اگر

$$F = \hat{x} F_1 + \hat{y} F_2$$

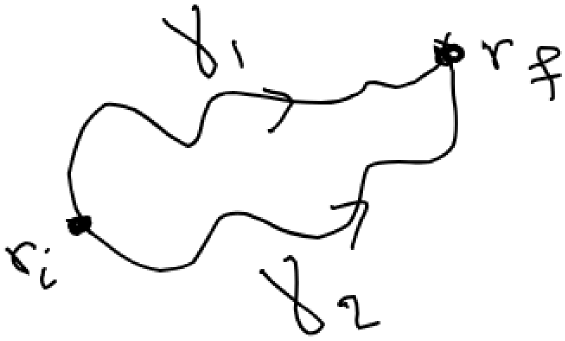
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial F_1}{\partial r_2} = \frac{\partial F_2}{\partial r_1} \qquad (1)$$

انتگرال F بر یک خم به فقط سر و ته خم بستگی دارد

(با یک تبصره)

در کل: اگر انتگرال F بر هر خم به فقط سر و ته خم بستگی داشته باشد شرط (1) برقرار است.

فرض: انتگرال F بر خم تابع فقط سروته خم است.



r_i : ابتدای خم

r_f : انتهای خم

$\forall r_i, r_f$ ، $\forall \gamma_1, \gamma_2$ (سر γ_1 و γ_2 نقطه‌ی r_i ، ته γ_1 و γ_2 نقطه‌ی r_f)

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad \partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial r_1} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial r_2} = \frac{\partial}{\partial y}$$

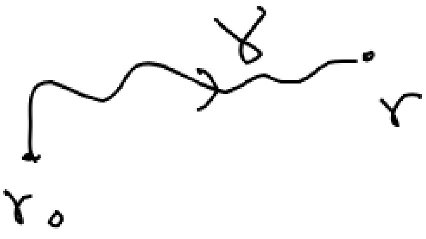
اثبات: نشان میدهیم

یک A هست که

$$F_1 = \partial_1 A \,, \quad F_2 = \partial_2 A$$

A تابع ذخیره با مقدار عددی:

برای این کار، A ساخته میشود.



یک نقطه‌ی دلخواه: r_0

r': نقطه‌ی انتگرالی

$$A(r) := \int_\gamma [F(r')] \cdot dr'$$

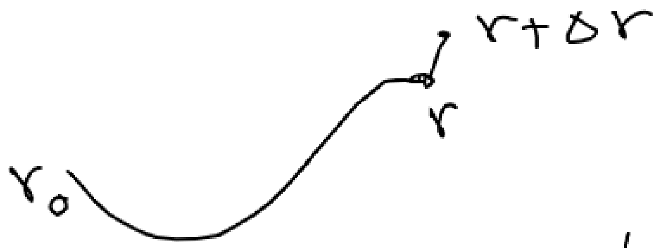
γ یک خم با سر r_0 و ته r

چون فرض این بود که انتگرال F بر γ به فقط سر و ته γ وابسته است، انتخاب γ مهم نیست: هر خم دلخواه با سر یعنی r_0 و ته‌اش r باشد مجاز است. نتیجه یکسان است.

نکات مهم

$\partial_1 A = F_1$

$\partial_2 A = F_2$

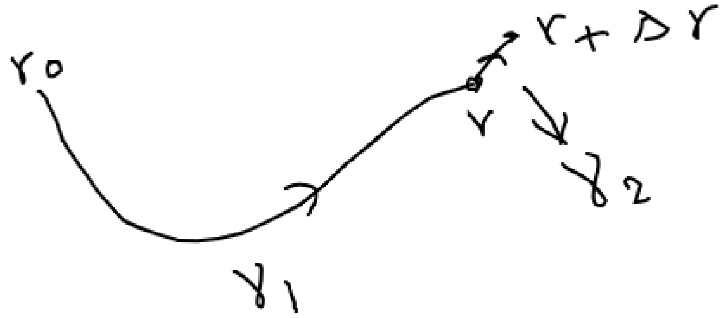


و چون انتگرال تابع (

$$A(r+\Delta r) = \int_{r_0}^{r+\Delta r} [F(r')] \cdot dr'$$

) فقط سر و ته خم است، به جای خم γ فقط سر و ته آن در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری مشخص شده.

