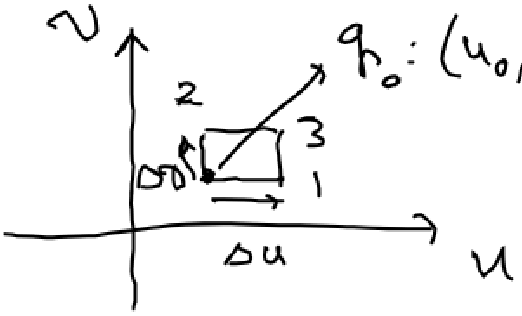
تغییر متغیر در انتگرال چندگانه

دوگانه

$$r : (x, y) \longrightarrow dS_r = (dx)(dy)$$

$$\Downarrow$$

$$q : (u, v) \longrightarrow dS_q = (du)(dv)$$



$q_0 : (u_0, v_0)$ یک مستطیل کوچک در صفحه‌ی q

$$dS_q = (\Delta u)\,(\Delta v) \longrightarrow (du)(dv)$$

تصویر این مستطیل در صفحه‌ی r

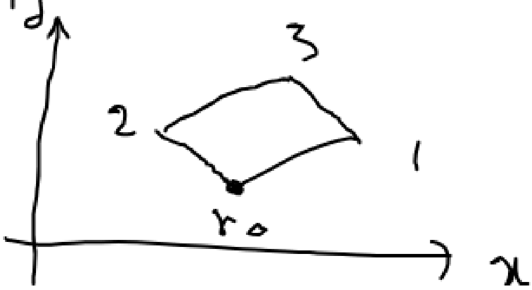
$g_0 \longrightarrow r_0$ $\qquad\qquad$ (x,y) تابع (u,v)

$(u_0, v_0) \longrightarrow (x_0, y_0)$

$(u_0+\Delta u, v_0) \longrightarrow \left(x_0 + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ y_0 + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right) + o(\Delta g)$

$(u_0, v_0+\Delta v) \longrightarrow \left(x_0 + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ y_0 + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right) + o(\Delta g)$

$(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) \longrightarrow \left(x_0 + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ y_0 + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right) + o(\Delta g)$



(تقريباً)

مستطيل صغير g ← متوازي الاضلاع صغير r (تقريباً)

dS_r : مساحت ، متوازی الاضلاع در صفحه r

dS_q : مساحت مستطیل در صفحه q

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + o(\Delta q)$$

$$\Delta r = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Delta q + o(\Delta q)$$

مستقل   متری   مستقل

$$dS_r = \det\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] dS_q + o(dS_q)$$

$$dS_r = \det\left(\frac{\partial r}{\partial q_h}\right) dS_{q_h} + o(dS_{q_h})$$ مساحت جبری

اسکالر   ماتریس   اسکالر

برای مساحت معمولی (قدر مطلق مساحت جبری،
نامنفی)

$$\underline{dS_r} = \left|\det\left(\frac{\partial r}{\partial q_h}\right)\right| \underline{dS_{q_h}} + o(dS_{q_h})$$

مساحت معمولی (نامنفی)

$$\int_{S_r} f(r)\,(dS_r) \qquad S_r = g(S_q)$$

$$r = g(q)$$

$$= \sum_i \left[f(r_i)\,(\Delta S_r)_i + o(S_{r_i}) \right]$$

$$= \sum_i \left\{ f\left[g(q_i)\right] \left[\left| \det\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right) \right|_i (\Delta S_q)_i + o(S_{q_i}) \right] + o(S_i) \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{قطر ناحیه} \to 0} \int_{S_q} f[\overset{g(q)}{g(q)}] \left| \det \underbrace{\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)}_{\text{ژاکوبی}} \right| dS_q$$

$$\int_{S_r} f(r)\, dS_r = \int_{S_q} f[g(q)] \left|\det \frac{\partial[g(q)]}{\partial q}\right| dS_q$$

