

X1-079 (2011/10/28)

تقسیم بار بین دُکره ی رسانا یِ مماس برهم

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

دُکره ی رسانا یِ باردارِ مماس برهم بررسی میشوند. رابطه ای برای نسبتِ بارها یِ این دُکره به دست می‌آید.

0 مقدمه

اگر دُکره ی رسانا یِ باردار را به هم مماس کنیم، بارِ کل (و البته چگالی یِ بار) در این کره‌ها چنان تُزیع میشود که این دُکره همپتانسیل شوند. به این ترتیب، اگر این دُکره را از هم دور کنیم در حالتِ کلی بارِ شان همان بارِ اولیه نیست، هر چند مجموعِ بارها پشان ثابت مانده. اگر دُکره یِ دور از هم را با یک سیمِ نازکِ رسانا به هم وصل کنیم هم دُکره همپتانسیل میشوند و در حالتِ کلی بارِ شان هم ان مقدارِ پیش از اتصال نیست. در این حالت محاسبه یِ بارِ نهایی یِ هر کره ساده است: چون کره‌ها دور از هم اند، پتانسیلِ هر کره را فقط بارِ هم ان کره تعیین میکند. پس اگر شعاعِ کره یِ α برابرِ a_α ، و بارِ کره یِ α برابرِ Q_α باشد،

$$\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a_1}, \quad (1)$$

که نتیجه میدهد بارِ نهایی ی هر کره متناسب با شعاعِ آن است. اما وقت ی کره‌ها را به هم مماس میکنیم، هر کره روی پتانسیلِ کره ی دیگر اثر میکند. در نتیجه برای بارها ی نهایی دیگر رابطه ی ساده ی (1) نتیجه نمیشود. نسبتِ بارها ی نهایی همچنان تابع ی از نسبتِ شعاعها خواهد بود، اما ن لزومنْ خُد نسبتِ شعاعها.

1 بارها ی تصویر برای دُ کره ی رسانی بیرون هم مماس برهم

پتانسیل الکتریکی ی حاصل از دُ کره ی رسانی بیرون هم و مماس برهم را میشود با بارها ی تصویر به دست آورد. بحث مفصل ی در این باره در [1-4] آمده است. خلاصه اش این است که میشود کره ی اول را برداشت و به جای تصویرِ تزیع بارِ کره ی دوم، و البته یک بار در میدئِ کره ی اول گذاشت (تا بارِ کلِ کره ی اول هم ان شود که واقعن هست)، بی آن که پتانسیلِ بیرونِ کره‌ها عوض شود. بار ی مرکزِ کره ی اول را با q_{10} نشان میدهم. حالا میشود این بار و بقیه ی بارها ی تصویر را در کره ی دوم تصویر کرد، و البته یک بار هم در مرکزِ کره ی دوم گذاشت، بی آن که پتانسیلِ بیرونِ کره‌ها عوض شود. بارِ مرکزی ی کره ی دوم را با q_{20} ، و تصویرِ q_{10} را با q_{21} نشان میدهم. تا جای که به پتانسیلِ بیرونِ کره‌ها مربوط میشود، اثرِ این بارهای تصویرِ درونِ کره ی دوم با اثرِ تزیع بارِ واقعی ی کره ی دوم یکسان است. پس میشود به جای تزیع بارِ اولیه این بارها را در کره ی اول تصویر کرد. تصویرِ q_{20} و q_{21} در کره ی اول را با به ترتیب q_{11} و q_{12} نشان میدهم. و این کار را تکرار میکنیم. در نهایت برای پتانسیلِ بیرونِ کره‌ها هر کره با بینهایت بارِ نقطه ای جایگزین شده. در [4] نشان داده شده که بارِ هر کره از این رابطه به دست می آید.

$$Q_{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{\alpha n}, \quad (2)$$

