

تخمین جرم و شعاع ستاره‌ها ی تبهگن

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

تخمین ی برای جرم و شعاع ستاره‌ها ی تبهگن، بر اساس ثابت‌ها ی بنیادی و جرم ذره‌ها ی سازنده به دست می‌آید.

0 درآمد

ستاره ی تبهگن ستاره ای ست که چگالی یش آن قدر زیاد است که فاصله ی نعی ی ذره‌ها از هم با طول - مَج دُبُرُی [1] ذره‌ها قابل - مقایسه است. البته ممکن است ستاره چند نُع ذره داشته باشد، مثل یک کوتوله ی سفید که ذره‌ها ی سازنده اش عمدتَن الکتُرُن، و هسته ی هیلیم 4 اند. در این صورت ممکن است شرط تبهگنی برای بعضی ذره‌ها برآورده شده باشد و برای بعضی ی ن. وقت ی چگالی چنان زیاد است که ستاره تبهگن است، آثار کوانتمی ی تشخیص - ناپذیری ی ذره‌ها مهم میشود. این آثار، اگر ذره‌ها بُزُن باشند به کاهش فشار (یک برهمکنش مئثر رباینده)، و اگر ذره‌ها فرمیون باشند به افزایش فشار (یک برهمکنش مئثر راننده) مینجامد، فصل 5 از [2]. از این پس بحث را محدود میکنم به ستاره‌ها ی تبهگن فرمیونی. در چنین ستاره‌ها یی وقت ی دما (در مقایسه با دما ی فرمی [3]) کم شود، فشار هم ان فشار ناشی از تشخیص - ناپذیری ی کوانتمی ی فرمیونها ی یکسان

است، که به آن فشار نقطه-ی-صفر میگویند. فرض میکنم ستاره در چنین حال ی ست. این فشار باید با گرانش ستاره به تعادل برسد، تا ستاره پایدار بماند. محاسبه ی این تعادل مفصل است. یک شکل ساده-شده آش در فصل 8 از [2] آمده. اما نتیجه ی نهایی ساده است: وقت ی آثار نسبی در نظر گرفته شوند، برای ستاره یک حد-بالاتر ی جرم و یک شعاع (اندازه ی) نُعی به دست میآید. در ستاره‌ها یی که جرم شان بیش از آن حد-بالا باشد، فشار نقطه-ی-صفر نمیتواند با گرانش مقابله کند و ستاره میرمبد.

اینجا هدف تخمین حد-بالاتر ی جرم و اندازه ی نُعی ی ستاره با محاسبه‌ها ی سرانگشتی، و بیان این کمیتها بر حسب ثابتها ی بنیادی و جرم ذره‌ها ی سازنده ی ستاره است.

1 فشار نقطه-ی-صفر

حالت پایه ی یک گاز کامل فرمی این است که فرمیها ترازها ی انرژی ی تک-ذره‌ای را به ترتیب از پایین پر میکنند. تعداد ترازها ی پر شده با تعداد فرمیها برابر است. انرژی ی بالاترین تراز پر شده انرژی ی فرمی [3]، و تکانه ی متناظر با این تراز تکانه ی فرمی [3] است. برای ذره در جعبه ای به حجم V ، چنان که مثلن در فصل 5 از [2] آمده، تعداد ترازها ی با تکانه ی نابزرگتر از p_0 میشود

$$N(p_0) = g V \frac{\tilde{V}(p_0)}{h^D}, \quad (1)$$

که $N(p_0)$ تعداد ترازها ی با تکانه ی نابزرگتر از p_0 ، g چندگانه‌گی ی ناشی از درجه‌ها ی درونی (مثلن اسپین)، h ثابت پلانک [4]، و D بُعد فضا است. $\tilde{V}(p_0)$ حجم ناحیه ای که در فضا ی تکانه است که در آن اندازه ی تکانه از p_0 کوچکتر است. N (تعداد فرمیها) باید با $N(p_F)$ برابر باشد، که شاخص F نشانه ی فرمی [3] ست. از اینجا،

$$N \cong V \left(\frac{p_F}{h} \right)^D. \quad (2)$$

یعنی $X \cong Y$ و Y تا حد یک ضریب بیبُعد مستقل از متغیرها با هم برابرند. در مُرد (2)،