$S_r = g(S_q)$ $\quad$ $r = g(q)$

q مستقل : $g(q)$ مستقل

$\frac{\partial[g(q)]}{\partial q}$: ماتریس

f : عدد

قضیه‌ی تغییر متغیر برای انتگرال چندگانه.

$$dS_r = \left|\det\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)\right| dS_q$$

مقایسه با حالت یک بعدی:

$$dy = \left|\frac{dy}{dx}\right| dx$$

قدر مطلق به خاطر این که dx و dy طول هستند (نامنفی اند)

شکل دیگر تفسیر در حالت یک بعدی:

$$\underbrace{dy = \frac{dy}{dx} dx}_{\text{طول جهت دار (علامت دار)}}$$

$$\int_0^1 dy\ f(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \qquad y = -x$$

$$I_y = [0,1] \qquad y=0 \longleftrightarrow x=0$$

$$I_x = [-1,0] \qquad y=1 \longleftrightarrow x=-1$$

عمل تغییر متغیر

$$\int_0^1 dy\, f(y) = \int_0^{-1} \frac{dy}{dx} dx\ f(-x)$$

$$\int_{y=0}^{y=1} dy\ f(y) = \int_{x=0}^{x=-1} \frac{dy}{dx}\, dx\ f(-x)$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(-\frac{dy}{dx}\right) dx\ f(-x)$$

$$\int_0^1 dy\, f(y) = \int_{I_y} dy\ f(y) = \int_{I_x} \left|\frac{dy}{dx}\right| dx\, f(-x) = \int_{-1}^{0} \left(-\frac{dy}{dx}\right) dx\, f(-x)$$

$$x = \rho \cos\varphi$$: حل

$$y = \rho \sin\varphi$$

$$(dx)(dy) \overset{?}{\longleftrightarrow} (d\rho)(d\varphi)$$

$$(dx)(dy) = \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} \right| (d\rho)(d\varphi)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}\right] = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

$$(dx)(dy) = \rho\,(d\rho)(d\varphi) \qquad \checkmark$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} \longrightarrow \frac{\partial(y,x)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\det\left[\frac{\partial(y,x)}{\partial(\rho,\varphi)}\right] = -\rho \qquad |-\rho| = \rho$$

$$(dx)(dy) = \rho\,(d\rho)(d\varphi)$$

تغییر ترتیب متغیرها: در ماتریس مشتق جزئی سطرها

(یا جای ستونها) عوض میشود. دترمینان (ژاکوبین) در

(1-) ضرب میشود. قدر مطلق دترمینان عوض نمیشود.

مثال دیگر :

مختصات استوانه‌ای :

دکارتی

(x, y, z) $\qquad$ $(\rho, \varphi, z) \leftarrow$

$$x = \rho \cos\varphi$$

$$y = \rho \sin\varphi$$

$$z = z$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(dx)(dy)(dz) = \rho\,(d\rho)(d\varphi)(dz)$$

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho \times 1 = \rho$$

حجم یک گوی به شعاع a

انتخاب مختصات: مبدأ در مرکز گوی:

در کارتزی $\qquad x^2+y^2+z^2 \le a^2$

در استوانه‌ای $\qquad \rho^2+z^2 \le a^2$

$$V=\int_{\text{گوی}} (dx)(dy)(dz) = \int_{\text{گوی}} \rho\,(d\rho)(d\varphi)(dz)$$

حدود انتگرال: φ در یک فاصله به اندازه‌ی (2π)

مثلاً $[0, 2\pi]$

برای ρ و z:

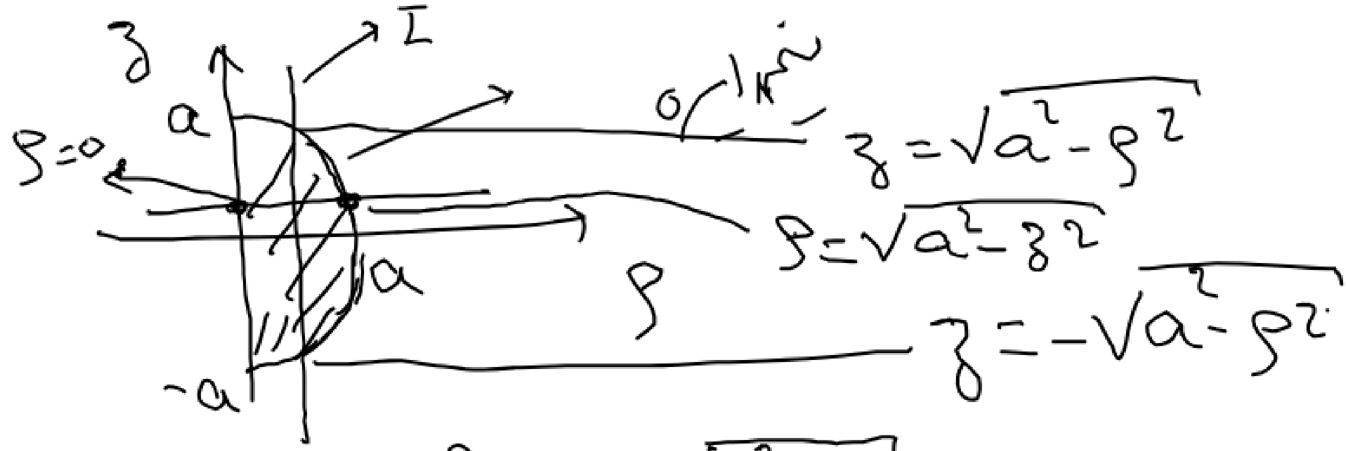
$$\rho^2 + z^2 \leq a^2$$

$$\rho \geq 0$$

I): $0 \leq \rho \leq a$ $\quad z^2 \leq a^2 - \rho^2$

$$-\sqrt{a^2-\rho^2} \leq z \leq \sqrt{a^2-\rho^2}$$

II): $a \leq z \leq a$ $\quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{a^2 - z^2}$



$$V_I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho\,d\rho\int_{-\sqrt{a^2-\rho^2}}^{\sqrt{a^2-\rho^2}}dz$$

$$=2\pi\int_0^a\rho(d\rho)\left[2\sqrt{a^2-\rho^2}\right]$$

$$=4\pi\left[-\frac{1}{3}(a^2-\rho^2)^{3/2}\right]_{\rho=0}^{\rho=a}=\frac{4\pi}{3}a^3 \checkmark$$

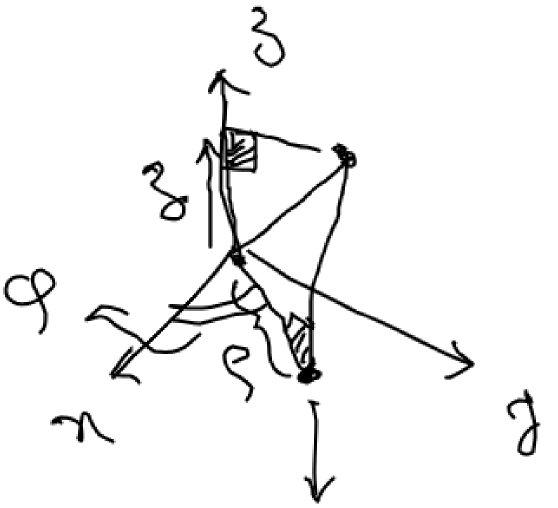
$$V_{\mathrm{II}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-a}^{a} dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \rho \, d\rho$$

$$= (2\pi) \int_{-a}^{a} dz \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{a^2-z^2}}$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} dz \; \frac{a^2-z^2}{2} = \pi \left[a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-a}^{z=a}$$

$$= \pi \left[a^2 (2a) - \frac{2}{3} a^3 \right] = \frac{4\pi}{3} a^3 \quad \checkmark \qquad V_{\mathrm{II}} = V_{\mathrm{I}}$$

