انتگرال چندگانه

انتگرال یک متغیره:

f بر فاصله‌ی a تا b تعریف شده.

$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$

$[a_{i-1}, a_i] = I_i$ $\qquad$ $x_i \in I_i$ → فاصله‌ی i

$\sum_{i=1}^{N} l_i f(x_i)$ $\qquad$ $l_i = a_i - a_{i-1}$ → طول فاصله‌ی i

$$\exists A : \ni \left(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ni \right.$$

$$\forall l_i < \delta \Rightarrow \left| \sum_i [f(x_i)]\, l_i - A \right| < \varepsilon$$

در این صورت:

$$\int_a^b (dx)\, f(x) = A$$

مشابه همین برای بعد بیشتر، مثلاً 2

ناحیه‌ی انتگرال‌گیری D

S به تکه‌های کوچک (S_i ها) تقسیم میشود

در این صورت $A=\int_S f(r)\,dS$

S_1

S_2 ...

$r_i \in S_i$ چند نقطه با مقدار بدهد

$\sum_i f(r_i)\, S_i$

گیریم یک A هست که

$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 \ni [\forall i: \underline{d(S_i)}<\delta]$ قطر

$\Rightarrow \left|\sum_i f(r_i)\, S_i - A\right|<\varepsilon$

قطر مجموعه‌ی S یعنی سوپریمم (کوچکترین کران بالای)

مجموعه‌ی فواصل دو نقطه از هم در S

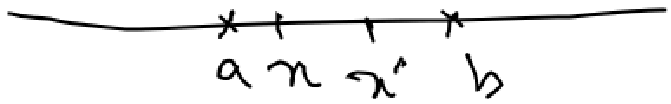
$S \qquad r, r' \in S \qquad \|r - r'\|$

$$D(S) = \{\|r - r'\| \mid r, r' \in S\}$$ مجموعه‌ی فواصل

$$d(S) = \sup\{D(S)\}$$

در نظر بگیر: برای یک فاصله‌ی $[a,b] \supseteq (a,b)$

قطر همان $(b-a)$، یعنی طول فاصله، است.



$x'-x \leq b-a$

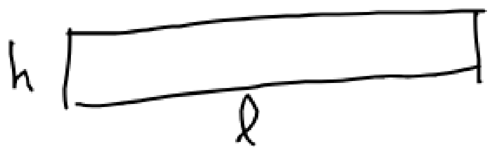
$:=$ $\begin{matrix} x'=b \\ x=a \end{matrix}$ برای فاصله‌ی بسته ممکن است.

برای فاصله‌ی باز، $(x'-x)$ را می‌توان هر چقدر بخواهیم به $(b-a)$ نزدیک کنیم.

برای فاصله‌ها (ی یک بعدی) قطر مجموعه همان طول مجموعه است.

برای مجموعه‌های بیش از یک بعدی چنین نیست.

مستطیل:



$S = hl$ $\qquad$ $d = \sqrt{l^2 + h^2}$

ممکن است S کوچک باشد ولی d کوچک نباشد

$S \le d^2$ $\qquad$ d کوچک $\Rightarrow$ S کوچک

در آن مستطیل، اگر l ثابت باشد و $h \to 0$

$S \to 0$ $\quad$ $d \to l$

S کوچک میشود ولی d کوچک نمیشود.

در انتگرال گیری:

$$[f(r_i)]\, \underline{S_i}$$

$r_i \in S_i$ $\qquad$ مساحت S_i

اگر قطر S_i کوچک باشد، نقاط S_i به هم نزدیک اند.

پس مهم نیست f در کدام نقطه‌ی S_i حساب شود.

برای این (که انتخاب r_i مهم نباشد) باید قطر S_i کوچک باشد (قطر S_i کم باشد). کافی نیست مساحت S_i کم باشد.

