انتگرال بر خط:

۱ ردیف.

یک خط (۱ بعدی): هر نقطه با ۱ پارامتر مشخص میشود.

خم (۲ بعدی): هر نقطه با یک پارامتر مشخص میشود.

عدد

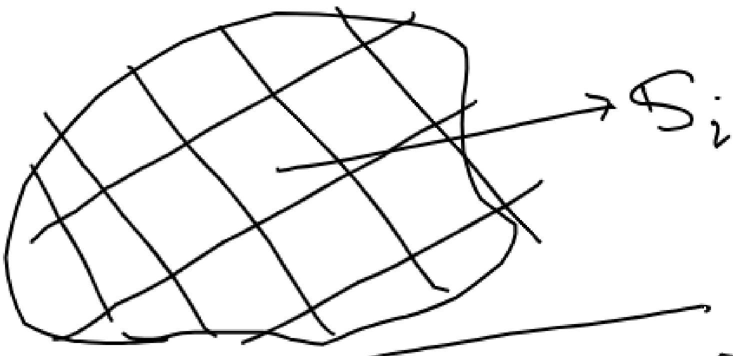
۲ (۴,۷)

بردار

از جمله در فضای ۳ بعدی.

انتگرال بر سطح: سطح تکه تکه شود به هر تکه یک
مساحت نسبت داده شود. مقدار تابع در یک نقطه
از هر تکه حساب شود. نتیجه در مساحت تکه ضرب شود.
اینها هم جمع شوند. فقط هر تکه به صفر میل داده شود.
نتیجه ← انتگرال آن تابع بر آن سطح.

S :



S_i ـ مساحت

$$r_i \in S_i \quad \sum_i [f(r_i)]\, S_i \longrightarrow \int_S f(r)\, dS$$

قطعه i کوچک سطح

$$\int \underbrace{f(r)}_{\text{عدد یا بردار}} \underbrace{dr}_{\text{بردار}}$$

ضرب عدد در بردار

ضرب داخلی تابع برداری در بردار

برای خم :

$\Delta r \rightarrow$ بردار

$|\Delta r| \rightarrow$ عدد $\Rightarrow \int \underbrace{f(r)}_{\text{عدد یا بردار}} \, ds$

ds : طول قوس

S_i : سطح S_i

(در فضای سه بعدی)

بردار سطح یا عدد سطح

$$\int f(r)\, dS$$

عدد یا بردار

عدد یا بردار

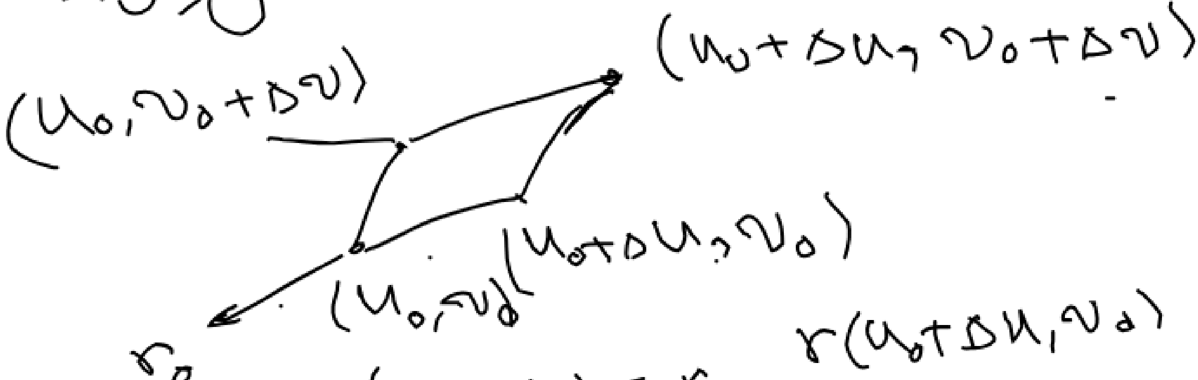
ضرب عدد در بردار

یا ضرب درونی یا برونی دو بردار

عبارت برای dS

در فضای سه بعدی:

هر نقطه از سطح S با دو پارامتر (u,v) مشخص میشود.



