

## نفوذ گاز از یک رُزنه ی ریز

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

ظرف ی شامل یک گاز کامل کلاسیک بررسی میشود، که رُزنه ی ریزی دارد. گاز از این رُزنه بیرون میرود، اما رُزنه آن قدر ریز است که گاز درون ظرف یکنواخت میماند. چگالی و دما ی گاز درون ظرف بر حسب زمان به دست میآید.

### 0 مقدمه

اگر در یک ظرف شامل گاز رُزنه ای درست شود، گاز از این رُزنه بیرون میرود. برای یک گاز کامل، آهنگ خروج گاز با میانگین اندازه ی سرعت ملکولها ی گاز، چگالی ی گاز (تعداد ملکولها ی گاز بر حجم)، و مساحت رُزنه متناسب است [1]. چون ملکولها ی با سرعت بیشتر سریعتر از ظرف بیرون میروند، میانگین انرژی ی ملکولها ی بیرون-رفته بیش از میانگین انرژی ی ملکولها یی است که در ظرف مانده اند. پس با گذشت زمان میانگین انرژی ی ملکولها یی که در ظرف مانده اند، و در نتیجه دما ی گاز درون ظرف، و میانگین اندازه ی سرعت ملکولها ی گاز کم میشود. پس معادله ی دیفرانسیل تعداد ملکولها ی گاز بر حسب زمان، به یک متغیر دیگر وابسته به زمان (دما) جفت شده است.

نفوذ گاز از یک رُزنه ی ریز

ممکن است تصور شود اگر رُزنه خیل ی ریز باشد (چنان که آهنگ خروج گاز خیل ی کوچک باشد) میشود از تغییر دما چشم پوشید. اما چنان که دیده خواهد شد، حتی اگر رُزنه خیل ی ریز باشد وقت ی مقدار چشمگیری از گاز بیرون رفته باشد، تغییر دما قابل چشمپوشی نیست، و در واقع دما بر حسب کسر ملکولها ی مانده در ظرف، اصولن به اندازه ی رُزنه بسته گی ندارد. در کل این متن، گاز را کامل می گیریم. ضمن فرض می کنیم رُزنه آن قدر ریز است که گاز درون ظرف را همیشه میشود در تعادل ترمودینامیکی گرفت.

## 1 تعداد ملکولها، وانرژی ی کل درون ظرف

آهنگ خروج گاز از ظرف، برای ملکولها بی که سرعت شان در ناحیه ی  $d^3v$  است

$$R(\mathbf{v}) d^3v = \left[ \int dX v_z H(v_z) N F(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}, X) A \right] d^3v \quad (1)$$

است، که  $R d^3v$  تعداد ملکولها ی خارج شده بر زمان،  $H$  تابع پله ی واحد،  $N$  تعداد ملکولها ی درون ظرف،  $A$  مساحت رُزنه،  $\mathbf{r}_0$  بردار مکان رُزنه،  $\mathbf{v}$  سرعت،  $X$  نماینده ی درجه ها ی آزادی ی درونی ی ملکول، و  $F$  چگالی ی احتمال برا ی ملکولها ی با مکان، سرعت، و درجه ها ی آزادی ی درونی ی معین است.  $(x, y, z)$  مختصات دکرتی اند، چنان که جهت  $z$  عمود بر رُزنه و به طرف بیرون است.

از این پس فرض می کنیم تابع چگالی نسبت به مکان یکنواخت است. به این ترتیب،

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, X) = \frac{1}{V} f(\mathbf{v}, X), \quad (2)$$

که  $V$  حجم ظرف است. از اینجا نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= - \int d^3v R(\mathbf{v}), \\ &= - \langle v_z H(v_z) \rangle \frac{N}{V} A, \end{aligned} \quad (3)$$

که  $\langle Q \rangle$  میانگین کمیت  $Q$ ، و  $t$  زمان است.