که در آن ترتیبِ جمع-زدن مهم است، چون این سریها مطلقن-همگرا نیستند. در این رابطه $q_{\alpha n}$ تصویرِ $q_{\alpha' (n-1)}$ است، که

$$\alpha' \neq \alpha. \quad (3)$$

این بارها ی تصویر را میشود بر حسبِ q_{10} و q_{20} حساب کرد. فاصله ی بارِ $q_{\alpha n}$ تا مرکزِ

کره ی α را با $b_{\alpha n}$ نمایش می‌دهیم. دیده میشود (مثلن [5])

$$(a_1 + a_2 - b_{\alpha' n}) b_{\alpha(n+1)} = a_{\alpha}^2, \quad (4)$$

$$\frac{q_{\alpha(n+1)}}{q_{\alpha' n}} = -\frac{a_{\alpha}}{a_1 + a_2 - b_{\alpha' n}}. \quad (5)$$

با تعریفها ی

$$z_{\alpha n} := \frac{1}{a_{\alpha} - b_{\alpha n}}, \quad (6)$$

$$\xi_{\alpha} := \frac{1}{a_{\alpha}}, \quad (7)$$

رابطه‌ها ی (4) و (5) میشوند

$$z_{\alpha(n+1)} = z_{\alpha' n} + \xi_{\alpha}, \quad (8)$$

$$\frac{q_{\alpha(n+1)}}{q_{\alpha' n}} = -\frac{z_{\alpha' n}}{z_{\alpha(n+1)}}. \quad (9)$$

از (8) و با

$$z_{\alpha 0} = \xi_{\alpha}, \quad (10)$$

نتیجه میشود

$$z_{\alpha(2n)} = (n+1)\xi_{\alpha} + n\xi_{\alpha'}, \quad (11)$$

$$z_{\alpha(2n+1)} = (n+1)(\xi_{\alpha} + \xi_{\alpha'}). \quad (12)$$

به این ترتیب از (9) نتیجه میشود

$$q_{\alpha(2n)} = \frac{\xi_{\alpha} q_{\alpha 0}}{(n+1)\xi_{\alpha} + n\xi_{\alpha'}}, \quad (13)$$

$$q_{\alpha(2n+1)} = -\frac{\xi_{\alpha'} q_{\alpha' 0}}{(n+1)(\xi_{\alpha} + \xi_{\alpha'})}. \quad (14)$$

طرف راست (2) همگراست، اگر و تنها اگر

$$\xi_{\alpha'} q_{\alpha' 0} = \xi_{\alpha} q_{\alpha 0}. \quad (15)$$

تقسیم بار بین دُکره ی رسانا ی مماس برهم

البته این تساوی را از تساوی ی پتانسیل کره ها هم میشود به دست آورد. پتانسیل کره ی α را با ϕ_α نشان میدهیم. از

$$\phi_\alpha = \frac{q_\alpha 0}{4\pi\epsilon_0 a_\alpha} \quad (16)$$

و تساوی ی ϕ_α با $\phi_{\alpha'}$ رابطه ی (15) نتیجه میشود. دیده میشود نسبت بارها ی مرکزی هم ان نسبت شعاعها ست.

2 نسبت بارها ی کره ها

از (2) و (13) و (14) و (15) نتیجه میشود

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (17)$$

که

$$S_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_{\alpha n}}. \quad (18)$$

با استفاده از (11) و (12)، و با تعریف

$$x := \frac{a_2}{a_1}, \quad (19)$$

معلوم میشود

$$\frac{Q_2}{Q_1} = x^2 g(x), \quad (20)$$

که

$$g(x) := \frac{f(x)}{f(1/x)}, \quad (21)$$

و

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+1+nx)}. \quad (22)$$

دیده میشود f نزولی، و در نتیجه g هم نزولی است. همچنین،

$$\begin{aligned} f(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}, \\ &= \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned} \quad (23)$$