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 \Rightarrow [d(S_i)_{\text{ها}} < \delta]$$

$$\Rightarrow \left|\sum_i f(r_i)\underbrace{S(S_i)}_{s_i} - A\right| < \varepsilon$$

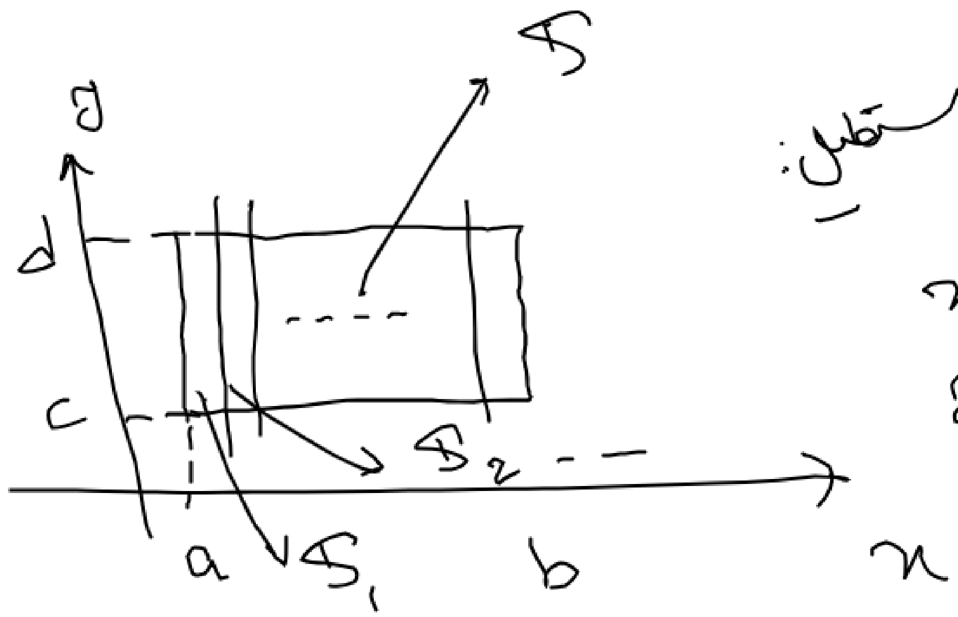
$d(I_i) = \ell(I_i) = \ell_i$ برای یک بعد

محاسبه‌ی انتگرال:

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$S_1 \cap S_2 = \phi$$ (یا مساحت اشتراک ناچیز)

$$\int_S f(r)\, dS = \int_{S_1} f(r)\, dS + \int_{S_2} f(r)\, dS$$



ج) ناحیه‌ی ساده: مستطیل:

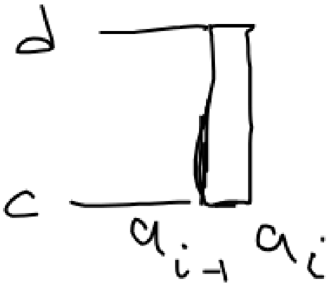
$x \in [a, b]$

$y \in [c, d]$

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$$

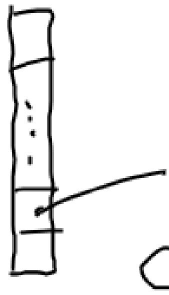
$$\int_S f(r)\, dS = \int_{S_1} f(r)\, dS + \cdots + \int_{S_N} f(r)\, dS$$

$$I_i = \int_{S_i} f(r)\,dS$$



$c \le y \le d$

$a_{i-1} \le x \le a_i$



یک نقطه در ناحیه ij

$$c = c_0 < c_1 < \cdots < c_p = d$$

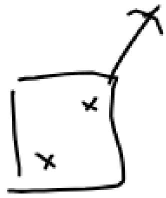
$$r_{ij} : a_{i-1} \le x_{ij} \le a_i \qquad c_{j-1} \le y_{ij} \le c_j$$

$S_{ij} = (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$ مساحت ناحیه ij

$$\sum_{j=1}^{P} f(r_{ij})\, s_{ij} \approx \int_{S_i} f(r)\, dS$$

$$\int_{S} f(r)\, dS \approx \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{P} f(r_{ij})\, s_{ij}$$

تابع وزن



r_{ij}

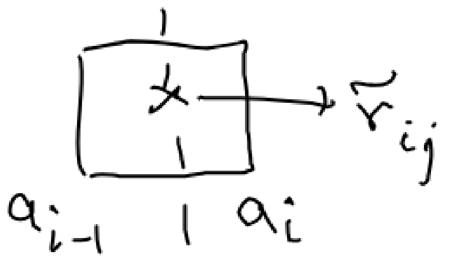
کمینه

به ازای یک وزن معین، فاصله‌ی r_{ij} ها از هم، از قواعد خاصی

وزن بیشینه‌ی عدد، از $d_{ij}=d(S_{ij})$ بیشینه‌ی عدد.