این ضریب $(g V_D)$ است، که V_D حجم یک گوی واحد D بُعدی ست. با تعریف

$$n = \frac{N}{V}, \quad (3)$$

$$\lambda_F = \frac{h}{p_F}, \quad (4)$$

رابطه ی (2) میشود

$$n \lambda_F^D \stackrel{\circ}{=} 1. \quad (5)$$

n چگالی ی ذرات است. λ_F طول- موج فرمی [3] ست: طول- موج [1] دُبری متناظر با تکانه ی فرمی [3].

برای چنین گاز ی P (فشار) میشود (مثلن فصل 5 از [2])

$$P = \frac{g}{D} \int \frac{d^D p}{h^D} f(p) p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}, \quad (6)$$

که ε انرژی (ی تک- ذره)، و f کسر اشغال تراز است. در حالت کاملن تبه گن، کسر اشغال چنین است.

$$f(p) = \begin{cases} 1, & p < p_F \\ 0, & p > p_F \end{cases}. \quad (7)$$

از

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (8)$$

که m جرم ذره است، دیده میشود

$$p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = \frac{p^2 c}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}. \quad (9)$$

از جمله برای حدها ی نانسیتی (N) و فرانسیتی (R) نتیجه میشود

$$p \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_N = \frac{p^2}{m}, \quad (10)$$

$$p \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_R = p c, \quad (11)$$

که میشود آنها را در

$$p \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_s = (m c^2) \left(\frac{p}{m c} \right)^{a_s} \quad (12)$$

خلاصه کرد، که

$$a_N = 2. \quad (13)$$

$$a_R = 1. \quad (14)$$

(12) و (7) را در (6) میگذارم. نتیجه میشود

$$P_s \stackrel{\circ}{=} (m c^2) \left(\frac{h}{m c} \right)^{a_s} \left(\frac{p_F}{h} \right)^{D+a_s}. \quad (15)$$

با استفاده از (5)،

$$P_s \stackrel{\circ}{=} (m c^2) \left(\frac{h}{m c} \right)^{a_s} n^{1+(a_s/D)}. \quad (16)$$

در حالت کلی انتگرالده ی طرف راست (6) نسبت به جرم نزولی ست، مگر ذره فرانسیتی باشد. در واقع برای ذره‌ها ی نانسیتی این انتگرالده با عکس جرم متناسب است. پس در چگالی-ی-ذره‌ها ی یکسان، فشار نقطه-ی-صفر برای ذره‌ها ی کمجرمتر بیشتر است. این است که اگر بیش از یک گونه فرمین در جعبه باشد، اگر چگالی ی تعداد فرمینها با هم قابل-مقایسه باشد ولی جرم یک ی از فرمینها بسیار کمتر از جرم فرمینها ی دیگر باشد، عملن این فرمین با کمترین جرم است که فشار نقطه-ی-صفر را تخمین میکند (مگر گونه ای جز آن فرانسیتی شده باشد). به هم ین خاطر به این سبکترین فرمین جعبه ذره ی فشارساز میگوییم.

2 فشار و گرانش

شتاب ی گرانشی ی یک جسم کروی-متقارن، در فاصله ی r از مرکز جسم $g(r)$ است، که

$$g(r) = \frac{G M(r)}{r^{D-1}}. \quad (17)$$

G ثابت جهانی ی گرانش است. $M(r)$ هم جرم بخش ی از جسم است که درون گوی ی به شعاع r است. شرط تعادل برای ی برای یک لایه ای نازک کروی از جسم به فاصله ی r از مرکز، میشود

$$\frac{d[P(r)]}{dr} = -\rho(r) g(r), \quad (18)$$

که $P(r)$ و $\rho(r)$ ، به ترتیب، فشار و چگالی ی جرم در فاصله ی r از مرکزند. (17) شتاب گرانشی را بر حسب چگالی میدهد. به این ترتیب (18) یک رابطه بین فشار و چگالی میشود. برای ی به-دست-آوردن فشار و چگالی یک رابطه ی دیگر هم لازم است، که معادله ی حالت ماده است. اما مقدار نُعی ی فشار را میشود ساده‌تر تخمین زد. (18) را چنین مینویسم.