γ: از r_0 شروع می‌شود، از r می‌گذرد و یک تکه‌ی کوچک از r تا $(r+\Delta r)$ دارد.



γ: از r_0 به r و بعد
$(r+\Delta r)$

$$\int_{\gamma} [F(r')]\cdot dr' = \int_{\gamma_1} [F(r')]\cdot dr' + \int_{\gamma_2} [F(r')]\cdot dr'$$

$$A(r+\Delta r) = A(r) + \int_{r}^{r+\Delta r} [F(r')]\cdot dr'$$

$$A(r+\Delta r) = A(r) + [F(r)]\,\Delta r + o(\Delta r)$$
$$= A(r) + F_1 \Delta r_1 + F_2 \Delta r_2 + o(\Delta r)$$

A ی مشتق‌پذیر:

$$A(r+\Delta r) = A(r) + (D_1 A)\,\Delta r_1 + (D_2 A)\,\Delta r_2 + o(\Delta r)$$

اگر انتگرال F

$$D_1 A = F_1 \qquad D_2 A = F_2$$

به فقط سر و ته‌ی مسیر بستگی دارد، مؤلفه‌های F مشتق‌های جزئی یک تابع A (با مقدار عددی) اند.

یعنی یک A هست که مشتق‌پذیر است و مشتق‌های جزئی آن مؤلفه‌های F اند.

$$\int_{r_i}^{r_f} [F(r)] \cdot dr = \int_{r_i}^{r_f} [(D_1 A)(r)] dr_1 + [(D_2 A)(r)] dr_2$$

לכל γ שעובר ב- r_i, r_f:

$\gamma : r(t)$

$$A(r_f) - A(r_i) =$$

לפי הגדרה

$$\int_\gamma [F(r)] \cdot dr = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ F_1[r(t)] \frac{dr_1}{dt} + F_2[r(t)] \frac{dr_2}{dt} \right\}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ (D_1 A)[r(t)] \frac{dr_1}{dt} + (D_2 A)[r(t)] \frac{dr_2}{dt} \right\}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \{ A[r(t)] \} = A[r(t_f)] - A[r(t_i)]$$

$\int F\cdot dr$ مستقل از خم (تابع نقاط شروع و ختم)

$\Updownarrow$

$F_j = D_j A$ — یک زه

$\Updownarrow$

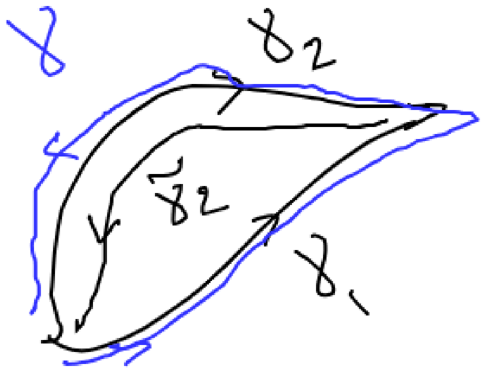
$$\int_{r_i}^{r_f} F\cdot dr = A(r_f) - A(r_i)$$

$\Updownarrow$

$\oint F\cdot dr$

$\oint$: مسیر انتگرال گیری بسته

حلقه: خمی است که شروع و انتهایش یکی باشد



$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr$$

$$= -\int_{\tilde{\gamma}_2} F \cdot dr$$

$$0 = \int_{\gamma_1} F \cdot dr + \int_{\tilde{\gamma}_2} F \cdot dr$$

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma_1} F \cdot dr + \int_{\gamma_2} F \cdot dr$$

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0$$

$$\oint_{\gamma} F\cdot dr = \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\gamma_1} F\cdot dr = \int_{\gamma_2} F\cdot dr$$

$$\int F\cdot dr \quad \Longleftrightarrow \quad \oint F\cdot dr = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists A \ni \; D_i A = F_i$$

مستقل از مسیر

$$\Updownarrow$$

$$\int F\cdot dr = A(\text{ته}) - A(\text{سر})$$

$$F_i = D_i A \qquad D_i F_j = D_i (D_j A)$$

$$D_i F_j = D_j (D_i A) = D_j F_i$$

$$F_i = D_i A \implies D_i F_j = D_j F_i$$

شرط لازم برای اینکه بردار F $\int$ مستقل از خم باشد

(تابع فقط سر و ته خم باشد.