پس تغییر در $f(r_{ij})$ به خاطر تغییر در r_{ij} کوچک است،
اگر d_{ij} کوچک باشد.

$$\sum_j f(r_{ij}) S_{ij} = \sum_j f(\tilde{r}_{ij}) S_{ij} + \sum_j \varepsilon_{ij} S_{ij}$$



مثلاً $\tilde{r}_{ij}$: $x_{ij} = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$

$\varepsilon_{ij} \xrightarrow[d_{ij} \to 0]{} 0$ اگر f پیوسته باشد،

$$f(\tilde{r}_{ij}) = f(\tilde{x}_{ij}, \vec{y}_{ij}) = f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, \vec{y}_{ij}\right)$$

$$c_{j-1} \le \vec{y}_{ij} \le c_j \qquad S_{ij} = (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$$

$$\sum_j f(\tilde{r}_{ij}) S_{ij} = (a_i - a_{i-1}) \sum_j f(\tilde{r}_{ij})(c_j - c_{j-1})$$

$$\sum_j f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, \vec{y}_{ij}\right)(c_j - c_{j-1}) = ?$$

$$\sum_j f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, \tilde{y}_{ij}\right)(c_j - c_{j-1})$$

$[c_{j-1}, c_j]$ در

$$= \int_c^d f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, y\right) dy + o(1)$$

به طور یکنواخت اگر $(c_j - c_{j-1})$ ها به صفر بروند.

$$\sum_j f(r_{ij}) S_{ij} = \left[\int_c^d f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, y\right) dy\right](a_i - a_{i-1})$$
$$+ o(1)(a_i - a_{i-1}) + \sum_j o(1)(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$$

$$\sum_j f(r_{ij}) S_{ij} = \left[\int_c^d dy\, f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}, y\right) + O(1) \right] (a_i - a_{i-1})$$

$$\sum_i \sum_j f(r_{ij}) S_{ij} \quad \sum_i O(1)(a_i - a_{i-1}) = (b-a) O(1)$$

$$\sum_i (a_i - a_{i-1}) \int_c^d dy\; f\Big(\underbrace{\frac{a_{i-1}+a_i}{2}}_{x_i}, y\Big)$$

$$a_{i-1} \le x_i \le a_i \qquad F(x_i) = \int_c^d dy\, f(x_i, y)$$

$$\sum_i (a_i - a_{i-1}) F(x_i) = \int_a^b dx\, F(x) + o(1)(b-a)$$

$$a_{i-1} \le x_i \le a_i$$

$$\sum_{i,j} f(r_{ij}) S_{ij} = \int_a^b dx\, F(x) + o(1)(b-a)$$

$$= \int_a^b dx \left[\int_c^d dy\, f(x,y)\right] + o(1)(b-a)$$

$$\omega (c_j - c_{j-1}) \rightarrow$$

$$|a_i - a_{i-1}| \longrightarrow 0$$

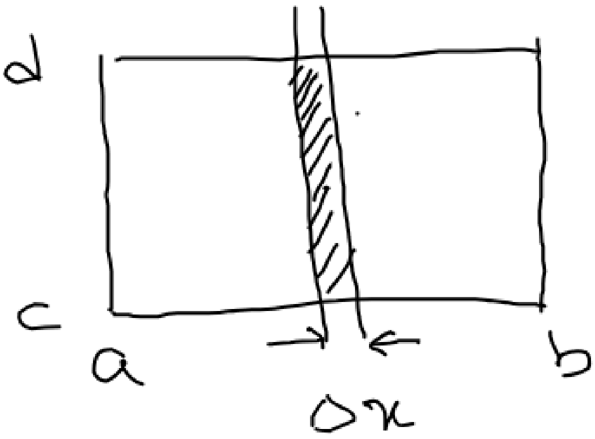
$$\omega$$

$$\sum_{i,j} f(r_{ij}) S_{ij} = \int_a^b dx \left[\int_c^d dy\, f(x,y)\right]$$

پس:

$$\int_S f(r)\,dS = \int_a^b dx \left[\int_c^d dy\, f(x,y)\right]$$

اینجا طرح ۲ اثبات بود، نه آن اثبات دقیق.



$$\int_c^d dy\, f(\tilde{x}, y)$$

$\tilde{x}$ حول یک نقطه

در فاصله‌ی کوچکی خود است.

$$\int f(r)\,dS = (\Delta x)\int_c^d dy\, f(\tilde{x}, y) + o(\Delta x)$$

هاشور زده

$$\int f(r)\,dS = \sum_i (\Delta x)_i \int_c^d dy\, f(\tilde{x}_i, y) + \sum_i \varepsilon_i \Delta x_i$$