$r(u_0+\Delta u, v_0) = ?$

$r(u_0, v_0) = r_0$

$$r(u_0+\Delta u, v_0) = \overbrace{r(u_0, v_0)}^{r_0} + \Big[\overbrace{(D_1 r)(u_0, v_0)}^{e_1}\Big]\Delta u + \vartheta(\Delta u)$$

$$r(u_0, v_0+\Delta v) = r_0 + \Big[\overbrace{(D_2 r)\ (u_0, v_0)}^{e_2}\Big]\Delta v + \vartheta(\Delta v)$$

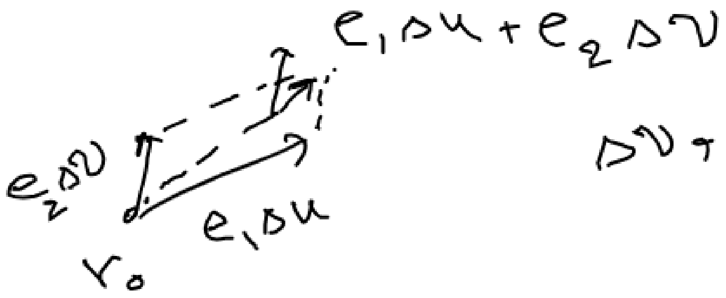
$$r(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) = r_0 + \big[(D_1 r)(u_0, v_0)\big]\Delta u + \big[(D_2 r)(u_0, v_0)\big]\Delta v + \cdots$$

درجه‌ی ۲ یا بیشتر از نظر نسبت به Δu و Δv

$$r(u_0+\Delta u, v_0) - r_0 = e_1 \Delta u + \cdots$$

$$r(u_0, v_0+\Delta v) - r_0 = e_2 \Delta v + \cdots$$

$$r(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - r_0 = e_1 \Delta u + e_2 \Delta v + \cdots$$



تا مرتبه‌ی یک نسبت به Δu و Δv

این شکل یک متوازی الاضلاع است.

بردار مساحت این متوازی الاضلاع =

$(e_1\Delta u)\times(e_2\Delta v)$

این رویه در فضای سه بعدی بر یک راستا عمود است.

این راستا ۲ جهت دارد. یکی از این جهت‌ها انتخاب شود

مثال رخ:

برای بردار مساحت در فضای سه بعدی یک انتخاب هست. اگر قرار است بر بردار مساحت انتگرال گرفته شود، باید جهت بردار عمود بر سطح معلوم باشد (راستا معلوم است. انتخاب بین دو جهت مخالف هم در آن راستاست)

$\Delta S = (e_1 \times e_2)(\Delta u)(\Delta v)$

$+ \cdots$

بردار عمود بر سطح : n

پارامترهای سطح (u, v)

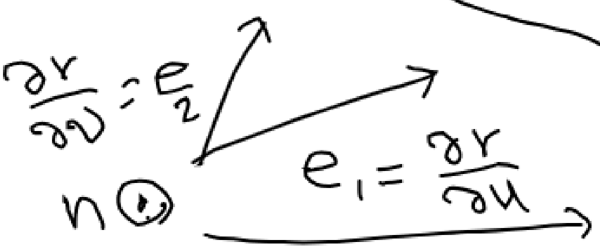
$\left(\frac{\partial r}{\partial u}\Delta u\right) \times \left(\frac{\partial r}{\partial v}\Delta v\right) =$ بردار برابر

$\left(\frac{\partial r}{\partial v}\Delta v\right) \times \left(\frac{\partial r}{\partial u}\Delta u\right) =$

$e_1 \times e_2$

n به سمت ما

راستگرد (e_1, e_2, n)



n : به طرف بیرون

اگر (e_1, e_2, n) چپگرد باشد.

$$\Delta S = (e_2 \times e_1)(\Delta u)(\Delta v) + \cdots$$

مختصات مشخص کننده‌ی سطح (u,v) چنان انتخاب شوند که

$\left(\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}, n\right)$ راستگرد

بردار عمود بر سطح

$$\Delta S = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)(\Delta u)(\Delta v) + \cdots$$

آنگاه، ترتیب مختصات برعکس می‌شود.