آیا شرط کافی هم هست؟

$$D_i F_j = D_j F_i \overset{?}{\Longrightarrow} \exists A \Rightarrow F_i = D_i A$$

$D_1 F_2 = D_2 F_1$ فضای ۲ بعدی

$D_1 A = F_1$ حل این معادلات برای A

$D_2 A = F_2$

$$(D_1 A)(x, y) = F_1(x, y)$$

$$\int_{x_0}^{x} (D_1 A)(x', y)\, dx' = \int_{x_0}^{x} F_1(x', y)\, dx'$$

$$A(x_1, y) - A(x_0, y) = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x', y)\, dx'$$

$$A(x, y) = A(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} F_1(x', y)\, dx'$$

$$(D_2A)(x,y) = F_2(x,y) \qquad A(x,y) = A(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} F_1(x',y)\,dx'$$

$$F_2(x,y) = (D_2A)(x_0,y) + \lim_{\Delta y\to 0}\int_{x_0}^{x} \frac{F_1(x',y+\Delta y) - F_1(x',y)}{\Delta y}\,dx'$$

اگر F_1 به حد کافی خوش‌رفتار باشد می‌توان جای حد و انتگرال را عوض کرد.

$$= (D_2A)(x_0,y) + \int_{x_0}^{x}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F_1(x',y+\Delta y) - F_1(x',y)}{\Delta y}\,dx'$$

$$= (D_2A)(x_0,y) + \int_{x_0}^{x}(D_2F_1)(x',y)\,dx'$$

اگر $D_2 F_1 = D_1 F_2$

$$(D_2 A)(x, y) = (D_2 A)(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} (D_1 F_2)(x', y)\, dx'$$

$$= (D_2 A)(x_0, y) + F_2(x, y) - F_2(x_0, y)$$

✓ هنوز A حساب نشده:

$$A(x, y) = A(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} dx'\, F_1(x', y)$$

$$D_2 A = F_2 \qquad (D_2 A)(x_0, y) = F_2(x_0, y)$$

$$\int_{y_0}^{y} dy' (D_2 A)(x_0, y') = \int_{y_0}^{y} dy' \, F_2(x_0, y')$$

$$A(x_0, y) - A(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} dy' \, F_2(x_0, y')$$

$$A(x_0, y) = A(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} dy' \, F_2(x_0, y')$$

$$A(x, y) = A(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} dy' \, F_2(x_0, y') + \int_{x_0}^{x} dx' \, F_1(x', y)$$

$A(x_0, y_0)$ ثابت دلخواه.

$$F_1 = D_1 A$$
$$F_2 = D_2 A \implies \begin{aligned} F_1 &= D_1(A+C) \\ F_2 &= D_2(A+C) \end{aligned}$$ ثابت

امتحان کنید جواب (در همه حالات صدق میکند؟)

$$A(x,y) = A(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} dy' F_2(x_0, y') + \int_{x_0}^{x} dx' F_1(x', y)$$

$$(D_1 A)(x,y) = F_1(x,y) \quad \checkmark$$

$$(D_2 A)(x,y) = F_2(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} dx' (D_2 F_1)(x', y)$$

زیرا $D_1 F_2 = D_2 F_1$ ،

$$\int_{x_0}^{x} dx' (D_2 F_1)(x', y) = \int_{x_0}^{x} dx' (D_1 F_2)(x', y)$$

$$= F_2(x, y) - F_2(x_0, y)$$

$$(D_2 A)(x, y) = \cancel{F_2(x_0, y)} + F_2(x, y) - \cancel{F_2(x_0, y)}$$

$$(D_2 A)(x, y) = F_2(x, y) \quad \checkmark$$

پس این A جواب مسئله هست:

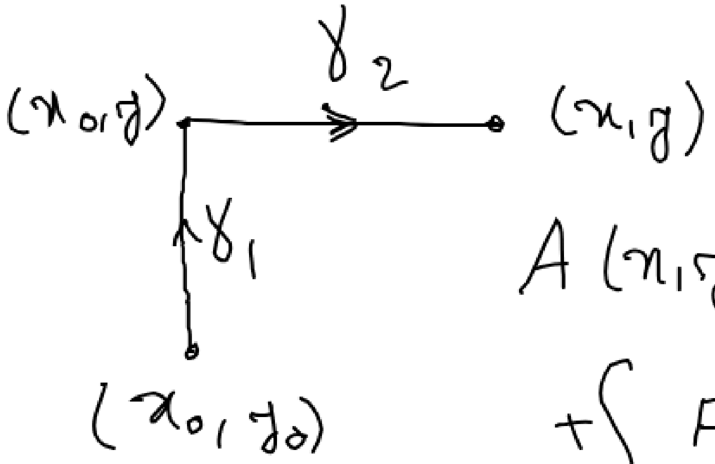
$$A(x,y) = \underbrace{A(x_0,y_0)}_{\text{ثابت دلخواه}} + \int_{x_0}^{x} dx'\, F_1(x',y) + \int_{y_0}^{y} dy'\, F_2(x_0,y')$$

