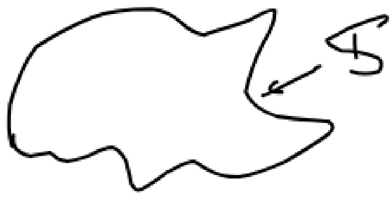
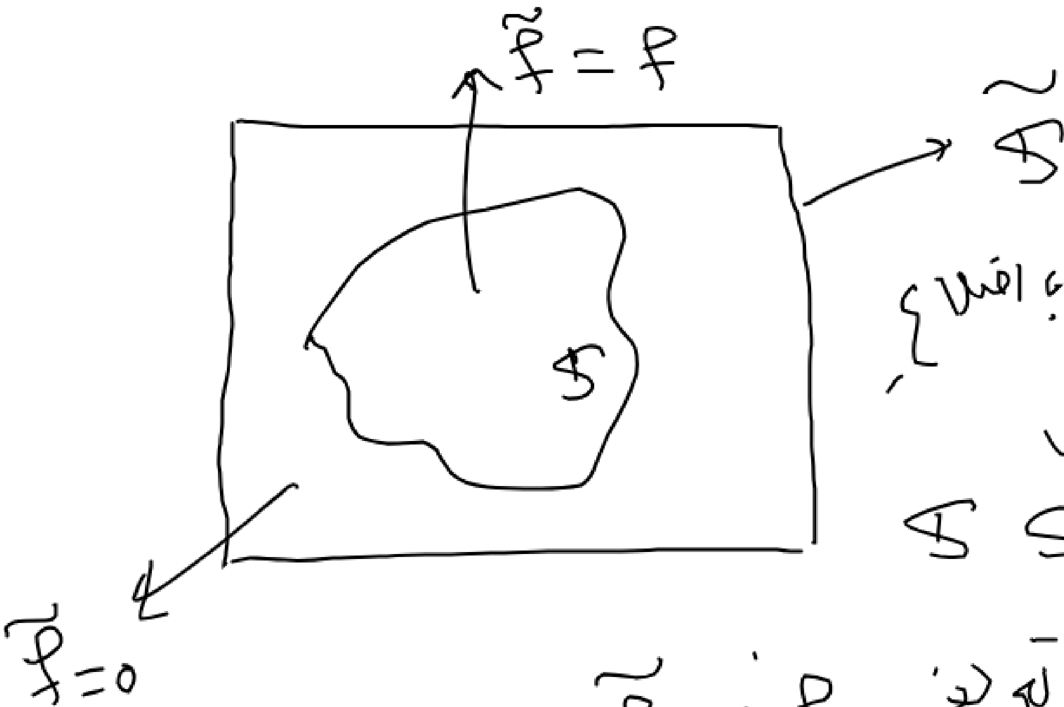
انتگرال دوگانه: S مستطیل $[a,b]\times[c,d]$

$$\int_S f\,dS = \int_a^b dx \int_c^d dy\; f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\; f(x,y)$$

اگر ناحیه مستطیل (با ضلعهای موازی با محورها) نبود؟





$\tilde S$ مستطیل با اضلاع موازی با محورها

$S \subseteq \tilde S$

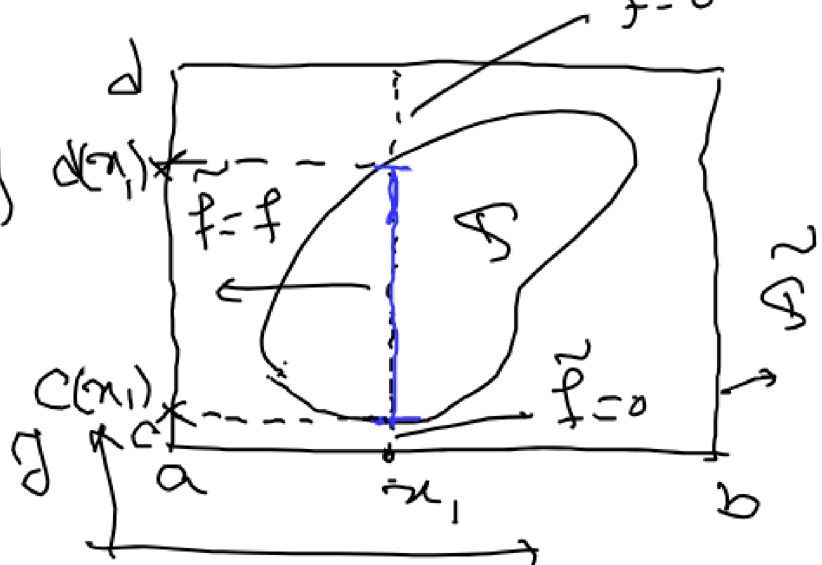
گسترش تعریف f به $\tilde f$:

$$\tilde f(r) = \begin{cases} f(r), & r \in S \\ 0, & r \notin S \end{cases}$$

$$\int_S f(r)\,ds = \int_{\tilde S} \tilde f(r)\,ds$$

$$\int_{\tilde{S}} \tilde{f}(r)\,dS = \int_a^b dx \int_c^d dy\, \tilde{f}(x,y)$$

$$\tilde{S} = [a,b]\times[c,d]$$



$$\int_c^d dy\, \tilde{f}(x_1,y)$$

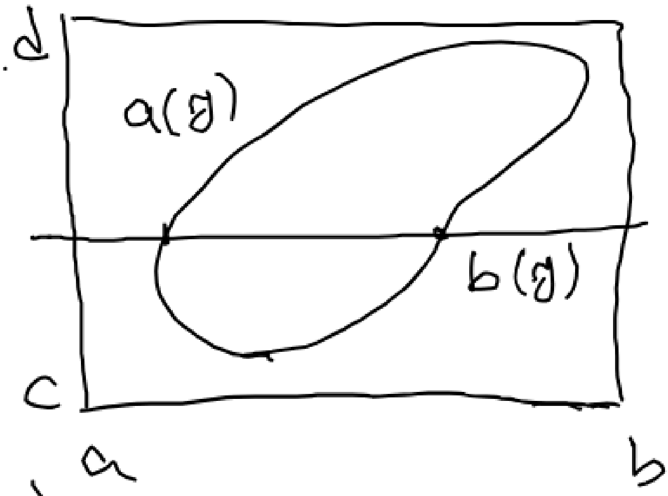
$$= \int dy\, f(x_1,y)$$

$$= \int_{c(x_1)}^{d(x_1)} dy\, f(x_1,y)$$

$$\int_{\tilde{S}} \tilde{f}(r)\,dS = \int_a^d dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy\, f(x,y)$$

$$\int_{\tilde{S}} dS\, \tilde{f}(r)$$

$$= \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} dx\; f(x,y)$$



$$\int_{\tilde{S}} dS\; f(r) = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} dx\, f(x,y)$$

$$= \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy\; f(x,y)$$

$$\int_{a(y)}^{b(y)} dx \int_{c}^{d} dy\, f(x,y)$$

خوش تعریف نیست: y معلوم نیست

مستقل از y

$$\underbrace{\int_{a(y)}^{b(y)} dx \int_{c}^{d} dy\, f(x,y)}_{\text{!بامعنی نیست}} \neq \underbrace{\int_{c}^{d} dy \int_{a(y)}^{b(y)} dx\, f(x,y)}_{\text{!بامعنی است}}$$

بامعنی نیست

مستقل از x, y

تابع y درونی x

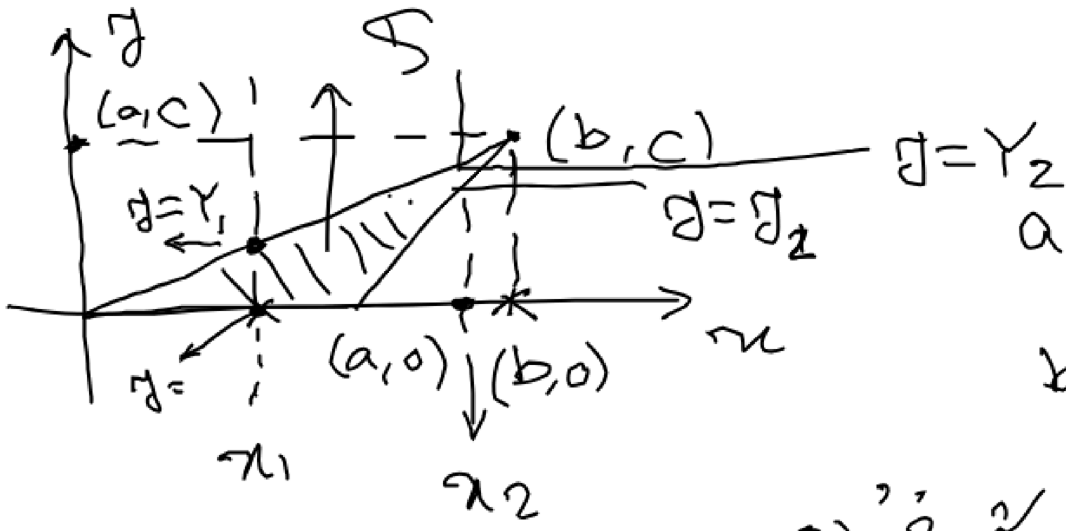
اگر قرار است اول بر y انتگرال گرفته شود،

