X1-004 (2001/08/01)

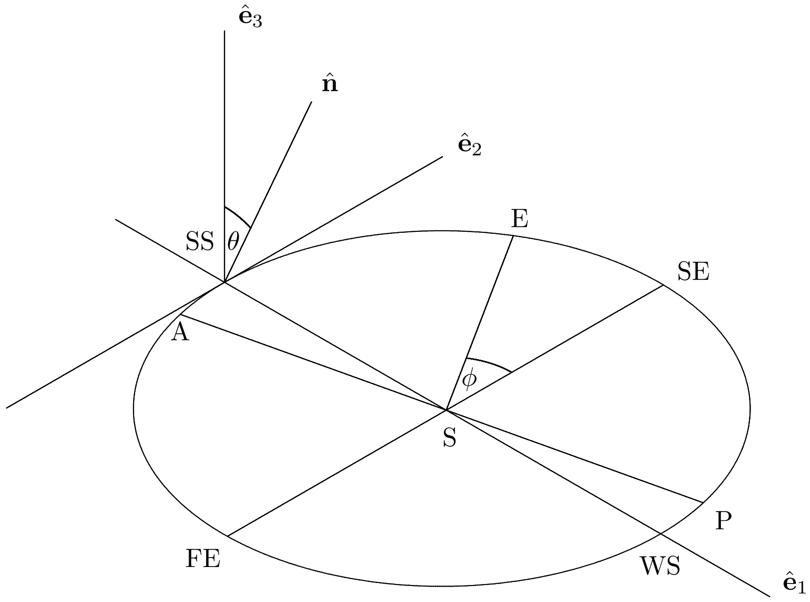
ساعت ِ آفتابی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org
فریناز روشنی farinazz@yahoo.com
احمد شریعتی shariati@mailaps.org
امیرحسین فتح‌اللهی ahfatol@gmail.com

هندسه ي چرخش ِ زمین به دور ِ خود، و گردش ِ آن به دور ِ خورشید بررسی می‌شود. با استفاده از آن طرح ِ یک ساعت ِ آفتابی، و نیز روش ِ دقیق‌کردن ِ آن معرفی می‌شود.

0 مقدمه

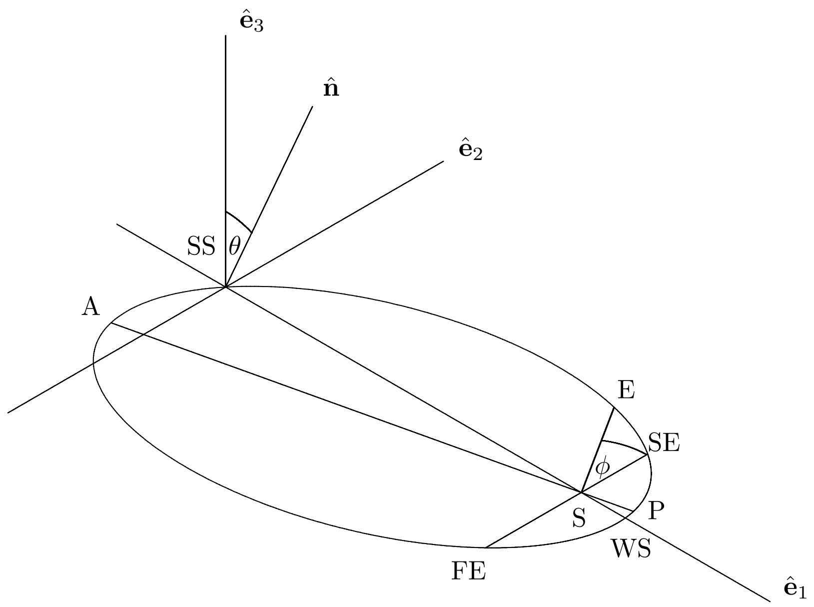
زمین دور ِ محور ِ قطبی ي خود می‌چرخد و دوره ي این چرخش 23 ساعت و 56 دقیقه است (روز ِ نجومی). ظهر وقت ی است که خورشید در آسمان درست به طرف ِ جنوب (یا شمال) است. زمین دور ِ خورشید هم می‌گردد و دوره ي این حرکت 366.24 روز ِ نجومی است (یک سال ِ خورشیدی). چنان که خواهیم دید، به خاطر ِ این حرکت ِ انتقالی مدت ِ بین ِ دو ظهر ِ متوالی کم ی بیش از روز ِ نجومی می‌شود. به این مدت روز ِ خورشیدی می‌گویند. تعداد ِ روزها ي خورشیدی در یک سال یک ی کم‌تر از تعداد ِ روزها ي نجومی است. بنابراین هر سال 365.24 روز ِ خورشیدی است. به‌تر است



S:	خورشید	SS:	انقلابِ تابستانی
E:	زمین	FE:	اعتدالِ پاییزی
A:	اوج	WS:	انقلابِ زمستانی
P:	حضیض	SE:	اعتدالِ بهاری

شکلِ 1

بگوییم 365.24 روزِ خورشیدی یِ متوسط. چون (چنان که خواهیم دید) فاصله یِ زمانی یِ بینِ دو ظهرِ متوالی یک‌سان نیست بل که به این بسته‌گی دارد که در کدام روزِ سال ایم. این پدیده دو علت دارد. یک ی این که مدارِ زمین به دورِ خورشید بیضی است نه دایره. خروج‌ازمرکزِ این بیضی 0.017 است. (بنابراین این بیضی خیل ی شبیهِ دایره است.) دیگر این که محورِ چرخشِ زمین بر صفحه یِ مداری یِ زمین به دورِ خورشید عمود نیست. محورِ چرخشِ زمین با عمود بر صفحه یِ مداری یِ زمین زاویه یِ θ می‌سازد، که مقدارِ این زاویه $23°27'$ است. چون خروج‌ازمرکزِ مدارِ زمین خیل ی کم است، فاصله یِ زمین تا خورشید چندان تغییر نمی‌کند. پس گرم‌وسردبودنِ روز با این تعیین می‌شود که زاویه یِ تابشِ خورشید نسبت به سطحِ زمین چه قدر است

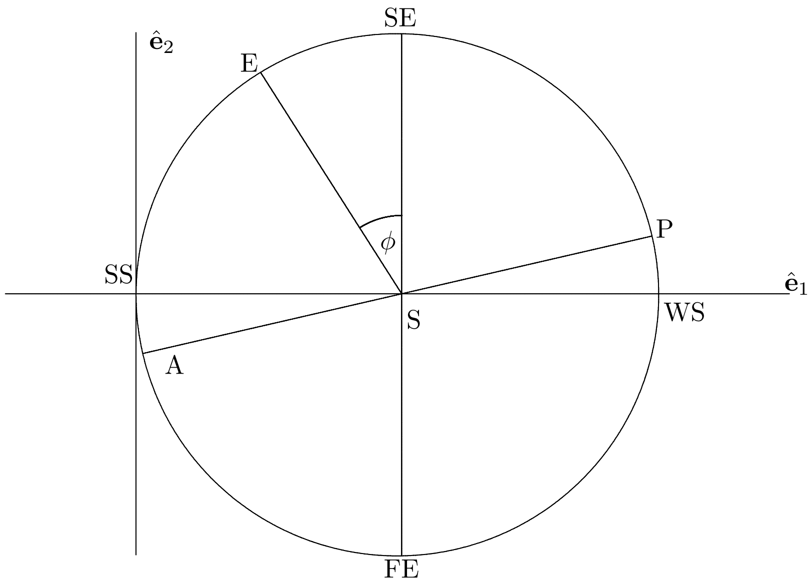


S:	خورشید	SS:	انقلاب ـ تابستانی
E:	زمین	FE:	اعتدال ـ پاییزی
A:	اوج	WS:	انقلاب ـ زمستانی
P:	حضیض	SE:	اعتدال ـ بهاری

شکل ـ 2

و طول ـ روز چه قدر است.