تُزیع سرعت ملکولها ی بیرون ظرف، با تُزیع سرعت ملکولها ی درون ظرف فرق دارد، چون ملکولها بی که سرعت شان بیشتر است سریعتر بیرون میروند. در واقع از رابطه ی (1) دیده میشود

اگر  $f$  چگالی ی احتمال برا ی ملکولها ی درون ظرف باشد،  $f_0$  (چگالی ی احتمال برا ی ملکولها ی بیرون ظرف) میشود

$$f_0(\mathbf{v}, X) = \mathcal{N} v_z H(v_z) f(\mathbf{v}, X), \quad (4)$$

که  $\mathcal{N}$  یک ثابت بهنجارش است. به این ترتیب،  $\langle Q \rangle_0$  (میانگین کمیت  $Q$  برا ی ملکولها ی بیرون ظرف) با  $\langle Q \rangle$  (میانگین هم ین کمیت برا ی ملکولها ی درون ظرف) فرق دارد. انرژی ی درونی ی ظرف بر تعداد ملکولها را با  $u$  نشان میدهم. این کمیت در واقع میانگین انرژی ی یک ملکول گاز ( $\langle E \rangle$ ) است.

$$\frac{d(Nu)}{dt} = \langle E \rangle_0 \frac{dN}{dt}, \quad (5)$$

و از آنجا

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{N} (\langle E \rangle_0 - u) \frac{dN}{dt}. \quad (6)$$

دیده میشود  $u$  به شرط ی ثابت است که  $\langle E \rangle_0$  و  $\langle E \rangle$  برابر باشند. ضمنن در معادله ی بالا میشود زمان را حذف کرد:

$$N \frac{du}{dN} = \langle E \rangle_0 - u. \quad (7)$$

برا ی یک گاز کامل کلاسیک،  $u$  دما ی سیستم و در نتیجه تزیع سرعت را تعیین میکند. تزیع سرعت ملکولها ی درون ظرف هم تزیع سرعت ملکولها ی بیرون را تعیین میکند. پس  $\langle E \rangle_0$  هم با دانستن  $u$  معلوم است. از اینجا دیده میشود  $u$  تابع فقط کسر ملکولها یی است که در ظرف مانده اند، و با دانستن این کسر، به حجم ظرف و مساحت رزنه بسته گی ندارد. این نتیجه برا ی هر گاز کامل ی (حتا نسبیتی) درست است. به این ترتیب،

$$\langle E \rangle_0 = g(u), \quad (8)$$

و از آنجا،

$$\int_{u_0}^u \frac{du'}{g(u') - u'} = \ln \left( \frac{N}{N_0} \right). \quad (9)$$

برا ی این که پیشتر بروم، باید تابع  $g$  را بشناسم.

## 2 گازِ کاملِ نانبیتی

برای یک گازِ کاملِ نانبیتی،

$$f(\mathbf{v}, X) = f_1(v_z) f_2(v_x, v_y) f_3(X), \quad (10)$$

$$E = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + E_i(X), \quad (11)$$

که  $m$  جرمِ ملکول و  $E_i$  بخش ی از انرژی ست که تابعِ فقط درجه‌ها ی آزادی ی درونی است. از (4) و (10) و (11) نتیجه میشود

$$\left\langle \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} \right\rangle_o = \left\langle \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} \right\rangle, \quad (12)$$

$$\langle E_i \rangle_o = \langle E_i \rangle. \quad (13)$$

به این ترتیب،

$$\langle E \rangle_o = u + \left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle_o - \left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle. \quad (14)$$

با استفاده از

$$f_1(v_z) = \mathcal{N}' \exp\left(-\frac{m v_z^2}{2 k_B T}\right), \quad (15)$$

که  $k_B$  ثابتِ بِلتسمان [2]،  $T$  دما، و  $\mathcal{N}'$  یک ثابتِ بهنجارش است، نتیجه میشود

$$\left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T, \quad (16)$$

$$\left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle_o = k_B T. \quad (17)$$

پس

$$\langle E \rangle_o - u = \frac{1}{2} k_B T. \quad (18)$$

برای محاسبه ی  $g$  باید بسته‌گی ی  $T$  به  $u$  را بدانم. رابطه ی این دُ با هم چنین است.