حد انتگرال‌گیری بر x باید مستقل از y باشد.

رابطه‌ی درست.

$$\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} dx\, f(x,y)$$

مثال:



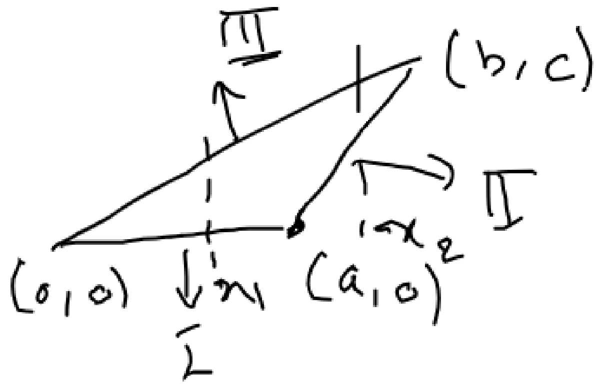
$a, b, c > 0$

$b > a$

مساحت $\mathcal{S}$ را بیابید.

$$S = \int_{\mathcal{S}} dS$$

$$\overline{\mathcal{S}} = [0, b] \times [0, c]$$



معادله‌ی ضلع‌های مثلث :

$$\mathrm{I}: \quad y = 0$$

$$\mathrm{II}. \quad \frac{y-0}{x-a} = \frac{c-0}{b-a} \qquad y = \frac{c}{b-a}(x-a)$$

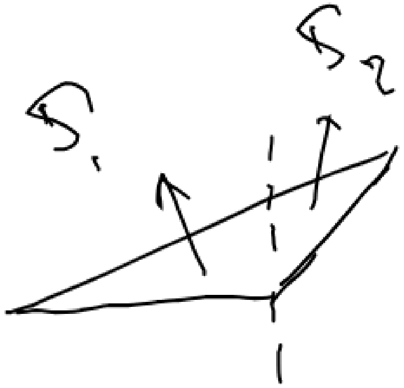
$$\mathrm{III}: \quad \frac{y-0}{x-0} = \frac{c-0}{b-0} \qquad y = \frac{cx}{b}$$

$$1: \quad Y_1 = \frac{c x_1}{b} \quad \Big| \quad 2: \quad y_2 = \frac{c(x_2 - a)}{b-a} \quad Y_2 = \frac{c x_2}{b}$$

$x < a$: $\quad 0 \leq y \leq \frac{cx}{b}$

$x > a$: $\quad \frac{c(x-a)}{b-a} \leq y \leq \frac{cx}{b}$

$$\int_S dS = \int_0^{x_1} dx \int_0^{\frac{cx}{b}} dy + \int_{x_1}^{a} dx \int_{\frac{c(x-a)}{b-a}}^{\frac{cx}{b}} dy$$



$$\int_S dS = \int_{S_1} dS + \int_{S_2} dS$$

$$\int_{\frac{C(x-a)}{b-a}}^{\frac{Cx}{b}} dy = \frac{Cx}{b} - \frac{C(x-a)}{b-a} \qquad \int_{0}^{\frac{Cx}{b}} dy = \frac{Cx}{b}$$

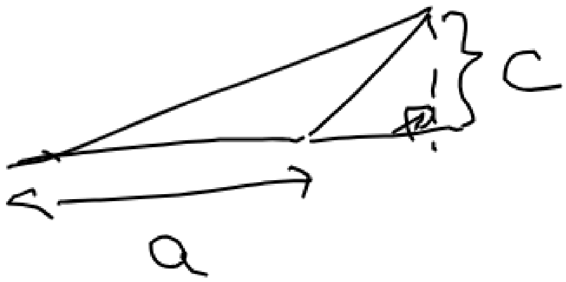
$$S = \int_0^a dx \frac{Cx}{b} + \int_a^b dx \left[\frac{Cx}{b} - \frac{C(x-a)}{b-a}\right]$$

$$= \frac{Cx^2}{2b}\Big|_0^a + \frac{Cx^2}{2b}\Big|_a^b - \frac{C(x-a)^2}{2(b-a)}\Big|_a^b$$

