تشخیص ناپذیری را درک کنیم: دافعه‌ی مشترک بودن فرمیون‌ها

جاذبه‌ی مشترک بودن بوزون‌ها

یک شکل دیگر دلیل این

یک سیستم دو ترازی با دو ذره:

2 ——— ε_2

1 ——— ε_1

B	1	1	1
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(1+1)=1$	$\frac{1}{2}$
F	0	1	0
انرژی	$2\varepsilon_1$	$\varepsilon_1+\varepsilon_2$	$2\varepsilon_2$

سیستم در دمای T :

$$B: \quad Z = e^{-2\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + e^{-2\beta\varepsilon_2}$$

$$C \quad Z = \frac{1}{2} e^{-2\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{1}{2} e^{-2\beta\varepsilon_2}$$

$$F \quad Z = e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

: $\infty \leftarrow \beta$: [illegible]

$$Z_B \simeq e^{-2\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$= e^{-2\beta\varepsilon_1}\left[1 + e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\right]$$

$$\ln Z_B \simeq -2\beta\varepsilon_1 + e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}$$

$$U_B \simeq 2\varepsilon_1 + (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\, e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}$$

$$Z_C \simeq \frac{1}{2} e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \frac{1}{2} e^{-2\beta\varepsilon_1}\left[1+2e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\right]$$

$$\ln Z_C \simeq -\ln 2 - 2\beta\varepsilon_1 + 2e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}$$

$$U_C \simeq -2\varepsilon_1 + 2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\, e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}$$

$$Z_F = e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \qquad \ln Z_F = -\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$U_F = \varepsilon_1+\varepsilon_2$$

$$U = \begin{cases} 2\varepsilon_1 + (\varepsilon_2-\varepsilon_1)e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} + \cdots & B \\ 2\varepsilon_1 + 2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} + \cdots, & C \\ 2\varepsilon_1 + (\varepsilon_2-\varepsilon_1), & F \end{cases}$$

, ی(ω)

$$\left.\begin{array}{ll} 1, & B \\ 2, & C \\ e^{\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}, & F \end{array}\right\} : (\varepsilon_2-\varepsilon_1)e^{-\beta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} \text{, ضرایب}$$

$$\downarrow T \to 0,\ \infty$$

دمای زیاد: $\beta \to 0$

$$Z_B = (1 - 2\beta\varepsilon_1) + [1 - \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] + (1 - 2\beta\varepsilon_2) + \cdots$$

$$-\frac{\partial Z_B}{\partial \beta} = 2\varepsilon_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2\varepsilon_2 + \cdots$$

$$U_B = -\frac{1}{Z_B}\frac{\partial Z_B}{\partial \beta} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$$

$$Z_C = \frac{1}{2}(1 - 2\beta\varepsilon_1) + [1 - \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] + \frac{1}{2}(1 - 2\beta\varepsilon_2) + \cdots$$

$$-\frac{\partial Z_C}{\partial \beta} = \varepsilon_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2 + \cdots$$

$$U_C = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$$

$$U_F = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

در دماهای زیاد:
$$U = \begin{cases} \varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots, \quad B, C, F \end{cases}$$

در گرمای کلی: اختلاف در دماهای کم آشکار می‌شود.

انرژی برای فرمیون بالای کلاسیک، برای بوزون زیر کلاسیک است.

در دماهای زیاد، فرق از بین می‌رود: همه چیز کلاسیک می‌شود.

ا) برای گاز کامل انرژی بر حجم با فشار متناسب
است: انرژی بیشتر ← فشار بیشتر.

در دمای کم معادله‌ی حالت گاز بوزنی و گاز فرمیونی
از معادله‌ی حالت گاز کلاسیک منحرف می‌شود.

فشار نقطه‌ی صفر فرمیونی

فرمیون فشار بیشتر، بوزنی فشار کمتر.

از جمله در دمای صفر، برای گاز فرمیونی انرژی ناصفر است، فشار هم ناصفر می‌شود.

