

X1-087 (2012/10/29)

کابل ی که از زمین به بالا آویزان است

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

تعداد کابل ی بررسی میشود که یک سرش روی زمین ثابت است، و سر دیگرش آزاد است، چنان که کابل همراه با زمین میگردد.

1 استاتیک اجسام ساکن نسبت به زمین

جسم ی که در نزدیکی ی زمین آزادانه سقوط کند، نمیتواند نسبت به زمین ساکن بماند، چون در نزدیکی ی زمین نیرو ی گرانشی بزرگتر از نیرو ی مرکزگریز ناشی از چرخش زمین است. در فاصله ی خاص ی از مرکز زمین، نیرو ی گرانش با نیرو ی مرکزگریز برابر میشود. این فاصله (R_{gs}) هم ان شعاع مدار ماهوارهها ی زمین- ثابت است:

$$g(R_{gs}) = R_{gs} \omega^2, \quad (1)$$

که $g(r)$ اندازه ی شتاب گرانشی ی حاصل از زمین در فاصله ی r از مرکز زمین، و ω بسامد زاویه ای ی چرخش زمین است. داریم

$$g(r) = \frac{g_0 R^2}{r^2}, \quad (2)$$

کابل ی که از زمین به بالا آویزان است

که شعاع زمین و g_0 شتاب گرانشی حاصل از زمین در سطح زمین است. به این ترتیب،

$$\omega^2 = \frac{g_0 R^2}{R_{gs}^3}. \quad (3)$$

فقط در صفحه ی استوا و در فاصله ی R_{gs} از مرکز زمین است که یک جسم میتواند آزادانه سقوط کند و ضمن نسبت به زمین ثابت بماند. جسم ی که آزادانه سقوط میکند فقط نیروی گرانش ناشی از زمین را حس میکند. البته این فقط در چارچوبهای لخت است. در چارچوب ی که همراه زمین میچرخد، جسم نیروی مرکزگریز (و اگر نسبت به آن چارچوب ساکن نباشد نیروی کُریلی) را هم حس میکند.

جسم ی به جرم m را در نظر بگیرید که در فاصله ی r از مرکز زمین و در عرض جغرافیایی ی α است، و نسبت به زمین ساکن است. بردار یکه ی شعاعی (نسبت به مرکز زمین) را با \hat{r} ، فاصله تا محور چرخش زمین را با ρ ، و بردار یکه ی شعاع استوانه ای (نسبت به محور چرخش زمین) را با $\hat{\rho}$ نشان میدهم. رُشن است که

$$\rho = r \cos \alpha. \quad (4)$$

برای این که جسم هم ان جا بماند، علاوه بر گرانش زمین و نیروی مرکزگریز، یک نیروی F هم لازم است، چنان که

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m [g(r) \hat{r} - \omega^2 \rho \hat{\rho}], \\ &= \frac{m g_0 R^2}{R_{gs}^2} \left[\left(\frac{R_{gs}}{r} \right)^2 \hat{r} - \left(\frac{\rho}{R_{gs}} \right) \hat{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

پتانسیل مثر ϕ را با

$$\begin{aligned} (\nabla \phi)(\mathbf{r}) &:= g(r) \hat{r} - \omega^2 \rho \hat{\rho}, \\ &= \frac{g_0 R^2}{R_{gs}^2} \left[\left(\frac{R_{gs}}{r} \right)^2 \hat{r} - \left(\frac{\rho}{R_{gs}} \right) \hat{\rho} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

تعریف میکنیم، که بردار مکان (نسبت به مرکز زمین)، و ∇X گرادیان X است. به این ترتیب، شرط - تعادل (5) میشود

$$\mathbf{F} = m \nabla \phi. \quad (7)$$

با انتخاب مناسب ثابت انتگرالگیری نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= -\frac{g_0 R^2}{r} - \frac{\omega^2 \rho^2}{2}, \\ &= -\frac{g_0 R^2}{R_{gs}} \left[\left(\frac{R_{gs}}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{R_{gs}} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (8)$$

2 کابل آویخته به بالا

کابل ی به چگالی-ی-جرم طولی λ را در نظر بگیرید که از زمین به بالا آویزان است. پارامتر طول- قس را با s نشان میدهیم و نقطه ی اتصال کابل با زمین را $s = 0$ میگیریم. این یعنی طول بخش ی از کابل که بین نقطه ای با پارامتر s و نقطه ی اتصال به زمین است، s است. کشش کابل را با T نشان میدهیم. از نوشتن شرط تعادل برای بخش ی از کابل که بین پارامترها ی s و $(s + ds)$ است نتیجه میشود

$$\frac{d(T \hat{\tau})}{ds} = \lambda \nabla \phi, \quad (9)$$

که $\hat{\tau}$ بردار یکه ی مماس بر کابل در جهت دور شدن از نقطه ی اتصال کابل به زمین است. چون $\hat{\tau}$ یکه است،

