$$\ln \mathcal{Z} = -\frac{\nu V}{\sigma}\int \frac{d^D p}{h^D} \ln\left(1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

گاز کامل یک جزئی کوانتمی

$$\ln \mathcal{Z} = \frac{PV}{k_B T}$$

ν : چندگانگی حالت‌ها با تکانه‌ی معین

$$\langle N \rangle \longrightarrow N \qquad \frac{dN}{d^D p} = \frac{\nu V}{h^D}\,\frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$N = \nu V \int \frac{d^D p}{h^D}\,\frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$\frac{dN}{(dV)(d^D p)} = \frac{\nu}{h^D}\,\frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$d^D p = p^{D-1}\,dp\,d\Omega \longrightarrow$$ عنصرِ زاویه‌ی فضایی

$$(p^{D-1}\,dp) = d\,\frac{p^D}{D}$$

$$\left[d\,\frac{p^D}{D}\right] \times \ln\left[1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}\right] \longrightarrow$$

$$-\frac{p^D}{D}\;\frac{\sigma z e^{-\beta\varepsilon}\,\beta\,\frac{d\varepsilon}{dp}}{1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$\frac{PV}{k_B T} = \nu V \int \frac{d^D p}{h^D}\,\frac{p}{D}\,\beta\,\frac{d\varepsilon}{dp}\;\frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$P = \frac{\nu}{D}\int \frac{d^D p}{h^D}\, p\,\frac{d\varepsilon}{dp}\,\frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$N = \nu V \int \frac{d^D p}{h^D}\,\frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$\sigma = 0$: کلاسیک

$$P = \frac{\nu}{D}\int \frac{d^D p}{h^D}\, p\,\frac{d\varepsilon}{dp}\, z e^{-\beta\varepsilon}$$

$$\frac{N}{V} = \nu \int \frac{d^D p}{h^D}\, z e^{-\beta\varepsilon}$$

$$\frac{p^D}{D}\frac{d\varepsilon}{dp}e^{-\beta\varepsilon}$$

$$= \frac{p^D}{D}\left(-\frac{1}{\beta}\,\frac{d(e^{-\beta\varepsilon})}{dp}\right.$$

$$\to \frac{1}{\beta}\, p^{D-1}\, e^{-\beta\varepsilon}$$

$$P = \nu (k_B T) \int \frac{d^D p}{h^D} z e^{-\beta \varepsilon}$$

$\sigma \to 0$

$(z \to 0$ یا$)$

$$\frac{N}{V} = \nu \int \frac{d^D p}{h^D} z e^{-\beta \varepsilon}$$

معادله‌ی حالت گاز کلاسیک : $\frac{P}{k_B T} = \frac{N}{V}$

(در حالت کلی که $\sigma \neq 0$ و z کوچک نیست)

$$P = \frac{\nu}{D} \int \frac{d^D p}{h^D} \, p \frac{d\varepsilon}{dp} \, \frac{z e^{-\beta \varepsilon}}{1 - \sigma z e^{-\beta \varepsilon}}$$

$$\frac{N}{V} = \nu \int \frac{d^D p}{h^D} \, \frac{z e^{-\beta \varepsilon}}{1 - \sigma z e^{-\beta \varepsilon}}$$

حالت غیر نسبیتی:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \qquad p \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{p^2}{m} = 2\varepsilon$$

$$P = \frac{2\nu}{D} \int \frac{d^D p}{h^D} \, \varepsilon \, \frac{z e^{-\beta \varepsilon}}{1 - \sigma z e^{-\beta \varepsilon}} \qquad P = \frac{2}{D} \frac{N}{V} \langle \varepsilon \rangle$$

تمرین:

S_n: مساحت کره ی n بعدی واحد

$$x = \beta \varepsilon = \beta \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2mk_BT}\,\sqrt{x} \qquad dp = \frac{\sqrt{2mk_BT}}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{\nu}{h^D} S_{D-1} \int p^{D-1}\,dp \; \frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$= \frac{\nu}{h^D} S_{D-1} \frac{(2mk_BT)^{\frac{D}{2}}}{2} \int dx \; x^{\frac{D}{2}-1} \frac{z e^{-x}}{1-\sigma z e^{-x}}$$

$$S_{D-1} = \frac{2\pi^{D/2}}{\left(\frac{D}{2}-1\right)!}$$

$$\nu = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

$$\frac{N}{V} = \nu \frac{(2\pi m k_B T)^{D/2}}{h^D \left(\frac{D}{2}-1\right)!} \int dx \; \frac{x^{\frac{D}{2}-1} z e^{-x}}{1-\sigma z e^{-x}}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{v}{d^D} \frac{1}{\left(\frac{D}{2}-1\right)!} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\frac{D}{2}-1} z e^{-x}}{1 - \sigma z e^{-x}}$$

$$g_{\sigma, n}(z) := \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{n-1} z e^{-x}}{1 - \sigma z e^{-x}}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{v}{d^D} g_{\sigma, \frac{D}{2}}(z)$$

$$P = \frac{2 k_B T}{D d^D} \frac{v}{\left(\frac{D}{2}-1\right)!} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\frac{D}{2}} z e^{-x}}{1 - \sigma z e^{-x}}$$

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{1}{D!} \quad \frac{v}{d^D} \frac{1}{\left(\frac{D}{2}\right)!} \int dx \, \frac{x^{D/2} z e^{-x}}{1 - \sigma z e^{-x}}$$

$$\boxed{\frac{P}{k_B T} = \frac{\nu}{\lambda^D} g_{\sigma,\, \frac{D}{2}+1}(z) \qquad \frac{N}{V} = \frac{\nu}{\lambda^D} g_{\sigma,\, \frac{D}{2}}(z)}$$

$$g_{\sigma, n}(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{n-1} z e^{-x}}{1 - \sigma z e^{-x}}$$

اگر z کوچک باشد،

$$g_{\sigma, n}(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty dx \, x^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \left(z e^{-x}\right)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \frac{z^{k+1}}{(k+1)^n} \qquad z g'_{\sigma, n}(z) = \sum_{k=0} \sigma^k \frac{z^{k+1}}{(k+1)^{n-1}}$$

$$z g'_{\sigma, n}(z) = g_{\sigma, (n-1)}(z)$$

$$g_{\sigma,n}(z) = z + \cdots \qquad z \ll 1$$

حد کلاسیک

$$\frac{N}{V} = \frac{\nu}{\lambda^D}\, \underbrace{g_{\sigma,\frac{D}{2}}(z)}_{\to z}$$

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{\nu}{\lambda^D}\, \underbrace{g_{\sigma,\frac{D}{2}+1}(z)}_{\to z}$$

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{N}{V}$$ معادله‌ی حالت گاز ایده‌آل کلاسیک

$$g_{\sigma,n}(z) = z + \sigma \frac{z^2}{2^n} + \cdots$$

تقریب [illegible]:

$$\frac{\lambda^D}{\nu}\frac{N}{V} = z + \sigma \frac{z^2}{2^{D/2}} + \cdots \longrightarrow z = \frac{N\lambda^D}{\nu V} - \sigma \frac{z^2}{2^{D/2}} + \cdots$$

$$\frac{\lambda^D P}{\nu k_B T} = z + \sigma \frac{z^2}{2^{\frac{D}{2}+1}} + \cdots$$

$$= z = \frac{N\lambda^D}{\nu V} - \frac{\sigma}{2^{D/2}}\left(\frac{N\lambda^D}{\nu V}\right)^2 + \cdots$$

$$\frac{\lambda^D P}{\nu k_B T} = \frac{N\lambda^D}{\nu V}\left[1 - \frac{\sigma}{2^{D/2}}\left(\frac{N\lambda^D}{\nu V}\right)\right] + \frac{\sigma}{2^{\frac{D}{2}+1}}\left(\frac{N\lambda^D}{\nu V}\right)^2 + \cdots$$

$$\frac{PV}{Nk_BT} = 1 \mp \frac{1}{2^{\frac{D}{2}+1}}\left(\frac{N\lambda^D}{\nu V}\right) + \cdots$$

تقریب رقیق:

$$\frac{N\lambda^D}{\nu V} \ll 1$$

ν از مرتبه‌ی یک

$$\frac{N\lambda^D}{V} \ll 1$$

λ^D : حجم متناظر با طول موج گرمایی (دبروی)

$\frac{V}{N}$ حجمی که به یک ذره می‌رسد.