شکل برای مختصات استوانه‌ای:



تصویر نقطه بر صفحه

$z = 0$

$0 \le \rho$

$-\infty < z < +\infty$

$0 \le \varphi < 2\pi$

یا

$-\pi < \varphi \le \pi$

یا هر فاصله‌ای اگر به پهنای (2π)

ρ ثابت : استوانه‌ای دوار با محور z

φ ثابت : نیم صفحه : بال محور z (نیم صفحه محدود به صفحه‌ی $z=0$)

z ثابت : صفحه (موازی با $z=0$)

مختصات کروی :

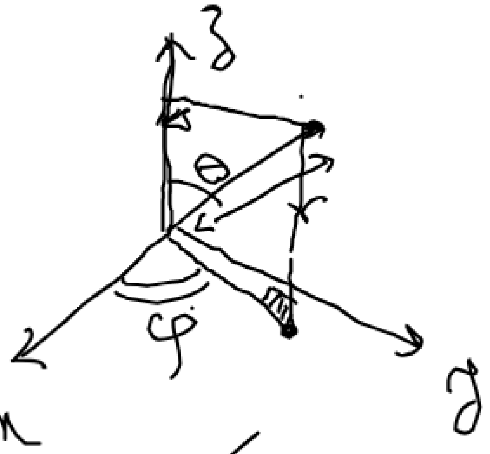
دکارتی $(x, y, z) \longrightarrow$ استوانه‌ای $(\rho, \varphi, z) \longrightarrow$ کروی (r, θ, φ)

$$\rho = r \sin\theta$$
$$z = r \cos\theta$$
$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x = r(\sin\theta)\cos\varphi \\ y = r(\sin\theta)\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\rho^2 + z^2 = r^2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

r : فاصله مبدأ



θ : زاویه ی بردار مکان با محور z

φ : زاویه ی تصویر بردار مکان در صفحه ی $z=0$ با محور x

r : طول بردار مکان (فاصله تا مبدأ)

$\theta=0$: نیمه ی مثبت محور z

$\theta=\pi$: نیمه ی منفی محور z

φ در یک فاصله به پهنای (2π)

$0 \le r < \infty$

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi < 2\pi$ یا $-\pi \le \varphi < \pi$ یا ...

$r=$ ثابت : کره به مرکز مبدأ

$\theta=$ ثابت : نیم مخروط دوار : محور تقارن محور z و رأس در مبدأ

$\varphi=$ ثابت : نیم صفحه : شامل محور z

$$\boxed{\begin{aligned}\rho &= r\sin\theta \\ z &= r\cos\theta\end{aligned}}$$

تبدیل مختصات :

$$(\rho,\varphi,z) \longrightarrow (r,\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial(\rho,\varphi,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} r & \theta & \varphi \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \rho \\ \varphi \\ z \end{array} \end{array}$$

$$\det\left[\frac{\partial(\rho,\varphi,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right] = -\det\begin{bmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -(-r) = r$$

$$(d\rho)(d\varphi)(dz) = r(dr)(d\theta)(d\varphi)$$

$$(dx)(dy)(dz) = \rho(d\rho)(d\varphi)(dz)$$

$$= r\rho(dr)(d\theta)(d\varphi)$$

$$\rho = r\sin\theta$$

$$(dx)(dy)dz) = (r^2\sin\theta)(dr)(d\theta)(d\varphi)$$

تبدیل مختصات دکارتی - کروی:

$$x = r(\sin\theta)\cos\varphi$$

$$y = r(\sin\theta)\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{bmatrix} (\sin\theta)\cos\varphi & r(\cos\theta)\cos\varphi & -r(\sin\theta)\sin\varphi \\ (\sin\theta)\sin\varphi & r(\cos\theta)\sin\varphi & r(\sin\theta)\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ det