وقت ی زاویه یِ خط ـ واصل ـ زمین به خورشید، با محور ـ قطبی یِ زمین کم‌ترین مقدار ـ ممکن ($(\pi/2) - \theta$) است، طول ـ روز در نیم‌کره یِ شمالی بیشینه است. به این زمان انقلاب ـ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی می‌گوییم. در این حالت طول ـ روز در نیم‌کره یِ جنوبی کمینه است. پس به همین زمان انقلاب ـ زمستانی یِ نیم‌کره یِ جنوبی هم می‌گوییم. وقت ی زاویه یِ خط ـ واصل ـ زمین به خورشید با محور ـ خورشید بیشینه ($(\pi/2) + \theta$) است، طول ـ روز در نیم‌کره یِ شمالی کمینه و در نیم‌کره یِ جنوبی بیشینه است. به این زمان انقلاب ـ زمستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی، یا انقلاب ـ تابستانی یِ نیم‌کره یِ جنوبی، می‌گوییم. دو بار در سال است که خط ـ واصل ـ زمین به خورشید بر

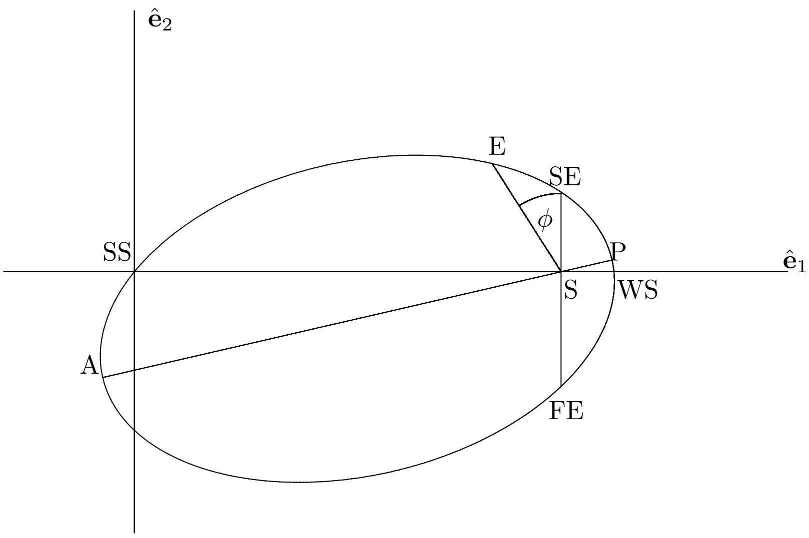


S:	خورشید	SS:	انقلاب ِ تابستانی
E:	زمین	FE:	اعتدال ِ پاییزی
A:	اوج	WS:	انقلاب ِ زمستانی
P:	حضیض	SE:	اعتدال ِ بهاری

شکل ِ 3

محور ِ چرخش ِ زمین عمود می‌شود. به این دوزمان اعتدالین می‌گویند. اعتدال ِ بهاری پس از انقلاب ِ زمستانی و پیش از انقلاب ِ تابستانی است، و اعتدال ِ پاییزی برعکس.

این چهارنقطه در مدار ِ زمین، علی‌الاصول به نقاط ِ اوج و حضیض ِ مدار ِ زمین ربط ی ندارند. در واقع به خاطر ِ این که محور ِ چرخش ِ زمین با دوره ی حدوداً 26 000 سال پیش‌روی می‌کند، جا ی این چهارنقطه هم رو ی مدار ِ زمین عوض می‌شود. اما 26 000 سال خیل ی طولانی است. برا یِ زمان‌ها یِ در حد ِ عمر ِ انسان، محور ِ چرخش ِ زمین ثابت است و جهت ِ آن فعلاً چنان است که تصادفاً انقلاب ِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی نزدیک ِ نقطه یِ اوج ِ مدار ِ زمین است. فعلاً نقطه یِ اوجِ ِ مدار ِ زمین تقریباً 14 روز پس از انقلاب ِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی است و



SS:	انقلاب ـ تابستانی	S:	خورشید
FE:	اعتدال ـ پاییزی	E:	زمین
WS:	انقلاب ـ زمستانی	A:	اوج
SE:	اعتدال ـ بهاری	P:	حضیض

شکل ـ 4

نقطه یِ حضیض ـ مدار ـ زمین تقریباً 14 روز پس از انقلاب ـ زمستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی. شکل ـ 1 هندسه یِ مدار ـ زمین را نشان می‌دهد. شکل ـ 2 همان شکل ـ 1 اما با خروج‌ازمرکز ـ اغراق‌آمیز ($e = 0.8$) است، تا بیضی‌بودن ـ مدار ـ زمین مشخص باشد. شکل‌ها یِ 3 و 4 هم تصویر ـ دوبعدی یِ شکل‌ها یِ 1 و 2 اند.

از شکل ـ 3 دیده می‌شود که مدار ـ زمین واقعاً خیل ی شبیه ـ دایره است. اختلاف ـ نسبی یِ قطر ـ بزرگ و کوچک ـ بیضی برا یِ خروج‌ازمرکزها یِ کوچک $e^2/2$ است، که برا یِ مدار ـ زمین از مرتبه یِ 10^{-4} می‌شود. همین است که چنین‌اختلاف ی رو یِ شکل دیده نمی‌شود. اختلاف ـ نسبی یِ فاصله‌ها یِ اوج و حضیض ـ زمین تا خورشید از این بیش‌تر است. این اختلاف برابرِ $2e$ است، که تقریباً 0.035 است. اما تغییر ـ طول ـ روز، و

تغییر ـِ زاویه یِ تابش ـِ خورشید نسبت به سطح ـِ زمین خیل ی بیش از این مقدار است. البته مقدار ـِ این تغییرات به عرض ـِ جغرافیایی بسته‌گی دارد. اگر هندسه یِ مدار ـِ زمین با چیز ی که فعلاً داریم فرق می‌کرد، ترتیب ـِ فصل‌ها چیز ـِ دیگر ی می‌شد. مثلاً فرض کنید خروج‌ازمرکز ـِ مدار ـِ زمین خیل ی بیش‌تر از مقدار ـِ فعلی می‌بود، و انحراف ـِ محور ـِ قطبی یِ زمین از عمود بر مدار ـِ زمین خیل ی کم‌تر. در آن صورت فاصله یِ زمین تا خورشید فصل را تعیین می‌کرد، و معنی یِ این حرف آن است که تابستان ـِ نیم‌کره‌ها یِ شمالی و جنوبی هم‌زمان می‌شد.

1 جا یِ سایه رو یِ سطح ـِ زمین

بردار ـِ یکه یِ $\hat{\mathbf{e}}_1$ را در جهت ـِ خط ـِ واصل ـِ زمین به خورشید در انقلاب ـِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی، و بردار ـِ یکه یِ $\hat{\mathbf{e}}_3$ را در جهت ـِ عمود بر صفحه یِ مداری یِ زمین به طرف ـِ شمال می‌گیریم. ضمناً

$$\hat{\mathbf{e}}_2 := \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1. \tag{1}$$

محور ـِ قطبی یِ زمین را با $\hat{\mathbf{n}}$، و خط ـِ واصل ـِ زمین به خورشید را با $\hat{\mathbf{s}}$ نشان می‌دهیم. زاویه یِ محور ـِ قطبی یِ زمین با بردار ـِ $\hat{\mathbf{e}}_3$ را با θ، و زاویه یِ $\hat{\mathbf{s}}$ با خط ـِ واصل ـِ زمین به خورشید در اعتدال ـِ بهاری را با ϕ نشان می‌دهیم. داریم

$$\hat{\mathbf{n}} = \sin\theta\, \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta\, \hat{\mathbf{e}}_3, \tag{2}$$

و

$$\hat{\mathbf{s}} = \sin\phi\, \hat{\mathbf{e}}_1 - \cos\phi\, \hat{\mathbf{e}}_2. \tag{3}$$

از اینجا α (زاویه یِ $\hat{\mathbf{n}}$ با $\hat{\mathbf{s}}$) به دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \sin\theta \sin\phi. \tag{4}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ تصویر ـِ خورشید رو یِ سطح ـِ زمین، اول جهت ـِ $\hat{\mathbf{s}}$ نسبت به زمین را حساب می‌کنیم. برا یِ این کار مختصات ـِ نسبت‌به‌زمین‌ثابت ی تعریف می‌کنیم.

محور ـِ z را محور ـِ قطبی یِ زمین می‌گیریم. محور ـِ x را مماس بر زمین در جهت ـِ شرق، و محور ـِ y را چنان می‌گیریم که

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}. \tag{5}$$

مبدئ ـِ زمان را ظهر می‌گیریم. در این صورت جهت ـِ خورشید در $t = 0$ (یعنی وقت ی خورشید در راستا یِ شمالی‌ـ جنوبی یِ آسمان است) می‌شود

$$\hat{\mathbf{s}}(0) = -\hat{\mathbf{y}} \sin\alpha + \hat{\mathbf{z}} \cos\alpha. \tag{6}$$

حرکت ـِ ظاهری یِ خورشید در آسمان دوران با سرعت ـِ زاویه‌ای یِ $-\omega$ حول ـِ محور ـِ قطبی (محور ـِ z) است. ماتریس ـِ این دوران می‌شود

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

از این‌جا بردار ـِ جهت ـِ خورشید در زمان ـِ t به دست می آید:

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = R(t)\hat{\mathbf{s}}(0), \tag{8}$$

یا

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = -\hat{\mathbf{x}} \sin\alpha \sin\omega t - \hat{\mathbf{y}} \sin\alpha \cos\omega t + \hat{\mathbf{z}} \cos\alpha. \tag{9}$$

ذکر ـِ دو نکته بد نیست. اولاً از تغییر ـِ α طی ـِ یک شبانه‌روز چشم پوشیده ایم. ثانیاً ω سرعت ـِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ چرخش یِ زمین است. این سرعت برابر است با 2π تقسیم بر روز ـِ خورشیدی. اما خواهیم دید روز ـِ خورشیدی ثابت نیست. از تغییر ـِ ω طی ـِ یک شبانه‌روز هم چشم پوشیده ایم.

