مکانیک آماری کوانتمی : مثلن برای ذره‌ی آزاد (گاز کامل)
وارد کردن کوانتم مکانیک چه اثری دارد؟

یک ذره در یک جعبه‌ی یک بُعدی

مکانیک آماری کلاسیک :

$$Z=\frac{1}{h}\int_0^L dx\int dp\ e^{-\beta\varepsilon(p)}$$

h برای بی‌بُعد کردن

بُعد h = طول × تکانه = بُعد ثابت پلانک = بُعد کنش

$$\varepsilon(p)=\begin{cases}\dfrac{p^2}{2m}, & NR\\ \sqrt{c^2p^2+m^2c^4}, & R\\ c|p|, & UR\end{cases}$$

$\varepsilon(p)$ لازم نیست فقط به یکی از این ۳ حالت باشد.

کوانتم مکانیک:

$$H=\varepsilon(p)$$

عملگر هامیلتونی — عملگر تکانه

$$Z=\sum_n e^{-\beta E_n}$$

E_n ویژه مقدار هامیلتونی برای حالت n، n ویژه بردار هامیلتونی

برای جعبه: ویژه بردارهای p^2 با این شرط که
تابع موج در مرز ($x=0$ و $x=L$) صفر شود.

$\sin(k_n x)$ $\quad$ $k_n L = n\pi$ $\quad$ $k_n = \frac{n\pi}{L}$

n صحیح و مثبت

$P_n = \hbar k_n$

دقت: $P_n = \pm \hbar k_n$ $\quad$ $(P^2)_n = (\hbar k_n)^2$

$H = \mathcal{E}(p) \to \mathcal{E}(p^2)$ $\quad$ ت $\quad$ $\mathcal{E}(-p) = \mathcal{E}(p)$

$$Z_q = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon(p_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)}$$

$$Z_C = \frac{1}{h}\int_0^L dx \int dp\, e^{-\beta\varepsilon(p)} = \frac{L}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\beta\varepsilon(p)}$$

$L \to \infty$ حد ترمودینامیک

$$\Delta p = p_{n+1} - p_n = \frac{\pi\hbar}{L} \longrightarrow 0$$

$$\left[\Delta p \sum_n f(p_n)\right] \xrightarrow{\Delta p_n \to 0} \int dp\, f(p)$$

$$Z_q = \frac{1}{\Delta p}\left[(\Delta p)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon(p_n)}\right] \qquad p_1 = \frac{\pi\hbar}{L}$$

$$= \frac{L}{\pi\hbar}\left[(\Delta p)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon(p_n)}\right] \qquad \Delta p = \frac{\pi\hbar}{L}$$

$$[\quad] \xrightarrow{L\to\infty} \int_0^{\infty} dp\, e^{-\beta\varepsilon(p)} \qquad \varepsilon(-p) = \varepsilon(p)$$

$$L\to\infty \qquad Z_q = \frac{L}{\pi\hbar}\int_0^{\infty} dp\, e^{-\beta\varepsilon(p)}$$

$$= \frac{L}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\beta\varepsilon(p)}$$

$$Z_c = \frac{L}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \; e^{-\beta \varepsilon(p)}$$

$$Z_q = \frac{L}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \; e^{-\beta \varepsilon(p)}$$ فقط در حدِ L های بزرگ

$$\ln Z = -\beta F \qquad b \to \tilde{b}$$

$$(\beta F) \to \beta F + \ln \frac{\tilde{b}}{b} \qquad U \to U$$

$$F \to F + (k_B T) \ln \frac{\tilde{b}}{b} \qquad S \to S - k_B \ln \frac{\tilde{b}}{b}$$

$$U = F + TS$$

تبدیل L به $\tilde{L}$ فقط یک ثابت به انرژی میفزاید و

انرژی‌های دررفتنی را هم عوض نمیکنه

قبلاً هم به زبان مکانیک کلاسیک دیده شده بود.

کوانتم مکانیک میگه آن ثابت h است.

ولی جز این (در L بزرگ) به نظر میرسه Zهای کامل،

کوانتمی و کلاسیک فرق ندارند.

البته ستماز کلاسیک که واقعی نیست. میشود نتیجه‌ای که انتم را
برای آن به کار برد

اما این فقط برای یک ذره درست است.