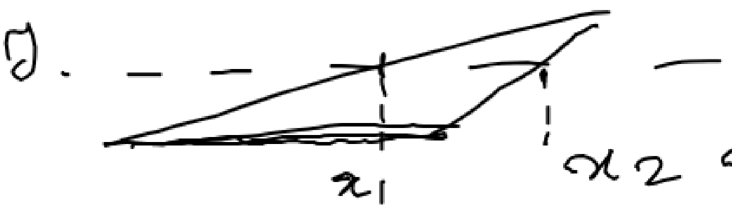
$$= \frac{Ca^2}{2b} + \frac{C(b^2-a^2)}{2b} - \frac{C(b-a)^2}{2(b-a)}$$

(ارتفاع)   قاعده

$$S = \frac{cb}{2} - \frac{c(b-a)}{2} \Rightarrow S = \frac{ca}{2}$$



به ترتیب عکس برای انتگرال‌گیری: اول انتگرال بر x



$x_1: \quad y = \frac{cx}{b}$

$x_1 = \frac{b}{c} y$

$x_2 \quad x_2: \quad y = \frac{c(x-a)}{b-a}$

$$x_2 = \frac{(b-a)y}{c} + a \qquad x_1 = \frac{by}{c}$$

$$S = \int_0^c dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx$$

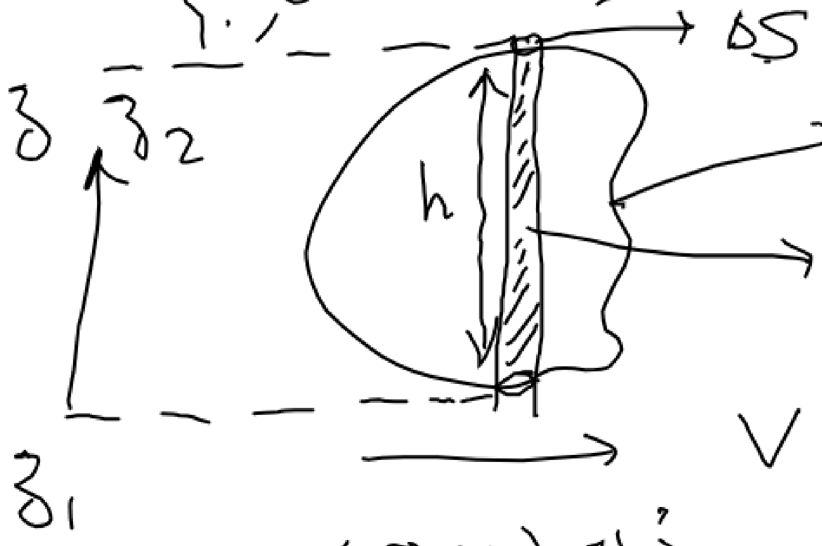
$$= \int_0^c dy \left[\frac{(b-a)y}{c} + a - \frac{by}{c} \right]$$

$$= \int_0^c dy \left(a - \frac{ay}{c} \right) = \left(ay - \frac{ay^2}{2c} \right)_0^c$$

$$= ac - \frac{ac^2}{2c} \qquad S = \frac{ac}{2} \quad \checkmark$$

همان نتیجه‌ی قبل، برای ساده‌تر (اندکی).

یک کاربرد انتگرال در صفحه: محاسبه‌ی حجم



V

ارتفاع در یک نقطه

$$dV = h\,dS + o(dS)$$

$$V = \int h\,dS$$ دقیق

(y, x) [illegible] $\quad h = z_2 - z_1$ (تقریبی نیست).

z_1 و z_2 تابع $\rho = (x,y)$

$$V = \int_S dS \left[z_2(\rho) - z_1(\rho) \right]$$

$$= \int_V dV = \int_S dS \int_{z_1(\rho)}^{z_2(\rho)} dz$$

مثال: حجم کره به شعاع a

معادله‌ی کلی یک کره به شعاع a :

مبدأ بر مرکز کره :