حالا صفحه ای را در نظر بگیرید که در نقطه ای به عرض ـِ جغرافیایی یِ λ بر زمین مماس باشد. بردار ـِ یکه یِ عمود بر این صفحه بردار ـِ یکه یِ شعاعی در آن نقطه است، که آن را با $\hat{\mathbf{r}}$ نشان می‌دهیم:

$$\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{y}} \cos\lambda + \hat{\mathbf{z}} \sin\lambda. \tag{10}$$

بردار ـِ سایه یِ یک میله یِ واحد روی این صفحه می‌شود

$$\mathbf{S}(t) = -\frac{1}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}(t)} [\hat{\mathbf{s}}(t) - \hat{\mathbf{r}}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}(t)]. \tag{11}$$

داریم

$$\cos\xi := \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{s}}(t) = \cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha, \tag{12}$$

که در آن ξ زاویه یِ جهت ِ خورشید با بردار ِ عمود بر سطح ِ زمین است. از آن‌جا

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(t) =\ & (\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha)^{-1}[\hat{\mathbf{x}}\sin\alpha\sin\omega t\\ & +\hat{\mathbf{y}}\sin\lambda(\sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t - \cos\lambda\cos\alpha)\\ & +\hat{\mathbf{z}}\cos\lambda(\sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t - \cos\lambda\cos\alpha)].\end{aligned} \tag{13}$$

حالا یک دست‌گاه ِ جدید تعریف می‌کنیم که دو تا از بردارهایِ‌یکه یِ آن بر سطح ِ زمین مماس اند. بردار ِ $\hat{\mathbf{X}}$ را همان $\hat{\mathbf{x}}$ می‌گیریم. بردار ِ $\hat{\mathbf{Y}}$ را بردار ِ یکه یِ مماس بر سطح ِ زمین به طرف ِ شمال می‌گیریم. $\hat{\mathbf{Z}}$ را هم عمود بر سطح ِ زمین به طرف ِ بالا می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Y}} &= \hat{\mathbf{y}}\sin\lambda + \hat{\mathbf{z}}\cos\lambda,\\ \hat{\mathbf{Z}} &= -\hat{\mathbf{y}}\cos\lambda + \hat{\mathbf{z}}\sin\lambda = \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned} \tag{14}$$

از این‌جا مختصات ِ سایه رو یِ سطح ِ زمین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}X &= \frac{\sin\alpha\sin\omega t}{\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha},\\ Y &= \frac{\sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t - \cos\lambda\cos\alpha}{\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha}.\end{aligned} \tag{15}$$

یک ی از نتایج ِ این رابطه، زمان ِ طلوع و غروب ِ خورشید است. در طلوع و غروب، طول ِ سایه بی‌نهایت می‌شود، یعنی $\cos\xi = 0$. پس داریم

$$\omega t_0 = \pm\cos^{-1}(-\tan\lambda\cot\alpha). \tag{16}$$

در عرض ِ جغرافیایی یِ صفر (استوا) طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا می‌شود $\pm\pi/2$، یعنی طول ِ روز نصف ِ طول ِ شبانه‌روز است، و به فصل بسته‌گی ندارد. در نیم‌کره یِ شمالی، اگر $\alpha < \pi/2$، آن‌گاه اندازه یِ ωt_0 بیش از $\pi/2$ می‌شود، یعنی طول ِ روز بیش از نصف ِ طول ِ شبانه‌روز می‌شود. این مربوط است به نیمه یِ اول ِ سال (بهار و تابستان ِ نیم‌کره یِ شمالی). در نیمه یِ دیگر ِ سال $\alpha > \pi/2$، و طول ِ روز کم‌تر از نصف ِ طول ِ شبانه‌روز است. بیش‌ترین طول ِ روز (در نیم‌کره یِ شمالی) وقت ی است که α کمینه $((\pi/2) - \theta)$

است (انقلاب ـِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی). مدار ـِ قطبی یِ شمالی $\lambda = (\pi/2) - \theta$ است. شمال ـِ این مدار $(\lambda > (\pi/2) - \theta)$ منطقه یِ قطبی یِ شمالی است. وقت ی $\lambda > \alpha$، مقدار ـِ $\cos\xi$ هم‌واره مثبت می‌ماند. این مربوط به زمان ی از سال است که خورشید در آن عرضِ‌جغرافیایی غروب نمی‌کند. اگر $\lambda - \pi > \alpha$، آن‌گاه $\cos\xi$ هم‌واره منفی است، یعنی خورشید زیر ـِ افق است. این زمان ـِ شب ـِ دائمی در آن عرضِ‌جغرافیایی است. مشابه ـِ همین‌ها با شش ماه فاصله، در نیم‌کره یِ جنوبی رخ می‌دهد.

چنان که دیدیم، بیش‌ترین مقدار ـِ تابش ـِ خورشید به زمین طی ـِ یک روز، به زاویه یِ خورشید با عمود بر سطح ـِ زمین، و طول ـِ روز بسته‌گی دارد. کم‌ترین مقدار ـِ زاویه یِ تابش ـِ خورشید با سطح ـِ زمین (رابطه یِ (12)) سر ـِ ظهر است و در این حالت،

$$\cos\xi = \sin(\lambda + \alpha). \tag{17}$$

مدار ـِ رأس‌السرطان $\lambda = \theta$، و مدار ـِ رأس‌الجدی $\lambda = -\theta$ است. به ناحیه یِ بین ـِ این دو مدار $(|\lambda| < \theta)$ ناحیه یِ حاره می‌گویند. در این‌جا ممکن است ξ صفر شود. یعنی زمان ی وجود دارد که خورشید عمودی می‌تابد. این زمان الزاماً در انقلاب ـِ تابستانی (یا زمستانی) نیست. در واقع از رابطه یِ بالا دیده می‌شود این زمان وقت ی است که

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda. \tag{18}$$

اما این طولانی‌ترین روز ـِ سال نیست. طولانی‌ترین روز ـِ سال در انقلاب ـِ تابستانی (یِ هر یک از نیم‌کره‌ها) است. در مدارها یِ رأس‌السرطان و رأس‌الجدی این دو نقطه (طولانی‌ترین روز ـِ سال و تابش ـِ عمودی یِ خورشید) یکی می‌شوند. با کاهش ـِ عرض ـِ جغرافیایی، ضمناً تغییرات ـِ طول ـِ روز کم می‌شود، پس اثر ـِ عمودی‌بودن ـِ تابش ـِ خورشید بر مقدار ـِ تابش ی که زمین دریافت می‌کند بیش‌تر می‌شود. در استوا فقط همین عامل مؤثر است. پس بیش‌ترین مقدار ـِ تابش در استوا در اعتدالین است.

در شمال ـِ رأس‌السرطان ξ هرگز صفر نمی‌شود و کم‌ترین مقدار ـِ آن زمان ی است که α کمینه شود. در این حالت کمینه یِ ξ برابر ـِ $\lambda - \theta$ می‌شود. نتیجه این که روز ـِ بیش‌ترین تابش، در شمال ـِ رأس‌السرطان روز ـِ انقلاب ـِ تابستانی است. از رأس‌السرطان به طرف ـِ جنوب، این روز به‌تدریج به طرف ـِ اعتدال ـِ بهاری می‌رود تا در استوا درست اعتدال ـِ بهاری می‌شود. اما در استوا، مقدار ـِ تابش ـِ خورشید در اعتدال ـِ بهاری و اعتدال ـِ پاییزی یک‌سان است. به‌طرف ـِ جنوب که برویم، روز ـِ بیش‌ترین تابش از اعتدال ـِ پاییزی به

طرف ِ انقلاب ِ زمستانی می‌رود، تا در رأس‌الجدی این روز دقیقاً انقلاب ِ زمستانی می‌شود. در جنوب ِ مدار ِ رأس‌الجدی، روز ِ بیش‌ترین‌تابش همیشه روز ِ انقلاب ِ زمستانی است. (انقلاب‌ها و اعتدال‌ها برا یِ نیم‌کره یِ شمالی اند).