$$\frac{P}{R} \stackrel{\circ}{=} \rho g, \quad (19)$$

که همه ی مقادارها نُعی یند و R شعاعِ ستاره است. همچنین،

$$M \stackrel{\circ}{=} \rho R^D. \quad (20)$$

$$g \stackrel{\circ}{=} \frac{GM}{R^{D-1}}. \quad (21)$$

به این ترتیب،

$$P \stackrel{\circ}{=} \frac{GM^2}{R^{2D-2}}. \quad (22)$$

اگر بیش از یک گونه ذره در کار باشد، و چگالی ی تعداد برا ی گونه ها ی مختلف قابل - مقایسه باشد، پرجرمترین ذره است که جرم ستاره را تعیین میکند. به پرجرمترین ذره ی جرمساز میگویم.

3 تعادل

شرط تعادل هم ان رابطه ی (22) است، که در آن P در رژیمها ی مختلف از (16) به دست میآید. مشخصات ذره ی جرمساز را با شاخص 1، و مشخصات ذره ی فشارساز را با شاخص 2 نشان میدهم. چگالی ی تعداد برا ی همه ی ذره ها را با ν ، و کسر تعداد ذرات از گونه ی i را با x_i نشان میدهم. به این ترتیب،

$$n_i = x_i \nu. \quad (23)$$

3.1 جرم

با استفاده از

$$M \stackrel{\circ}{=} n_1 m_1 R^D, \quad (24)$$

شرط تعادل میشود

$$GM^2 \left(\frac{n_1 m_1}{M} \right)^{2-(2/D)} \stackrel{\circ}{=} (m_2 c^2) \left(\frac{h}{m_2 c} \right)^{a_s} n_2^{1+(a_s/D)}. \quad (25)$$

از این به بعد هم چیز را در بُعد 3 مینویسم:

$$\frac{G}{hc} (m_1 x_1)^{4/3} M^{2/3} \nu^{4/3} \stackrel{\circ}{=} \left(\frac{h}{m_2 c} \right)^{a_s-1} x_2^{1+(a_s/3)} \nu^{1+(a_s/3)}. \quad (26)$$

تخمین جرم و شعاع ستاره‌ها ی تبهگن

از این رابطه دیده میشود اگر M از یک مقدار M_c خیل ی کوچکتر باشد، a_s برابر 2 است (حد نانسیتی)، و ν با M^2 متناسب است. وقت ی M بزرگ میشود ν هم بزرگ میشود، و در نتیجه n_2 بزرگ میشود، تا جایی که p_F بسیار بزرگتر از $(m_2 c)$ شود. این حد فرانسیتی ست، که در آن a_s برابر 1 است و در نتیجه M مستقل از ν میشود. مقدار M در این حالت هم ان M_c است:

$$\frac{G}{hc} (m_1 x_1)^{4/3} M_c^{2/3} \doteq x_2^{4/3}. \quad (27)$$

پس،

$$M_c \doteq \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \left(\frac{x_2}{m_1 x_1} \right)^2. \quad (28)$$

در حالت تعادل M نمیتواند از M_c بیشتر شود. اگر M از M_c بیشتر شود تعادل به دست نمیآید. حد نانسیتی میشود

$$n_2 \doteq \left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3 \left(\frac{M}{M_c} \right)^2, \quad M \ll M_c. \quad (29)$$

این رابطه را وارون میکنم و نتیجه را کنار نتیجه ی متناظر با حد فرانسیتی میگذارم.

