

پتانسیل اسکالر یک لوله با جریان ی سمتی

mamwad@mailaps.org

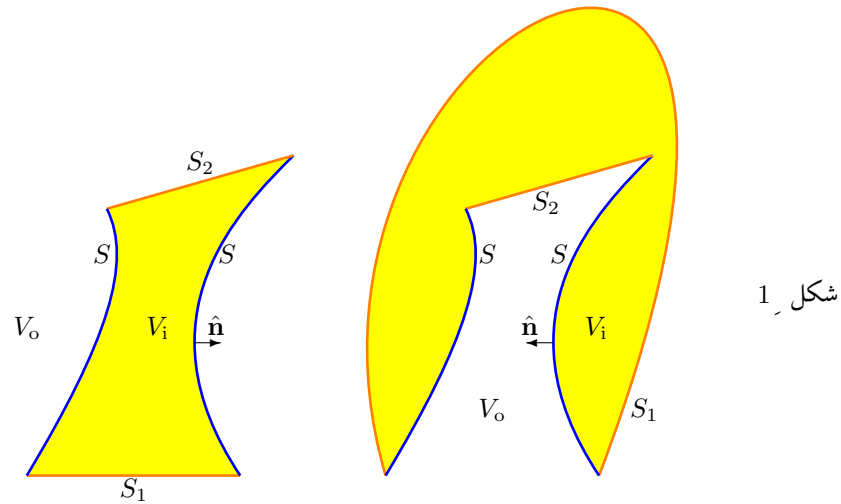
محمد خرمی

یک لوله (ی باپایان) را در نظر بگیرید که از آن یک جریان پایسته و مستقل از زمان میگذرد. میدان مغناطیسی حاصل از این لوله را با محاسبه ی پتانسیل اسکالر مغناطیسی بررسی میکنیم.

1 لوله

لوله یک رویه است که تپتری ی آن تپتری ی یک استوانه با ارتفاع باپایان است، یعنی حاصل ضرب یک دایره در یک پاره خط. مرز لوله ی S دوپارچه است و هر تکه ی آن یک خم بسته است. این خمها را با L_1 و L_2 نشان میدهیم. مرز سطح S_j است. البته S_j یکتا نیست. S_1 و S_2 را چنان میگیریم که یکدیگر و نیز S را قطع نکنند. در این صورت $(S \cup S_1 \cup S_2)$ یک رویه ی بسته است. $\mathbb{R}^3 \setminus (S \cup S_1 \cup S_2)$ شامل دو ناحیه ی داخل و خارج $(S \cup S_1 \cup S_2)$ است، که آنها را با به ترتیب V_0 و V_1 نشان میدهیم. همچنین روی $(S \cup S_1 \cup S_2)$ یک میدان برداری \hat{n} تعریف میشود که همه جا عمود بر $(S \cup S_1 \cup S_2)$ ، بهنجار، و به سوی خارج است. البته چون در انتخاب S_1 و S_2 آزادی هست، در V_0 و V_1 هم آزادی هست. آزادی ی \hat{n} روی S در فقط جهت آن است. اگر لوله بیپایان میبود، در تعیین V_0 و V_1 و \hat{n} آزادی بی نیماند. شکل 1 دو انتخاب برای S_1 و S_2 و

در نتیجه V_i و V_o را نشان میدهد.



شکل 1

2 تابع جریان

لوله ای را در نظر بگیرید که از آن یک جریان سطحی میگذرد، چنان که دیورژانس (دو بُعدی ی) این جریان صفر است و در مرز لوله هم مثلثه ی عمود بر مرز جریان صفر است. به این ترتیب جریان کل ی که از مرز هر سطح ی بر لوله بیرون می رود صفر است:

$$\oint_{\partial S'} \mathbf{dr} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

که \mathbf{J}_s چگالی ی جریان سطحی است. از (1) نتیجه میشود یک نگاشت I با دامنه ی S هست که

$$\nabla_{\parallel} I = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J}_s, \quad (2)$$

که ∇_{\parallel} مشتق گیری در رویه است. از این که \mathbf{J}_s در هر نقطه ی L_j بر L_j مماس است، نتیجه میشود $\nabla_{\parallel} I$ در هر نقطه ی L_j بر L_j عمود است، و در نتیجه I بر L_j ثابت است. مقدار I بر L_j را با I_j نشان میدهیم. دیده میشود

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + \int_C \mathbf{dr}' \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}'), \quad (3)$$

که C خمی در S است که ابتدا ی آن نقطه ای بر L_1 و انتها ی آن \mathbf{r} است. به I نگاشت جریان میگوییم. دیده میشود $[I(\mathbf{r}_2) - I(\mathbf{r}_1)]$ جریان ی است که از بین نقطه‌ها ی \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 میگذرد.

