

تقارن سمتی در بُعد دلخواه

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

در بُعد دلخواه، بسط توابع سمتی-متقارن بر حسب ویژه‌بردارها ی دوران بررسی میشود.

1 دوران

e را یک پایه ی یک‌متعامد \mathbb{R}^n میگیریم، که \mathbb{R} مجموعه ی عددها ی حقیقی است. دوران با زاویه ی α در صفحه ی شامل e_i و e_j را با $U(i, j; \alpha)$ نشان میدهیم. اثر چنین دوران ی بر r (بردار مکان) چنین است.

$$\{[U(i, j; \alpha)] r\}^k = \begin{cases} r^i \cos \alpha - r^j \sin \alpha, & k = i \\ r^i \sin \alpha + r^j \cos \alpha, & k = j \\ r^k, & i \neq k \neq j \end{cases} \quad (1)$$

نمایش U در فضا ی توابع را با \tilde{U} نشان میدهیم. داریم

$$\begin{aligned} \{[\tilde{U}(i, j; \alpha)] f\}(r) &= f\{[U^{-1}(i, j; \alpha)] r\}, \\ &= f\{[U(i, j; -\alpha)] r\}. \end{aligned} \quad (2)$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\{[\tilde{U}(i, j; \alpha)] f\}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \alpha [r_j (\partial_i f)(\mathbf{r}) - r_i (\partial_j f)(\mathbf{r})] + o(\alpha). \quad (3)$$

به این ترتیب L_{ij} (مولد دوران در صفحه i و j) میشود

$$L_{ij} = -(R_i \partial_j - R_j \partial_i), \quad (4)$$

که

$$(R_j f)(\mathbf{r}) := r_j f(\mathbf{r}). \quad (5)$$

شاخصها با δ بالاپایین میروند:

$$\Xi_i = \delta_{ij} \Xi^j, \quad (6)$$

که یعنی e_i ها یک-متعامد اند.

گروه دورانها n بُعدی را با $\text{SO}(n)$ نمایش میدهیم. بُعد این گروه تعداد L_{ij} ها i مستقل است. دیده میشود L پادمتقارن است. از اینجا نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \dim[\text{SO}(n)] &= \binom{n}{2}, \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

به ساده گئی دیده میشود

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{ik} L_{jl} - \delta_{jk} L_{il} + \delta_{il} L_{kj} - \delta_{jl} L_{ki}. \quad (8)$$

از جمله با تعریف

$$(L)^2 := \frac{1}{2} L_{ij} L^{ij}, \quad (9)$$

نتیجه میشود

$$[L_{ij}, (L)^2] = 0. \quad (10)$$

میگوییم تابع A سمتی-متقارن است (تقارن سمتی دارد)، اگر نمایش همه i دورانها بی که e_n

را ثابت نگه میدارند اثرشان بر f همانی باشد. تعریف میکنیم

$$r := \left[\sum_{i=1}^n (r^i)^2 \right]^{1/2}. \quad (11)$$

$$\rho := \left[\sum_{i=1}^{n-1} (r^i)^2 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

$$\theta := \cos^{-1} \frac{r^n}{r}. \quad (13)$$

دیده میشود A سمتی-متقارن است، اگر و تنها اگر تابع ρ و r^n باشد، یا هم‌ارز با آن، اگر و تنها اگر تابع r و θ باشد. اگر A سمتی-متقارن باشد،

$$\partial A = \frac{\partial A}{\partial r} \partial r + \frac{\partial A}{\partial \theta} \partial \theta. \quad (14)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \partial r &= \hat{r}, \\ \partial \theta &= \frac{1}{r \sin \theta} [-e_n + (\cos \theta) \hat{r}], \end{aligned} \quad (15)$$

و از آنجا،

$$\begin{aligned} (\partial r) \cdot (\partial A) &= \frac{\partial A}{\partial r}, \\ (\partial \theta) \cdot (\partial A) &= \frac{1}{(r)^2} \frac{\partial A}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (16)$$

در بُعدها ی بیش از 2، گستره ی θ مجموعه ی $[0, \pi]$ است. در بُعد 2 این گستره $[0, 2\pi)$ یا انتقال-یافته ی این مجموعه به هر مقداری است. در بُعد 2 ضمن θ به این شکل تعریف میشود.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{r^1}{r}, \\ \cos \theta &= \frac{r^2}{r}. \end{aligned} \quad (17)$$

دیده میشود این زاویه متمم مختصه ی زاویه‌ای در مختصات قطبی است.