مستطیل

$\tilde{x}_i$ = طول یک نقطه در مستطیل i ام

تبدیل جمع به انتگرال

$$\int f(r)\,dS = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) + \underbrace{\varepsilon' + \sum_i \varepsilon \Delta x_i}_{\to 0}$$

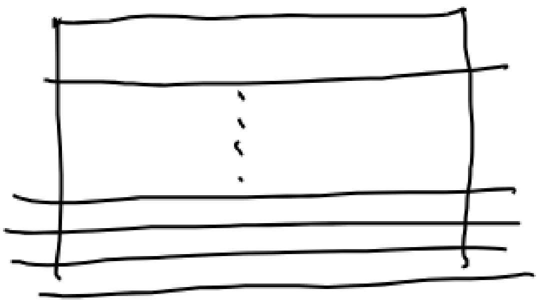
مستطیل

ضخامت‌ها به صفر

$$\int_{\text{مستطیل}} f(r)\, dS = \int_a^b dx \left[\int_c^d dy\, f(x,y)\right]$$

مستطیل: $x \in [a,b]$

$y \in [c,d]$



تفکیک مستطیل به نوارهای افقی

$$\int_{\text{مستطیل}} f(r)\, dS = \int_c^d dy \left[\int_a^b dx\, f(x,y)\right]$$

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} dS\, f(r) = \int_{[a,b]} dx \int_{[c,d]} dy\, f(x,y)$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$$

$$= \int_{[c,d]} dy \int_{[a,b]} dx\, f(x,y)$$

در یک بعد، انتگرال برای فاصله‌ی جبری تعریف شده:
ممکن است حد پایین انتگرال بزرگتر از حد بالای انتگرال باشد.

در بعد بیش از یک هم تعریف انتگرال بر مجموعه‌های جبری $\underbrace{\text{ممکن}}_{\text{کلاهبردار}}$ است، اما این به آن نمی‌دازم.

در یک بعد، اگر فقط انتگرال برای فواصل با حد بالای بزرگتر از حد پایین بررسی شود، قضیه‌ی تغییر متغیر به این شکل در می‌آید:

$$\int_a^b dx\ f(x) \qquad x=g(y) \qquad g(\alpha)=a,\quad g(\beta)=b$$

$$=\int_\alpha^\beta g'(y)\,dy\ f[g(y)]$$

اگر g صعودی باشد، $g'>0$ ، $b>a \Leftrightarrow \beta>\alpha$

اگر g نزولی باشد،

$g' < 0$

$a < b \Rightarrow \alpha > \beta$

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_\beta^\alpha \left[g'(y)\, dy \right] f[g(x)]$$

$$= \int_\beta^\alpha |g'(y)|\, dy \;\; f[g(x)]$$

I_x و I_y فاصله‌های انتگرال‌گیری: حد بالا تا کجا - از چه پایین

$$\int_{I_x} dx\, f(x) = \int_{I_y} |g'(y)|\, dy\, f[g(x)]$$

$g(I_y) = I_x \quad I_x = \{ g(y) \mid y \in I_y \}$

مثال: یک مستطیل که چگالی سطحی آن در نقطه‌ی r برابر با $\sigma(r)$ است. جرم این مستطیل؟

$$\mathcal{S} \qquad \frac{m(\mathcal{S})}{S(\mathcal{S})} \xrightarrow[d(\mathcal{S}) \to 0]{} \sigma(r)$$