3 پتانسیل اسکالر حلقه

یک حلقه را در نظر بگیرید که از آن جریان یکنواخت I_0 میگذرد. Σ را رویه ای میگیریم که مرز آن این حلقه است، و جهت عمود بر این رویه را چنان میگیریم که این جهت و سو ی قراردادی ی حلقه با فرمول سنکس [1] سازگار باشد. Σ را به بخشها یی کوچک تقسیم میکنیم. هر بخش یک دوقطبی ی مغناطیسی ی کوچک میشود. $\phi_m(\mathbf{r})$ (پتانسیل اسکالر در نقطه ی \mathbf{r}) حاصل از دوقطبی ی مغناطیسی ی \mathbf{m} در نقطه ی \mathbf{r}' میشود

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4)$$

به این ترتیب،

$$\phi_\Sigma(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_\Sigma \frac{d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (5)$$

که ϕ_Σ پتانسیل اسکالر حاصل از حلقه است. (4) فقط برای $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$ ، و (5) فقط برای $\mathbf{r} \notin \Sigma$ معتبر اند. در واقع (5) را میشود چنین نوشت

$$\phi_\Sigma(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \Omega_\Sigma(\mathbf{r}), \quad (6)$$

که $\Omega_\Sigma(\mathbf{r})$ زاویه ی فضایی ی Σ از دید \mathbf{r} است. در نتیجه،

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\phi_\Sigma(\mathbf{r} + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) - \phi_\Sigma(\mathbf{r} - \epsilon \hat{\mathbf{u}})] = \mu_0 I_0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma, \quad (7)$$

که $\hat{\mathbf{u}}$ بردار یکه ی عمود بر Σ (با جهت قراردادی) در \mathbf{r} است.

ϕ_Σ در Σ پیوسته نیست، و طبعن مشتقپذیر هم نیست. اما حد مشتق آن همه جا وجود دارد و داریم

$$\mathbf{B}_\Sigma(\mathbf{r}) = -\lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \nabla \phi_\Sigma(\mathbf{r}'), \quad (8)$$

که \mathbf{B}_Σ میدان مغناطیسی است. البته اگر $\mathbf{r} \notin \Sigma$ ، در (8) حدگیری هم لازم نیست.

پتانسیل اسکالر یک لوله با جریان ی سمتی

برای بررسی ی بسته گی ی ϕ_{Σ} به Σ ، یک رویه ی $\tilde{\Sigma}$ میگیریم که مرز ش با مرز Σ یکسان است، و \mathcal{V} را حجم ی میگیریم که مرز ش شامل $\tilde{\Sigma}$ و $-\Sigma$ است. $-\Sigma$ هم ان Σ است که جهت عمود بر آن مخالف جهت عمود بر Σ است. $\phi_{\tilde{\Sigma}}$ شبیه ϕ_{Σ} ولی با $\tilde{\Sigma}$ به جا ی Σ است. داریم

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{r}) - \phi_{\Sigma}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left(\int_{\tilde{\Sigma}} - \int_{\Sigma} \right) \frac{d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} dV' \nabla' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \\ &= -\mu_0 I_0 \int_{\mathcal{V}} dV' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ &= -n_{\mathcal{V}}(\mathbf{r}) \mu_0 I_0,\end{aligned}\tag{9}$$

که $n_{\mathcal{V}}(\mathbf{r})$ تعداد بارها یی است که \mathbf{r} در \mathcal{V} ظاهر میشود. $n_{\mathcal{V}}(\mathbf{r})$ یک عدد صحیح (مثبت، صفر، یا منفی) است. برای محاسبه ی این عدد یک گوی میگیریم که شامل Σ و $\tilde{\Sigma}$ است. یک نقطه بیرون این گوی میگیریم و خم ی میسازیم که ابتدا ی آن این نقطه و انتها ی آن \mathbf{r} است. این خم رویه ها ی $-\Sigma$ و $\tilde{\Sigma}$ را در نقطه ها یی قطع میکند. (البته ممکن است تعداد این نقطه ها صفر باشد.) به هر نقطه ی تقاطع \mathbf{r}_i یک عدد $n(\mathbf{r}_i)$ نسبت میدهم که $+1$ است اگر در آن نقطه زاویه ی مماس بر خم با جهت قراردادی ی عمود بر رویه منفرجه باشد؛ و -1 است اگر در آن نقطه زاویه ی مماس بر خم با جهت قراردادی ی عمود بر رویه حاده باشد. اگر این زاویه قائمه بود، خم را جابه جا میکنیم تا زاویه تغییر کند یا تقاطع حذف شود.