2 لپلسی و ویژه‌بردارهای دَوَران

از (4) دیده میشود

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_{ij} L^{ij} &= L_{ij} R^j \partial^i, \\ &= -R_i R^j \partial_j \partial^i - n R_i \partial^i + R_j R^j \partial_i \partial^i + R_j \partial^j, \end{aligned} \quad (18)$$

داریم

$$\begin{aligned} R R^j \partial_j &= R^j \partial_j R - R, \\ &= R R^j \partial_j \hat{R} + R^j \frac{R_j}{R} \hat{R} - R, \\ &= (R)^2 (\hat{R} \cdot \partial) \hat{R}, \end{aligned} \quad (19)$$

و از آنجا،

$$\frac{1}{2} L_{ij} L^{ij} = -(R^2) (\hat{R} \cdot \partial)^2 - (n-1) R (\hat{R} \cdot \partial) + (R)^2 (\partial \cdot \partial), \quad (20)$$

یا،

$$\partial \cdot \partial = (\hat{R} \cdot \partial)^2 + \frac{n-1}{R} (\hat{R} \cdot \partial) + \frac{1}{(R)^2} (L)^2. \quad (21)$$

این تجزیه ی لپلسی به بخشهای شعاعی و زاویه‌ای است. اثر $(\hat{r} \cdot \partial)$ بر زاویه (جهت) صفر است.

در واقع

$$(\hat{R} \cdot \partial) f = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (22)$$

که در طرف راست مشتقگیری در \hat{r} ثابت انجام شده. اثر L_{ij} هم بر r (شعاع) صفر است.

معادله ی (21) یک راه برای تعیین ویژه‌مقدارها ی $(L)^2$ میدهد. برای به دست آوردن این

ویژه‌مقدارها، f را چنان میگیریم که ویژه‌بردار $(L)^2$ باشد:

$$(L)^2 f = \lambda f, \quad (23)$$

و در یک همسایه‌گی از مبدهی همساز باشد:

$$(\partial \cdot \partial) f = 0. \quad (24)$$

دیده میشود

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\lambda}{(r)^2} f = 0, \quad (25)$$

این یک معادله ی ایلر [1] است، که جوابها ی خاصِ توانی دارد. جواب ی توانی با نما ی s را برایش در نظر میگیریم:

$$s(s-1) + (n-1)s + \lambda = 0. \quad (26)$$

f متناظر با این جواب، در مبدئ هم همساز است اگر و تنها اگر s صحیح و نامنفی باشد. از اینجا معلوم میشود ویژه مقادارها ی $(L)^2$ با عددها ی صحیحِ نامنفی l متناظر اند، چنان که

$$\lambda_l = -l(l+n-2). \quad (27)$$

اینها ضمن همه ی ویژه مقادارها ی $(L)^2$ اند. برای دیدن این توجه میکنیم که این مسئله ی شرط مرزی که f درون یک گوی به شعاع R همساز باشد، و مقدارش بر مرز آن گوی تابع داده شده ی g باشد، برای هر g ی به حد کافی هموار ی جواب دارد و این جواب یکتا است. از جمله اگر g ویژه بردار $(L)^2$ با ویژه مقدار λ باشد، f هم چنین است.

به این ترتیب، اگر f ویژه بردار $(L)^2$ متناظر با ویژه مقدار λ_l باشد، و در یک همسایه گی ی مبدئ همساز باشد،

$$f(\mathbf{r}) = r^l g(\hat{\mathbf{r}}), \quad (28)$$

که

$$(L)^2 g = -l(l+n-2)g, \quad (29)$$

یا،

$$(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\partial})f = lf, \quad (30)$$

$$(L)^2 f = -l(l+n-2)f. \quad (31)$$

f را بر حسب مختصات دگرگونی هم میشود نوشت. از

$$(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\partial})r^i = r^i, \quad (32)$$