$$M \doteq M_c \left[\left(\frac{h}{m_2 c} \right)^3 n_2 \right]^{1/2}, \quad n_2 \ll \left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3. \quad (30)$$

$$M \approx M_c, \quad n_2 \gg \left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3. \quad (31)$$

$$M \leq M_c. \quad (32)$$

3.2 شعاع

از (24) دیده میشود

$$\begin{aligned} R^3 &\doteq \frac{M}{m_1 n_1}, \\ &\doteq \left(\frac{h}{m_2 c} \right)^3 \frac{M}{M_c} \frac{M_c x_2}{m_1 x_1} \left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3 \frac{1}{n_2}, \end{aligned} \quad (33)$$

که با تعریف

$$R_0 \doteq \left(\frac{M_c x_2}{m_1 x_1} \right)^{1/3} \frac{h}{m_2 c}, \quad (34)$$

میشود

$$R \doteq R_0 \left[\frac{M}{M_c} \left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3 \frac{1}{n_2} \right]^{1/3}. \quad (35)$$

این را در (30) و (31) مینشانم.

$$R \doteq R_0 \left[\left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3 \frac{1}{n_2} \right]^{1/6}, \quad n_2 \ll \left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3. \quad (36)$$

$$R \doteq R_0 \left[\left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3 \frac{1}{n_2} \right]^{1/3}, \quad n_2 \gg \left(\frac{m_2 c}{h} \right)^3. \quad (37)$$

R_0 کمینه یا بیشینه شعاع نیست، بل که شعاعی است که تغییر رفتار از نانسیتی به فرانسیتی را تعیین میکند.

3.3 مقیاسها و تعداد ذرهها

جرم پلانک [4] را با M_P نشان میدهم:

$$M_P = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2}. \quad (38)$$

جرم پلانک [4] را معمولن با \hbar به جای h تعریف میکنند. اما برای برابریها تا حد یک ثابت عددی ضربی، اگر به جای \hbar در (38) مقدار h به کار برود هم مهم نیست. تعریف میکنم

$$m'_1 = \frac{m_1 x_1}{x_2}. \quad (39)$$

λ_2 (طول - موج کامپتن [5] ذره ی فشارساز) هم چنین است.

$$\lambda_2 = \frac{\hbar}{m_2 c}. \quad (40)$$

این را هم معمولن با \hbar به جای h تعریف میکنند. اما برای برابریها تا حد یک ثابت عددی ضربی، اگر به جای \hbar در (40) مقدار h به کار برود هم مهم نیست. از (28) و (35) نتیجه میشود

$$M_c \doteq \left(\frac{M_P}{m'_1} \right)^3 m'_1. \quad (41)$$

$$R_0 \doteq \frac{M_P}{m'_1} \lambda_2. \quad (42)$$

برای N_1 (تعداد ذرهها ی جرمساز):

$$M = N_1 m_1. \quad (43)$$

تعریف میکنم

$$N'_1 = \frac{M}{m'_1}. \quad (44)$$

به این ترتیب برای ستاره ی تبهگن ی که جرم ش از مرتبه ی جرم بحرانی ست،

$$N'_1 \cong \left(\frac{M_P}{m'_1} \right)^3. \quad (45)$$

$$R \cong (N'_1)^{1/3} \lambda_2. \quad (46)$$

نَعْن x_1 و x_2 زیاد با 1 فرق ندارند. پس در تخمین میشود به جا ی کمیتها ی پریمدار کمیتها ی بدون پریم را به کار برد. پس برای ستاره ی تبهگن ی که جرم ش از مرتبه ی جرم بحرانی ست،

$$N \cong \left(\frac{M_P}{m_1} \right)^3. \quad (47)$$

$$M \cong \left(\frac{M_P}{m_1} \right)^3 m_1. \quad (48)$$

$$R \cong \frac{M_P}{m_1} \lambda_2. \quad (49)$$

N تعداد ذرها ست. تعداد ذرها و جرم را عملن فقط جرم ذره ی جرمساز تعیین میکند. شعاع را هم جرم ذره ی جرمساز و هم جرم ذره ی فشارساز تعیین میکند.

