

یک ذره ی نسبیتی در میدانها ی خارجی

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

لگرانژی و معادله ی حرکت یک ذره ی نسبیتی بررسی میشود که نیرو ی وارد بر آن ناشی از میدانها ی تانسری است.

0 قراردادها

قراردادها هم ان اند که در [1] به کار رفته. منظور از جرم جرم سکون است،

$$r^0 := t, \quad (1)$$

و

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \quad (2)$$

که r^μ ها متلفه ها ی چاربردار مکان اند، و t زمان و η متریک (مینکفسکی [2]) است. بردارها ی سه متلفه ای (با متلفه ها ی فضایی) را با حروف سیاه، و ویژه زمان را با τ نمایش میدهم. شاخصها یی

یک ذره ی نسبیتی در میدانها ی خارجی

که مقادارها ی فضازمانی (از 0 تا 3) را میگیرند را با حروف یونانی و شاخصها یی که فقط مقادارها ی فضایی (از 1 تا 3) را میگیرند را با حروف لاتین نمایش میدهیم. سرعت (مشتق مکان نسبت به زمان) را با v نشان میدهیم:

$$v = \frac{dr}{dt}. \quad (3)$$

چاربردار سرعت (مشتق چاربردار مکان نسبت به ویژه زمان) را با u نشان میدهیم:

$$u := \frac{dr}{d\tau}, \quad (4)$$

که از آن نتیجه میشود

$$u = \gamma v, \quad (5)$$

که γ ضریب لُرنِتس [3] است:

$$\begin{aligned} \gamma &:= \left(1 - \frac{v \cdot v}{c^2}\right)^{-1/2}, \\ &= \frac{dt}{d\tau}, \end{aligned} \quad (6)$$

و

$$\begin{aligned} v^0 &:= \frac{dr^0}{dt}, \\ &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

رُشن است که

$$u \cdot u = -c^2. \quad (8)$$

رابطه ی E (انرژی) با تکانه

$$E = c^2 p^0 \quad (9)$$

است.

معادلات حرکت را میشود به شکل زمانی نوشت، که رابطه ی مختصات فضایی با زمان را میدهند؛ یا به شکل پارامتری، که رابطه ی مختصات فضازمانی با یک پارامتر (مثلن ویژه زمان) را میدهند. شکل صریحن-هموردا ی معادلات حرکت از این گونه است. در این شکل، معادلات باید

با (8) سازگار باشد، یعنی (8) اگر در یک زمان برقرار باشد، در اثر تحولی که با معادلات حرکت داده میشود هم همچنان برقرار بماند.

برای سیستمی شامل یک ذره 2 لگرانژی (یا کنش) به کار میبریم. در شکل اول (زمانی) زمان پارامتر تحول است و لگرانژی تابع (t, r, v) (زمان، سه‌بردار مکان، و سه‌بردار سرعت) است. لگرانژی و کنش در این شکل را با به ترتیب L و S نشان میدهیم. در شکل دوم (پارامتری) زمان هم یک متغیر دینامیکی است. ویژه‌زمان (یا یک پارامتر آفین دیگر مسیر) را پارامتر تحول میگیریم و لگرانژی و کنش متناظر را با به ترتیب L_s و S_s نمایش میدهیم. L_s تابع (τ, u) (چاربردارهای مکان و سرعت) است، و در آن متلفه‌های چاربردار سرعت مستقل از هم فرض میشوند. یعنی (8) اعمال نمیشود، بل که انتظار میرود اگر با شرط اولیه برقرار باشد با تحول هم برقرار بماند.

داریم

$$S = \int dt L, \quad (10)$$

$$S_s = \int d\tau L_s. \quad (11)$$

تعریف میکنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &:= \left(\frac{\delta S}{\delta r^i} \right)_{\text{in}}, \\ &= \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{s\alpha} &:= \left(\frac{\delta S_s}{\delta r^\alpha} \right)_{\text{in}}, \\ &= \frac{\partial L_s}{\partial r^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L_s}{\partial u^\alpha} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

که شاخص in یعنی ورودش بدون در نظر گرفتن جمله‌های مرزی.