نتیجه میشود f یک چندجمله ای ی از مختصات دگرگونی است، که فقط جمله ها ی از درجه ی l دارد:

$$f(\mathbf{r}) = F_{i_1 \dots i_l} r^{i_1} \dots r^{i_l}, \quad (33)$$

که F یک تانسور متقارن از رتبه l است. این که f همساز است، با این هم‌ارز است که

$$\delta^{j k} F_{i_1 \dots i_{l-2} j k} = 0. \quad (34)$$

از اینجا بُعد فضا تابعها بی (با دامنه \mathbb{R}^n) به دست می‌آید که همساز اند و ویژه‌بردار $(L)^2$ با ویژه‌مقدار λ_l اند. این بُعد را با $\dim_{n l}$ نشان می‌دهیم. داریم

$$\dim_{n l} = \dim[(\mathbb{R}^n)_S^{\otimes l}] - \dim[(\mathbb{R}^n)_S^{\otimes(l-2)}], \quad (35)$$

که $\mathbb{V}_S^{\otimes p}$ فضا ی تانسورها ی متقارن رتبه p بنا شده بر فضا ی خطی \mathbb{V} است. از

$$\dim[(\mathbb{R}^n)_S^{\otimes l}] = \binom{n+l-1}{l}, \quad (36)$$

نتیجه میشود

$$\dim_{n l} = \frac{(n+l-3)!(n+2l-2)}{(n-2)!l!} \quad (37)$$

از جمله،

$$\dim_{2 l} = 2, \quad (38)$$

$$\dim_{3 l} = 2l + 1. \quad (39)$$

3 ویژه‌بردارهای سمتی-متقارن دَوْران

A را یک تابع سمتی-متقارن میگیریم. در این صورت A تابع r و θ است. داریم

$$\begin{aligned} (\partial \cdot \partial)A &= (\partial r) \cdot \partial \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right) + [(\partial \cdot \partial)r] \frac{\partial A}{\partial r} + (\partial \theta) \cdot \partial \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + [(\partial \cdot \partial)\theta] \frac{\partial A}{\partial \theta}, \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{(r)^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{(n-2) \cot \theta}{(r)^2} \frac{\partial A}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (40)$$

از مقایسه ی این با (21) نتیجه میشود

$$(L)^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + (n-2) (\cot \theta) \frac{\partial A}{\partial \theta}. \quad (41)$$

با تعریف

$$x := \cos \theta, \quad (42)$$

میشود (41) را چنین نوشت.

$$(L)^2 A = [1 - (x)^2] \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (1 - n) x \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (43)$$

به این ترتیب، اگر A ویژه‌بردار سمتی-متقارن $(L)^2$ متناظر با ویژه‌مقدار λ_l باشد،

$$[1 - (x)^2] \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (1 - n) x \frac{\partial A}{\partial x} + l(l + n - 2) A = 0, \quad (44)$$

با تعریفهای

$$(X A)(x) := x A(x),$$

$$(D A)(x) := \frac{\partial A}{\partial x}, \quad (45)$$

معادله ی (44) را میشود چنین نوشت

$$\{[1 - (X)^2] D^2 + (1 - n) X D + l(l + n - 2)\} A = 0. \quad (46)$$

این معادله در بُعد 2 معادله ی چیشیف [2] از نُع اول، در بُعد 3 معادله ی لُژاندر [3]، و در بُعد 4 معادله ی چیشیف [2] از نُع دوم است:

$$\{[1 - (X)^2] D^2 - X D + (l)^2\} A = 0, \quad n = 2. \quad (47)$$

$$\{[1 - (X)^2] D^2 - 2 X D + l(l + 1)\} A = 0, \quad n = 3. \quad (48)$$

$$\{[1 - (X)^2] D^2 - 3 X D + l(l + 2)\} A = 0, \quad n = 4. \quad (49)$$

در حالت کلی، (46) تعمیم ی از معادله ی لُژاندر [3] است.

4 چند جمله‌ایها ی تعمیم-یافته ی لُژاندر

تابع یک-متغیره ی P را در نظر بگیرید که جواب (46) است. برای این معادله جواب ی به شکل

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x)^{j+s} \quad (50)$$

میگیریم، که a_0 ناصفر است. نتیجه میشود

$$(s + j + 2)(s + j + 1) a_{j+2} + [l(l + n - 2) - (s + j)(s + j + n - 2)] a_j = 0. \quad (51)$$

این به ازای $(j = -2)$ نتیجه میدهد

$$s = 0 \vee s = 1. \quad (52)$$

از (51) ضمن نتیجه میشود اگر a_j ها از جایی به بعد صفر نشوند

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{j+2}}{a_j} = 1, \quad (53)$$