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \hat{\tau} = 0. \quad (10)$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\frac{d(T \hat{\tau})}{ds} \cdot \hat{\tau} = \frac{dT}{ds}. \quad (11)$$

به این ترتیب،

$$\frac{dT}{ds} = \lambda (\nabla \phi) \cdot \hat{\tau}, \quad (12)$$

$$T \frac{d\hat{\tau}}{ds} = \lambda [\nabla \phi - \hat{\tau} (\hat{\tau} \cdot \nabla \phi)]. \quad (13)$$

همراه با این معادلات، این شرطها ی مرزی را داریم که کشش در سر آزاد کابل صفر است، و نقطه ی اتصال کابل با زمین ثابت است. مجهولها ی این معادلات $\mathbf{r}(s)$ (جا ی نقطه ای از کابل با پارامتر s) و $T(s)$ اند.

کابل ی که از زمین به بالا آویزان است

طول کابل را با ℓ نشان میدهیم. این که در سر آزاد کابل کشش صفر است، یعنی

$$T(\ell) = 0. \quad (14)$$

به این ترتیب، با انتگرالگیری از (12) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} T(s) &= \int_{\ell}^s ds' \lambda(s') \{(\nabla\phi)[\mathbf{r}(s')]\} \cdot [\hat{\boldsymbol{\tau}}(s')], \\ &= \int_{\ell}^s ds' \lambda(s') [D(\phi \circ \mathbf{r})](s'), \end{aligned} \quad (15)$$

که DX مشتق X است. برای یک کابل یکنواخت

$$T(s) = \lambda\{\phi[\mathbf{r}(s)] - \phi[\mathbf{r}(\ell)]\}. \quad (16)$$

کشش کابل در هر نقطه ای نامنفی است:

$$\int_s^{\ell} ds' \lambda(s') [D(\phi \circ \mathbf{r})](s') \leq 0, \quad (17)$$

و برای کابل یکنواخت،

$$\phi[\mathbf{r}(s)] \geq \phi[\mathbf{r}(\ell)]. \quad (18)$$

از جمله،

$$\int_0^{\ell} ds \lambda(s) [D(\phi \circ \mathbf{r})](s) \leq 0, \quad (19)$$

و برای کابل یکنواخت،

$$\phi[\mathbf{r}(0)] \geq \phi[\mathbf{r}(\ell)], \quad (20)$$

که میشود

$$\left[\frac{R_{gs}}{r(\ell)} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\rho(\ell)}{R_{gs}} \right]^2 \geq \left(\frac{R_{gs}}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R \cos \alpha_0}{R_{gs}} \right)^2, \quad (21)$$

که α_0 عرض جغرافیایی نقطه ی اتصال کابل با زمین است.

3 کابل ی که در استوا شعاعی به بالا آویزان است

وقت ی کابل در راستای شعاع ی با عرض جغرافیایی ی صفر است، $\hat{r}(s)$ هم ان \hat{r} است، که البته ثابت و در صفحه ی استوا ست. همچنین،

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \hat{r} r(s), \\ r(s) &= R + s, \\ (\nabla\phi)[\mathbf{r}(s)] &= [\hat{r}(s)] \{[\hat{r}(s)] \cdot (\nabla\phi)[\mathbf{r}(s)]\}. \end{aligned} \quad (22)$$

به این ترتیب (13) اتحاد میشود. همچنین، با تعریف

$$\psi(r) := \phi(r, \alpha = 0), \quad (23)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \phi[\mathbf{r}(s)] &= -\frac{g_0 R^2}{R_{gs}} \left\{ \left[\frac{R_{gs}}{r(s)} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{r(s)}{R_{gs}} \right]^2 \right\}, \\ &= \psi(R + s), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \{(\nabla\phi)[\mathbf{r}(s)]\} \cdot [\hat{r}(s)] &= \frac{g_0 R^2}{R_{gs}^2} \left\{ \left[\frac{R_{gs}}{r(s)} \right]^2 - \left[\frac{r(s)}{R_{gs}} \right] \right\}, \\ &= (D\psi)(R + s). \end{aligned} \quad (25)$$

از (25) دیده میشود طرف راست (12) در $r(s)$ کوچکتر از R_{gs} مثبت، و در $r(s)$ بزرگتر از R_{gs} منفی است. پس بیشینه ی T در $r(s) = R_{gs}$ رخ میدهد. کمینه ها ی T هم در دُسر کابل رخ میدهند. در سر آزاد کابل کشش صفر است. پس شرط لازم و کافی برای این که کشش هیچ جا منفی نشود این است که

$$T(0) \geq 0. \quad (26)$$

از این که بیشینه ی T در $r(s) = R_{gs}$ رخ میدهد معلوم میشود سر آزاد کابل، نسبت به مرکز زمین دورتر از ماهواره ها ی زمین- ثابت است. در واقع برای این که کشش کابل جا بی (جز احتمالاً نقطه ی

