که ثابت اند و

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2g_{ab}. \quad (50)$$

$$[\sigma_{ab}, \sigma_{cd}] = g_{ac}\sigma_{bd} - g_{bc}\sigma_{ad} + g_{ad}\sigma_{cb} - g_{bd}\sigma_{ca}. \quad (51)$$

$$\begin{aligned} [\sigma_{ab}, \gamma_c] &= g_{ac}\gamma_b - g_{bc}\gamma_a, \\ &= -[(M_{ac})_b^d - (M_{bc})_a^d]\gamma_d. \end{aligned} \quad (52)$$

مشتقِ میدانپایه با هموستار داده میشود. برای هر پایه،

$$\nabla_\mu e_\nu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} e_\rho, \quad (53)$$

یا

$$\nabla_\mu e^\rho = -\Gamma^\rho_{\mu\nu} e^\nu. \quad (54)$$

اگر هموستار با متریک سازگار باشد، در یک میدانپایه ی متریک-دکرتی

$$\Gamma_{cab} = -\Gamma_{bac}. \quad (55)$$

هوستارِ سپینری برای یک هموستارِ سازگار-با-متریک تعریف میشود:

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}\Gamma_{cab}\sigma^{bc}. \quad (56)$$

مشتقِ هموردا یِ سِپینرِ  $\psi$  چنین میشود.

$$\nabla_a \psi = (\partial_a + \Gamma_a) \psi. \quad (57)$$

همچنین،

$$\nabla_a \bar{\psi} = \partial_a \bar{\psi} - \bar{\psi} \Gamma_a. \quad (58)$$

مشتق و مشتقِ هموردا یِ ماتریسها یِ دیرک [4] هم صفر است.  
چگالی یِ-لگرانژی برای میدانِ سِپینری یِ آزاد چنین است.

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bar{\psi}(\gamma^a \nabla_a - m)\psi, \quad (59)$$

که  $m$  یک ثابت است. بستگی یِ  $\tilde{\mathcal{L}}$  به چندپایه از طریقِ مشتقِ هموردا است:

$$\nabla_a \psi = g_a^{\mu'} \partial_{\mu'} \psi + \Gamma_a \psi. \quad (60)$$

بستگی یِ  $\mathcal{L}$  به چندپایه هم از طریقِ  $\tilde{\mathcal{L}}$  و  $\mathcal{D}_e$  است.

معادلاتِ حرکت میشوند

$$(\gamma^a \nabla_a - m)\psi \stackrel{\text{ns}}{=} 0, \quad (61)$$

$$\bar{\psi}(\tilde{\nabla}_a \gamma^a + m) \stackrel{\text{ns}}{=} 0, \quad (62)$$

که تعریف شده

$$\mathfrak{X} \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \mathfrak{X}. \quad (63)$$

از (61) نتیجه میشود چگالی یِ-لگرانژی روی لاک صفر است:

$$\tilde{\mathcal{L}} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \quad (64)$$

وردشِ کنش نسبت به چارپایه چنین میشود.

$$\delta S = \int dV \left( \frac{\delta \mathcal{D}_e}{\mathcal{D}_e} \tilde{\mathcal{L}} + \delta \tilde{\mathcal{L}} \right). \quad (65)$$

با استفاده از (64)، جمله ی اول طرف راست روی لاک صفر است. پس

$$\delta S \stackrel{\text{ns}}{=} \int dV \bar{\psi} \gamma^a [(\delta g_a^{\mu'}) \partial_{\mu'} + \delta \Gamma_a] \psi. \quad (66)$$

هموستار لوی-چیویتا [5] چنین است.

$$\begin{aligned} \Gamma_{cab} = & \frac{1}{2} [(g_c^{\mu'} \partial_a g_{b\mu'} - g_b^{\mu'} \partial_a g_{c\mu'}) \\ & + g_a^{\mu'} (\partial_b g_{c\mu'} - \partial_c g_{b\mu'}) + (g_c^{\mu'} \partial_b - g_b^{\mu'} \partial_c) g_{a\mu'}]. \end{aligned} \quad (67)$$