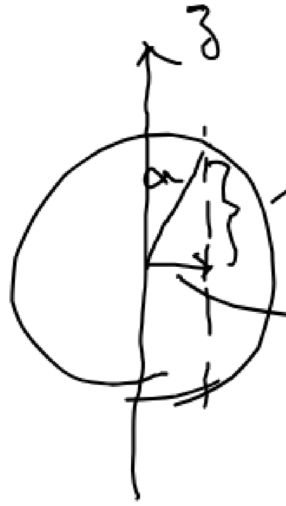
$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\text{مجذور فاصله از مبدأ}}=a^2$$

معادله‌ی کره

رابطه‌ی گوی :

نقاطی که فاصله‌شان تا مبدأ بزرگتر از a نیست.

$$x^2+y^2+z^2\le a^2$$

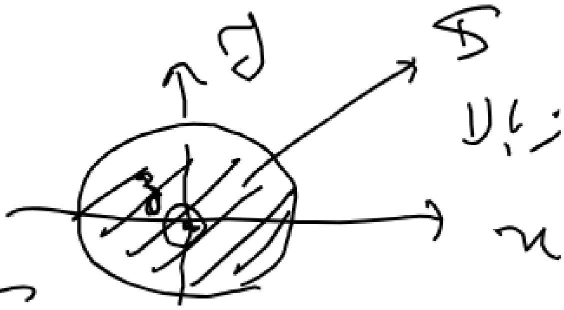


$\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$

$\sqrt{x^2+y^2}$

نقطه‌ای درون توپ:

$$\underbrace{-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}_{z_1} < z < \underbrace{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}_{z_2}$$



D دایره به مرکز مبدا و شعاع a

[illegible] (x, y, z)

$(x, y) \in S \qquad S: \quad x^2 + y^2 \leq a^2$

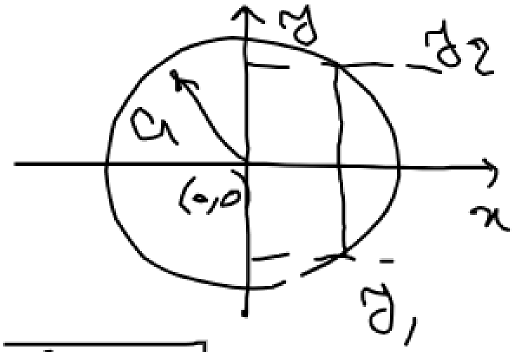
$z_1 \leq z \leq z_2 \qquad z_1 = -\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$

$z_2 = +\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$

$$V = \int_S dS \int_{-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} dz = 2\int_S dS \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}$$

$$= 2 \int_S dx\, dy \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$V = 2\int_D dx\,dy\,\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$



$$y_2 = \sqrt{a^2-x^2} \qquad y_1 = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$V = 2\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$

$$a^2-x^2 = A^2 \qquad y = A\sin\theta$$

تغير متغير

$$dy = A(\cos\theta)\,d\theta \qquad y = \pm A \longrightarrow \theta = \pm \pi/2$$

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \sqrt{a^2-(x^2+y^2)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(\cos\theta)(d\theta)\sqrt{A^2-A^2\sin^2\theta}$$

$$= A^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(d\theta)\,\cos^2\theta = 2A^2\int_{0}^{\pi/2} d\theta\,\cos^2\theta$$

$$= A^2\int_{0}^{\pi/2} d\theta\,\left[1+\cos(2\theta)\right] = A^2\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2}A^2 = \frac{\pi}{2}(a^2-x^2)$$

$$V = 2\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \, \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$= 2\int_{-a}^{a} dx \; \frac{\pi}{2}(a^2-x^2) = 2\int_{0}^{a} dx \, \pi (a^2-x^2)$$

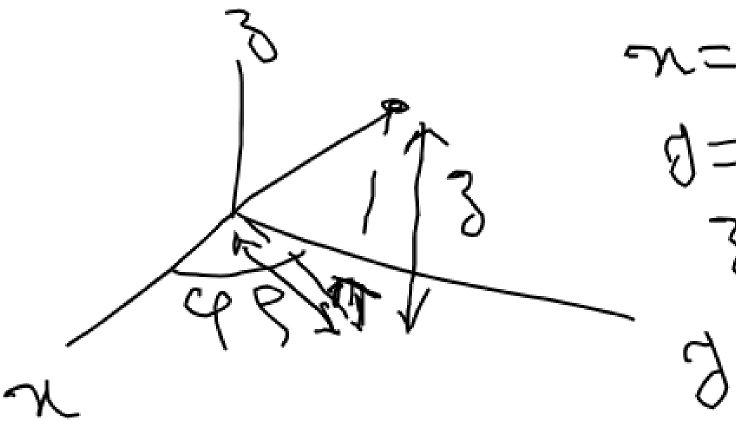
$$= 2\pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = 2\pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3 \checkmark$$