برای بیش از یک ذره (در ساده‌ترین حالت ۲ ذره)
چه میشود؟

جعبه به طول L ، یک بعدی، ذره‌ای، بی برهم‌کنش:

ذرات نا نسبیتی: $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$

شرط مرزی: $\psi = 0 \quad x=0 \,,\, x=L$

$\psi(x) \propto \sin(k_n x)$

$k_n = \frac{n\pi}{L}$ صحیح مثبت n

تناوبی، کلید زنی

$\psi(x) \propto e^{i k_n x} \leftarrow \psi(x+L) = \psi(x)$

$k_n = \frac{2n\pi}{L}$ n مثبت و منفی صحیح

تابع موج دو ذره ای

دو ذره ی یکسان کوانتمی :

بردار حالت = متقارن (بوزون) یا پاد متقارن (فرمیون)

$$\left[\psi_{n_1}(x_1)\,\psi_{n_2}(x) + s\,\psi_{n_1}(x_2)\,\psi_{n_2}(x)\right]$$

$$s = \begin{cases} +1 & \text{بوزون} \\ -1 & \text{فرمیون} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{n_1}(x_1)\,\psi_{n_2}(x_2) + S\,\psi_{n_1}(x_2)\,\psi_{n_2}(x_1)\right]$$

$n_2 \neq n_1$

اگر $n_2 = n_1$ — فرمیون : 0

بوزون : $\frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{2}$

برای ۲ ذره احتمال این که $n_1 = n_2$ بی‌نهایت کوچک است، پس

$n_1 = n_2$ را خاص نکنیم.

$$Z_{qh} = \sum_n e^{-\beta E_n} \longrightarrow \sum_n \langle n| e^{-\beta H} |n\rangle$$

$$= \mathrm{tr}\; e^{-\beta H}$$

$$= \int \underbrace{dr_1 \cdots dr_k}_{o,\ 3k} \; \langle r_1, \dots, r_k| e^{-\beta H} |r_1, \dots, r_k\rangle$$

$$\frac{e^{-\beta H}}{Z} \doteq \rho \longrightarrow$$ ماتریس چگالی

$$\langle r_1, \dots, r_k| \rho |r_1, \dots, r_k\rangle =$$ چگالی احتمال یافتن ذرات در $(r_1, \dots, r_k)$

$$\frac{1}{Z}\langle x_1, x_2 | e^{-\beta H} | x_1, x_2 \rangle = ?$$

$$= \rho(x_1, x_2)$$

و ٪ ، برا ، ، هیلبرتی :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\psi_{n_1}\rangle \otimes |\psi_{n_2}\rangle + s\, |\psi_{n_2}\rangle \otimes |\psi_{n_1}\rangle \right]}$$

$$\langle x_1, x_2 | \quad \swarrow \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) + s\,\psi_{n_2}(x_1)\psi_{n_1}(x_2) \right]$$

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{Z} \sum_{n_1, n_2} \langle x_1, x_2 | \psi_{n_1, n_2} \rangle \langle \psi_{n_1, n_2} | e^{-\beta H} | x_1, x_2 \rangle$$

$$|\psi_{n_1, n_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\psi_{n_1}\rangle \otimes |\psi_{n_2}\rangle + s\, |\psi_{n_2}\rangle \otimes |\psi_{n_1}\rangle \right]$$

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{Z} \sum_{n_1, n_2} \left[\psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) + s\, \psi_{n_2}(x_1) \psi_{n_1}(x_2) \right]$$

$$\times\, e^{-\beta \left[\varepsilon(p_{n_1}) + \varepsilon(p_{n_2}) \right]} \overline{\left[\psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(x_2) + s\, \psi_{n_2}(x_1) \psi_{n_1}(x_2) \right]}$$

$$\psi_n(x) = \underbrace{N}_{\text{[illegible]}} e^{i \frac{2n\pi}{L} x} \qquad p_n = \frac{2n\pi}{L} \hbar = \frac{nh}{L} \qquad \Delta p = \frac{h}{L}$$

$$s = \pm 1 \; \begin{matrix} \longrightarrow B \\ \longrightarrow F \end{matrix}$$

$$\rho(x_1, x_2) = \tilde{N} \int dp_1 \, dp_2 \left| \psi_{p_1}(x_1) \psi_{p_2}(x_2) + s \, \psi_{p_2}(x_1) \psi_{p_1}(x_2) \right|^2 e^{-\beta [\varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2)]}$$

$$\psi_p(x) \rightarrow e^{i \frac{px}{\hbar}}$$

ضریب بهنجارش در $\tilde{N}$ جذب شده

$$\int \rho(x_1 x_2) \, dx_1 \, dx_2 = 1 \longrightarrow \tilde{N}$$

$$\rho(x_1, x_2) = \tilde{N} \int dp_1 \, dp_2 \, e^{-\beta [\varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2)]}$$

$$\times \left\{ 2 + s \left[\psi_{p_1}(x_1) \overline{\psi_{p_1}(x_2)} \psi_{p_2}(x_2) \overline{\psi_{p_2}(x_1)} + c.c. \right] \right\}$$