1 لگرانژی و اسکالریده‌ی آن

برای ذره‌ی آزادی به جرم m ، لگرانژی (L^f) چنین است.

$$L^f = -m c^2 \gamma^{-1}. \quad (14)$$

یک ذره ی نسبیتی در میدانها ی خارجی

از اینجا m را چنین تعریف میکنیم.

$$L =: -m c^2 \gamma^{-1}. \quad (15)$$

به m جرم مئتر میگوییم. برای یک ذره ی بدون ساختار، لگرانژی و جرم مئتر تابع فضا زمان و چاربردار سرعت اند. بسته گی ی لگرانژی و جرم مئتر به فضا زمان را از طریق میدانها ی خارجی میگیریم. میدانها ی خارجی را با T نشان میدهیم. جرم مئتر را چنان میگیریم که

$$m[u', T'(r')] = m[u, T(r)], \quad (16)$$

که متغیرها ی پریمدار تبدیل- یافته ی متغیرها ی بدون پریم تحت تبدیلهای پونکره [4] اند. (16) پونکره-هموردایی ی کنش (یا اسکالر بودن جرم مئتر) است.

جرم مئتر (اگر نسبت به چاربردار سرعت بسط تیلر [5] داشته باشد) میشود

$$m = \sum_k \frac{1}{k!} m_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_k}, \quad (17)$$

که $m^{(k)}$ متقارن و مستقل از سرعت است. $m^{(k)}$ ها هم ان میدانها ی خارجی ی T (یا تابع آنها) یند.

1.1 شکل زمانی

بسته گی ی لگرانژی به سرعت از طریق ضرب لرنس [3] در (15)، و از طریق بسته گی ی جرم مئتر به چاربردار سرعت است. داریم

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v^i} = c^{-2} \gamma^3 v_i, \quad (18)$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma^{-1}}{\partial v^i} &= -c^{-2} \gamma v_i, \\ &= -c^{-2} u_i, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} &= \gamma (\delta_i^\alpha + c^{-2} \gamma^2 v^\alpha v_i), \\ &= \gamma (\delta_i^\alpha + c^{-2} u^\alpha u_i). \end{aligned} \quad (20)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} v^i &= -\delta_i^\alpha u^i - c^{-2} u^\alpha u_i u^i, \\
 &= \delta_0^\alpha u^0 - u^\alpha + c^{-2} u^\alpha u_0 u^0 - c^{-2} u^\alpha (u \cdot u), \\
 &= \gamma (\delta_0^\alpha + c^{-2} u^\alpha u_0).
 \end{aligned} \tag{21}$$

تعریف میکنیم

$$h_\beta^\alpha := \eta_\beta^\alpha + c^{-2} u^\alpha u_\beta, \tag{22}$$

و نتیجه میشود

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} = \gamma h_i^\alpha, \tag{23}$$

$$-\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} v^i = \gamma h_0^\alpha. \tag{24}$$

دیده میشود h افکنش بر فضای عمود بر u است، یعنی اثرش بر هر بردار عمود بر u همانی، و بر u صفر است.

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
 p_i &= -c^2 \frac{\partial(m \gamma^{-1})}{\partial v^i}, \\
 &= m u_i - c^2 h_i^\alpha \frac{\partial m}{\partial u^\alpha}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
 p_0 &= L - p_i v^i, \\
 &= \gamma^{-1} (-m c^2 - p_i u^i), \\
 &= \gamma^{-1} \left(-m c^2 - m u_i u^i + c^{-2} h_i^\alpha \frac{\partial m}{\partial u^\alpha} u^i \right), \\
 &= \gamma^{-1} \left(m u_0 u^0 - c^{-2} h_0^\alpha \frac{\partial m}{\partial u^\alpha} u^0 \right), \\
 &= m u_0 - c^{-2} h_0^\alpha \frac{\partial m}{\partial u^\alpha}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

یک ذره ی نسبیتی در میدانها ی خارجی

ترکیب (25) و (26) میشود

$$p_\alpha = m u_\alpha - c^2 \eta_\alpha^\beta \frac{\partial m}{\partial u^\beta}. \quad (27)$$

از جمله دیده میشود

$$p_\alpha u^\alpha = -m c^2. \quad (28)$$

برای معادله ی حرکت هم داریم

$$\mathcal{E}_i = \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{dp_i}{dt}. \quad (29)$$