از این، (56)، و پادتقارن  $\sigma$  نتیجه میشود

$$\gamma^a \Gamma_a = \frac{1}{2} \gamma^a \sigma^{bc} (g_c^{\mu'} \partial_a g_{b\mu'} + g_a^{\mu'} \partial_b g_{c\mu'} + g_c^{\mu'} \partial_b g_{a\mu'}). \quad (68)$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \gamma^a \delta \Gamma_a = & \frac{1}{2} \gamma^a \sigma^{bc} [g_c^{\mu'} \partial_a (\delta g_{b\mu'}) + g_a^{\mu'} \partial_b (\delta g_{c\mu'}) + g_c^{\mu'} \partial_b (\delta g_{a\mu'})] \\ & + O_1(\partial e), \end{aligned} \quad (69)$$

که  $O_1(\mathfrak{X})$  چیزی است که نسبت به  $\mathfrak{X}$  خطی است. (69) را در (66) میگذارم و با انتگرالگیری ی جزئی-به-جزئی مشتق را از وردش چارپایه برمیدارم. جمله ی مرزی ی حاصل، در  $(\delta S)_{\text{in}}$  وارد نمیشوند. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} (\delta S)_{\text{in}} \stackrel{\text{ns}}{=} \int dV \{ & \bar{\psi} \gamma^a (\delta g_a^{\mu'}) \partial_{\mu'} \psi - \frac{1}{2} [g_c^{\mu'} (\delta g_{b\mu'}) \partial_a (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{bc} \psi) \\ & + g_a^{\mu'} (\delta g_{c\mu'}) \partial_b (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{bc} \psi) + g_c^{\mu'} (\delta g_{a\mu'}) \partial_b (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{bc} \psi)] \\ & + O_1(\partial e) \}, \end{aligned} \quad (70)$$

که با استفاده از

$$0 = g_a^{\nu'} (\delta g_{b\nu'}) + (\delta g_a^{\nu'}) g_{b\nu'}, \quad (71)$$

و در نتیجه

$$\delta g_a^{\mu'} = -g_a^{\nu'} g^{b\mu'} (\delta g_{b\nu'}), \quad (72)$$

میشود

$$\begin{aligned}
 (\delta S)_{\text{in}} \stackrel{\text{ns}}{=} & - \int dV \left\{ g_a^{\nu'} g^{b\mu'} (\delta g_{b\nu'}) \bar{\psi} \gamma^a \partial_{\mu'} \psi + \frac{1}{2} [g_c^{\mu'} (\delta g_{b\mu'}) \partial_a (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{bc} \psi) \right. \\
 & + g_a^{\mu'} (\delta g_{c\mu'}) \partial_b (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{bc} \psi) + g_c^{\mu'} (\delta g_{a\mu'}) \partial_b (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{bc} \psi)] \\
 & \left. + O_1(\partial e) \right\}. \quad (73)
 \end{aligned}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\delta S}{\delta g_{d\sigma'}} \right)_{\text{in}} \stackrel{\text{ns}}{=} & - (\partial \mathcal{D}_e) \left\{ g_a^{\sigma'} g^{d\mu'} \bar{\psi} \gamma^a \partial_{\mu'} \psi + \frac{1}{2} [g_c^{\sigma'} \partial_a (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{dc} \psi) \right. \\
 & \left. + g_a^{\sigma'} \partial_b (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{bd} \psi) + g_c^{\sigma'} \partial_b (\bar{\psi} \gamma^d \sigma^{bc} \psi)] \right\} + O_1(\partial e), \quad (74)
 \end{aligned}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}
 T^{\rho'\sigma'} \stackrel{\text{ns}}{=} & - \bar{\psi} \gamma^{\sigma'} \partial^{\rho'} \psi - \frac{1}{2} g_d^{\rho'} \{ g_c^{\sigma'} \partial_a (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{dc} \psi) \\
 & + g_a^{\sigma'} \partial_b [\bar{\psi} (\gamma^a \sigma^{bd} + \gamma^d \sigma^{ba}) \psi] \} + O_1(\partial e). \quad (75)
 \end{aligned}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
 \partial_a (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{dc} \psi) & = [(\partial_a \bar{\psi}) \gamma^a] \sigma^{dc} \psi + \bar{\psi} ([\gamma^a, \sigma^{dc}] + \sigma^{dc} \gamma^a) \partial_a \psi, \\
 & = \bar{\psi} \overleftarrow{\partial}_a \gamma^a \sigma^{dc} \psi + \bar{\psi} \sigma^{dc} \gamma^a \partial_a \psi \\
 & + \bar{\psi} (g^{ac} \gamma^d - g^{ad} \gamma^c) \partial_a \psi. \quad (76)
 \end{aligned}$$