(u,v) منحنيات البارامتر ... على السطح : يعني

$\left(\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}, n\right)$ ... الشكل

$$\underline{dS} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)(du)\cdot(dv)$$

(u,v) منحنيات البارامتر

$\downarrow$

بالاتجاه

جزء مساحت (المان مساحت)

$$dS = \left\|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right\| (du)(dv)$$

مثال: یک نیمکره در فضای سه بعدی

معادله ی یک کره به شعاع a و مرکز مبدأ:

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

$$z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

نیمکره ی بالایی

$$z=+\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad (z\geq 0)$$

جهت عمود بر سطح: ← انتخاب آن جهتی که بطرف بیرون کره است.

انتخاب مختصات.

(x,y) پارامترهای مشخص کننده سطح

$(u,v) = (x,y)$

$z = f(x,y)$
$= \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$r = \hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z$

آر (x,y) را گستره بگیریم.

$dS = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}\right)(dx)(dy)$

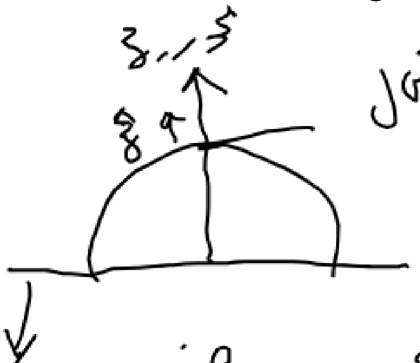
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \hat{x}(1) + \hat{y}(0) + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial x} = \hat{x} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \hat{y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{\ }} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{\ }}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \underbrace{\hat{z} - \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} - \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x}}$$



قطب شمال

$z=0$ ،صفحه‌ی

بردار کره [illegible] کره؟

[illegible]

در قطب شمال : $x = y = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \hat{z}$$

در قطب شمال، چون عمود بر نیمکره‌ی شمالی و به سمت بیرون نیمکره است. پس $\frac{\partial r}{\partial x}\times\frac{\partial r}{\partial y}$ با بردار قائم هم‌جهت است: (x,y) راستگرد است.

برای نیمکره‌ی جنوبی، به علت اینکه رو به بیرون کره، (x,y) چپگرد است.

$$dS = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}\right)(dx)(dy)$$

برای رویه:

$$= \left(\hat{z} - \hat{x}\,\frac{\partial f}{\partial x} - \hat{y}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx)(dy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\int \overrightarrow{dS}$$

برای رویه

z تعریف شده

ناحیه‌ی تصویر (x,y)

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad x^2 + y^2 \le a^2 \longrightarrow$$ دایره به مرکز مبدا میشه و شعاع a

$$\text{بردار مساحت} = \int_{x^2+y^2\le a^2} (dx)(dy)\left[\hat{z} + \frac{\hat{x}\,x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + \frac{\hat{y}\,y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right]$$

$$x^2+y^2\le a^2 \qquad y^2\le a^2-x^2 \qquad x^2\le a^2$$

$$\text{بردار مساحت} = \int_{-a}^{a}(dx)\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(dy)\left[\hat{z} + \frac{\hat{x}\,x+\hat{y}\,y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right]$$

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(dy) = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (dy) \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \pi$$