از این نتیجه میشود

$$\begin{aligned} -v^i \mathcal{E}_i &= -v^i \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{dv^i}{dt} p_i + \frac{d(v^i p_i)}{dt}, \\ &= -\frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{dp_0}{dt} + \frac{d(v^\alpha p_\alpha)}{dt}, \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{dp_0}{dt}, \end{aligned} \quad (30)$$

که در تساوی ی آخر (28) به کار رفته. به این ترتیب با افزودن \mathcal{E}_0 با

$$v^\alpha \mathcal{E}_\alpha = 0, \quad (31)$$

برای معادله ی حرکت میشود این شکل را نوشت.

$$\gamma \mathcal{E}_\alpha = \frac{\partial(-m c^2)}{\partial r^\alpha} - \frac{dp_\alpha}{d\tau}. \quad (32)$$

تعداد معادلات حرکت یک ی بیشتر شده. اما تعداد معادلات مستقل عوض نشده: معادله ی صفرم

یک ترکیب خطی از معادلات قبلی است. در واقع

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{dH}{dt}, \quad (33)$$

که H همیلتنی است. معادله ی صفرم این است که مشتق زمانی ی کامل همیلتنی به اضافه ی مشتق

زمانی ی پاره ای ی لگرانژی صفر است، و البته این از معادله ها ی حرکت نتیجه میشود ([6]، مثلن).

1.2 شکل پارامتری

دنبال L_s یم، چنان که

$$\frac{\partial L_s}{\partial r_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L_s}{\partial u^\alpha} \right) \stackrel{s}{=} \gamma \mathcal{E}_\alpha. \quad (34)$$

$\stackrel{s}{=}$ یعنی تساوی وقت ی برقرار است که (8) برقرار باشد. یک راه برآوردن (34) این است.

$$L_s \stackrel{s}{=} -m c^2, \quad (35)$$

$$\frac{\partial L_s}{\partial u^\alpha} \stackrel{s}{=} p_\alpha. \quad (36)$$

یک نهاده برای L_s این است.

$$L_s = a m + b u^\beta \frac{\partial m}{\partial u^\beta}, \quad (37)$$

که a و b تابعها یی از u اند، در واقع تابعها یی از $(u \cdot u)$ اند، که از m مستقل اند. از (35) دیده میشود

$$a \stackrel{s}{=} -c^2, \quad (38)$$

$$b \stackrel{s}{=} 0. \quad (39)$$

از (36) هم نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u^\alpha} m + a \frac{\partial m}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial b}{\partial u^\alpha} u^\beta \frac{\partial m}{\partial u^\beta} + b \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(u^\beta \frac{\partial m}{\partial u^\beta} \right) &\stackrel{s}{=} m u_\alpha - c^2 \frac{\partial m}{\partial u^\alpha} \\ &- u_\alpha u^\beta \frac{\partial m}{\partial u^\beta}, \quad (40) \end{aligned}$$

که با استفاده از (38) و (39) نتیجه میدهد

$$\frac{\partial a}{\partial u^\alpha} \stackrel{s}{=} u_\alpha, \quad (41)$$

$$\frac{\partial b}{\partial u^\alpha} \stackrel{s}{=} -u_\alpha. \quad (42)$$

تا جایی که به معادلات حرکت مربوط میشود، از a و b فقط خُذِ شان و مشتقِ شان وقت ی (8) برقرار است لازم اند. انتخاب ساده ای که (38) و (39) و (41) و (42) را بر می آورد این است.

$$a = -\frac{1}{2} (1 - c^{-2} u \cdot u) c^2, \quad (43)$$

$$b = -\frac{1}{2} (1 + c^{-2} u \cdot u) c^2. \quad (44)$$

از اینجا،

$$\begin{aligned} L_s &= - \left[\frac{1}{2} (1 - c^{-2} u \cdot u) m + \frac{1}{2} (1 + c^{-2} u \cdot u) u^\beta \frac{\partial m}{\partial u^\beta} \right] c^2, \\ &= -m c^2 + b n, \quad (45) \end{aligned}$$

یک ذره ی نسبیتی در میدانها ی خارجی

که

$$\mathbf{n} := u^\alpha \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^\alpha} - \mathbf{m}. \quad (46)$$