اتصال کابل با زمین) صفر شود باید طول کابل دست- کم ℓ_{\min} باشد، که

$$R + \ell_{\min} \geq R_{gs}. \quad (27)$$

کابلی که از زمین به بالا آویزان است

(26) هم‌ارز است با

$$\int_0^\ell ds \lambda(s) (D\psi)(R+s) \leq 0, \quad (28)$$

و برای کابل یکنواخت،

$$\psi(R) \geq \psi(R+\ell). \quad (29)$$

این یعنی

$$\frac{R_{gs}}{R+\ell} + \frac{1}{2} \left(\frac{R+\ell}{R_{gs}} \right)^2 \geq \frac{R_{gs}}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_{gs}} \right)^2, \quad (30)$$

یا،

$$\frac{(R+\ell)(2R+\ell)R}{R_{gs}^3} \geq 2, \quad (31)$$

که هم‌ارز است با

$$\ell \geq \ell_{\text{mim}}, \quad (32)$$

که

$$\frac{\ell_{\text{mim}}}{R} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8 \left(\frac{R_{gs}}{R} \right)^3}. \quad (33)$$

از این که

$$R_{gs} \geq R, \quad (34)$$

رابطه‌ی (27) برای حالت خاص کابل یکنواخت نتیجه می‌شود. برای اثبات، کافی است توجه

کنیم

$$(u \geq 1) \Rightarrow 1 + 8u^3 \geq (1 + 2u)^2. \quad (35)$$

برای T_{max} (بیشینه‌ی کشش کابل) داریم

$$\begin{aligned} T_{\text{max}} &= \int_\ell^{R_{gs}-R} ds \lambda(s) (D\psi)(R+s), \\ &= T(0) + \int_0^{R_{gs}-R} ds \lambda(s) (D\psi)(R+s), \\ &= T(0) + \int_R^{R_{gs}} ds \lambda(r-R) (D\psi)(r), \\ &\geq \int_0^{R_{gs}-R} ds \lambda(s) (D\psi)(R+s). \end{aligned} \quad (36)$$

از جمله برای یک کابل یکنواخت،

$$T_{\max} = T_0 + \left[\left(\frac{R}{R_{\text{gs}}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_{\text{gs}}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_{\text{gs}}} \right)^3 \right] (M g_0), \quad (37)$$

که

$$M = (R_{\text{gs}} - R) \lambda. \quad (38)$$

$(M g_0)$ وزن بخش ی از کابل (در سطح زمین) است که بین زمین و مدار زمین-ثابت است. تنش طولی ی کابل کشش کابل تقسیم بر مساحت مقطع کابل است. تنش طولی را با \mathcal{T} نشان میدهیم. دیده میشود

$$\mathcal{T}_{\max} \geq \mathcal{T}_m, \quad (39)$$

که

$$\mathcal{T}_m = \left[\left(\frac{R}{R_{\text{gs}}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_{\text{gs}}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_{\text{gs}}} \right)^3 \right] (R_{\text{gs}} - R) \rho g_0, \quad (40)$$

که ρ چگالی ی کابل است.

4 مقادارهای عددی

$$g_0 = 9.8 \text{ m s}^{-1},$$

$$R = 6.4 \times 10^6 \text{ m},$$

$$\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$$R_{\text{gs}} = 4.2 \times 10^7 \text{ m}. \quad (41)$$

که نتیجه میدهد

$$\ell_{\min} = 1.4 \times 10^8 \text{ m}, \quad (42)$$

$$\mathcal{T}_m = 4.4 \times 10^{10} \text{ Pa} \frac{\rho}{10^3 \text{ kg m}^{-3}}. \quad (43)$$

کابل ی که از زمین به بالا آویزان است

برای این که کابل بتواند چنین تنش ی را تحمل کند، باید مقدار B_t (تنش برشی ی قابل - تحمل) برای کابل از T_m بیشتر باشد. مقدار $[10^3 \text{ kg m}^{-3} B_t \rho^{-1}]$ را با \mathfrak{B}_t نشان میدهیم. پس شرط لازم برای این که بشود کابل یکنواخت ی را از استوا به بالا آویخت، این است

$$\mathfrak{B}_t \geq 4.4 \times 10^{10} \text{ Pa.} \quad (44)$$

مقدار \mathfrak{B}_t ، برای انواع معمولی ی فولاد از 10^7 Pa کمتر است و برای فولادها ی ویژه دست - بالا به 10^8 Pa نزدیک میشود. این مقدار برای تار عنکبوت از مرتبه ی 10^9 Pa است. برای گرافین و نانولوله ها ی کربنی، \mathfrak{B}_t تا 10^{11} Pa هم میرسد [1].

5 پانوشتها

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Tensile_strength