4 عدد

ستاره‌ها ی تبهگن ی که فعلن شناخته شده اند، یا کوتوله ی سفید ند یا ستاره ی نوترنی. در کوتوله‌ها ی سفید، ذره ی جرمساز هلیم 4 و ذره ی فشارساز الکترون است. در ستاره‌ها ی نوترنی ذره ی جرمساز نوترن و ذره ی فشارساز هم نوترن است. مسئله را ساده تر کنم. در هرذ ذره ی جرمساز را نوترن (یا پرتن) میگیرم. جرم نوترن تقریبن با جرم پرتن برابر است. جرم هلیم 4 هم 4 برابر جرم نوترن (یا پرتن) است). به این ترتیب،

$$m_1 c^2 \cong 1 \text{ GeV}. \quad (50)$$

برای جرم پلانک [4] هم،

$$M_P c^2 \cong 10^{19} \text{ GeV}. \quad (51)$$

به این ترتیب،

$$N \stackrel{\circ}{=} 10^{57}. \quad (52)$$

$$M \stackrel{\circ}{=} 10^{30} \text{ kg}. \quad (53)$$

10^{30} kg ضمنن از مرتبه ی جرم خورشید است. حد بالا ی جرم برای کوتوله‌ها ی سفید و ستاره‌ها ی نوترنی از یک مرتبه است: از مرتبه ی جرم خورشید. تعداد ذره‌ها ی کوتوله‌ها ی سفید و ستاره‌ها ی نوترنی هم از یک مرتبه است: از مرتبه ی تعداد ذره‌ها ی خورشید، که 10^{57} است:

$$N \stackrel{\circ}{=} N_{\odot}. \quad (54)$$

$$M \stackrel{\circ}{=} M_{\odot}. \quad (55)$$

برای شعاع هم،

$$R \stackrel{\circ}{=} 10^{19} \lambda_2. \quad (56)$$

ذره‌ها ی فشارساز کوتوله‌ها ی سفید خیل ی کمجرمتر از ذره‌ها ی فشارساز ستاره‌ها ی نوترنی یند، 2000 بار. پس طول-موج کامپتن [5] برای ذره‌ها ی فشارساز کوتوله‌ها ی سفید خیل ی بیشتر است، 2000 بار. طول-موج کامپتن [5] الکترون و نوترن را با به ترتیب λ_e و λ_n نشان میدهم.

$$\lambda_e \stackrel{\circ}{=} 10^{-12} \text{ m}. \quad (57)$$

$$\lambda_n \stackrel{\circ}{=} 10^{-15} \text{ m}. \quad (58)$$

به این ترتیب،

$$R \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 10^4 \text{ km}, & \text{کوتوله ی سفید} \\ 10 \text{ km}, & \text{ستاره ی نوترنی} \end{cases} \quad (59)$$

شعاع نعی ی کوتوله‌ها ی سفید، از مرتبه ی شعاع زمین است.

در ستاره‌ها ی تبهگن ی که فعلن شناخته شده اند، جرم ذره ی جرمساز از مرتبه ی $(\text{GeV } c^{-2})$ اگر ذره ی جرمساز سبکتر باشد، جرم بحرانی بیشتر میشود. یک ستاره ی تبهگن را بررسی کنم که از کوارک آزاد ساخته شده باشد (اگر چنین چیزی ممکن باشد). جرم سبکترین کوارکها (بالا و پایین)

تخمین جرم و شعاع ستاره‌ها ی تبه‌گن

بین $(1 \text{ MeV } c^{-2})$ تا $(10 \text{ MeV } c^{-2})$ است. با انتخاب مقدار اخیر برای جرم ذره ی جرم‌ساز و فشارساز، اینها نتیجه میشود.

$$N \cong 10^{63}. \quad (60)$$

$$M \cong 10^{34} \text{ kg}. \quad (61)$$

$$R \cong 10^5 \text{ km}. \quad (62)$$

حد جرم برای چنین ستاره ی فرضی یی $(10^4 M_{\odot})$ است.

5 پانوشتها

[1] de Broglie

[2] R. K. Pathria & Paul D. Beale; "statistical mechanics" 3rd edition (Elsevier, 2011)

[3] Fermi

[4] Planck

[5] Compton