$$D_1 A = F_1$$

$$D_2 A = F_2$$

$$D_i F_j = D_j F_i \overset{?}{\Longrightarrow} \exists A \ni \quad F_i = D_i A$$

بله با یک تبصره.   آن تبصره؟



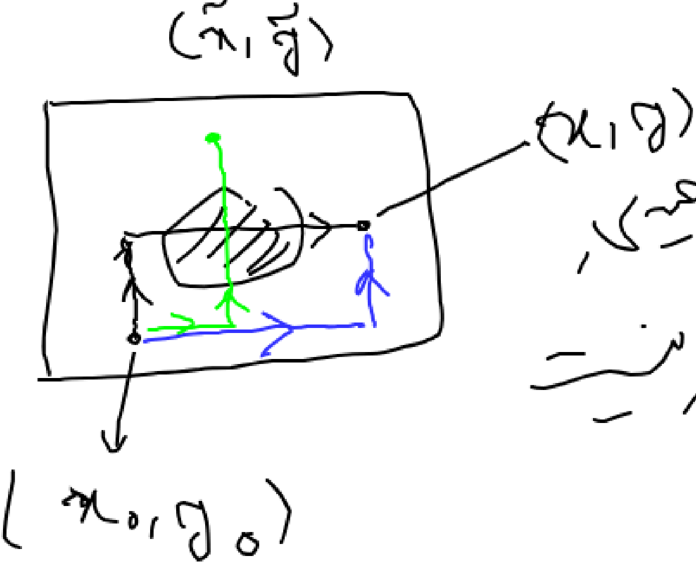
$$A(x,y) = A(x_0,y_0) + \int_\gamma F \cdot dr$$

γ: $\quad \gamma_2$ بعد γ_1

γ_1: $F \cdot dr = F_2\, dy$

γ_2: $F \cdot dr = F_1\, dx$

اگر $D_iF_j = D_jF_i$ کی برقرار است؟



گیرم آن رابطه در ناحیه‌ای

ها که رخ داده برقرار نیست

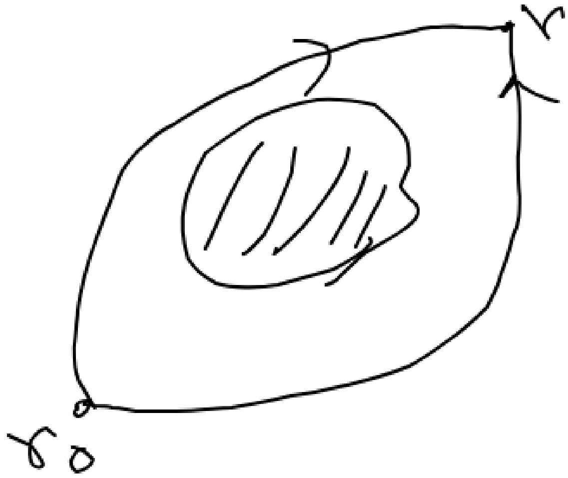
مسیر سیاه که نمیشه

مسیر آبی را انتخاب میکنیم.

برای $(\tilde{x}, \tilde{y})$ مسیر سبز (مشابه آبی) کار نمیکند

ممکن است لازم باشد

پس نه لزوماً یکی برای رسیدن به نقاط مختلف، مسیرهای مختلف انتخاب شوند.



مسیرهای قبلی که ما داشتیم: یکی افقی یکی عمودی. ولی این را میشه به مسیرهای پیچیده‌تر گسترش داد.

