تابع پارش کوانتمی: گراند کانونیک

$$\mathcal{Z} = \prod_{a} \sum_{M_a} z^{M_a} e^{-\beta M_a E_a}$$

a: حالت تک ذره

M_a: تعداد ذرات در حالت تک ذره‌ی a

فرمیون: $M_a = 0, 1$

بوزون: $M_a = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{M} z^{M} e^{-\beta M E} = \begin{cases} 1 + z e^{-\beta E}, & F \\ \dfrac{1}{1 - z e^{-\beta E}}, & B \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} B & ,1 \\ F & ,-1 \end{matrix}\right\} = \sigma$$

$$\sum_M z^M e^{-\beta M E} = (1-\sigma z e^{-\beta E})^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\mathcal{Z} = \prod_a (1-\sigma z e^{-\beta E_a})^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\ln \mathcal{Z} = -\frac{1}{\sigma}\sum_a \ln(1-\sigma z e^{-\beta E_a})$$

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial (\ln \mathcal{Z})}{\partial z} = \sum_a \frac{z e^{-\beta E_a}}{1 - \sigma z e^{-\beta E_a}}$$

$$U = - \frac{\partial (\ln \mathcal{Z})}{\partial \beta} = \sum_a \frac{z e^{-\beta E_a} E_a}{1 - \sigma z e^{-\beta E_a}}$$

$$U = \sum_a \langle N_a \rangle E_a$$

$$\langle N_a \rangle \stackrel{?}{=} \frac{z e^{-\beta E_a}}{1 - \sigma z e^{-\beta E_a}}$$

یک راه کلی‌تر:

$$\mathcal{Z} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Z}} \quad : \quad z \longrightarrow (z_1, z_2, \ldots)$$

مستقل از هم:

$$\mathcal{Z} = \sum_N z^N Z_N = \sum_N z^{N_1 + N_2 + \cdots} Z_N$$

$$= \sum_{N_1, N_2, \ldots} z^{N_1 + N_2 + \cdots} e^{-\beta (N_1 E_1 + \cdots)}$$

$$\rightarrow \tilde{\mathcal{Z}} = \sum_{N_1, \ldots} z_1^{N_1} z_2^{N_2} \cdots e^{-\beta (N_1 E_1 + N_2 E_2 + \cdots)}$$

$$\tilde{Z} = \sum_{\{N_a\}} \prod_a \left(z_a e^{-\beta E_a}\right)^{N_a}$$

$$= \prod_a \sum_{N_a} \left(z_a e^{-\beta E_a}\right)^{N_a}$$

$$= \prod_a \left(1 - \sigma z_a e^{-\beta E_a}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\ln \tilde{Z} = -\frac{1}{\sigma} \sum_a \ln\left(1 - \sigma z_a e^{-\beta E_a}\right)$$

$$z_b \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial z_b} = \sum_{\{N_a\}} \prod_a \left(z_a e^{-\beta E_a}\right)^{N_a} N_b = \langle N_b \rangle \tilde{Z} \Big|_{z = \omega z_a}$$

$$\langle N_b \rangle = \left[z_b \frac{\partial (\ln \mathcal{Z})}{\partial z_b} \right]_{z_a = z}$$

$$\ln \mathcal{Z} = -\frac{1}{\sigma} \sum_a \ln\left(1 - \sigma z_a e^{-\beta E_a}\right)$$

$$z_b \frac{\partial (\ln \mathcal{Z})}{\partial z_b} = \frac{z_b e^{-\beta E_b}}{1 - \sigma z_b e^{-\beta E_b}} \xrightarrow{z_b \to z}$$

$$\langle N_b \rangle = \frac{z e^{-\beta E_b}}{1 - \sigma z e^{-\beta E_b}}$$

$$\langle N_a \rangle = \frac{z e^{-\beta E_a}}{1 - \sigma z e^{-\beta E_a}} \qquad \sigma = \begin{cases} 1, & B \\ -1, & F \end{cases}$$

$$U = \sum_a \frac{z e^{-\beta E_a} E_a}{1 - \sigma z e^{-\beta E_a}} = \sum_a \langle N_a \rangle E_a$$

$$\langle N \rangle = \sum_a \frac{z e^{-\beta E_a}}{1 - \sigma z e^{-\beta E_a}} = \sum_a \langle N_a \rangle$$

$$\ln \mathcal{Z} = -\frac{1}{\sigma} \sum_a \ln\left(1 - \sigma z e^{-\beta E_a}\right)$$

$$\sigma \to 0? \qquad \ln \mathcal{Z} = \sum_a z e^{-\beta E_a}$$

$$Z_N = \frac{(Z_1)^N}{N!}$$: [illegible]

$$\mathcal{Z} = \sum_N z^N \frac{(Z_1)^N}{N!} = e^{z Z_1}$$

$$\ln \mathcal{Z} = z Z_1 \qquad Z_1 = \sum_a e^{-\beta E_a}$$

$\sigma \to 0$: C

$$\sigma = \begin{cases} 1, & B \\ 0, & C \\ -1, & F \end{cases}$$

$$\langle N_a \rangle = \frac{z e^{-\beta E_a}}{1 - \sigma z e^{-\beta E_a}}$$

اگر $z e^{-\beta E_a} \ll 1$ (z کوچک باشد)

در اینجا از $\sigma z e^{-\beta E_a}$ در برابر ۱ چشم‌پوشی می‌شود

$$\langle N_a \rangle = z e^{-\beta E_a}$$

کلاسیک

کوانتمی بودن سیستم اهمیت ندارد.