حجم کره

معادله‌ی کره در مختصات استوانه‌ای:

$$(x,y,z) \longrightarrow (\rho,\varphi,z)$$



$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$z = z$$

رابطه‌ی کره:

$$x^2+y^2+z^2 \le a^2$$

$\rho^2 + z^2 \le a^2 \longrightarrow$ سه‌بعدی: φ ظاهر نشده

شاید محاسبه‌ی حجم گوی با استفاده از مختصات استوانه‌ای ساده‌تر باشد.

گرچه نتیجه‌ها نباید فرق کنند.

در رفتن از دکارتی به استوانه‌ای، دو عوض شد.

$(x, y) \longrightarrow (\rho, \varphi)$

قضیه‌ی تغییر متغیر برای انتگرال چندگانه (اینجا دوگانه)

$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

در جمع دکارتی ← قطبی

- تشکیل بکار نادرست:

$(dx)(dy) = dS$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = (\cos\varphi)\, d\rho - (\rho \sin\varphi)\, d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = (\sin\varphi)\, d\rho + (\rho \cos\varphi)\, d\varphi$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} dS = \left[(\sin\varphi)(\cos\varphi)\right](d\rho)(d\rho) - \rho^2\left[(\sin\varphi)\cos\varphi\right](d\varphi)(d\varphi) + \rho\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)(d\rho)(d\varphi)$$

$\int (\ )(d\rho)^2$? $\int (\ )(d\varphi)^2$?

$\times$

$$\int dS\, f(x,y) = \int dy \underbrace{\int dx\, f(x,y)}$$

$=$ تابع y

$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

تغییر متغیر از x به ρ (در y ثابت)

$x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad x = \pm\sqrt{\rho^2 - y^2}$

$x = \sqrt{\rho^2 - y^2}$ $\leftarrow$: بعداً دره $\pm$

$$x = \sqrt{\rho^2 - y^2} \qquad dx = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - y^2}}\, d\rho$$

$$dS = (dx)(dy) \longrightarrow (dy)\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - y^2}}\, d\rho$$

$$(x, y) \longrightarrow (\rho, y)$$

تغییر متغیر تک متغیری

$$(\rho, y) \longrightarrow (\rho, \varphi)$$

یک تغییر متغیر دیگر

$$y = \rho \sin\varphi \qquad dy = \rho(\cos\varphi)\, d\varphi = x\, d\varphi$$

$$= \sqrt{\rho^2 - y^2}\, d\varphi$$

$$(dy)\,\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-y^2}}\,d\rho = (d\varphi)\;\rho(d\rho)$$

با $\pm$:

$$\underset{\pm 1}{x = s}\sqrt{\rho^2-y^2}$$

$$dx = \frac{s\rho}{\sqrt{\rho^2-y^2}}\,d\rho$$

$$dS = dy\,\frac{s\rho}{\sqrt{\rho^2-y^2}}\,d\rho$$

تغییر اول

$$y = \rho\sin\varphi \qquad dy = \rho\cos\varphi\,d\varphi = x\,d\varphi = s\sqrt{\rho^2-y^2}\,d\varphi$$

تغییر دوم

$$dS = s^2 \rho (d\rho)\, d\varphi \qquad s^2 = 1 \qquad s = \pm 1$$

تغییر متغیر یک متغیره (مطمئن):