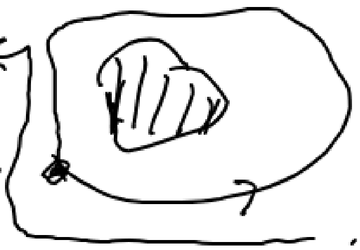
اگر بیش از یک مسیر ممکن باشد، کدام را باید انتخاب کرد؟

تبصره: اگر ناحیه‌ای که $D_i F_j = D_j F_i$ ساده‌همبند باشد اشکالی نیست. نتیجه برای همه‌ی مسیرها یکسان است.

ساده‌همبند: هر حلقه (خم بسته) را بشود به شکل پیوسته منقبض و به یک نقطه تبدیل کرد.

حلقه‌ی خط پر را
سطحی که کوچک‌تر و کوچک‌تر کرد
(حلقه‌ی خط چین) تا در نهایت فقط
یک نقطه (سر و ته حلقه) باشد.

حلقه به شکل پیوسته به یک نقطه تبدیل شد



بیرون ناحیه‌ی هاشور خورده ساده همبند نیست

این حلقه را نمیشود به شکل پیوسته
به یک نقطه تبدیل کرد بدون اینکه
حلقه از ناحیه‌ی هاشور خورده بگذرد.

$\int F\,dr$ تابع فقط سر و ته مسیر است

$0 = \oint F\,dr$

$F_j = D_j A$

$A(\text{ته}) - A(\text{سر}) = \int F\,dr$

هم‌ارز با هم

اگر ناحیه ساده همبند باشد.

$D_i A_j = D_j A_i$

$\vec{F}(t,\vec{r},\vec{v})$ نیروهای پایستار :

$\downarrow$

$\vec{F}(\vec{r}) \longrightarrow$

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ پایستار یعنی

$\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ تابع فقط سر و ته خم

وجود یک [illegible] است

$F_j = -D_j U$ فقط قراردادی است $(-)$

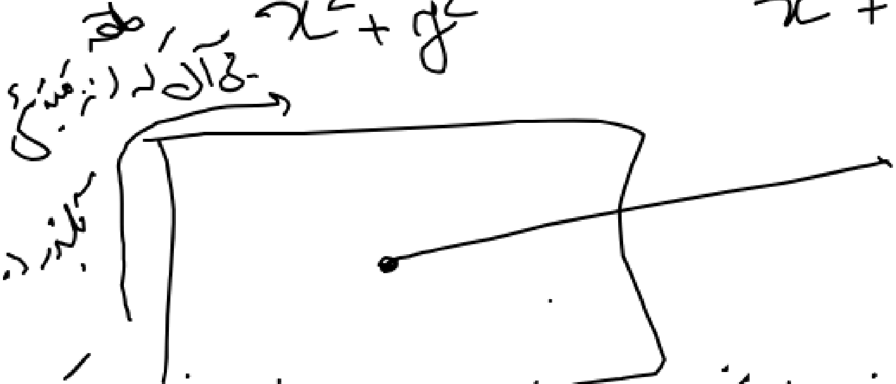
$\Longleftrightarrow \partial_i F_j = \partial_j F_i$

یک مثال که ناحیه ساده همبند نیست و برعکس نتیجه نمی‌دهد:

$$D_i F_j = D_j F_i \not\Rightarrow F_j = D_j A$$

در صفحه: جز در مبدأ

$$F_1 = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$$



ناحیه ساده همبند نیست.

حلقه‌ای که مبدأ را دور بزند را نمی‌توان به نقطه منقبض کرد

$$D_j A = F_j$$

حل دومین

$$\frac{d}{du}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}$$

$$D_2 A = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$D_1 A = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$D_2 \tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$D_2\left(A - \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$A - \tan^{-1}\frac{y}{x} = f(x)$$

$$A(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} + f(x)$$

$$-\frac{y}{x^2+y^2} = (D_1 A)(x,y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + (Df)(x)$$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2} + (Df)(x) \Longrightarrow (Df)(x) = 0$$

$f =$ ثابت

$$A(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} + C$$

[illegible] $\longrightarrow$ ثابت

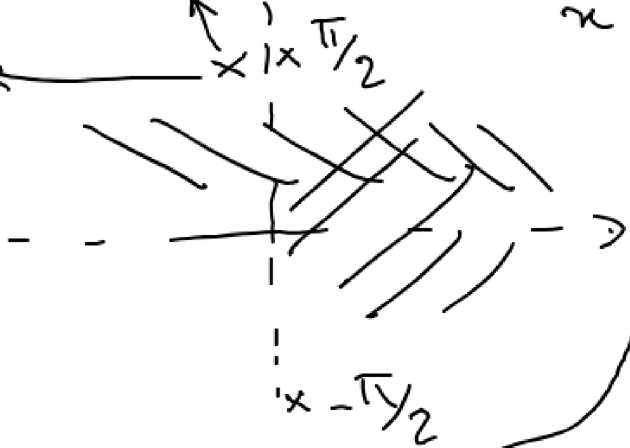
این یک مشکل هست: طرف راست در $x=0$ برقرار است، و $x=0$ فقط مبدأ نیست، همه‌ی محور y است.