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\Bigg|_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \mu_{1,1z} := \int_{-a}^{a} dx \left[\hat{z}\left(2\sqrt{a^2 - x^2}\right) + \hat{x}(\pi x) \right]$$

$$\int_{-a}^{a} (dx)\, x = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-a}^{a} = 0$$

$$x = a \sin\alpha$$

$$x = a \quad \alpha = \pi/2$$

$$x = -a \quad \alpha = -\pi/2$$

$$dx = a(\cos\alpha)\, d\alpha$$

$$\int_{-a}^{a} dx \left(2\sqrt{a^2 - x^2}\right)$$

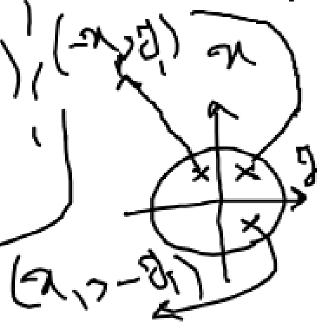
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a \cos\alpha)(d\alpha)(2a \cos\alpha)$$

$$= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (d\alpha)\left[1 + \cos(2\alpha)\right] = a^2 \left[\alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \pi a^2$$

بردار سطح $= \hat{z}\,\pi a^2$

$$\int_{(x^2+y^2)\le a^2} (dx)(dy)\left[\hat{z} + \hat{x}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + \hat{y}\,\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right]$$



ضریب $\hat{y}$ نسبت به y فرد است: ناحیه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به $y=0$ متقارن است. پس انتگرال ضریب $\hat{y}$ برابر صفر است.

ضریب $\hat{x}$ نسبت به x فرد است: ناحیه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به $x=0$ متقارن است. پس انتگرال ضریب $\hat{x}$ برابر صفر است.

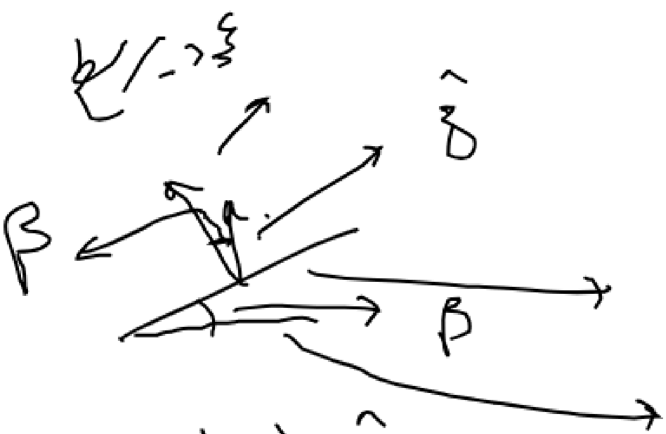
پس

$$\text{بردار مساحت} = \hat{z} \underbrace{\int_{x^2+y^2 \le a^2} (dx)(dy)}_{\text{مساحت یک دایره به شعاع } a}$$

$\hat{z}$ = بردار ثابت

$$\text{بردار مساحت} = \hat{z}\, \pi a^2$$

شکل‌های مختلف بردار مساحت در انتگرال‌گیری فرقی نمی‌کند.



کل تکه از سطح

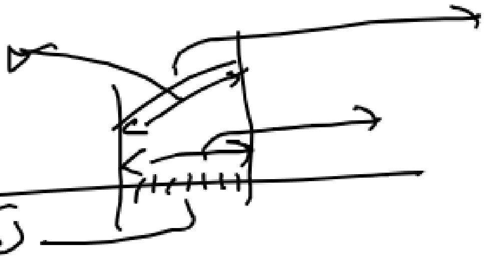
$$(dS)_z = \underline{(dS)\cdot\hat{z}}$$

موازی با صفحه‌ی $z=0$

تصویر سطح بر صفحه‌ی $z=0$

مساحت سطح

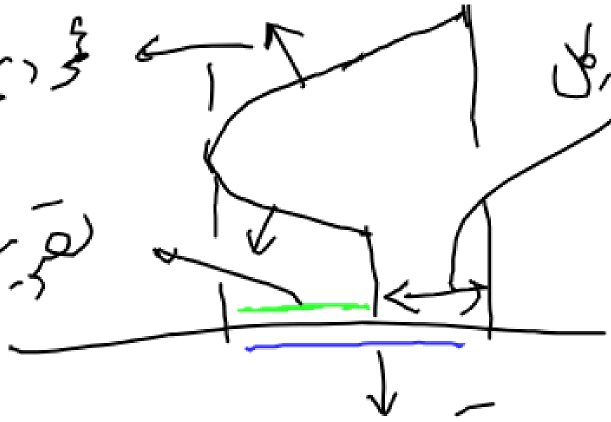
طول بردار = اندازه‌ی (dS)