با انتخاب تابع موج تخت (شرط مرزی تناوبی)

$$\psi_{p_1}(x_1)\,\overline{\psi_{p_1}(x_2)} = e^{\frac{i p_1 (x_1 - x_2)}{\hbar}}$$

$$\rho(x_1, x_2) = \tilde{N} \int dp_1\, dp_2 \; e^{-\beta\left[\varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2)\right]}$$

$$\times \left\{ 2 + s\left[e^{\frac{i (p_1 - p_2)(x_1 - x_2)}{\hbar}} + C.C. \right] \right\}$$

نانسبیتی: $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$

$$\varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} = \frac{(p_1+p_2)^2 + (p_1-p_2)^2}{4m}$$

$$p_1 + p_2 = P$$ تکانه‌ی مرکز جرم

$$\frac{p_2 - p_1}{2} = p \qquad \frac{\partial(P, p)}{\partial(p_1, p_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 1$$

$$dp_1\, dp_2 = dP\, dp$$

$$\varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2) = \frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{m}$$

$$\rho(x_1, x_2) = \tilde{N} \int dP\, dp \; e^{-\beta\left(\frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{m}\right)}$$

$$x = x_2 - x_1$$

$$\times \left\{ 2 + S\left[e^{\frac{i\, 2p\cdot(x_2 - x_1)}{\hbar}} + C.C \right] \right\}$$

$$= \tilde{N} \sqrt{\frac{4\pi m}{\beta}} \int dp \; e^{-\beta \frac{p^2}{m}} \left[2 + S\left(e^{\frac{i 2 p x}{\hbar}} + C.C. \right) \right]$$

$$= \tilde{N} \sqrt{\frac{4\pi m}{\beta}} \left\{ 2\sqrt{\frac{\pi m}{\beta}} + S\left(\sqrt{\frac{\pi m}{\beta}}\, e^{-\frac{m x^2}{\beta \hbar^2}} \right) \times 2 \right\}$$

$$-\beta \frac{p^2}{m} + i\frac{2px}{\hbar} = -\frac{\beta}{m}\left(p - i\frac{m x}{\beta\hbar}\right)^2 - \frac{m x^2}{\beta \hbar^2}$$

$$\rho(x_1, x_2) = \underbrace{\left(\tilde{\mathcal{N}}\, \frac{4\pi m}{\beta}\right)}_{\tilde{\tilde{\mathcal{N}}}} \left(1 + s e^{-\frac{m x^2}{\beta \hbar^2}}\right)$$

$$\tilde{\tilde{\mathcal{N}}} \int dx_1 dx_2 \left(1 + s e^{-\frac{m x^2}{\beta \hbar^2}}\right) = 1$$

$$\int dx_1 dx_2\, 1 = L^2$$

L بزرگ

$$\int dx_1 dx_2\, e^{-\frac{m x^2}{\beta \hbar^2}} = \int dx_1 dx\, e^{-\frac{m x^2}{\beta \hbar^2}}$$

$$= L \times \sqrt{\frac{\pi \beta \hbar^2}{m}}$$

$$\tilde{\tilde{\mathcal{N}}} = \frac{1}{L^2}$$

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{L^2}\left(1 + s\, e^{-\frac{m x^2}{\beta \hbar^2}}\right)$$

$$\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} = \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}}\,\hbar = \lambda$$ طول موج حرارتی

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{L^2}\left(1 + s\, e^{-2\pi \frac{x^2}{\lambda^2}}\right)$$

$x = x_2 - x_1$ $\qquad$ $|x_2 - x_1| \gg \lambda$ فاصله‌ی زیاد [illegible] رژیم

$s = +1 \quad B:$ $\qquad \rho(x_1, x_1) = \frac{2}{L^2} = 2\rho(x_1, x_2)$

$S = -1 \quad F \qquad \rho(x_1, x_1) = 0$

ذرات با برهم کنش نقطه‌ای نا نسبیتی.