اگر $\frac{V}{N} \gg d^D$ ، ذرات عملاً نقطه‌ای رفتار می‌کنند ،

یعنی بستگی به کوانتمی آنها مهم نیست.

آمار غیر کوانتمی کوچک نه

آمار غیر کوانتمی به کدام طرف نسبت به رژیم کم میشود یا زیاد

(نسبت به حالت کلاسیک)

فرمیون $\sigma=-1<0$, $P>P_c$, $\frac{PV}{Nk_BT}>1$	بوزون $\sigma=+1>0$, $P<P_c$, $\frac{PV}{Nk_BT}<1$

اثر کوانتومی بوزونی مثل یک جاذبه‌ی مشترک است:
فضا را کم میکنه.

اثر کوانتومی فرمیونی مثل یک دافعه‌ی مشترک است:
فضا را زیاد میکنه.

اگر z کوچک نبود؟

$$\frac{N}{V} = \frac{\nu}{\lambda^D}\, g_{\sigma,\frac{D}{2}}(z)$$

$$\frac{P}{k_BT} = \frac{\nu}{\lambda^D}\, g_{\sigma,\frac{D}{2}+1}(z)$$

$\dfrac{PV}{Nk_BT} =$ ضریب تراکم: $= \dfrac{g_{\sigma,\frac{D}{2}+1}(z)}{g_{\sigma,\frac{D}{2}}(z)}$

$$g_{+1,n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)^n} \qquad n\uparrow \quad g\downarrow$$

= [illegible] $, z, 1)$

$$g_{-1,n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{k+1}}{(k+1)^n} \qquad z<1$$

$$= \left(z - \frac{z^2}{2^n}\right) + \left(\frac{z^3}{3^n} - \frac{z^4}{4^n}\right) + \cdots$$

$$= z - \underbrace{\left(\frac{z^2}{2^n} - \frac{z^3}{3^n}\right)}_{>1 \quad n\uparrow\ (\ )\downarrow} - \underbrace{\left(\frac{z^4}{4^n} - \frac{z^5}{5^n}\right)}_{>1} - \cdots$$

$n\uparrow \quad g_{-1,n}\downarrow$

$$\frac{g_{\sigma, \frac{D}{2}+1}(z)}{g_{\sigma, \frac{D}{2}}(z)} \begin{cases} <1, & \sigma = +1 \\ >1, & \sigma = -1 \end{cases}$$

ضریب تراکم برای بوزونها کوچکتر از یک

و برای فرمیونها کوچکتر از یک است.

$$\frac{N}{V} = \frac{\nu}{\lambda^D} g_{\sigma, \frac{D}{2}}(z)$$

$$\longrightarrow z = \left(g_{\sigma, \frac{D}{2}}\right)^{-1} \left(\frac{\lambda^D N}{\nu V}\right)$$

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{\nu}{\lambda^D} g_{\sigma, \frac{D}{2}+1}\left[g_{\sigma, \frac{D}{2}}\left(\frac{\lambda^D N}{\nu V}\right)\right]$$

$$\frac{PV}{N k_B T} = \left(\frac{\nu V}{N \lambda^D}\right) g_{\sigma, \frac{D}{2}+1} \left[\left(g_{\sigma, \frac{D}{2}}\right)^{-1} \left(\frac{N \lambda^D}{\nu V} \right) \right]$$

معادله حالت

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{N \lambda^D}{\nu V} \right)^n$$