که این نتیجه میدهد شعاع همگرایی سری طرف راست (50) یک است. پس P در $(x = \pm 1)$ تحلیلی نیست، مگر چند جمله‌ای باشد. P چند جمله‌ای میشود، اگر $(l - s)$ صحیح و نامنفی، و a_1 صفر باشد. دیده میشود که در این صورت P یک چند جمله‌ای از درجه l است. با استفاده از رابطه بازگشتی (50) میشود ضرایب این چند جمله‌ای را حساب کرد. اینجا روشی بر اساس جبر عملگرها به کار میبریم.

معادله (46) را میشود چنین نوشت.

$$[\mathcal{L}_{1-n} + l(l+n-2)]P = 0. \quad (54)$$

که

$$\mathcal{L}_\alpha := [1 - (X)^2](D)^2 + \alpha X D. \quad (55)$$

از این که

$$[D, X] = 1, \quad (56)$$

و با تعریف

$$Y := 1 - (X)^2, \quad (57)$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha(Y)^\beta &= [1 - (X)^2]^{\beta+1}(D)^2 - 4\beta X [1 - (X)^2]^\beta D \\ &\quad - 2\beta [1 - (X)^2]^\beta + 4\beta(\beta - 1)(X)^2 [1 - (X)^2]^{\beta-1} \\ &\quad + \alpha X [1 - (X)^2]^\beta D - 2\alpha\beta(X)^2 [1 - (X)^2]^{\beta-1}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha(D)^\gamma &= (D)^\gamma [1 - (X)^2](D)^2 + 2\gamma(D)^\gamma X D - \gamma(\gamma + 1)(D)^\gamma \\ &\quad + \alpha(D)^\gamma X D - \alpha\gamma(D)^\gamma, \end{aligned} \quad (59)$$

یا

$$\mathcal{L}_\alpha(Y)^\beta = (Y)^\beta [\mathcal{L}_{\alpha-4\beta-2\beta+(2\beta)(2\beta-\alpha-2)}(Y)^{-1}], \quad (60)$$

$$\mathcal{L}_\alpha(D)^\gamma = (D)^\gamma [\mathcal{L}_{\alpha+2\gamma-\gamma(\gamma+\alpha+1)}]. \quad (61)$$

از جمله،

$$\mathcal{L}_\alpha(Y)^{(\alpha+2)/2} = (Y)^{(\alpha+2)/2} [\mathcal{L}_{-\alpha-4-\alpha-2}]. \quad (62)$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha(Y)^{(\alpha+2)/2} (D)^\gamma (Y)^{(2\gamma-\alpha-2)/2} &= (Y)^{(\alpha+2)/2} (D)^\gamma (Y)^{(2\gamma-\alpha-2)/2} \\ &\times [\mathcal{L}_{\alpha-2\gamma-\gamma(\gamma-\alpha-1)}]. \end{aligned} \quad (63)$$

از اینجا با تعریف

$$\nu := \frac{n-3}{2}, \quad (64)$$

نتیجه میشود

$$[\mathcal{L}_{1-n+l(l+n-2)}(Y)^{-\nu} (D)^l (Y)^{l+\nu} = (Y)^{-\nu} (D)^l (Y)^{l+\nu} \mathcal{L}_{1-n-2l}]. \quad (65)$$

این جواب ی برای (54) پیش مینهد. با نهاده ی

$$P = (Y)^{-\nu} (D)^l (Y)^{l+\nu} Q, \quad (66)$$

دیده میشود اگر

$$\mathcal{L}_{1-n-2l} Q = 0, \quad (67)$$

آنگاه P یک جواب (54) است. (67) دُ جواب خطی-مستقل دارد. یک جواب Q برابر با ثابت

است. به این ترتیب به جواب P_{nl} برای (54) میرسیم:

$$P_{\nu l}(x) = [1 - (x)^2]^{-\nu} \left(\frac{d}{dx}\right)^l [1 - (x)^2]^{l+\nu}. \quad (68)$$

این یک چندجمله‌ای ی از درجه ی l است. در واقع،

$$P_{\nu l}(x) = \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} \frac{(-1)^m [(l+\nu)!]^2}{(l+\nu-m)! (\nu+m)!} (1-x)^{l-m} (1+x)^m. \quad (69)$$

از جمله،

$$P_{0l} = (-2)^l l! P_l, \quad (70)$$

که P_l چندجمله‌ای ی‌لژاندر [3] از مرتبه ی l است (مثلن [4]).