$$n_{\mathcal{V}}(\mathbf{r}) = \sum_i n(\mathbf{r}_i).\tag{10}$$

از (9) دیده میشود بیرون \mathcal{V} (از جمله بیرون یک گوی که Σ و $\tilde{\Sigma}$ را در بر دارد) $\phi_{\tilde{\Sigma}}$ با ϕ_{Σ} برابر است. از (9) ضمن دیده میشود جز در $\Sigma \cup \Sigma'$ مشتق $\phi_{\tilde{\Sigma}}$ با مشتق ϕ_{Σ} برابر است. به این ترتیب از (8) دیده میشود میدان مغناطیسی به انتخاب Σ بسته گی ندارد، چنان که انتظار میرفت.

4 پتانسیل اسکالر لوله

لوله S را در نظر بگیرید که از آن جریان I سطحی با چگالی \mathbf{J}_s میگذرد، چنان که (1) برقرار است. با هم ان تعریفها ψ ، نگاشت کمکی ψ را نگاشت ψ ی هموار با دامنه V_i (بستار V_i) تعریف میکنیم که

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= I(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S, \\ \psi(\mathbf{r}) &= I_j, & \mathbf{r} \in S_j, \\ \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \in V_i.\end{aligned}\quad (11)$$

وقت V_i و I_1 معلوم باشند، به خاطر قضیه ی یکتایی ی جواب معادله ی لپلاس [2] با شرط مرزی ی دیریکله [3] (مثلن [4]) این نگاشت یکتا است. V_i را چنان میگیریم که در V_0 باشد. رویهها ی یکپارچه ی نزدیکه هم ψ - ثابت Σ و $(\Sigma + \Delta\Sigma)$ را چنان میگیریم که ψ بر آنها به ترتیب ψ_0 و $(\psi_0 + \Delta\psi)$ باشد. بخش ی از لوله که بین این دورویه است مثل حلقه ای با جریان $\Delta\psi$ است. بخش ی از ناحیه ی بین این رویهها را در نظر بگیرید که متناظر با بردار مساحت ΔS است. برای $\Delta\phi_{V_i}$ (پتانسیل اسکالر حاصل از این ناحیه) داریم

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{V_i}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\Delta\psi) \Omega_{\Sigma}(\mathbf{r}) + o(\Delta\psi), \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} [(\psi_0 + \Delta\psi) \Omega_{\Sigma}(\mathbf{r}) - \psi_0 \Omega_{\Sigma}(\mathbf{r})] + o(\Delta\psi), \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \{(\psi_0 + \Delta\psi) [\Omega_{\Sigma+\Delta\Sigma}(\mathbf{r}) + \Omega_{\Delta S}(\mathbf{r})] - \psi_0 \Omega_{\Sigma}(\mathbf{r})\} + o(\Delta\psi),\end{aligned}\quad (12)$$

که ΔS بخش ی از S است که بین Σ و $(\Sigma + \Delta\Sigma)$ است. از اینجا نتیجه میشود

$$\phi_{V_i}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[I_2 \Omega_{S_2}(\mathbf{r}) - I_1 \Omega_{S_1}(\mathbf{r}) - \int_S \frac{d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} I(\mathbf{r}') \right]. \quad (13)$$

حالا فرض کنید S_1 یا S_2 را چنان جابهجا کنیم که \mathbf{r} درون V_i بیفتد. در این صورت ϕ_{V_i} در یک همسایه گگی \mathbf{r} به اندازه ی $(-\mu_0 I_2)$ یا $(\mu_0 I_1)$ تغییر میکند. اما این یعنی مشتق ϕ_{V_i} عوض نمیشود.

پتانسیل اسکالر یک لوله با جریان ی سمتی

پس برای میدان مغناطیسی (\mathbf{B}) داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \nabla \phi_{V_i}(\mathbf{r}'), \quad (14)$$

که ϕ_{V_i} برای همه ی \mathbf{r} ها با (13) تعریف شده. توجه داریم که در ϕ_{V_i} نگاهت کمکی ی ψ ظاهر نشده و همه چیز بر حسب I و رویه‌ها ی S_1 و S_2 بیان شده. فقط در این رویه‌ها و البته در یک ثابت جمعی در I هست که اختیار هست. دیده میشود اگر I به اندازه ی ΔI تغییر کند، $\phi_{V_i}(\mathbf{r})$ به اندازه ی $[-(4\pi)^{-1} \mu_0 \Omega_S(\mathbf{r}) \Delta I]$ تغییر میکند، یعنی در V_o تغییر نمیکند و در V_i به اندازه ی $(-\mu_0 \Delta I)$ تغییر میکنند.