گذشته: تشخیص ناپذیری کلاسیک

محاسبه‌ی تابع پارش برای N ذره‌ی بی‌برهم‌کنش:

تابع پارش کانونیک

$$Z=\sum_A e^{-\beta E_A}$$

$E_A =$ مجموع انرژی‌های تک ذره:

a_i: حالت‌های تک ذره

$$E_A = \varepsilon_{a_1}+\cdots+\varepsilon_{a_N} \qquad A=(a_1,\dots,a_N)$$

کلاسیک

$$Z \to \frac{1}{N!}\sum_A e^{-\beta E_A} = \frac{1}{N!}\sum_{a_1}\cdots\sum_{a_N} e^{-\beta\varepsilon_{a_1}}\cdots e^{-\beta\varepsilon_{a_N}}$$

$$Z_C = \frac{1}{N!}\left(\sum_a e^{-\beta\varepsilon_a}\right)^N = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$$

N ذره‌ی بی‌برهم‌کنش، کلاسیکی، تشخیص ناپذیر

کوانتمی:

Z_Q

حالت N ذره با حالت ذره‌ی اول، حالت ذره‌ی دوم ... مشخص نمی‌شود. با این مشخص می‌شود که چند ذره در حالت تک ذره‌ای اول‌اند، چند تا در حالت تک ذره‌ای دوم، ....

$$A_Q = (N_1, N_2, \dots)$$

تعداد ذرات در حالت تک ذره‌ای اول

$$A_C = (a_1, a_2, \dots)$$

حالت ذره اول

a_1, a_2, ... مستقل از هم اند

اما N_1, N_2, ... مستقل از هم نیستند:

$$N_1 + N_2 + \dots = N$$

تعداد کل ذرات

$$Z_Q = \sum_{N_1, N_2, \dots}{}' e^{-\beta(N_1 \epsilon_1 + N_2 \epsilon_2 + \dots)}$$

$$E_A = N_1 \epsilon_1 + N_2 \epsilon_2 + \dots$$

$\sum'$: با این قید که $N_1 + N_2 + \dots = N$

اگر این جمع نامقید بود، انجام عمل جمع ساده می‌شد:

جمع‌ها از هم جدا می‌شدند و هر جمع یک سری هندسی می‌شد.

اما این چنین نیست.

$$\sum_{N_1, N_2, \dots}$$

یک راه برای اجتناب از این سختی:

$$Z_N(\beta, N, \dots)$$ تابع پارش کانونیک N ذره‌ای

$$\mathcal{Z}(\beta, z, \dots) = \sum_N z^N Z_N(\beta, N, \dots)$$

$$\mathcal{Z} = \overbrace{\sum_N \sum_{N_1, N_2, \dots}{}'}^{N = N_1 + N_2 + \dots} z^{N_1 + N_2 + \dots} \, e^{-\beta(N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + \dots)}$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{N_1, N_2, \ldots} e^{-\beta(N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + \cdots)} \, z^{N_1 + N_2 + \cdots}$$

$$= \left(\sum_{N_1} z^{N_1} e^{-\beta N_1 \varepsilon_1}\right)\left(\sum_{N_2} z^{N_2} e^{-\beta N_2 \varepsilon_2}\right) \cdots$$