و

$$f(\infty) = 1, \quad (24)$$

که نتیجه می‌دهند

$$g(0) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (25)$$

$$g(\infty) = \frac{6}{\pi^2}. \quad (26)$$

البته روشن است که

$$g(1) = 1. \quad (27)$$

همچنین،

$$(1+s)^2 g(1+s) = 1 + 2s \left[1 + \frac{f'(1)}{f(1)} \right] + o(s). \quad (28)$$

داریم

$$f'(1) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}, \quad (29)$$

و

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}, \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right), \\ &= 2 \ln 2, \end{aligned} \quad (30)$$

که نتیجه می‌دهد

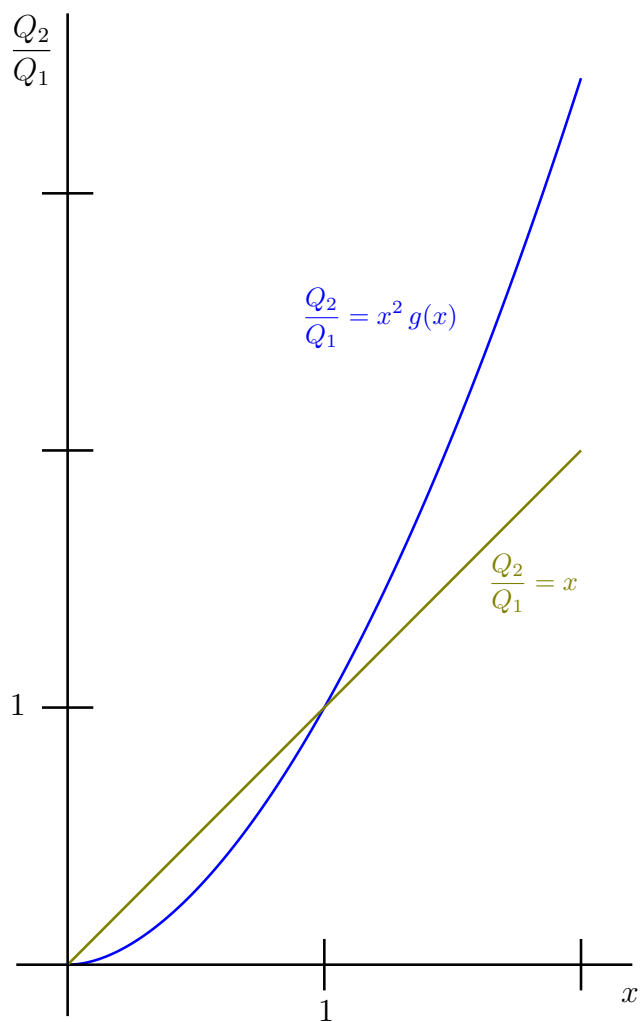
$$\frac{f'(1)}{f(1)} = -0.11. \quad (31)$$

به این ترتیب،

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \begin{cases} \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2), & x \ll 1 \\ 1 + 1.78(x-1) + o(x-1), & |x-1| \ll 1 \\ \frac{6}{\pi^2 x^2} + o(x^{-2}), & x \gg 1 \end{cases} \quad (32)$$

تقسیم بار بین دُکَره ی رسانایِ مماس برهم

نمودار (Q_2/Q_1) بر حسب x در این شکل آمده است.



دیده میشود نسبت بارها بر حسب نسبت شعاعها (خم آبی) با نسبت شعاعها برابر نیست.

3 پانوشتها

- [1] H. F. M. van den Bosch, K. J. Ptasinski, & P. J. A. M. Derkhof; “two conducting spheres in a parallel electric field” *Journal of Applied Physics* **78** (1995) 6345–6352
- [2] احمد شریعتی؛ «دو کره ی رسانا ی همسانِ مماس، در یک میدان الکتریکی» گاما 22 (بهار 1388) 36 تا 53
- [3] مسلم مرادی؛ «محاسبه ی نیروی بین دو کره ی رسانا ی باردار» گاما 9 (زمستان 1384) 29 تا 40
- [4] محمد خرمی؛ «دو کره ی رسانا ی باردار» X1-066 (2010/02/26)
- [5] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 2