$(C\beta) \times$ (اندازه‌ی dS)

$z=0$

تصویر سطح بر صفحه‌ی $z=0$



ت.ذ.

برای بخش سبز منفی

برای بخش آبی مثبت

$$\geq 0 \qquad\qquad \geq 0$$

(ت.ذ) کل = (مساحت آبی) − (مساحت سبز)

نیمکره

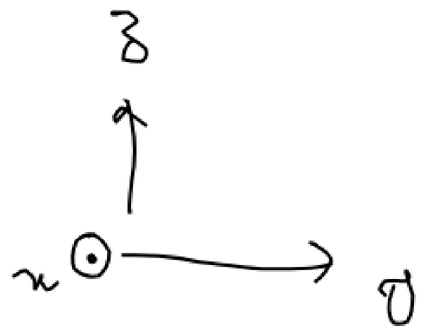
برای نیمکره:

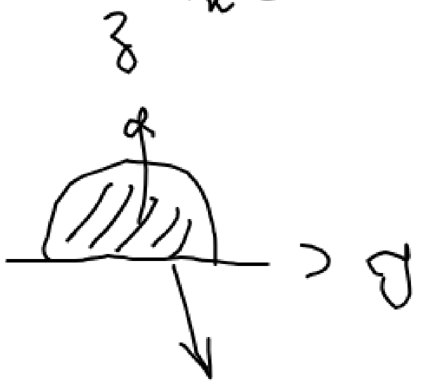
تصویر نیمکره میشود قرص

بر صفحه‌ی $z=0$

$$S \cdot \hat{z} = \pi a^2$$ (مساحت قرص)

برای محورهای x , y :

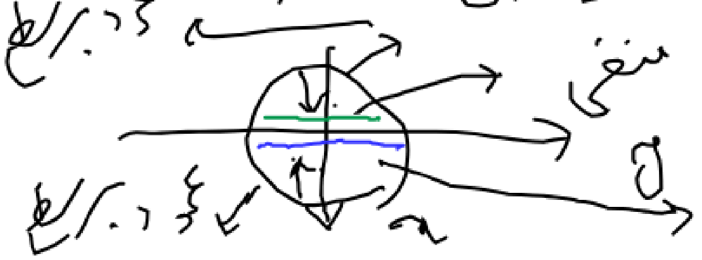




بر محور x

از کلش

تصویر نیمکره بر محور x نیم‌قرصی است :



شار منفی

$S\cdot\hat{n}=0$

از بالا

شار مثبت

$$S\cdot\hat{x} = \underline{\frac{\pi}{2}a^2} - \underline{\frac{\pi}{2}a^2} = 0$$

از زیر   از بغل

$$S\cdot\hat{y} = \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 = 0$$ مشابه

بالمختصات الاسطوانية :

$$\rho^2 + z^2 = a^2$$ معادلة كره

$$z = \sqrt{a^2 - \rho^2}$$ نصف كره علوي

$$r = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$$

$$= \hat{x}\rho\cos\varphi + \hat{y}\rho\sin\varphi + \hat{z}\sqrt{a^2-\rho^2}$$

$$(u,v) = (\rho,\varphi) \qquad \frac{\partial r}{\partial \rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi - \frac{\hat{z}\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