2 خم‌ها یِ محل ِ سایه در ناحیه‌ها یِ مختلف

رابطه‌ها یِ (15) جا یِ سایه رو یِ زمین را نشان می‌دهند. از این‌جا دو دسته خم به دست می‌آید: خم‌ها یِ روزثابت (یعنی خم‌ها یِ ϕ ثابت) و خم‌ها ی ساعت‌ثابت (یعنی خم‌ها یِ (ωt) ثابت). شکل ِ خم‌ها یِ ساعت‌ثابت ساده است. با حذف ِ α از رابطه‌ها یِ (15)، نتیجه می‌شود

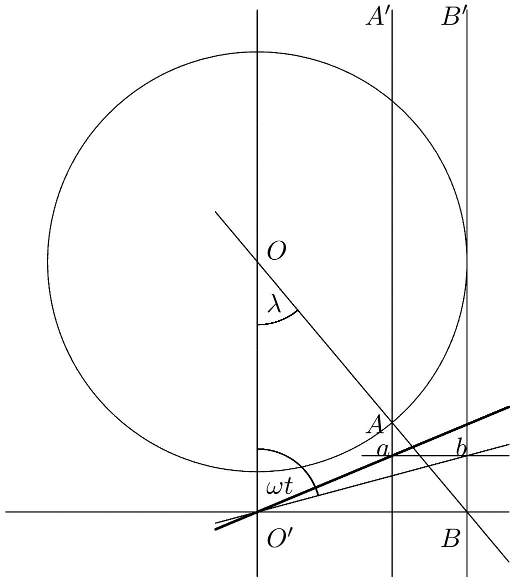
$$Y = -\cot\lambda + \frac{\cot\omega t}{\sin\lambda} X. \tag{19}$$

این‌ها یک دسته خط ِ راست اند، که همه از نقطه یِ $(0, -\cot\lambda)$ می‌گذرند. با به‌دست آوردن ِ این نقطه می‌شود عرض ِ جغرافیایی یِ محل را حساب کرد. (در [1] هم روش ی برا یِ تعیین ِ عرض ِ جغرافیایی معرفی شده.) اگر هدف فقط ساختن ِ یک ساعت ِ ساده (بدون ِ تقویم) باشد، کار بسیار آسان است. شکل ِ 5 روش ِ کار را نشان می‌دهد.

این خط‌ها در دو حالت ِ خاص از این هم ساده‌تر می‌شوند. در استوا $(\lambda = 0)$ خط‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یی عمودی می‌شوند:

$$X = \tan\omega t. \tag{20}$$

در قطب‌ها، خط‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یی شعاعی اند که فاصله یِ زاویه‌ای پشان یک‌نواخت است، درست مثل ِ خط‌ها یِ ساعت ِ معمولی. تنهاتفاوت این است که این‌جا دایره یِ کامل 24 ساعت است نه 12 ساعت. ضمناً در قطب‌ها شمال و جنوب ِ مشخص ی وجود ندارد. در قطب ِ شمال همه یِ جهت‌ها جنوب است و در قطب ِ جنوب برعکس. در این‌جا ظهر هم خوش‌تعریف نیست، چون طول ِ سایه طی یِ روز تغییر نمی‌کند. به همین علت مبدئ ِ ساعت اختیاری است و تقارن ِ دایره‌ای یِ خط‌ها یِ ساعت‌ثابت (حول ِ میله) هم با این سازگار است.



شکل ِ 5

از نقطه ي O (جا ي میله) خط ِ شمالی– جنوبی ي OO' را می‌کشیم. دایره ای به مرکز ِ O و شعاع ِ واحد (طول ِ میله) می‌کشیم. نیم‌خط ِ OB را با زاویه ي λ (عرض ِ جغرافیایی) نسبت به OO' می‌کشیم. این نیم‌خط دایره را در نقطه ي A قطع می‌کند. از A خط ِ شمالی– جنوبی ي AA' را می‌کشیم. فاصله ي A از خط ِ OO' برابر ِ $\sin\lambda$ است. مماس ِ شمالی– جنوبی ي BB' بر دایره را می‌کشیم. این مماس نیم‌خط ِ OB را در نقطه ي B قطع می‌کند. از نقطه ي B خط ِ شرقی– غربی ي BO' را می‌کشیم. این خط OO' را در O' قطع می‌کند. طول ِ OO' برابر ِ $\cot\lambda$ است. تا این‌جا برا ي هر ساعت ی یک‌سان است. از نقطه ي O' خط ِ $O'b$ را با زاویه ي ωt نسبت به $O'O$ می‌کشیم. (t زمان نسبت به ظهر است.) این خط BB' را در b قطع می‌کند. از b خط ِ شرقی– غربی ي ba را می‌کشیم. این خط AA' را در a قطع می‌کند. خم ِ ساعت ِ t بخش ی از خط ِ $O'a$ است.

شکل ِ خم‌ها ي روزثابت از این پیچیده‌تر است. چیز ی که به طور ِ کلی می‌شود گفت این است که این‌ها با تبدیل ِ $\phi\to\pi-\phi$ عوض نمی‌شوند. چون بسته‌گی ي جای ي سایه به ϕ تنها از طریق ِ α است، که آن هم فقط به $\sin\phi$ بسته‌گی دارد. شکل ِ خم ِ اعتدال ($\alpha=\pi/2$) هم ساده است. به ازا ي این مقدار ِ α،

$$X = \frac{\tan \omega t}{\cos \lambda}, \qquad Y = \tan \lambda. \tag{21}$$

این معادله یِ یک خط ِ افقی است. حالا نمودار ِ ساعت در پنج ناحیه یِ مختلف (استوا، حاره یِ شمالی، معتدل ِ شمالی، قطبی یِ شمالی، و خود ِ قطب ِ شمال) را بررسی می‌کنیم.

2.1 استوا

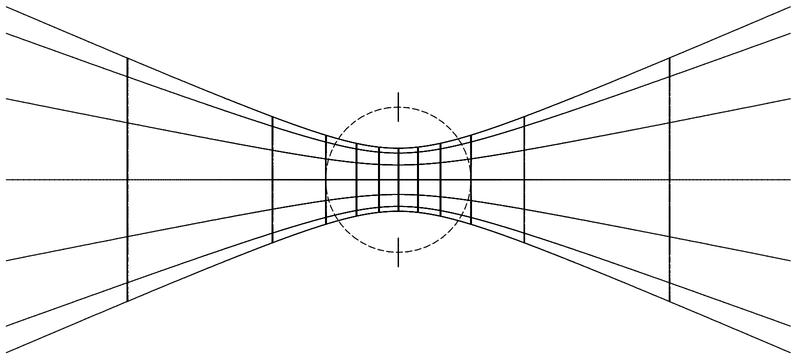
در این‌جا معادله‌ها یِ (15) می‌شوند

$$X = \tan \omega t, \qquad Y = \frac{-\cot \alpha}{\cos \omega t}. \tag{22}$$

خم‌ها یِ روزثابت هذلولی اند:

$$Y = -\cot \alpha \sqrt{1 + X^2}. \tag{23}$$

هیچ یک از این خم‌ها بسته نیست، که نشان می‌دهد خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. وقت ِ طلوع و غروب، سایه به بی‌نهایت (مجانب ِ هذلولی‌ها) می‌گراید. شکل ِ خم‌ها، هم نسبت به شرق و غرب متقارن است، و هم نسبت به شمال و جنوب. در ظهر ِ روزها یِ اعتدال، خورشید کاملاً عمودی می‌تابد و طول ِ سایه صفر می‌شود. در انقلاب‌ها، انحراف ِ خورشید نسبت به حالت ِ عمودی بیشینه و طول ِ سایه هم بیشینه می‌شود.



شکل ِ 6

خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در استوا. جهت ِ شمال رو به بالا است. خم‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یِ عمودی اند. خط ِ وسط ظهر است و خط‌ها یِ دیگر ساعت‌ها یِ 5- تا 5 (نسبت به ظهر)، یعنی هفت ِ صبح تا پنج ِ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خط ِ افقی خط ِ اعتدال است. فاصله یِ زمانی یِ خم‌ها یِ روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلاب ِ تابستانی (یِ نیم‌کره یِ شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلاب ِ زمستانی است. شعاع ِ دایره یِ خط‌چین واحد (طول ِ میله) است. خود ِ میله هم در مرکز ِ دایره است.