همگی یکسان‌اند

$$\mathcal{Z} = \prod_a \mathcal{Z}_a$$

$$\mathcal{Z}_a = \sum_{N_a} \left(z e^{-\beta \varepsilon_a}\right)^{N_a}$$

سکرز کاتشک ← کاتشک

نفوذناپذیر - صلب - نارسانا

نفوذناپذیر - صلب - رسانا

↓

گرانه کاتشک

نفوذپذیر - صلب - رسانا

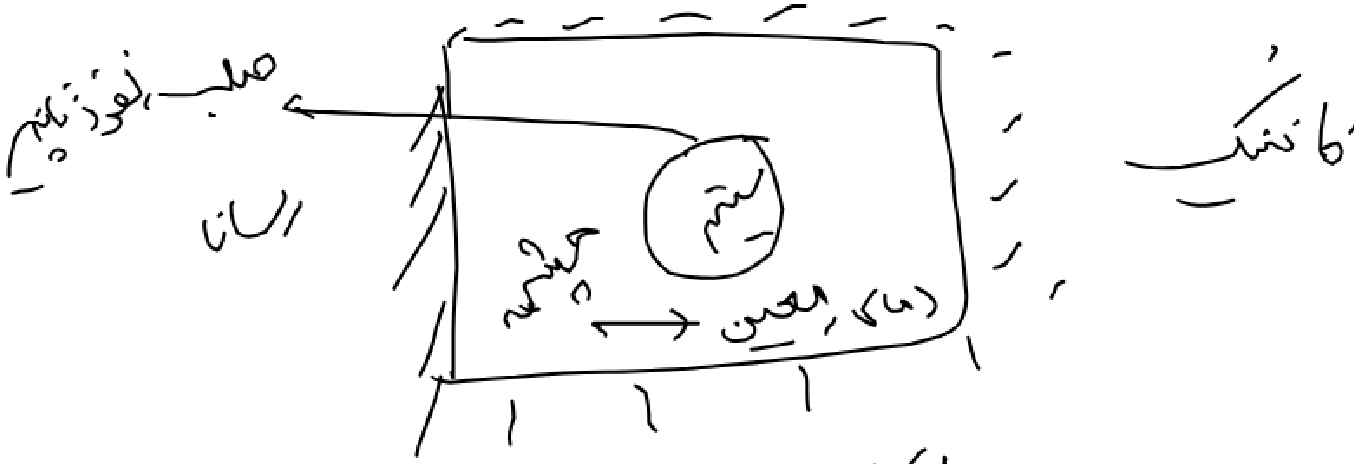
گراند کانونیک: انرژی معین نیست. تعداد ذرات معین نیست

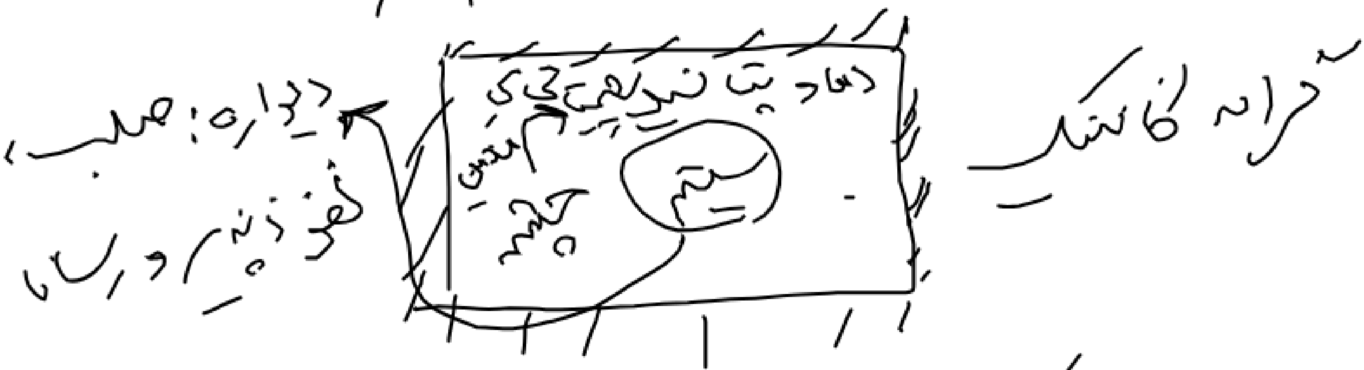
دما (T) معین

پتانسیل شیمیایی معین

انرژی ← طرف دمای کمتر

ذره ← طرف پتانسیل شیمیایی کمتر.