از معادلات حرکت نتیجه میشود

$$(\gamma^a \partial_a - m) \psi \stackrel{\text{ns}}{=} O_1(\partial e). \quad (77)$$

$$\bar{\psi} (\overleftarrow{\partial}_a \gamma^a + m) \stackrel{\text{ns}}{=} O_1(\partial e). \quad (78)$$

به این ترتیب،

$$\partial_a (\bar{\psi} \gamma^a \sigma^{dc} \psi) \stackrel{\text{ns}}{=} \bar{\psi} (\gamma^d \partial^c - \gamma^c \partial^d) \psi + O_1(\partial e). \quad (79)$$

همچنین،

$$\gamma^a \sigma^{bd} + \gamma^d \sigma^{ba} = g^{ad} \gamma^b - \frac{1}{2}(g^{ab} \gamma^d + g^{db} \gamma^a), \quad (80)$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} \partial_b [\bar{\psi}(\gamma^a \sigma^{bd} + \gamma^d \sigma^{ba})\psi] \stackrel{\text{ns}}{=} & -\frac{1}{2} \bar{\psi} [(\bar{\partial}^d \gamma^a + \gamma^a \partial^d) + (\bar{\partial}^a \gamma^d + \gamma^d \partial^a)] \psi \\ & + O_1(\partial e). \end{aligned} \quad (81)$$

(79) و (81) را در (75) میگذارم. نتیجه میشود

$$T^{\rho' \sigma'} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{1}{4} \bar{\psi} (\bar{\partial}^{\rho'} \gamma^{\sigma'} + \bar{\partial}^{\sigma'} \gamma^{\rho'} - \gamma^{\sigma'} \partial^{\rho'} - \gamma^{\rho'} \partial^{\sigma'}) \psi + O_1(\partial e). \quad (82)$$

در هر نقطه میشود چارپایه را چنان گرفت که مشتق آن در آن نقطه صفر شود. در این صورت مشتق هموردا هم ان مشتق پارئی میشود. به این ترتیب در آن نقطه میشود در طرف راست رابطه ی بالا جمله ی آخر را حذف کرد و مشتقها را مشتق هموردا کرد. پس،

$$T^{\rho' \sigma'} \stackrel{\text{ns}}{=} \frac{1}{4} \bar{\psi} (\bar{\nabla}^{\rho'} \gamma^{\sigma'} + \bar{\nabla}^{\sigma'} \gamma^{\rho'} - \gamma^{\sigma'} \nabla^{\rho'} - \gamma^{\rho'} \nabla^{\sigma'}) \psi. \quad (83)$$

این برابری مستقل-از-پایه است، و در هر نقطه ای میشود به آن رسید. پس مستقل-از-نقطه هم هست.

## 4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «تانسِر انرژى-تکانه I»؛ (2005/01/07) X1-028

[2] محمد خرمی؛ «تانسِر انرژى-تکانه II»؛ (2005/02/20) X1-029

[3] محمد خرمی؛ «سپینرها و فضا ی خمیده»؛ (2016/07/28) X1-117

[4] Dirac

[5] Levi-Civita