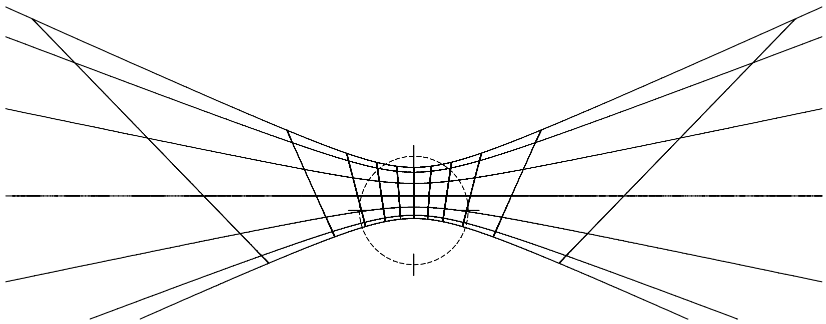
2.2 ناحیه یِ حاره یِ شمالی

هنوز هم همه یِ خم‌ها یِ روزثابت باز اند، یعنی خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. ظهر ِ دو روز است که خورشید عمودی می‌تابد. در این روزها

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda, \tag{24}$$

و از (4)

$$\sin\phi = \frac{\sin\lambda}{\sin\theta}. \tag{25}$$



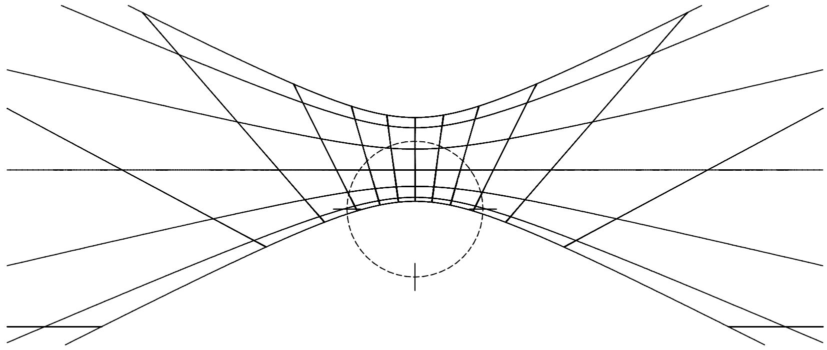
شکل ـِ 7

خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه یِ حاره یِ شمالی. جهت ـِ شمال رو به بالا است. خط ـِ عمودی یِ وسط خط ـِ ظهر است و خط‌ها یِ دیگر ساعت‌ها یِ 5- تا 5 (نسبت به ظهر)، یعنی هفت ـِ صبح تا پنج ـِ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خط ـِ افقی خط ـِ اعتدال است. فاصله یِ زمانی یِ خم‌ها یِ روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلاب ـِ تابستانی (یِ نیم‌کره یِ شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلاب ـِ زمستانی است. شعاع ـِ دایره‌ی خط‌چین واحد (طول ـِ میله) است. خود ـِ میله هم در مرکز ـِ دایره است. این شکل برا یِ عرض ـِ جغرافیایی یِ 15° کشیده شده.

یک ی از این روزها در بهار است $(\phi < \pi/2)$ و یک ی در تابستان $(\pi/2 < \phi)$. بین ـِ این دوروز (از جمله در انقلاب ـِ تابستانی) ظهرها خورشید در شمال ـِ آسمان است و سایه اَش در جنوب می‌افتد. هر چه به طرف ـِ شمال برویم، فاصله یِ این دوروز از هم کم‌تر می‌شود، تا در رأس‌السرطان دوروز رو یِ هم و رو یِ انقلاب ـِ تابستانی می‌افتند. تقارن ـِ شمال‌ـ جنوب ی که در خم‌ها یِ استوا دیده می‌شد، این‌جا وجود ندارد. خم‌ها یِ شمالی (پاییز و زمستان) بزرگ‌تر اند، هر چند روزها یِ متناظر با این خم‌ها کوتاه‌تر اند.

2.3 ناحیه یِ معتدل ـِ شمالی

در این‌جا هم همه یِ خم‌ها یِ روزثابت باز اند، یعنی خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. خورشید هرگز عمودی نمی‌تابد. انحراف ـِ خورشید از خط ـِ عمودی، در انقلاب ـِ تابستانی کمینه می‌شود.



شکل ـ 8

خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه یِ معتدل ـِ شمالی. جهت ـِ شمال رو به بالا است. خط ـِ عمودی یِ وسط خط ـِ ظهر است و خط‌ها یِ دیگر ساعت‌ها یِ 6- تا 6 (نسبت به ظهر)، یعنی شش ـِ صبح تا شش ـِ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خط ـِ افقی یِ بلند خط ـِ اعتدال است. فاصله یِ زمانی یِ خم‌ها یِ روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلاب ـِ تابستانی (یِ نیم‌کره یِ شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلاب ـِ زمستانی است. شعاع ـِ دایره یِ خط‌چین واحد (طول ـِ میله) است. خود ـِ میله هم در مرکز ـِ دایره است. این شکل برا یِ عرض ـِ جغرافیایی یِ $30°$ کشیده شده.

2.4 ناحیه یِ قطبی یِ شمالی

در این‌جا در بخش ی از سال خم‌ها یِ روزثابت بسته اند، یعنی خورشید طلوع و غروب نمی‌کند. شرط ـِ این روی‌داد آن است که $\cos\xi$ به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ ωt مثبت بماند، یعنی

$$\sin\lambda\cos\alpha > |\cos\lambda\sin\alpha|. \tag{26}$$

برا یِ ناحیه یِ قطبی یِ شمالی، $\lambda > 0$ و شرط ـِ بالا می‌شود

$$\alpha < \lambda, \tag{27}$$

یا

$$\sin\phi > \frac{\cos\lambda}{\sin\theta}. \tag{28}$$

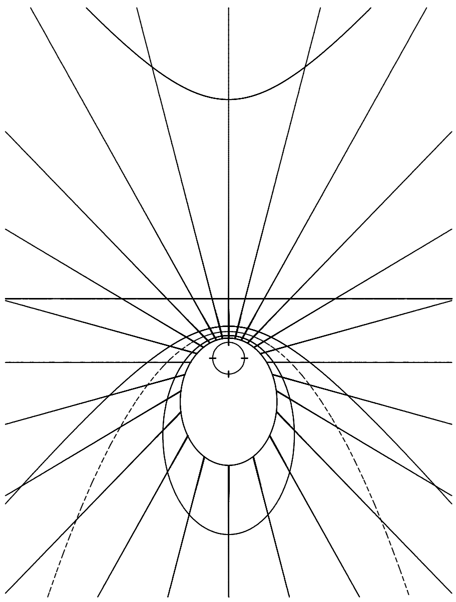
وسط ِ این بازه یِ زمانی انقلاب ِ تابستانی است. معادله یِ خم ِ مربوط به مرز ِ این شرط (تساوی در رابطه یِ بالا) می‌شود

$$X = \frac{\sin\omega t}{\cos\lambda(1+\cos\omega t)},$$
$$Y = \frac{\sin^2\lambda\cos\omega t - \cos^2\lambda}{\sin\lambda\cos\lambda(1+\cos\omega t)}. \qquad (29)$$

دوره یِ مشابه ی هم حول ِ انقلاب ِ زمستانی است،

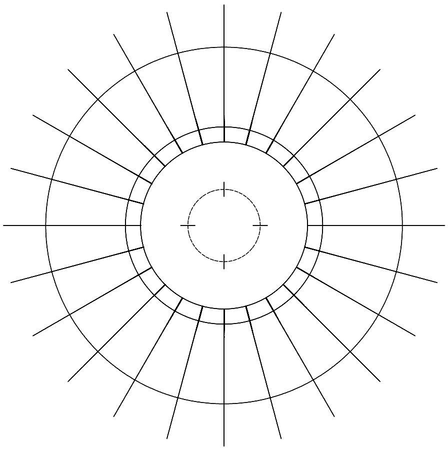
$$\sin\phi < -\frac{\cos\lambda}{\sin\theta}, \qquad (30)$$

که طی ِ آن $\cos\xi$ مثبت نمی‌شود، یعنی شب ِ دائمی است.



شکل ِ 9
خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه یِ قطبی یِ شمالی. جهت ِ شمال رو به بالا است. 24 خط ِ شعاعی خط‌ها یِ ساعت‌ثابت اند. خط ِ عمودی یِ وسط ِ شمالی خط ِ ظهر است و جهت ِ افزایش ِ ساعت ساعت‌گرد است. (این ساعت 24 شماره دارد نه 12 تا، یعنی یک شبانه‌روز را می‌پوشاند.) خم ِ خط‌چین ناحیه یِ خم‌ها یِ بسته (روزها یِ دائمی) را از ناحیه یِ خم‌ها یِ باز جدا می‌کند. خط ِ افقی یِ بلند خط ِ اعتدال است. از خم‌ها یِ روزثابت در نیمه یِ دوم ِ سال فقط یک ی کشیده شده، خم ِ شمالی ِ مربوط به یک ماه پیش از اعتدال ِ بهاری یا یک ماه پس از اعتدال ِ پاییزی. شعاع ِ دایره یِ مرکزی واحد (طول ِ میله) است. خود ِ میله هم در مرکز ِ دایره است. این شکل برا یِ عرض ِ جغرافیایی یِ 75° کشیده شده.