تشخیص ناپذیری کوانتمی ← برهم کنش موثر

دافعه برای فرمیون‌ها: ذرات نزدیک ← چگالی احتمال کمتر

جاذبه برای بوزون‌ها: ذرات نزدیک‌تر ← چگالی احتمال بیشتر

به عنوان یک انرژی پتانسیل مؤثر :

$$\rho(x_1, x_2) \propto e^{-\beta V(x)} \qquad x = x_2 - x_1$$

$$V(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

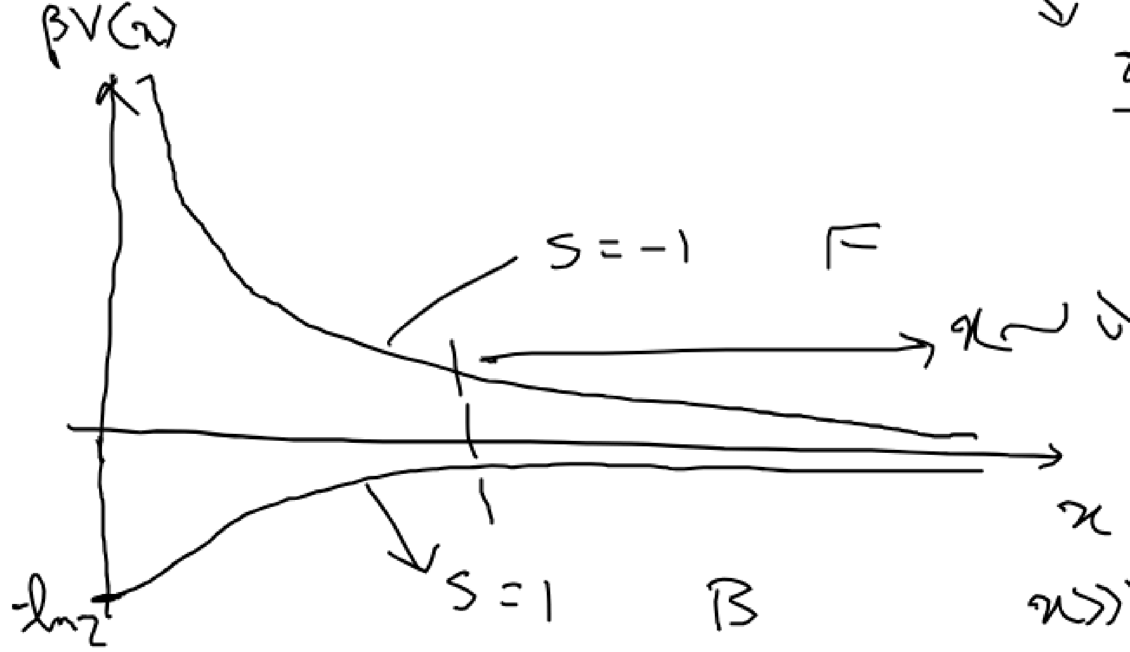
$$e^{-\beta V(x)} = 1 + s\, e^{-\frac{2\pi x^2}{\lambda^2}}$$

$$V(x) = -k_B T \ln\left(1 + s\, e^{-\frac{2\pi x^2}{\lambda^2}}\right)$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} = \hbar\sqrt{\frac{2\pi}{m k_B T}} \quad \Big| \quad V(x) = -k_B T \ln\left(1 + s\, e^{-\frac{m k_B T x^2}{\hbar^2}}\right)$$

$$\beta V(x) = -\ln\left(1 + s\, e^{-\frac{m k_B T x^2}{\hbar^2}}\right)$$

$$\frac{2\pi x^2}{\lambda^2}$$



$x \gg \lambda$, $\beta V(x) \approx 0$

[illegible] $\beta V(x)$: $x \lesssim \lambda$

اگر دما زیاد بشود، یا کم بشود، جاذبه و دافعه‌ی بیشتر فقط در فواصل کم قابل مشاهده است.

آن رنگ انرژی ناشی از تشخیص ناپذیری در دماهای کم است که مهم است، در دماهای زیاد از بین می‌رونه.

برای فواصل بیشتر بزرگتر از ۱۸، آثار رنگ انرژی ناشی از تشخیص ناپذیری مهم نیست.

آثار گرانش : ← گسسته کردن ترازها ← دماهای کم مهمه

← تشخیص ناپذیری ← دماهای کم مهمه

برای حرکت انتقالی، درجه ترمودینامیک

گسسته بودن ترازها مهم نیست : با افزایش اندازه‌ی جعبه فاصله‌ی ترازها از هم کم میشود.

اما تشخیص ناپذیری کوانتمی مهمه.