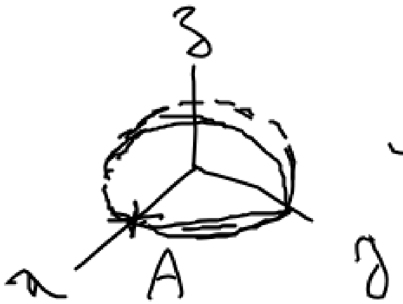
$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\hat{x}\rho \sin\varphi + \hat{y}\rho \cos\varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi - \hat{z}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right)$$

$$\times\left(-\hat{x}\rho\sin\varphi + \hat{y}\rho\cos\varphi\right)$$

$$= \hat{z}\left(\rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi\right) + \hat{y}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + \hat{x}\frac{\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\left(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi\right) + \hat{z}\rho$$



در A: عمود بر سطح رو به سوی بیرون

در راستای $\hat{x}$

در A: $r = a\hat{x}$

$$\varphi = 0$$

$$\rho = a \longrightarrow 0 = \sqrt{a^2 - \rho^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} \longrightarrow \infty$$

جهت کلی عوض نشده

برای حل این مشکل:

$$\sqrt{a^2-\rho^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \rho^2 (\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) + \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,\hat{z}$$

$$\sqrt{a^2-\rho^2}\,\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \varphi}=\hat{n}\,\underline{\rho^2}$$

$$=\hat{n}\,a^2$$

$r=a\hat{n}$

$\hat{n}$:

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \varphi}$$

$$\underline{dS}=\left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)(d\rho)\,(d\varphi)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) + \hat{z}\rho$$

انتگرال این بر $x^2+y^2 \le a^2$

انتگرال بر $\rho^2 \le a^2$

φ در یک فاصله به پهنای (2π)

برابر است $= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} d\rho \left[\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) + \hat{z}\rho\right]$

$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi = \sin\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi = -\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0$

$$= [illegible] = \hat{z}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} d\rho\ \rho = \hat{z}(2\pi)\,\frac{a^2}{2}$$

$$= \hat{z}(\pi a^2) \checkmark$$

$$dS = \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)(d\rho)(d\varphi)$$

[illegible]

$$= \left[\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\left(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi\right) + \hat{z}\,\rho\right](d\rho)(d\varphi)$$

$$\|dS\| = \sqrt{\frac{\rho^4}{a^2-\rho^2} + \rho^2}\,(d\rho)(d\varphi) = \frac{a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}(d\rho)(d\varphi)$$

$$\text{مساحت نیمکره} = \int_0^{2\pi}(d\varphi)\int_0^{a}(d\rho)\,\frac{a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$=(2\pi)\left[-a\sqrt{a^2-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=a} = 2\pi a^2$$

مساحت نیمکره $\neq$ | بردار مساحت نیمکره |

$$\int \|dS\| \rightarrow 2\pi a^2$$

$$\int \|dS\| \neq \left\|\int dS\right\| \qquad \left\|\int dS\right\| \rightarrow \pi a^2$$

$$\int \|dS\| \geq \left\|\int dS\right\| \rightarrow$$

برابری اگر و تنها اگر همه‌ی جزءهای سطح هم‌جهت باشند.

همجهت بودن بردار جزء سطح (عمود بر جزء سطح)

دقت کنید که سطح بخشی از یک صفحه باشد.

یک مثال دیگر: بردار سطح کره ،

سطح کره .

با استفاده از مختصات کروی:

جهت بردار سطح: به بیرون کره.

معادله‌ی کره: شعاع a

مرکز در مبدأ

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

$$\downarrow$$

$$|r|^2=a^2$$

$$|r|=a$$

مختصات کروی

$$(r,\theta,\varphi)$$

$$\downarrow$$

$$(|r|,\theta,\varphi)$$

بردار مکان

[illegible]

بر کره $|r|$ ثابت : $|r| = a$

پارامترها : (θ, φ)

بردار مکان

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$x = |r|(\sin\theta)(\cos\varphi)$$

$$y = |r|(\sin\theta)(\sin\varphi)$$

$$z = |r|(\cos\theta)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \hat{x}\,|r|(\cos\theta)\cos\varphi + \hat{y}\,|r|(\cos\theta)\sin\varphi$$

$$-\hat{z}\,|r|\sin\theta$$

$$= a\left[(\cos\theta)(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) - \hat{z}\sin\theta\right]$$