در قطب ِ شمال، شکل‌ها از این هم ساده‌تر می‌شوند. خم‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یِ شعاعی اند و خم‌ها یِ روزثابت دایره‌ها یِ متحدالمرکز.



شکل ـ 10
خم‌ها ي روزثابت و ساعت‌ثابت در قطب ـ شمال. خط‌ها ي شعاعی خم‌ها ي ساعت‌ثابت اند. جهت ـ افزایش ـ ساعت هم ساعت‌گرد است. در این‌جا ظهر خوش‌تعریف نیست. دایره‌ها (جز دایره ي خط‌چین) خم‌ها ي روزثابت اند. کوچک‌ترین ـ این‌ها به انقلاب ـ تابستانی مربوط است. فاصله ي زمانی ي این دایره‌ها از هم یک ماه است. دایره ي بیرونی مال ـ یک ماه پس از اعتدال ـ بهاری، یا یک ماه پیش از اعتدال ـ پاییزی است. شعاع ـ دایره ي خط‌چین واحد (طول ـ میله) است. خود ـ میله هم در مرکز ـ دایره است.

3 تنظیم ـ دقیق ـ ساعت

تا این‌جا در مدرج‌کردن ـ ساعت این فرض را به کار برده ایم که سرعت ـ زاویه‌ای ي خورشیدی ي چرخش ـ زمین ثابت است. این فرض دقیقاً درست نیست. اگر محور ـ چرخش ـ زمین بر صفحه ي مداری عمود می‌بود، این سرعت برابر ـ سرعت ـ زاویه‌ای ي نجومی ي چرخش ـ زمین منها ي سرعت ـ زاویه‌ای ي حرکت ـ مداری ي زمین می‌شد. اولی ثابت است ولی دومی ثابت نیست، چون مدار ـ زمین بیضی است. تغییرات ـ نسبی ي سرعت ـ زاویه‌ای ي مداری ي زمین از مرتبه ي e است. خود ـ سرعت ـ زاویه‌ای ي مداری حدود ـ 0.003 برابر ـ سرعت ـ زاویه‌ای ي چرخش ـ زمین است. به این ترتیب، تغییرات ـ نسبی ي سرعت ـ زاویه‌ای ي خورشیدی ي زمین از مرتبه ي 10^{-4} است. این متناظر است با تغییرات ـ طول ـ شبانه‌روز از مرتبه‌ی 5 ثانیه. اگر هدف مدرج‌کردن ـ ساعت با دقت ـ دقیقه باشد، این 5 ثانیه طی ـ یک شبانه‌روز مهم نیست. اما این 5 ثانیه‌ها با هم جمع می‌شود و باعث می‌شود زمان ـ ظهر از ساعت ـ 12 جابه‌جا شود. بیشینه ي این جابه‌جایی از مرتبه ي همین 5 ثانیه ضرب در 200 (نصف ـ تعداد ـ روزهای سال) است، که حدود ـ 15 دقیقه می‌شود. پس برا ي مدرج‌کردن ـ ساعت با دقت ـ دقیقه، باید این اثر را در نظر گرفت. جز این، عمودنبودن ـ محور ـ چرخش زمین بر مدار ش هم باعث ـ تغییر ـ طول ـ شبانه‌روز طی ـ سال می‌شود.

معادله‌ی مدار ـِ زمین

$$s = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\phi-\phi_{\rm P})} \tag{31}$$

است، که در آن a نیم‌قطر ـِ بزرگ ـِ بیضی، و s فاصله یِ زمین با خورشید است. مبدئ ـِ سنجش ـِ زاویه یِ سمتی (نسبت به خورشید) اعتدال ـِ بهاری، و $\phi_{\rm P}$ زاویه یِ نقطه یِ حضیض است. سرعت ـِ زاویه‌ای یِ حرکت ـِ مداری از این رابطه به دست می آید.

$$s^2\dot\phi = l, \tag{32}$$

که در آن l ثابت است. معادله یِ (31) تا مرتبه یِ یک نسبت به e می‌شود

$$s = a[1-e\cos(\phi-\phi_{\rm P})]. \tag{33}$$

از این‌جا سرعت ـِ زاویه‌ای یِ مداری (تا مرتبه یِ یک نسبت به e) می‌شود

$$\Omega = \dot\phi = \frac{l}{a^2}[1+2e\cos(\phi-\phi_{\rm P})]. \tag{34}$$

ضریب ـِ کروشه سرعت ـِ زاویه‌ای یِ متوسط (Ω_0) است. پس

$$\begin{aligned}\Omega(T) &= \Omega_0[1+2e\cos(\phi-\phi_{\rm P})],\\ &= \Omega_0\{1+2e\cos[\Omega_0(T-T_{\rm P})]\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Ω_0 برابر است با 2π تقسیم بر یک سال. T زمان از اعتدال ـِ بهاری است. $T_{\rm P}$ هم زمان ـِ حضیض است. رابطه یِ ϕ با T می‌شود

$$\phi(T) = \Omega_0 T + 2e\{\sin[\Omega_0(T-T_{\rm P})] + \sin(\Omega_0 T_{\rm P})\}. \tag{36}$$

به خاطر ـِ عمودنبودن ـِ محور ـِ چرخش ـِ زمین بر مدار ـَ ش، سرعت ـِ زاویه‌ای یِ خورشیدی تفاضل ـِ Ω از سرعت ـِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ چرخشِ‌زمین نیست. سرعت ـِ زاویه‌ای یِ خورشیدی را از اختلاف ـِ زمانی یِ دو ظهر ـِ متوالی تعریف می‌کنیم. فرض کنید در زمان ـِ T جهت ـِ خورشید $\hat{\rm s}_0$ است. از مرکز ـِ زمین برداری در جهت ـِ $\hat{\rm s}_0$ می‌کشیم. در این زمان، در محل ـِ برخورد ـِ این بردار با سطح ـِ زمین ظهر است. سرعت ـِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ چرخش ـِ زمین را با $\tilde\omega$ نشان می‌دهیم. پس از گذشت ـِ زمان ـِ

$2\pi/\tilde{\omega}$، این نقطه در اثر ِ چرخش ِ زمین سر ِ جا یِ خود َش بر می‌گردد، اما در این زمان جهت ِ خورشید دیگر $\hat{\mathbf{s}}_0$ نیست. با فرض ِ کوچک‌بودن ِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ مداری یِ زمین به سرعت ِ زاویه‌ای یِ چرخش ِ آن (که فرض ِ معقول ی است، چون نسبت ِ این‌دو تقریباً 0.003 است) جهت ِ جدید ِ خورشید

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_0 + \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}\Omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0 \tag{37}$$

است. به این ترتیب، در این زمان در آن نقطه ظهر نیست. در زمان ِ کوچک ِ δt پس از این، نقطه یِ مشاهده یِ $\hat{\mathbf{s}}_0$ به خاطر ِ چرخش ِ زمین به نقطه یِ

$$\hat{\mathbf{s}}' = \hat{\mathbf{s}}_0 + \delta t\, \tilde{\omega}\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0 \tag{38}$$

رفته است. (نقطه یِ مشاهده در واقع رو یِ سطح ِ زمین است، اما چون فقط جهت ِ بردار ِ نقطه یِ مشاهده مهم است، می‌شود آن را خود ِ $\hat{\mathbf{s}}_0$ گرفت.) ظهر در این نقطه‌یِ‌مشاهده زمانی ی است که سه‌بردار ِ $\hat{\mathbf{s}}$، $\hat{\mathbf{s}}'$، و $\hat{\mathbf{n}}$ در یک صفحه باشند، یعنی زمان ی که حاصلِ‌ضرب ِ سه‌تایی یِ این سه‌بردار صفر شود. این حاصلِ‌ضرب می‌شود

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}} &= \frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0) + \tilde{\omega}\delta t(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0),\\
&= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{n}} \cdot [\hat{\mathbf{s}}_0 \times (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0)] + \tilde{\omega}\delta t(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0),\\
&= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_3 - \hat{\mathbf{s}}_0\ \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) + \tilde{\omega}\delta t \sin^2\alpha,\\
&= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\cos\theta + \tilde{\omega}\delta t \sin^2\alpha.
\end{aligned} \tag{39}$$

از این‌جا δt برا یِ ظهر به دست می‌آید:

$$\delta t = \frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}^2}\frac{\cos\theta}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}. \tag{40}$$

سرعت ِ زاویه‌ای یِ خورشیدی (ω) را 2π تقسیم بر فاصله یِ دو ظهر ِ متوالی تعریف می‌کنیم. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{(2\pi/\tilde{\omega}) + \delta t},\\
&= \tilde{\omega} - \frac{\tilde{\omega}^2\delta t}{2\pi},\\
&= \tilde{\omega} - \frac{\Omega\cos\theta}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}.
\end{aligned} \tag{41}$$

دیده می‌شود که اگر $\theta = 0$، طرف ِ راست $\Omega - \tilde\omega$ می‌شود و اگر $\theta = \pi$، طرف ِ راست $\Omega + \tilde\omega$ می‌شود، که همان چیز ی است که انتظار داریم.