اتصال هر سه حالت سیستم

حالت‌های سیستم بزرگ:

$(A \xrightarrow{} A'' \text{ چشمه}, A \xrightarrow{} A' \text{ سیستم})$

همه‌ی این مسکن حالت هم احتمال‌اند

$$P_{A'} = \sum_{A''} \underbrace{P_{(A'', A')}}_{\text{هم‌احتمال}}$$

$$N_{A''} + N_{A'} = N_t$$

$$E_{A''} + E_{A'} = E_t$$

$= (\text{تعداد } A'' \text{ های ممکن}) \times P_{(A'', A')}$

$$\omega_{A''} \text{ تعداد } = e^{\frac{1}{k_B}S_{\text{چشمه}}} = e^{\frac{1}{k_B}S''(N_t - N_{A'},\, E_t - E_{A'})}$$

برای چشمه‌ی بزرگ

$$= e^{\frac{1}{k_B}\left[S''(N_t, E_t) - N_{A'}\frac{\partial S''}{\partial N} - E_{A'}\frac{\partial S''}{\partial E}\right]}$$

$$dS = \frac{1}{T}dU - \frac{\mu}{T}dN + \dots$$

صفر برای بار صلب

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \qquad \frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\mu}{T}$$

$$\omega_{A''} \text{ تعداد } = e^{\frac{1}{k_B}S''(N_t, E_t)}\, e^{\beta\mu N_{A'}}\, e^{-\beta E_{A'}}$$

$$P_{A'} = \underbrace{e^{\frac{1}{k_B} S''(N_t, E_t)} \times \text{ثابت}}_{\mathcal{N}} \times e^{\beta \mu N_{A'}} e^{-\beta E_{A'}}$$

مستقل از حالات سیستم مرکب (سیستم + حمام)

$\mathcal{N}$ = ثابت، مستقل از $N_{A'}$ و $E_{A'}$

دیگر پریم‌ها را برداریم: همه کمیت‌ها به فقط سیستم مربوط اند.

$$P_A = \mathcal{N} \, e^{\beta \mu N_A} \, e^{-\beta E_A}$$

$$\mathcal{N}: \quad 1 = \sum_A P_A = \mathcal{N} \sum_A \left(e^{\beta \mu N_A} e^{-\beta E_A}\right)$$

$$\mathcal{Z} := \sum_A e^{\beta \mu N_A} e^{-\beta E_A}$$

A ← حالت با تعداد ذرات نامعین

$$= \sum_N \sum_{\tilde{A}_N} e^{\beta \mu N} e^{-\beta E_{\tilde{A}_N}} = \sum_N e^{\beta \mu N} \underbrace{\sum_{\tilde{A}_N} e^{-\beta E_{\tilde{A}_N}}}_{Z_N}$$

N ← تعداد ذرات

$\tilde{A}_N$ ← حالت های N ذره ای

حالت N ذره ای

$$Z_N = \sum_{\tilde{A}_N} e^{-\beta E_{\tilde{A}_N}} \longrightarrow \sum_{\tilde{A}} e^{-\beta E_{\tilde{A}}} \longrightarrow \sum_A e^{-\beta E_A}$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{N} (e^{\beta\mu})^N Z_N$$

$$\mathcal{Z}(e^{\beta\mu}, \beta) = \sum_{N} (e^{\beta\mu})^N \overbrace{Z_N(\beta)}^{Z(N,\beta)}$$

$e^{\beta\mu} = z \longrightarrow$ گریزندگی

ذرات از z بزرگ دور میشوند:

z بزرگ $\longleftrightarrow$ μ ی بزرگ

تابع پارش گراند-کانونیک:

$$\mathcal{Z} = \sum_N z^N Z_N$$

مسئله‌ی اولیه: دما و تعداد ذرات معین:

در روش گراند-کانونیک، تعداد ذرات معین نیست،

بر N جمع زده می‌شود.