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = (a\sin\theta)(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = a^2(\sin\theta)(\cos\theta)\hat{z} + (a^2\sin^2\theta)(\hat{y}\sin\varphi$$

$$+ \hat{x}(\cos\varphi) = (a^2\sin\theta)\left[\hat{z}\cos\theta + (\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi)\right.$$

$$\left.\sin\theta\right]$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (a \sin\theta)\, r$$ راستای (θ, φ)

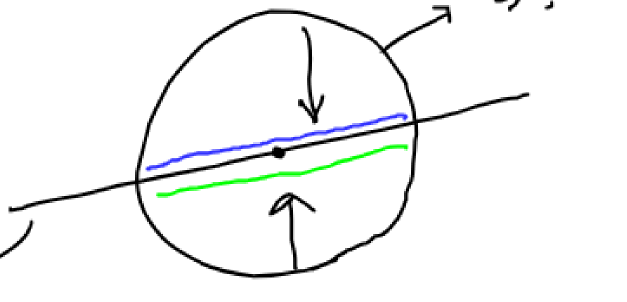
$$r = \|r\|\, \hat{r}$$

بردار سطح $= \int \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)(d\theta)(d\varphi)$

$$= \int_0^{2\pi} (d\varphi) \int_0^{\pi} d\theta \,(a^2 \sin\theta) \Big[(\hat{x} \cos\varphi + \hat{y} \sin\varphi) \sin\theta + \hat{z} \cos\theta \Big]$$

$$\int_0^{2\pi} (d\varphi) \cos\varphi = \int_0^{2\pi} (d\varphi) \sin\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \,(\sin\theta)(\cos\theta) = \int_0^{\pi} d\theta \,\frac{\sin(2\theta)}{2} = -\frac{\cos(2\theta)}{4}\Big|_0^{\pi} = 0$$



برابر است $= 0$

[illegible] تغییر کره

بر صفحه $= \underbrace{\pi a^2}_{\text{از آبی}} - \underbrace{\pi a^2}_{\text{از سبز}} = 0$

تغییر برابر است بر [illegible] (عمود بر صفحه) صفر است

$$\text{مساحة} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \; a^2 \sin\theta \times$$

$$\underbrace{\left\| (\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi)\sin\theta + \hat{z}\cos\theta \right\|}_{\sqrt{(\sin^2\theta)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta} \; = 1}$$

$$\text{مساحة} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \; a^2 \sin\theta$$

$$= 2\pi a^2 \left(-\cos\theta\right)_0^{\pi} = (2\pi a^2)(2) = 4\pi a^2 \checkmark$$

مثال: شار الکتریکی گذرنده از سطح S برابر

$$= \int_S \vec{dS} \cdot \vec{E}$$

بردار

بردار میدان الکتریکی

مثال: S قرص $x^2+y^2 \le a^2$ ، $z=b$

با جهت $\hat{z}$

E: میدان الکتریکی بار نقطه‌ی q در مبدأ.

$$E = \frac{Kq\,r}{|r|^3} = \frac{Kq\,\hat{r}}{|r|^2} \qquad |r| = \|r\|$$

بردار

پارامتری سازی S : (x, y)

برای S ،

$$r = x\hat{x} + y\hat{y} + b\hat{z}$$

$$z = b$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \hat{x} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \hat{y}$$

$$dS = \hat{x} \times \hat{y}\,(dx)(dy) = \hat{z}\,(dx)(dy)$$

(x, y) را استفاده: (dS) با $\hat{z}$ هم‌جهت.

$$\text{الفيض الكلي} = \int_{x^2+y^2 \le a^2} (dx)(dy)\, \hat{z} \cdot \frac{Kq\hat{r}}{|r|^2}$$

$$|r|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + b^2$$

$$\hat{r} = \frac{r}{|r|} = \frac{\hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}b}{\sqrt{x^2+y^2+b^2}}$$

$$\text{الفيض الكلي} = \int_{x^2+y^2 \le a^2} (dx)(dy)\, \frac{Kqb}{(x^2+y^2+b^2)^{3/2}}$$