تعداد ِ روزها یِ خورشیدی یِ یک سال می‌شود

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau} \omega(T)\mathrm{d}T,\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\tilde\omega\tau - \int_0^{\tau} \frac{\Omega(T)\cos\theta}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi(T)}\mathrm{d}T\right],\\
&= \tilde N - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta(1+\tan^2\phi)}{1+\cos^2\theta\tan^2\phi}\mathrm{d}\phi,\\
&= \tilde N - \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\cos\theta\tan\phi)\Big|_0^{2\pi},\\
&= \tilde N - \mathrm{sgn}(\cos\theta).
\end{aligned} \tag{42}$$

توجه کنید که $\tan^{-1}$ در رابطه‌ها یِ بالا چندمقداری است. $\tan^{-1}(\cos\theta\tan\phi)$ در $\phi = 0$ صفر است و نسبت به ϕ هم پیوسته است. τ دوره یِ حرکت ِ مداری یِ زمین (یک سال)، و $\tilde N$ تعداد ِ روزها یِ نجومی یِ سال است. از این‌جا سرعتِ‌زاویه‌ای یِ متوسط ِ خورشیدی می‌شود

$$\omega_0 = \tilde\omega - \Omega_0\mathrm{sgn}(\cos\theta). \tag{43}$$

حالا می‌خواهیم ببینیم در زمان ِ T، اختلاف ِ زمان ِ استاندارد (بر اساس ِ یک ساعت برابر ِ یک بیست‌وچهارم ِ روز ِ متوسط ِ خورشیدی) با زمان ِ خورشیدی (بر اساس ِ جا یِ خورشید در آسمان) چه قدر است. هر دوزمان از فاز ِ چرخش ِ زمین به دست می‌آیند، اما یک ی با سرعت ِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ متوسط و یک ی با سرعت ِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ لحظه‌ای:

$$\int_0^{T} \omega(T')\mathrm{d}T' = \int_0^{T_0} \omega_0(T')\mathrm{d}T' = \int_0^{\tilde T} \tilde\omega(T')\mathrm{d}T'. \tag{44}$$

زمان ی که از ساعت ِ آفتابی خوانده می‌شود T_0 است. زمان ِ واقعی T است. اختلاف ِ این دوزمان تا مرتبه یِ یک می‌شود

$$\omega_0(T-T_0) + \int_0^{T}[\omega(T') - \omega_0]\mathrm{d}T' = 0, \tag{45}$$

یا

$$T - T_0 = \frac{1}{\omega_0}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)] - \Omega_0 T\}\mathrm{sgn}(\cos\theta). \tag{46}$$

(چون این عبارت مرتبه‌یِ‌یک است، در طرف ـ راست می‌شود T یا T_0 گذاشت.) طرف ـ راست ـ این عبارت در اعتدال ـ بهاری صفر می‌شود. حالا فرض کنید در اعتدال ـ بهاری، ظهر به اندازه یِ Δ_0 بعد از ساعت ـ 12 باشد. این مقدار به ساعت ـ قراردادی بسته‌گی دارد. به این ترتیب، اگر زمان ی که ساعت ـ خورشیدی نشان می‌دهد T_0 باشد، زمان ـ قراردادی (T') می‌شود

$$T' = T_0 + \frac{1}{\omega_0}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)] - \Omega_0 T\}\mathrm{sgn}(\cos\theta) + \Delta_0. \qquad (47)$$

برا یِ دو نقطه که ساعت ـ رسمی یِشان یکی است، Δ_0 یک‌سان نیست و تفاوت ـ Δ_0 برا یِ این دو نقطه به اختلاف ـ طولِ‌جغرافیایی یِ این دونقطه بسته‌گی دارد:

$$\Delta_0' - \Delta_0 = \frac{(\zeta' - \zeta)d_0}{2\pi}. \qquad (48)$$

در این‌جا ζ طول ـ جغرافیایی یِ محل، و d_0 روز ـ خورشیدی یِ متوسط (24 ساعت) است.

به رابطه یِ (46) بر گردیم. این رابطه را می‌شود این طور نوشت.

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \frac{d_0}{2\pi}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)] - \phi\}\mathrm{sgn}(\cos\theta) + \frac{d_0}{2\pi}(\phi - \Omega_0 T)\mathrm{sgn}(\cos\theta), \\ &=: \Delta_1 + \Delta_2. \end{aligned} \qquad (49)$$

اگر مدار ـ زمین دایره‌ای می‌بود، جمله یِ دوم صفر می‌شد. اگر محور ـ چرخش ـ زمین بر مدار ـ آن عمود می‌بود، جمله یِ اول صفر می‌شد. با توجه به این که فاصله یِ زاویه‌ای یِ نقطه یِ حضیض از اعتدال ـ بهاری حدود ـ $\pi/2$ است، و با توجه به رابطه یِ (36)، بیشینه یِ جمله یِ دوم می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta_{2\mathrm{m}} &\approx \frac{4e\, d_0}{2\pi}, \\ &\approx 15\mathrm{min}. \end{aligned} \qquad (50)$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ـ بیشینه یِ جمله یِ اول مشتق ـ آن نسبت به ϕ را صفر می‌گذاریم:

$$\frac{|\cos\theta|(1+\tan^2\phi)}{1+\cos^2\theta\tan^2\phi} = 1. \qquad (51)$$

نتیجه می‌شود

$$\tan^2\phi = \frac{1}{|\cos\theta|}, \qquad (52)$$

و از آن‌جا بیشینه یِ جمله یِ اول می‌شود

$$\begin{aligned}\Delta_{1\mathrm{m}} &= \left[\tan^{-1}\left(|\cos\theta|^{-1/2}\right) - \tan^{-1}\left(|\cos\theta|^{1/2}\right)\right]\frac{d_0}{2\pi},\\ &\approx 0.007d_0,\\ &\approx 10\mathrm{min}.\end{aligned} \tag{53}$$

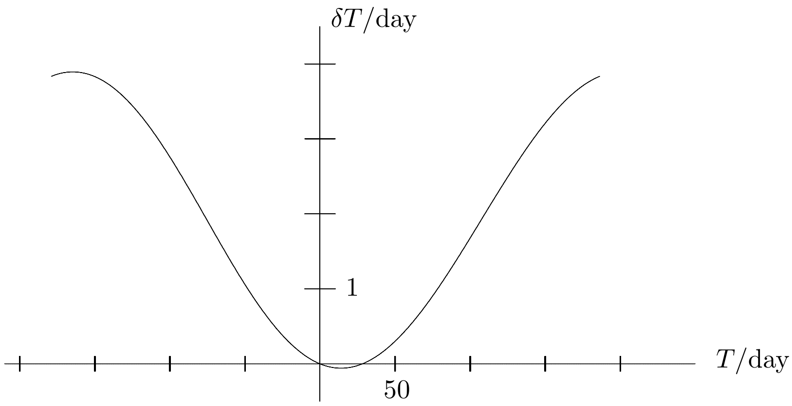
دیده می‌شود در مورد ِ زمین، اثر ِ بیضی‌بودن ِ مدار ِ زمین و عمودنبودن ِ محور ِ چرخش ِ آن بر مدار َش از یک مرتبه است.

اگر زاویه یِ محور ِ چرخش ِ یک سیاره با عمود بر مدار َش زیاد می‌شد (نزدیک ِ 90 درجه) اتفاق ِ جالب ی می‌افتاد. برا یِ ساده‌گی مدار را دایره می‌گیریم. داریم

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\tan^{-1}(\epsilon\tan\phi) = \begin{cases}0, & 0<\phi<\pi/2\\ \pi, & \pi/2<\phi<3\pi/2\\ 2\pi, & 3\pi/2<\phi<2\pi\end{cases}. \tag{54}$$

معنی یِ این عبارت آن است که برا یِ چنین‌سیاره ای، از اعتدال ِ بهاری تا انقلاب ِ تابستانی طول ِ روز برابر ِ روز ِ نجومی است. طول ِ روز ِ انقلاب ِ تابستانی نصف ِ روز (برا یِ $\theta > \pi/2$) یا یک و نیم روز (برا یِ $\theta < \pi/2$) است. پس از آن تا انقلاب ِ زمستانی طول ِ روز برابر ِ روز ِ نجومی است، و در انقلاب ِ زمستانی دوباره همین روز ِ غیرِعادی تکرار می‌شود. بین ِ سیاره‌ها یِ منظومه‌یِ‌شمسی، وضعیت ِ اُرانوس از همه یِ سیاره‌ها یِ دیگر به این وضعیت نزدیک‌تر است ($\theta \approx 98°$).