$g_{+1,n} = g_n$

$g_{-1,n} = f_n$

رفتار های بسیار دور از کلاسیک :

z کوچک نباشه :

$\sigma = 1$

بوزون

$$N = \frac{\nu V}{\lambda^D} g_{\frac{D}{2}}(z) = \frac{\nu V}{\lambda^D} \frac{1}{(\frac{D}{2}-1)!} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\frac{D}{2}} e^{-x}}{1 - z e^{-x}}$$

$z \uparrow \quad N \uparrow \qquad z \not> 1$

$N(z=1) = ?$

$z \to 1$

$N \xrightarrow{?} \infty$

$z=1$: $$g_n(z=1)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{n-1}e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$x\to 0$ انتگرانده $\sim \dfrac{x^{n-1}}{x}=x^{n-2}$

اگر $n-1>0$ $\quad n-2>-1$ انتگرال همگرا است.

$n=\frac{D}{2}$ (بی‌نهایت N)

اگر $D>2$ انتگرالی که در حد بی‌نهایت N ظاهر می‌شود، همگرا است.

$$N_{max} = \frac{\nu V}{d^D} \frac{1}{\left(\frac{D}{2}-1\right)!} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\frac{D}{2}-1} e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$= \frac{\nu V}{d^D} \frac{1}{\left(\frac{D}{2}-1\right)!} \sum_{k=0}^{\infty} \int dx \, x^{\frac{D}{2}-1} e^{-(k+1)x}$$

$$= \frac{\nu V}{d^D} \frac{1}{\left(\frac{D}{2}-1\right)!} \left(\frac{D}{2}-1\right)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\frac{D}{2}}}$$

$$\zeta(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^s} \qquad N_{max} = \frac{\nu V}{d^D} \zeta\left(\frac{D}{2}\right)$$

$$\left(\frac{N}{V}\right)_{max} = \frac{V}{d^D}\,\zeta\left(\frac{D}{2}\right)$$ برای $D>2$

که سری همگرا است.

انتگرال از کی آمد؟ از جمع روی حالت‌های گسسته:

$$N_a = \frac{\nu \zeta e^{-\beta E_a}}{1-\sigma \zeta e^{-\beta E_a}} \xrightarrow[\zeta=1]{\sigma=1} \frac{\nu e^{-\beta E_a}}{1-e^{-\beta E_a}}$$

برای $E_a=0$ (حالت پایه) $N_{a=0}=\infty$

تبدیل جمع بر a به انتگرال مجاز است به شرط آنکه

جملات جمع خیلی زیاد باشند.

در $z = 0$، جملهٔ متناظر با حالت پایه چنین نیست:

این جمله باید جدا شود

بعد به انتگرال تبدیل شود

$$N - N_0 = \frac{V}{\lambda^D} g_{\frac{D}{2}}(z)$$

پایه

برای $(N - N_0)$ است که این پیشنهاد هست.

$$\left(\frac{N-N_0}{V}\right)_{max} = \frac{v}{\lambda^D}\,\zeta\left(\frac{D}{2}\right)$$

اگر $\frac{N}{V}$ از طرف راست بیشتر بشه،

ذرات اضافی به حالت پایه میرن.

این ذرات اضافی انرژی صفر دارن و در نتیجه در فشار سهمی ندارن.

در انتروپی هم سهمی ندارن.

به این نتیجه رسیدیم که فقط برای بوزون‌ها، و فقط برای بعدهای بیشتر از 2، رخ میدهد چگالش بوز اینشتین [illegible].

$$\left(\frac{N-N_0}{V}\right)_{max} = \frac{V}{\lambda^D}\,\zeta\left(\frac{D}{2}\right)$$

هرچه دما کمتر شود، و هرچه چگالی بیشتر شود، آن گاز کوانتمی‌تر است.

$T\downarrow \quad \lambda\uparrow \quad \left(\frac{N-N_0}{V}\right)_{max}\downarrow$

كمّي :

$\frac{٣٤٥}{٧٧}$ << !

[illegible]