$$+\left[-r(\sin\theta)(\sin\varphi)\right] \det\begin{bmatrix} (\sin\theta)\sin\varphi & r(\cos\theta)\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$-\left[r(\sin\theta)(\cos\varphi)\right] \det\begin{bmatrix} (\sin\theta)\cos\varphi & r(\cos\theta)\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= r^2(\sin\theta)\sin^2\varphi + r^2(\sin\theta)\cos^2\varphi = r^2\sin\theta$$

$$(dx)(dy)(dz) = (r^2 \sin\theta)(dr)(d\theta)(d\varphi) \quad \checkmark$$

حجم کره به شعاع a :

$$V = \int_{\text{کره}} (r^2 \sin\theta)(dr)(d\theta)(d\varphi)$$

کره: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \longrightarrow r^2 \leq a^2$

$$0 \leq r \leq a \quad \Longleftarrow \quad r \geq 0$$

تصحیح برای θ , φ :

$0 \le \theta \le \pi$

$-\pi < \varphi \le \pi$

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} d\theta \int_{0}^{a} dr \; (r^2 \sin\theta)$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\right)\left[\int_{0}^{\pi} (d\theta)\, \sin\theta\right]\left[\int_{0}^{a} (dr)\, r^2\right]$$

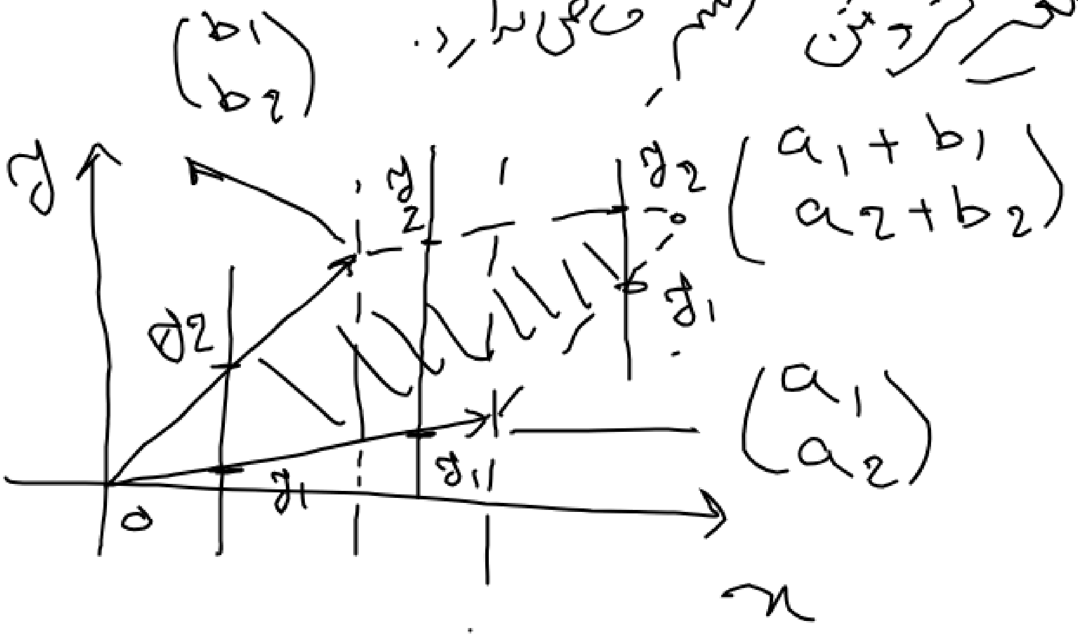
$$= 2\pi \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=0}^{r=a}$$

$$= 2\pi\,(2)\left(\frac{a^3}{3}\right.$$

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}$$ ✓

* تغییر متغیر نزدن رسم خاصی ندارد.