(13) را میشود بر حسب ψ چنین نوشت.

$$\phi_{V_i}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V_i} \frac{d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \psi(\mathbf{r}'). \quad (15)$$

به ساده گی دیده میشود اگر L حلقه ای باشد که ∂V_i را در نقطه‌ها ی \mathbf{r}_j قطع میکند،

$$\begin{aligned} \oint_L d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} &= - \int_{\tilde{L}} d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi_{V_i}, \\ &= - \oint_L d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi_{V_i} + \sum_j \delta \phi_{V_i}(\mathbf{r}_j), \\ &= \mu_0 \sum_j n(\mathbf{r}_j) \psi(\mathbf{r}_j), \end{aligned} \quad (16)$$

که \tilde{L} بخش ی از L است که \mathbf{r}_j ها از آن حذف شده، و

$$\delta \phi_{V_i}(\mathbf{r}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\phi_{V_i}(\mathbf{r} + \epsilon \hat{\mathbf{u}}) - \phi_{V_i}(\mathbf{r} - \epsilon \hat{\mathbf{u}})], \quad \mathbf{r}_j \in \partial V_i. \quad (17)$$

این هم ان قانون آمپر [5] است.

5 بار مغناطیسی

رابطه ی (15) پتانسیل اسکالر را بر حسب یک دو قطبی ی مغناطیسی با چگالی ی سطحی ی \mathbf{M}_s میدهد:

$$\mathbf{M}_s(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial V_i. \quad (18)$$

از (15) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
 \phi_{V_i}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V_i} \left(d\mathbf{S}' \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \psi(\mathbf{r}'), \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} dV' \left[\left(\nabla'^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \psi(\mathbf{r}') + \left(\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \nabla' \psi(\mathbf{r}') \right], \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} dV' \left\{ -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') + \nabla' \cdot \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \psi(\mathbf{r}') \right] \right\}, \\
 &= -\mu_0 \Theta_{V_i}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V_i} \frac{d\mathbf{S}' \cdot \nabla' \psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{19}
 \end{aligned}$$

که

$$\Theta_{V_i}(\mathbf{r}) := \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_i \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_i \end{cases}, \tag{20}$$

و از این استفاده شده که $\nabla^2 \psi$ صفر است.

رابطه ی (19) پتانسیل اسکالر در V_0 را برحسب یک بار مغناطیسی با چگالی ی سطحی ی

σ_m میدهد، که

$$\sigma_m(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial V_i. \tag{21}$$

البته بار مغناطیسی ی کل این توزیع صفر است:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial V_i} dS \sigma_m(\mathbf{r}) &= \oint_{\partial V_i} dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}), \\
 &= \int_{V_i} dV \nabla^2 \psi(\mathbf{r}), \\
 &= 0, \tag{22}
 \end{aligned}$$

که نشان میدهد دور از لوله پتانسیل اسکالر جمله ی متناسب با r^{-1} ندارد و در نتیجه میدان جمله ی

متناسب با r^{-2} ندارد، که این هم ان ی است که برا ی میدان مغناطیسی ی ایستا انتظار می رود.

در V_i پتانسیل اسکالر علاوه بر پتانسیل اسکالر حاصل از این بار مغناطیسی یک جمله ی دیگر

هم دارد. به این ترتیب برا ی میدان مغناطیسی در کل فضا داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \Theta_{V_i}(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oint_{\partial V_i} \frac{d\mathbf{S}' \cdot \nabla' \psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{23}$$

از جمله نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\mathbf{B}(\mathbf{r} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{B}(\mathbf{r} + \epsilon \hat{\mathbf{n}})] &= \mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) - \mu_0 \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} [\cdot \nabla \psi(\mathbf{r})], \\ &= \mu_0 \nabla_{\parallel} \psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial V_i. \end{aligned} \quad (24)$$

این رابطه نشان میدهد میدان مغناطیسی بر S_j پیوسته است، و بر S هم بخش عمودبر رویه آش پیوسته است و بخش مماسبر رویه آش پرش دارد. با استفاده از (2) نتیجه میشود

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\mathbf{B}(\mathbf{r} - \epsilon \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{B}(\mathbf{r} + \epsilon \hat{\mathbf{n}})] = \mu_0 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J}_s, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (25)$$

که هم ان ی است که از قانونهای آمپر [5] و گاوس [6] انتظار میرود.

6 پانوشتها

- [1] Stocks
- [2] Laplace
- [3] Dirichlet
- [4] John David Jackson; "Classical electrodynamics", 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 1
- [5] Ampère
- [6] Gauss