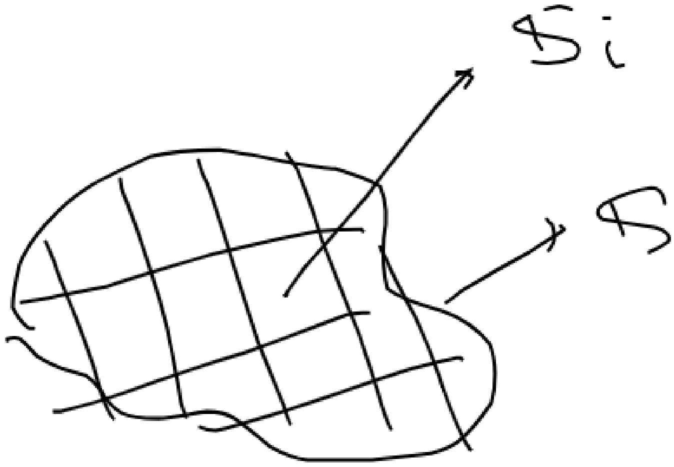
جرم

مساحت

$r \in \mathcal{S}$

$$m(\mathcal{S}) = \sigma(r)\, S(\mathcal{S}) + \varepsilon\, S(\mathcal{S})$$

$$\lim_{d(\mathcal{S}) \to 0} \varepsilon = 0$$



$$m(\mathcal{S}) = \sum_i m(\mathcal{S}_i)$$

$$= \underbrace{\sum_i \left[\sigma(r_i)\, S(\mathcal{S}_i) + \varepsilon_i\, S(\mathcal{S}_i)\right]}_{\longrightarrow \int_{\mathcal{S}} \sigma(r)\, dS + 0}$$

$d(\mathcal{S}_i) \to 0$

و

قطر $\mathcal{S}_i$

$$m(S) = \int_S \sigma(r)\, dS$$

برای هر کمیت Q :

$$Q(S) = \int_S \sigma_Q(r)\, dS$$

چگالی سطحی Q

---

۳ بعدی:

$$Q(V) = \int_V \rho_Q(r)\, dV$$

چگالی حجمی Q

مثال:

$$\sigma(x,y) = \alpha + \beta x y$$

ثابت α و β

چگالی سطحی

مقدار بار کل بر مستطیل ، $[a,b]\times[c,d]$

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\,(\alpha + \beta x y) = \int_a^b dx \left[\alpha y + \beta \frac{x y^2}{2}\right]_c^d$$

$$= \int_a^b dx \left[\alpha(d-c) + \beta \frac{x}{2}(d^2 - c^2)\right]$$

$$\left[\alpha(d-c)x+\frac{\beta(d^2-c^2)}{4}x^2\right]_a^b = \text{بعداً [illegible]}$$

$$= \alpha(d-c)(b-a)+\frac{\beta}{4}(d^2-c^2)(b^2-a^2)$$

یک مثال دیگر:

$$\sigma = \alpha y \sin(\beta x)$$

$$\int_S \sigma(r)\, dS \qquad S=\left[0,\frac{2\pi}{\beta}\right]\times[0,l]$$

$$\int_S dS\, \sigma(r) = \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} dx \int_0^{l} dy\ \alpha y\ \sin(\beta x)$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} dx \left[\frac{\alpha y^2}{2} \sin(\beta x) \right]_{y=0}^{l}$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} dx\ \frac{\alpha l^2}{2} \sin(\beta x)$$

$$= \frac{\alpha l^2}{2} \left(-\frac{\cos \beta x}{\beta} \right)_{x=0}^{x=\frac{2\pi}{\beta}} = \frac{\alpha l^2}{2} \times 0 = 0$$

$$\int_S dS\, \sigma(r) = \int_0^{l} dy \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} dx \;\; \alpha y \sin(\beta x)$$

$$= \int_0^{l} dy\, (\alpha y) \left[-\frac{\cos \beta x}{\beta} \right]_{x=0}^{x=\frac{2\pi}{\beta}}$$

$$= \int_0^{l} dy\, (\alpha y)(0) = 0$$

با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، نتیجه‌ی محاسبه فرق نمی‌کند
اما خودِ محاسبه ممکن است دیرتر یا سخت‌تر شود.

مثال

$$\sigma(x,y) = x f(y) + x^3 g(y)$$

$$S = [-1,1] \times [c,d]$$

$$\int_S dS\, \sigma(x,y) = \int_{-1}^{1} dx \int_c^d dy \left[x f(y) + x^3 g(y)\right]$$

ممکن است = انتگرال گیری از f و g ساده نباشد.

$$\int_S dS\, \sigma(x,y) = \int_c^d dy \int_{-1}^{1} dx \left[x f(y) + x^3 g(y)\right]$$

$$\int_{-1}^{1} dx\, x = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0 \qquad \int_{-1}^{1} dx\, x^3 = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

حتما بدون محاسبه‌ی صریح انتگرال‌ها جواب دهید:

x و x^3 فردند، فاصله‌ی انتگرال‌گیری برای x و x^3 نیز متقارن است.

پس انتگرال x و x^3 بر آن فاصله صفر است.

$$\int_S \sigma(r)\, dS = \int_c^d dy\, [a f(y) + a g(y)] = 0$$