شار الکتریکی $= \int_{-a}^{a} (dx) \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \, \frac{K q_n b}{(x^2+y^2+b^2)^{3/2}}$

$y = \sqrt{b^2+x^2} \tan\alpha$

تغییر متغیر : y به α

$(dx)(dy) = \rho (d\rho)(d\varphi)$

راه دوم :

$(\rho, \varphi) \leftarrow (x, y)$

شار الکتریکی $= \int_0^{2\pi} (d\varphi) \int_0^{a} (d\rho)(\rho) \, \frac{K q_n b}{(\rho^2+b^2)^{3/2}}$

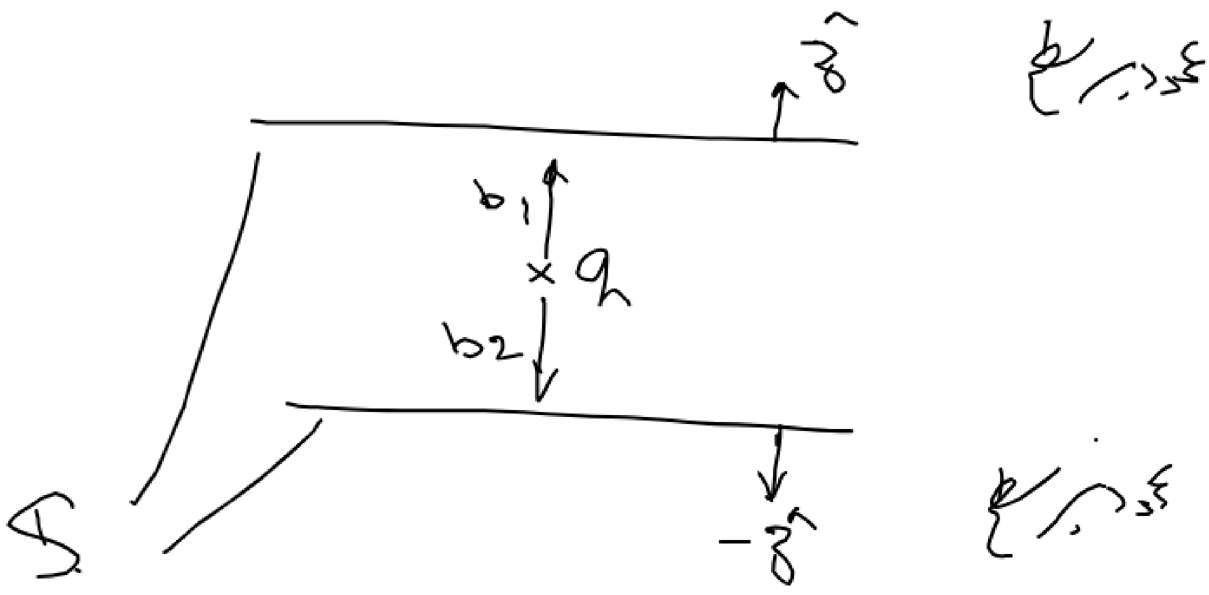
$$= 2\pi \left(\frac{-Kq_h b}{\sqrt{\rho^2+b^2}} \right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=a}$$

$$= -2\pi K q_h b \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{|b|} \right]$$

$$= 2\pi K q_h b \left[\frac{1}{|b|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

در حالتی که $a \to \infty$ ، شار کل $\Phi = 2\pi K q_h \dfrac{b}{|b|}$

شاری که از یک صفحه بی‌نهایت می‌گذرد، به فاصله صفحه از منبع بستگی ندارد.



شار کل از دو صفحه $= 2\pi K q_n + 2\pi K q_n$

$$= 4\pi K q_n = \frac{q_n}{\varepsilon_0}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$