به ساده گی دیده میشود (چنان که انتظار میرود) که معادلات حرکت L_S شرط (8) را حفظ میکنند. به این معنی که (8) اگر زمان ی برقرار باشد، طی تحول حاصل از معادلات ی که با L_S به دست می آیند هم برقرار میماند. برای اثبات، توجه میکنیم که معادلات حرکت حاصل از L_S این اند

که $\mathcal{E}_{s\alpha}$ صفر است،

$$\mathcal{E}_{s\alpha} = -c^2 O_\alpha \mathbf{m} + b O_\alpha \mathbf{n} - \frac{db}{d\tau} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} - \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial b}{\partial u^\alpha} \right) \right] \mathbf{n} - \frac{\partial b}{\partial u^\alpha} \frac{d\mathbf{n}}{d\tau}, \quad (47)$$

که

$$O_\alpha \mathcal{Q} := \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u^\alpha} \right). \quad (48)$$

به این ترتیب، با استفاده از

$$u^\alpha \frac{\partial b}{\partial u^\alpha} = 2b + c^2, \quad (49)$$

$$u^\alpha \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial b}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{db}{d\tau}, \quad (50)$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned} u^\alpha \mathcal{E}_{s\alpha} &= -c^2 u^\alpha O_\alpha \mathbf{m} + b u^\alpha O_\alpha \mathbf{n} - \frac{db}{d\tau} u^\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} - \frac{db}{d\tau} \mathbf{n} - (2b + c^2) \frac{d\mathbf{n}}{d\tau}, \\ &= b \left(u^\alpha O_\alpha \mathbf{n} - 2 \frac{d\mathbf{n}}{d\tau} \right) - \frac{db}{d\tau} \left(u^\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} + \mathbf{n} \right) \\ &\quad - c^2 \left(u^\alpha O_\alpha \mathbf{m} + \frac{d\mathbf{n}}{d\tau} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{d\tau} &= u^\alpha \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^\alpha} \right) - u^\alpha \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial r^\alpha}, \\ &= -u^\alpha O_\alpha \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (52)$$

به این ترتیب،

$$\left(u^\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} + \mathbf{n} \right) \frac{db}{d\tau} = \left(u^\alpha O_\alpha \mathbf{n} - 2 \frac{d\mathbf{n}}{d\tau} \right) b - u^\alpha \mathcal{E}_{s\alpha}, \quad (53)$$

که نشان میدهد وقت ی معادلات حرکت برقرار اند، b اگر صفر باشد صفر میماند.

2 مثالها

معلوم شد لگرانژی، تکانه، و معادلات حرکت، همه با جرم مثر (m) مشخص میشوند، که از طریق (15) به شکل زمانی لگرانژی مربوط است. در مثالها ی زیر، تکانه و معادلات حرکت با اعمال قید (8) محاسبه میشوند.

2.1 ذره ی آزاد

برای ذره ی آزاد،

$$m = m. \quad (54)$$

به این ترتیب،

$$n = -m, \quad (55)$$

و از آنجا،

$$L_s = \frac{1}{2} m u \cdot u - \frac{1}{2} m c^2. \quad (56)$$

البته جمله ی دوم L_s ، در معادلات حرکت و نیز در شکل تکانه وارد نمیشود. معمولاً هم آن را از لگرانژی حذف میکنند. تکانه میشود

$$p_\alpha = m u_\alpha, \quad (57)$$

و برای معادله ی حرکت داریم

$$\mathcal{E}_{s\alpha} = -\frac{dp_\alpha}{d\tau}. \quad (58)$$

2.2 ذره در پتانسیل اسکالر

برای ذره ای که در یک پتانسیل اسکالر حرکت میکند، جرم مثر مستقل از چارسرعت است. میشود مثل [1] نوشت.

$$m = m + c^{-2} V, \quad (59)$$

که V یک میدان اسکالر است. این یعنی جرم مثر در (17) شامل فقط $m^{(0)}$ است. البته رُشن است که جمله ی ثابت m را هم میشود در V جذب کرد. در واقع ذره ی آزاد حالت خاصی از این مثال