این چه ربطی به مسئله‌ی اولیه دارد؟

جواب : شبیه همان که در میکروکانونیک به کانونیک رخ داد

روش گراند کانونیک با روش کانونیک هم ارز است اگر

افت و خیز تعداد ذرات در روش گراند کانونیک ناچیز باشد.

هم ارز : افت و خیز انرژی (در روش کانونیک ناچیز باشد)

$$\langle N \rangle = \sum_M P_M M$$

المتغير الصدفي

متغير تجريبي

$$P_A = \frac{z^{N_A} e^{-\beta E_A}}{\mathcal{Z}}$$

$$P_M = \sum_{A|N_A=M} P_A = \frac{z^M}{\mathcal{Z}} \sum_{A|N_A=M} e^{-\beta E_A}$$

$$= \frac{z^M Z_M}{\mathcal{Z}}$$

$$\langle f(N) \rangle = \sum_M \frac{z^M Z_M}{\mathcal{Z}} f(M)$$

$$\langle N \rangle = \sum_M \frac{z^M Z_M}{\mathcal{Z}} M$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{M} z^{M} Z_{M} \, M$$

$$z\frac{\partial}{\partial z} = \ln z$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{M} z\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{M} Z_{M}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}} z\frac{\partial}{\partial z} \sum_{M} z^{M} Z_{M} = \frac{1}{\mathcal{Z}} z\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{Z}$$

$$= z\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln \mathcal{Z}\right)$$

حجم را بجای انرژی

$$-\beta \to \ln z \qquad -\frac{\partial}{\partial \beta}\langle \ln Z \rangle$$

در روش کانونیک.

$$z^M = e^{(\ln z) M}$$

$\ln z = \beta \mu = \alpha$ پتانسیل شیمیایی

~ آرشی

فعالیت شیمیایی

$$e^{\alpha M} \sim e^{-\beta E}$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_M z^M Z_M M^2 \qquad z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \sum_M z^M Z_M = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial \alpha^2}$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial \alpha^2} \qquad \langle N \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \alpha}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{\mathcal{Z}^2} \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \alpha} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 (\ln \mathcal{Z})}{\partial \alpha^2}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \alpha}$$

[illegible]. $\mathrm{Var}(E) = -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta}$

نتیجه هم مثبت است.

$Var(N)$ فزون ور است

فزونده است

$$Var(N) = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \alpha}$$

$\alpha = \beta\mu$

ذاتی

$$Var(N) = (\Delta N)^2$$

$$\sqrt{Var(N)}$$

افزایش نسبت N

$$\propto \sqrt{N}$$

$$\frac{\Delta N}{N} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$Var(N) = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \alpha}$$

یک مثال از قضیه
افت و خیز - پاسخ

$$\downarrow$$

$$\frac{\Delta N}{N} \propto \frac{1}{N}$$

(وقتی کمیت
جفت شدنی نیست)

$$\frac{\text{انحراف نسبی یک کمیت غیرذاتی}}{\text{اندازه‌ی سیستم}} \propto \frac{1}{\sqrt{\text{اندازه‌ی سیستم}}}$$

در توصیف ترانه‌ها کلاسیک، تعداد ذرات ثابت نیست.

اما احتمالی یعنی که تعداد ذرات در

چه در ترمودینامیک به صورت متغیر است. پس در چه ترمودینامیک

توصیف ترانه‌ها کلاسیک با توصیف کلاسیک هم ارز

میشود (با اشتباه گرفتن ارقام) آیا تعداد ذرات هم فاز واقعی ثابت است و روی ترانه‌ها کلاسیک دیگر

پس در هر ترند شانسی

تصنیف ترانه کاشتی به مسئله‌ی اولیه هم جواب میدهد.

برای نگاشت کامل کوانتم، روش ترانه کاشتی ساده‌تر است.

پس نگاشت کامل کوانتم با روش ترانه کاشتی.