جاهایی که σ صفر است:

در ξ یکسان، $\langle Na\rangle_B > \langle Na\rangle_C > \langle Na\rangle_F$

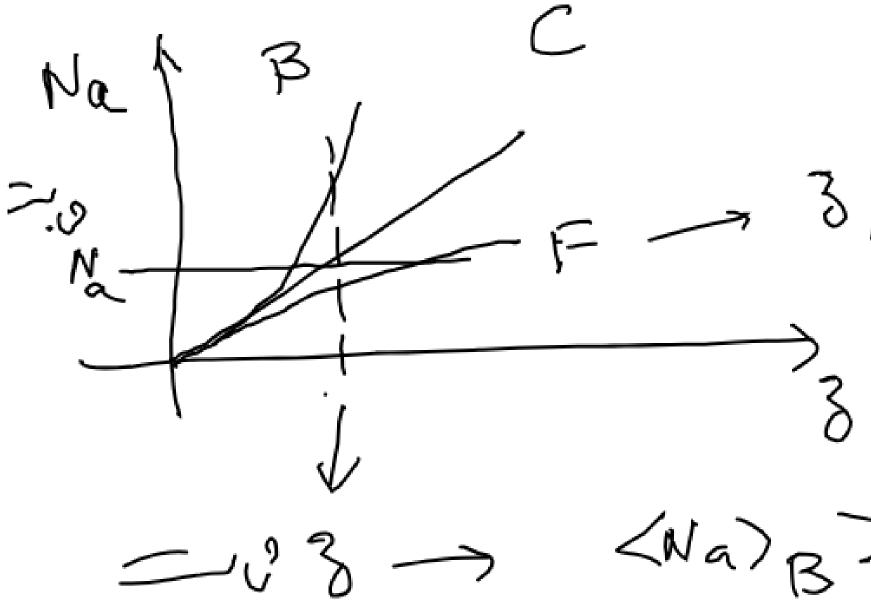
در $\langle Na\rangle$ یکسان، رابطه‌ی $\xi_C > \xi_B > \xi_F$

$\langle Na\rangle$ نسبت به ξ صعودی است یا نزولی؟

برای B و C، صعودی است.

برای F هم صعودی است.

$$\overset{\text{صعودی}}{\frac{x}{1+x}} = 1 - \frac{1}{1+x} \rightarrow \text{نزولی}$$



$z_F > z_C > z_B$

پس $\langle N \rangle$ و $\langle N_a \rangle$

$\langle N_a \rangle_B > \langle N_a \rangle_C > \langle N_a \rangle_F$

و $\langle N \rangle_B > \langle N \rangle_C > \langle N \rangle_F$

برای C و F ، می‌شود z را تا هر قدر بزرگ کرد

برای B :

$$z \le e^{\beta \underline{E_0}}$$

انرژی در حالت پایه

تا اینجا فقط تشخیص‌ناپذیری و بی‌برهمکنشی بودن بکار رفت.

گاز کامل تک اتمی: حالتها با تکانه مشخص می‌شوند.

در حد ترمودینامیک:

$$\sum_a \to \int \frac{V d^D k}{(2\pi)^D} = \int \frac{V d^D p}{h^D}$$

D: بعد فضا

$$p = \hbar k$$

$$\ln \mathcal{Z} = -\frac{V g}{\sigma}\int \frac{d^D p}{h^D} \ln\left(1-\sigma z e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

g: عامل با درجه‌ی آزادی‌ی درونی

D: چند تا بعدی

$D=2$ برای الکترون یا فوتون

σ = ± بنا به بوزون یا فرمیون

$\ln \mathcal{Z} =$ چه کمیت ترمودینامیکی

$$S = -k_B \ln p$$

$$p(M, E) = \frac{1}{\mathcal{Z}} z^M e^{-\beta E}$$

ذرات

$$S = -M k_B \ln z + \frac{E}{T} + k_B \ln \mathcal{Z}$$

$$\langle S \rangle = \sum S p = -k_B \ln z \sum M p$$

$$+ \frac{1}{T} \sum E p + k_B \ln \mathcal{Z} \sum p$$

$$= -k_B (\ln z) \langle N \rangle + \frac{U}{T} + k_B \ln \mathcal{Z}$$

$$k_B \ln \mathcal{Z} = \langle S \rangle - \frac{U}{T} + k_B \langle N \rangle \beta \mu$$

$$\ln \mathcal{Z} = \frac{T\langle S \rangle - U + \langle N \rangle \mu}{k_B T}$$

$$dU = T\,d\langle S \rangle + \mu \langle N \rangle + Y\,dX$$ ترمودینامیک

$$-P\,dV$$ کار

فزون ور

$$d\left(U - T\langle S \rangle - \mu \langle N \rangle - XY\right)$$ ذاتی

$$= -\langle S \rangle dT - \langle N \rangle d\mu - X\,dY$$

سیستم α برابر : (< α برابر ، ذاتاً ثابت ، پیدا فقط انرژی آزاد

پس پرانتز صفر میشود

$$\alpha(\ \ ) = (\ \ ) \qquad \alpha \neq 1 \Rightarrow (\ \ ) = 0$$

$$U - T\langle S\rangle - \mu\langle N\rangle - XY = 0$$

$$U - T\langle S\rangle - \mu\langle N\rangle = XY$$

$$\ln \mathcal{Z} = -\frac{XY}{k_B T}$$

لذا $\boxed{\ln \mathcal{Z} = \frac{PV}{k_B T}}$