یک ذره ی نسبیتی در میدانها ی خارجی

است، که در آن V ثابت است. دیده میشود

$$\mathbf{n} = -\mathbf{m}, \quad (60)$$

$$L_s = \frac{1}{2} \mathbf{m} u \cdot u - \frac{1}{2} m c^2. \quad (61)$$

اینجا دیگر نمیشود جمله ی دوم لگرانژی را حذف کرد، اما همچنان میشود یک جمله ی $(-m c^2/2)$ را از آن حذف کرد. برای تکانه و معادلات حرکت داریم

$$p_\alpha = m u_\alpha, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{s\alpha} &= -c^2 \frac{\partial m}{\partial r^\alpha} - \frac{dp_\alpha}{d\tau}, \\ &= -c^2 \eta_\alpha^\beta \frac{\partial m}{\partial r^\beta} - m \frac{du_\alpha}{d\tau}. \end{aligned} \quad (63)$$

2.3 ذره در پتانسیل برداری

در این حالت جرم مثر در (17) شامل جمله ها ی $m^{(0)}$ و $m^{(1)}$ است:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{m}^{(0)} + \mathbf{m}^{(1)} \cdot \mathbf{u}, \\ &=: m - c^{-2} U \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (64)$$

البته میشد $m^{(0)}$ را هم تابع فضا زمان گرفت، مثل (59). در آن صورت علاوه بر پتانسیل برداری ی U ، پتانسیل اسکالر V هم با ذره برهمکنش میداشت. دیده میشود

$$\mathbf{n} = -\mathbf{m}, \quad (65)$$

$$L_s = \frac{1}{2} m u \cdot u - \frac{1}{2} m c^2 + U \cdot \mathbf{u}. \quad (66)$$

همچنین،

$$p_\alpha = m u_\alpha + U_\alpha, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{s\alpha} &= \frac{\partial U_\beta}{\partial r^\alpha} u^\beta - \frac{dp_\alpha}{d\tau}, \\ &= \left(\frac{\partial U_\beta}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial r^\beta} \right) u^\beta - m \frac{du_\alpha}{d\tau}. \end{aligned} \quad (68)$$

یک مثال خاص حرکت یک ذره ی باردار در یک میدان الکترومغناطیسی است. در این حالت

$$U = q A, \quad (69)$$

که q بار ذره، و A پتانسیل برداری ی متناظر با میدان الکترومغناطیسی است.

2.4 ذره در پتانسیل تانسری با رتبه ی 2

در این حالت جرم مثر در (17) شامل جمله ها ی $m^{(0)}$ و $m^{(2)}$ است:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{m}^{(0)} - \frac{1}{2} \mathbf{m}_{\alpha\beta}^{(2)} u^\alpha u^\beta, \\ &=: m - \frac{c^{-2}}{2} T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \\ &=: m - c^{-2} T. \end{aligned} \quad (70)$$

دیده میشود

$$\mathbf{n} = -m - c^{-2} T, \quad (71)$$

$$L_s = \frac{1}{2} m u \cdot u - \frac{1}{2} m c^2 + \left[1 + \frac{1}{2} (1 + c^{-2} u \cdot u) \right] T. \quad (72)$$

همچنین،

$$p_\alpha = (m + c^{-2} T) u_\alpha + T_{\alpha\beta} u^\beta, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{s\alpha} &= \frac{\partial T}{\partial r^\alpha} - \frac{dp_\alpha}{d\tau}, \\ &= \frac{\partial T}{\partial r^\alpha} - c^{-2} \frac{\partial T}{\partial r^\beta} u^\beta u_\alpha - \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial r^\gamma} u^\gamma u^\beta \\ &\quad - (m + c^{-2} T) \frac{du_\alpha}{d\tau} - c^{-2} T_{\beta\gamma} u^\beta u_\alpha \frac{du^\gamma}{d\tau} - T_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{d\tau}, \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_{\gamma\beta}}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial r^\gamma} \right) u^\gamma u^\beta - \frac{1}{2} \mathfrak{h}_\alpha^\nu \frac{\partial T_{\nu\beta}}{\partial r^\gamma} u^\gamma u^\beta \\ &\quad - [(m + c^{-2} T) \eta_{\alpha\gamma} + \mathfrak{h}_\alpha^\beta T_{\beta\gamma}] \frac{du^\gamma}{d\tau}. \end{aligned} \quad (74)$$

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «یک ذره ی نسبیتی در یک میدان اسکالر» (2010/10/21) X1-071

[2] Minkowski

[3] Lorentz

[4] Poincaré

[5] Taylor

[6] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; “classical mechanics”
3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 2