مثال:



مساحت متوازی الاضلاع ها کوچک کرده

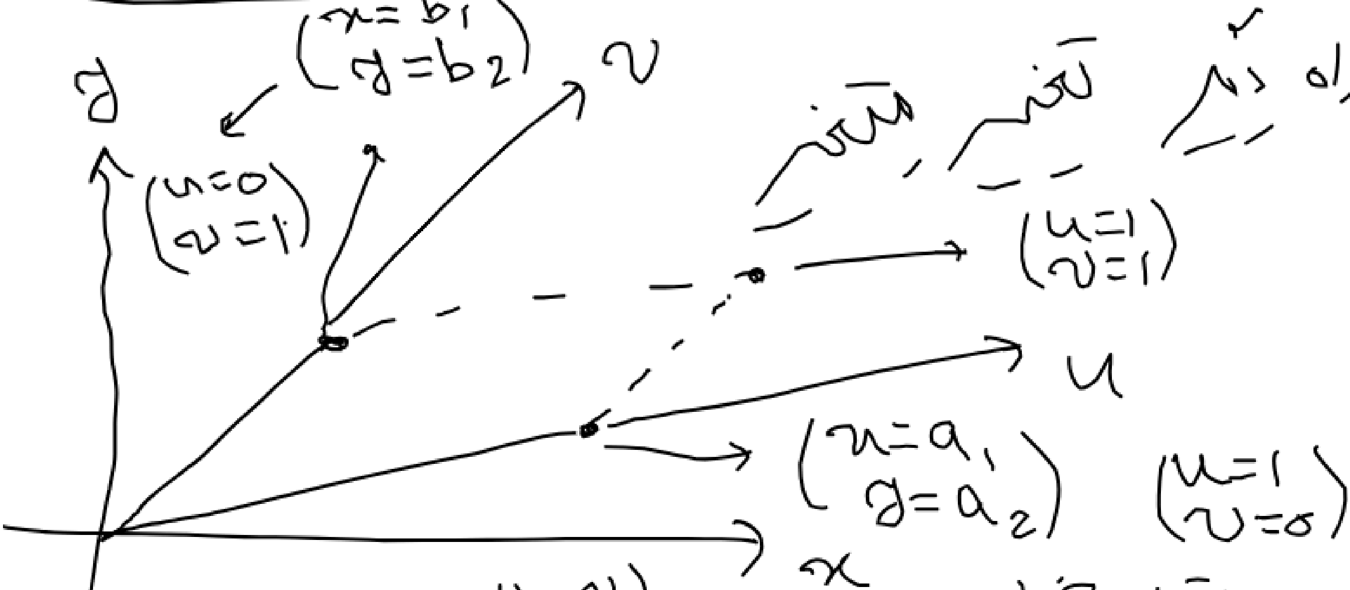
$$\int_0^{a_1+b_1} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy$$

g_1 و g_2 در سه ناحیه (برای x) مشخص شوند.

شهودی نیست : بسط برای حالتهای مختلف لازم است

چند انتگرال باید حساب شوند

راه دیگر تغییر متغیر



تغییر متغیر خطی از (x, y) به (u, v)

مربع در (u,v)

متوازی الاضلاع در (x,y)

تبدیل خطی

ماتریس

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = a_1 u + b_1 v$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = a_2 u + b_2 v$$

S : مساحة متوازي الاضلاع

$$S = \int (dx)(dy) = \int_{D_{(u,v)}} \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| (du)(dv)$$

متوازي الاضلاع

$$D_{u,v} : 0 \leq u \leq 1 , \quad 0 \leq v \leq 1$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = M \qquad M = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$S = \int_0^1 (da) \int_0^1 (db)\, |\det(M)|$$

$$= |\det(M)| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|$$

ضلع‌های متوازی الاضلاع

مساحت چنین متوازی الاضلاعی = دترمینان ماتریسی که ستون‌های آن اضلاع متوازی الاضلاع‌اند.

پس معادله (ناشی) قدر مطلق این
ترتیبان است.