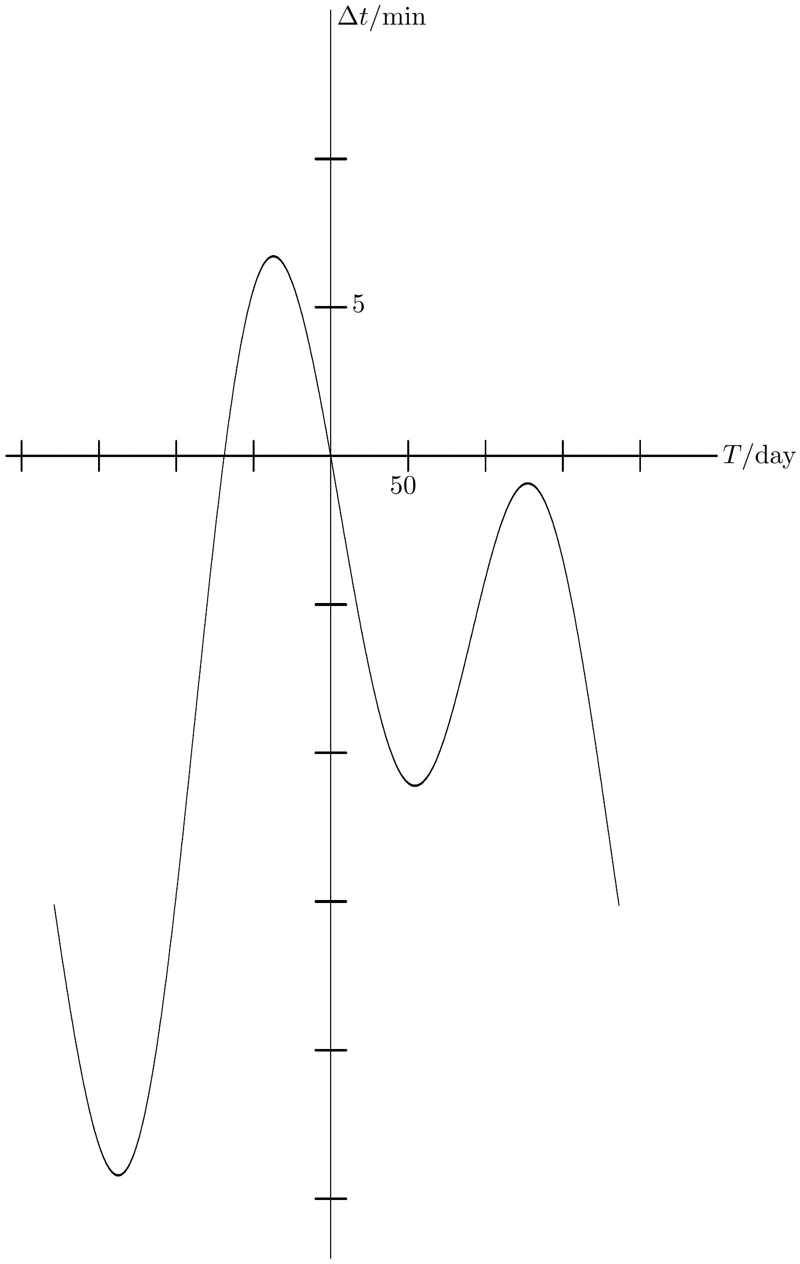
برا یِ تنظیم ِ دقیق ِ ساعت و تقویم، دو نمودار لازم است. یک ی نمودار ِ انحراف ِ تقویم ِ واقعی از تقویم ِ آفتابی بر حسب ِ زمان، و دیگر ی نمودار ِ انحراف ِ ساعت ِ واقعی از ساعت ِ آفتابی. شکل ِ 11 نمودار ِ اول را نشان می‌دهد. معنی یِ این نمودار آن است که اگر روز ِ خوانده‌شده از رو یِ ساعت ِ آفتابی T باشد، باید مقدار ِ δT را به آن افزود تا روز ِ واقعی به دست آید.



شکل ـ 11

نمودار ـ تقویم ـ واقعی منها ي تقویم ـ آفتابی، بر حسب ـ زمان.

شکل ـ 12 نمودار ـ انحراف ـ ساعت ـ واقعی از ساعت ـ خورشیدی را نشان می‌دهد. معنی يِ این نمودار آن است که اگر ساعت ـ آفتابی زمان ـ t را نشان دهد، باید به آن مقدار ـ Δt را افزود تا ساعت ـ واقعی به دست آید. البته به جز این، باید مقدار ـ Δ_0 را هم افزود تا ساعت ـ رسمی به دست آید. مقدار ـ Δ_0 قراردادی است، و در واقع برابر است با زمان ـ رسمی يِ ظهر ـ آفتابی در محل منها يِ ساعت ـ دوازده ـ ظهر، در روز ـ اعتدال ـ بهاری.



شکل ِ 12

نمودار ِ ساعت ِ واقعی منها یِ ساعت ِ آفتابی، بر حسب ِ زمان.

4 دستورالعمل برا یِ ساختن ـِ ساعت ـِ آفتابی

- یک ناحیه یِ هم‌وار ـِ افقی یِ آفتاب‌گیر پیدا کنید. افقی‌بودن را می‌شود با مثلاً تراز ـِ آبی امتحان کرد. آفتاب‌گیربودن هم نوعاً یعنی این که جنوب ـِ این ناحیه باز باشد (در ناحیه یِ معتدل ـِ شمالی، از جمله ایران).

- یک میله را به طور ـِ عمودی نصب کنید، چنان که سایه یِ میله کاملاً رو یِ بخش ـِ هم‌وار ـِ ناحیه یِ افقی بیفتد. در ناحیه یِ معتدل ـِ شمالی، این یعنی اطراف ـِ میله در جهت ـِ شمال و شرق و غرب تا فاصله یِ چندبرابر ـِ طول ـِ میله باز باشد، یعنی به‌تر است میله در جنوب ـِ ناحیه یِ افقی نصب شود. با استفاده از رابطه یِ (19) یا با استفاده از روش ـِ هندسی یِ شکل ـِ 5، خم‌ها یِ تقریبی یِ ساعت‌ثابت را بکشید.

اگر فقط ساعت ـِ بی‌تقویم ـِ تقریبی (تا حد ـِ نیم‌ساعت دقت) می‌خواهید، کار تمام است. در غیر ـِ این صورت،

- در رابطه یِ (15) به جا یِ λ عرض ـِ جغرافیایی یِ محل را بگذارید و α را مقدار ـِ ثابت ی بگیرید. معادله یِ پارامتری یِ خم ـِ روزثابت به دست می‌آید. پارامتر ωt است، و α از رابطه یِ (4) به دست می‌آید، که در آن ϕ زاویه یِ خط ـِ واصل ـِ زمین به خورشید با این خط در اعتدال ـِ بهاری است، و $\theta = 23°27'$. تقویم ـِ تقریبی چنین به دست می‌آید که گذشت ـِ هر ماه برابر است با افزایش ـِ ϕ به مقدار ـِ $\pi/6$ (یا 30 درجه). این کار را برا یِ مقدارها یِ مختلف ـِ ϕ انجام دهید. نتیجه برا یِ ایران چیز ی شبیه ـِ شکل ـِ 8 خواهد شد. (این شکل خم‌ها یِ ساعت‌ثابت را هم دارد.)

- با استفاده از شکل ـِ 11، می‌شود تقویم ـِ دقیق را از رو یِ تقویم ـِ تقریبی به دست آورد.

- زمان ـِ رسمی یِ ظهر ـِ آفتابی در روز ـِ اعتدال ـِ بهاری در محل را به دست آورید. برا یِ این‌کار می‌توانید وقت ی ساعت ـِ آفتابی دوازده ـِ ظهر را نشان می‌دهد ساعت ـِ رسمی را بخوانید. این مقدار ـِ Δ_0 را می‌دهد.

• با استفاده از نمودار ِ شکل ِ 12، می‌شود ساعت ِ دقیق را از رو یِ ساعت ِ تقریبی به دست آورد. (به عددها یِ این نمودار باید مقدار ِ Δ_0 را هم افزود.)

5 مرجع

[۱] محمود بهمن‌آبادی و احسان لطفی؛ مجله یِ فیزیک ۱۸، ۳ و ۴ (پاییز و زمستان ِ ۱۳۷۹) ۱۰۴ تا ۱۰۸