5 تعامد و بهنجارش

از تعریف \mathcal{L}_α دیده میشود

$$\mathcal{L}_{1-n} = (Y)^{-\nu} D (Y)^{\nu+1} D. \quad (71)$$

g_1 و g_2 را د تابع یک-متغیره میگیریم که بر $[-1, 1]$ تعریف شده اند. حاصل ضرب داخلی ی g_1 در g_2 را با $\langle g_1, g_2 \rangle$ نشان میدهیم و آن را چنین تعریف میکنیم.

$$\langle g_1, g_2 \rangle := \int_{-1}^1 dx [1 - (x)^2]^\nu \overline{g_1(x)} g_2(x), \quad (72)$$

که Ξ مزدوج مختلط Ξ است. دیده میشود این تعریف \mathcal{L}_{1-n} را (با شرایط مرزی ی مناسب برا ی تابعها) اِرمیتی میکند. l_1 و l_2 را د عدد صحیح میگیریم، و تعریف میکنیم

$$\begin{aligned} l &:= \max(l_1, l_2), \\ l' &:= \min(l_1, l_2). \end{aligned} \quad (73)$$

داریم

$$\begin{aligned} \langle P_{\nu l_1}, P_{\nu l_2} \rangle &= \int_{-1}^1 dx [1 - (x)^2]^\nu P_{\nu l_1}(x) P_{\nu l_2}(x), \\ &= \int_{-1}^1 dx P_{\nu l'}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^l [1 - (x)^2]^{l+\nu}, \\ &= (-1)^l \int_{-1}^1 dx \left\{ \left(\frac{d}{dx} \right)^l [P_{\nu l'}(x)] \right\} [1 - (x)^2]^{l+\nu}. \end{aligned} \quad (74)$$

$P_{\nu l'}$ یک چندجمله‌ای از درجه ی l' است، و l' نابزرگتر از l است. پس طرف راست (74) صفر است، مگر l و l' برابر باشند، یعنی l_1 و l_2 برابر باشند. به این ترتیب،

$$\langle P_{\nu l_1}, P_{\nu l_2} \rangle \propto \delta_{l_1, l_2}. \quad (75)$$

برای به دست آوردن ضریب $(x)^l$ در $P_{\nu l}$ ، رفتار $P_{\nu l}$ برای متغیرهای بزرگ را بررسی میکنیم:

$$\begin{aligned} P_{\nu l}(x) &= (-1)^l (x)^{-2\nu} [1 + o(1)] \left(\frac{d}{dx} \right)^l \{ (x)^{2l+2\nu} [1 + o(1)] \}, \\ &= (-1)^l \frac{(2l+2\nu)!}{(l+2\nu)!} (x)^l [1 + o(1)]. \end{aligned} \quad (76)$$

از اینجا،

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^l [P_{\nu l}(x)] = (-1)^l \frac{l! (2l+2\nu)!}{(l+2\nu)!}. \quad (77)$$

همچنین،

$$\int_{-1}^1 dx [1 - (x)^2]^{l+\nu} = \frac{(-1/2)! (l+\nu)!}{[l+\nu + (1/2)]!}. \quad (78)$$

پس،

$$\langle P_{\nu l}, P_{\nu l} \rangle = \frac{(-1/2)! l! (l+\nu)! (2l+2\nu)!}{[l+\nu + (1/2)]! (l+2\nu)!}. \quad (79)$$

به این ترتیب،

$$\langle P_{\nu l_1}, P_{\nu l_2} \rangle = \frac{(-1/2)! l! (l+\nu)! (2l+2\nu)!}{[l+\nu + (1/2)]! (l+2\nu)!} \delta_{l_1, l_2}. \quad (80)$$

همچنین، از (69) دیده میشود

$$P_{\nu l}(1) = (-2)^l \frac{(l+\nu)!}{\nu!}. \quad (81)$$

6 پانوشتها

- [1] Euler
- [2] Chebyshev
- [3] Legendre
- [4] George B. Arfken & Hans J. Weber; "Mathematical methods for physicists" 5th edition (Academic Press, 2001) section 12.4