پس معادله برای کل صفحه جز مبدأ حل نشده.

مشکل را می‌شود ملایم‌تر کرد.

$\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ $\qquad -\pi/2 \longrightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$\uparrow \pi/2 \longleftarrow$



$x>0$

$\tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$A=\begin{cases}\tan^{-1}\dfrac{y}{x}, & x>0\\[2mm] \cot^{-1}\dfrac{x}{y}, & (y>0\end{cases}$$

$$\cot^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{x}{y}$$

اینو درک

= تا ربع اول شامل می‌شه

$(x,y)>0$

$(x<0,\ y>0)$

در ربع دوم

$A=\tan^{-1}\frac{y}{x}+\pi$

در ربع دوم صفحه (ناحیه آبی) رو پوشش نمیده و نقطه ۰ =

$(x>0,\ y>0) \quad 0<A<\pi/2$

$(x<0,\ y>0) \quad \pi/2<A<\pi$ دامنه در ربع دوم و سوم :

$(x<0,\ y<0) \quad \pi<A<3/2$

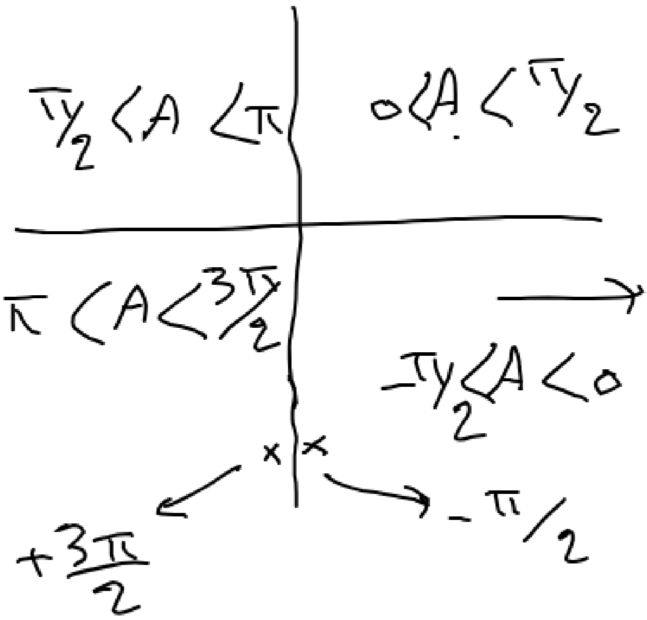
$$A = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi, \qquad x<0$$

$$A = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad x>0 \qquad \text{نیم صفحه ی راست}$$

$$A = \cot^{-1}\frac{x}{y}, \qquad y>0 \qquad \text{نیم صفحه ی بالا}$$

$$A = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi \qquad x<0 \qquad \text{نیم صفحه ی چپ}$$

تا پیوستگی بر نیمه‌ی مثبت محور y و نیمه‌ی منفی محور x از بین رفته



$\longrightarrow \tan^{-1} \frac{y}{x}$

تا پیوستگی بر نیمه‌ی منفی محور y:

با تعریف A برای $y<0$

$$A = \cot^{-1}\frac{x}{y} + \pi$$

در ربع سوم $\quad \pi < A < \frac{3\pi}{2} \Longleftarrow \frac{x}{y} > 0$

در ربع چهارم $\quad \frac{3\pi}{2} < A < 2\pi \Longleftarrow \frac{x}{y} < 0$

در ربع چهارم $\quad x>0,\ y<0$

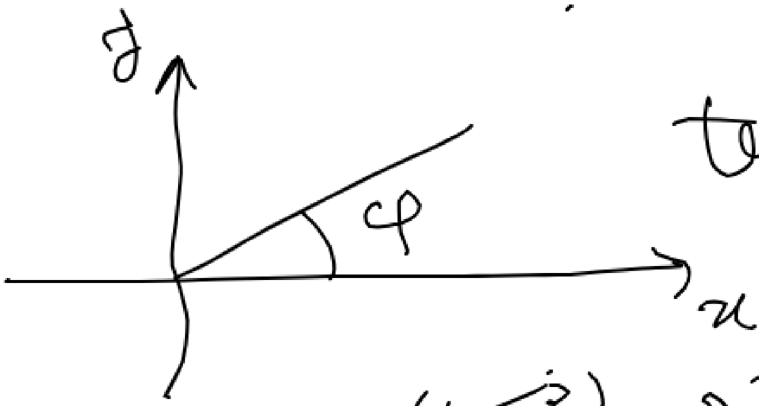
$$A = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < A < 0$$

اختلاف 2π

$$A = \pi + \cot^{-1}\frac{x}{y}, \quad \frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$$

پس، این که A پیوسته بود، این است که A چند مقداره،
می‌شود.

یک تصویر هندسی ساده:



$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

φ در مبدأ تعریف نشده (خوب)

اما مبدأ را مثلاً دور زده شود و به نقطه‌ی اولیه بازگشت کنیم ()
φ به اندازه‌ی (2π) زیاد می‌شود.

φ با دامنه‌ی کل صفحه جز مبدأ خوش رفتار نیست.

تابع نیست، یا ناپیوسته است در یک نیم خط:

$$0 \le \varphi < 2\pi$$

تابع است ولی بر نیم‌خط مثبت محور x ناپیوسته است.

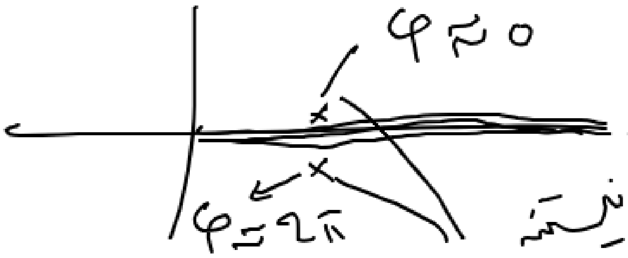
علت آنکه A پیدا نشد: صفحه منهای مبدأ ساده-همبند نیست.

۱) اگر از صفحه منهای مبدأ یک نیم‌خط حذف شود،
مثلاً نیم‌خط مثبت محور x :

ناحیه‌ی ما می‌شود

$$\{(x,y) \mid x<0 \text{ یا } y\neq 0\}$$

$(x\geq 0 \text{ و } y=0)$ برداشته شده



برداشته شده

لازم نیست

φها نزدیک هم باشند
نزدیک هم نیستند

$$F_1 = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr$$

γ: یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع R

مثلثاتی (از مبدأ عبور نکند)

دایره پارامتری شود.

$$I = \oint_{\gamma} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

مثلثاتی:

معادلات پارامتری $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$

معادله ی دایره: $\rho = R$

$$dx = -R(\sin\varphi)\,d\varphi \qquad dy = R(\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$I = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{(R\cos\varphi)(R\cos\varphi)\,d\varphi - (R\sin\varphi)(-R\sin\varphi)\,d\varphi}{R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi}$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d\varphi = (\varphi_0 + 2\pi) - \varphi_0 = 2\pi$$

$$\oint F \cdot dr \neq 0$$ [illegible]

$$D_1 F_2 = D_2 F_1 \qquad r \neq (0,0)$$

$$F_2 = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad D_1F_2 = \frac{1(x^2+y^2)-2x(x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_1F_2 = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$F_1 = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad D_2F_1 = \frac{(-1)(x^2+y^2)-2y(-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2F_1 = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = D_1F_2$$

چون $D_1F_2 = D_2F_1$ ،
[illegible]

$\int F.dr$ برای بعضی خم‌ها به جز (فقط سر و ته آن)

بستگی دارد.

$\oint F.dr$ برای بعضی حلقه‌ها که از مبدأ هم نمی‌گذرند

صفر نیست.

A ی با $D_i A = F_i$ برای کل صفحه جز مبدأ وجود دارد.

ولی برای کل فضا تعمیم هم نیست : تا وقتی ساده همبند است

و استدلال دوطرفه میشود :

$$D_i A = F_i \iff D_i F_j = D_j F_i$$

برای فضاهای با بعد بیشتر هم درست است .