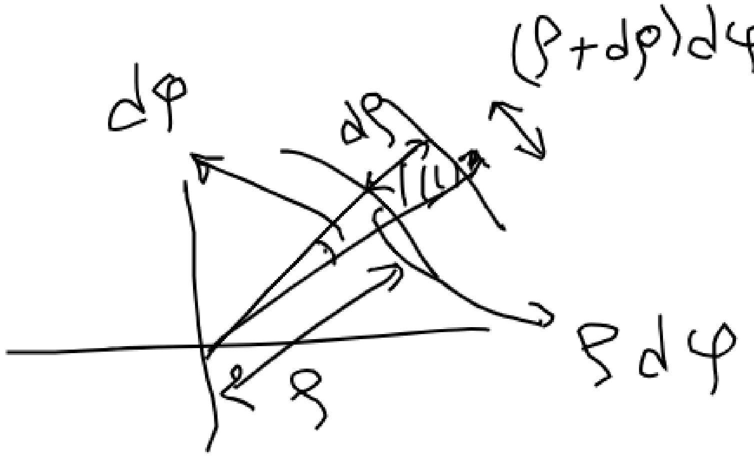
$$(dx)(dy) = dS \longrightarrow \rho\,(d\rho)(d\varphi)$$

نادرست : $(d\rho)^2$, $(d\varphi)^2$ ضریب نادرست برای $(d\varphi)(d\rho)$

$$\left.\begin{aligned} &(\cos\varphi)(\sin\varphi)(d\rho)^2 \\ &- \rho^2(\cos\varphi)(\sin\varphi)(d\varphi)^2 \\ &+ \rho\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)(d\rho)(d\varphi) \end{aligned}\right\}$$

یک راه دیگر برای رسیدن به رابطه‌ی درست برای

مختصات قطبی:



مساحت های کوچ زده

شبیه مستطیل

مساحت های کوچ زده $=$ $\Big\{$ چیزی بین $[(\rho+d\rho)d\varphi]$ و $[\rho d\varphi]$ $\Big\}$

$(d\rho)(d\rho)(d\varphi) = O[(d\rho)(d\varphi)]$ $\quad O([(d\rho)(d\varphi)] + (d\rho) \times$

$$(d\rho)(\rho\, d\varphi) + \cancel{d\varphi}\left[(d\rho)(d\varphi)\right] = \text{مرتبه ۲، صرف‌نظر}$$

$$\int dS\, f = \sum_i \Delta S_i\, f_i + \sum_i \varepsilon_i\, \Delta S_i$$

$0 \leftarrow \Delta S_i$ ، و $\to 0$

$$= \sum_i \left[(\rho\, d\rho\, d\varphi)_i + \tilde{\varepsilon}_i (\rho\, d\rho\, d\varphi)_i\right] f_i$$

$$+ \sum_i \varepsilon_i\, \Delta S_i$$

$$= \sum_i (\rho\, d\rho\, d\varphi)_i\, f_i + \overbrace{\sum_i (\rho\, d\rho\, d\varphi)_i\, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_i}^{\to 0}$$

پس ξ_i در ΔS_i مهم نیست (در انتگرال‌گیری)

$$dS \to (d\rho)(\rho\, d\varphi) = \rho\, (d\rho)(d\varphi)$$

آزمایش برای حجم کره:

کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a

$$V = 2\int_S dS \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$

$$= 2\int_S (\rho\, d\rho)(d\varphi)\sqrt{a^2-\rho^2}$$

حدود انتگرال‌ها

قرص D :　$x^2+y^2 \le a^2$

$\rho \ge 0$:　$0 \le \rho \le a$　$\Leftrightarrow \rho^2 \le a^2$

φ ؟　φ در یک فاصله به طول 2π

مثلا $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \, d\rho \, \sqrt{a^2-\rho^2}$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \quad 2\rho\sqrt{a^2-\rho^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[-\frac{2}{3}(a^2-\rho^2)^{3/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=a}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \quad \frac{2}{3}a^3 = \frac{4\pi}{3}a^3$$ ✓

یک مثال دیگر: مساحت یک قرص به شعاع a

مبدأ بر مرکز قرص: (قرص

S : $0 \le \rho \le a$

φ در یک محدوده

به اندازه (2π)

$$dS = (d\rho)(\rho\, d\varphi)$$

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^a (\rho\, d\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_0^a = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, \frac{a^2}{2}$$

$$= 2\pi \frac{a^2}{2}$$

(... یا، 2π تا 0 یا)

$S = \pi a^2$

مساحت یک دایره به شعاع a

تا اینجا تغییر متغیر چندگانه برای فقط یک تغییر خاص (قطبی ← دکارتی) را با استفاده از تغییر متغیر یک‌گانه بدست آمد.

هدف: قضیه تغییر متغیر به شکل کلی، مستقل از تغییر متغیر یک‌گانه و مستقل از شکل.