$$u = \frac{\alpha}{2} k_B T, \quad (19)$$

که  $\alpha$  تعدادِ درجه‌ها ی آزادی ی (مجذوری ی مثر) هر ملکول است. رابطه ی بالا در واقع تعریفِ  $\alpha$  ست. خُذِ  $\alpha$  تابعِ  $T$  (یا  $u$ ) است، اما در ناحیه‌ها ی بزرگ ی از  $T$  (یا  $u$ ) ثابت است. با جاگذاری ی

(18) و (19) در (8) و (9)،

$$\int_{u_0}^u du' \frac{\alpha(u')}{u'} = \ln \left( \frac{N}{N_0} \right). \quad (20)$$

اگر  $\alpha$  ثابت باشد،

$$\frac{u}{u_0} = \left( \frac{N}{N_0} \right)^{1/\alpha}. \quad (21)$$

دیده میشود هر چه  $\alpha$  بزرگتر باشد، تغییرات نسبی میانگین انرژی ی ملکولها ی گاز کمتر است.

### 3 آهنگ خروج ملکولها

تغییر  $N$  با زمان از (3) به دست میآید. با فرض این که توزیع سرعت کروی-مقارن است (یعنی به جهت سرعت بستهگی ندارد)، طرف راست (3) را میشود بر حسب میانگین اندازه ی سرعت نوشت:

$$\begin{aligned} \langle v_z H(v_z) \rangle &= \langle v \{ \cos(\theta) H[\cos(\theta)] \} \rangle, \\ &= \langle v \rangle \langle \cos(\theta) H[\cos(\theta)] \rangle, \\ &= \frac{1}{4} \langle v \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

به این ترتیب (3) و (6) به ترتیب میشوند

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{A}{V} \frac{\langle v \rangle}{4} N, \quad (23)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{A}{V} \frac{\langle v \rangle}{4} (\langle E \rangle_0 - u). \quad (24)$$

این نتایج برای گازها ی کامل نسبیتی هم درست ند. برای گازها ی کامل نانسبیتی،

$$f(v, X) = N''' \exp \left( -\frac{m v^2}{2 k_B T} \right) f_3(X), \quad (25)$$

که  $N'''$  یک ثابت بهنجارش است. از اینجا،

$$\langle v \rangle = \left( \frac{8 k_B T}{\pi m} \right)^{1/2}. \quad (26)$$

با جاگذاری ی این رابطه و رابطهها ی (18) و (19) در (24)، نتیجه میشود

$$\frac{du}{dt} = -\frac{A}{V} \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{3/2}, \quad (27)$$

که نتیجه میدهد

$$\int_{u_0}^u du' \left[ \frac{\alpha(u')}{u'} \right]^{3/2} = -\frac{A}{V} \frac{1}{\sqrt{\pi m}} t. \quad (28)$$

اگر  $\alpha$  ثابت باشد،

$$u = u_0 \left[ 1 + \frac{A}{V} \left( \frac{u_0}{4\pi m \alpha^3} \right)^{1/2} t \right]^{-2}. \quad (29)$$

این رابطه را میشود بر حسب دما نوشت:

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{A}{V} \left( \frac{k_B T_0}{8\pi m \alpha^2} \right)^{1/2} t \right]^{-2}. \quad (30)$$

باز دیده میشود هر چه  $\alpha$  بزرگتر باشد تغییر نسبی ی دما کوچکتر است.

رابطه‌ها ی (20) و (28) بسته‌گی ی  $N$  به  $t$  را میدهند. اگر  $\alpha$  ثابت باشد، این بسته‌گی را میشود

صریحتر نوشت:

$$N = N_0 \left[ 1 + \frac{A}{V} \left( \frac{k_B T_0}{8\pi m \alpha^2} \right)^{1/2} t \right]^{-2\alpha}. \quad (31)$$

اگر  $\alpha$  بسیار بزرگ باشد (عبارت درون کروشه تقریباً یک باشد)، رابطه ی بالا میشود

$$N = N_0 \exp \left[ -\frac{A}{V} \left( \frac{k_B T_0}{2\pi m} \right)^{1/2} t \right]. \quad (32)$$

این هم ان نتیجه ای است که با فرض ثابت بودن دما از رابطه ی (23) به دست می‌آید.

## 4 پانوشتها

[1] P. K. Pathria; "Statistical mechanics", (Pergamon Press, 1972) chapter 6

[2] Boltzmann