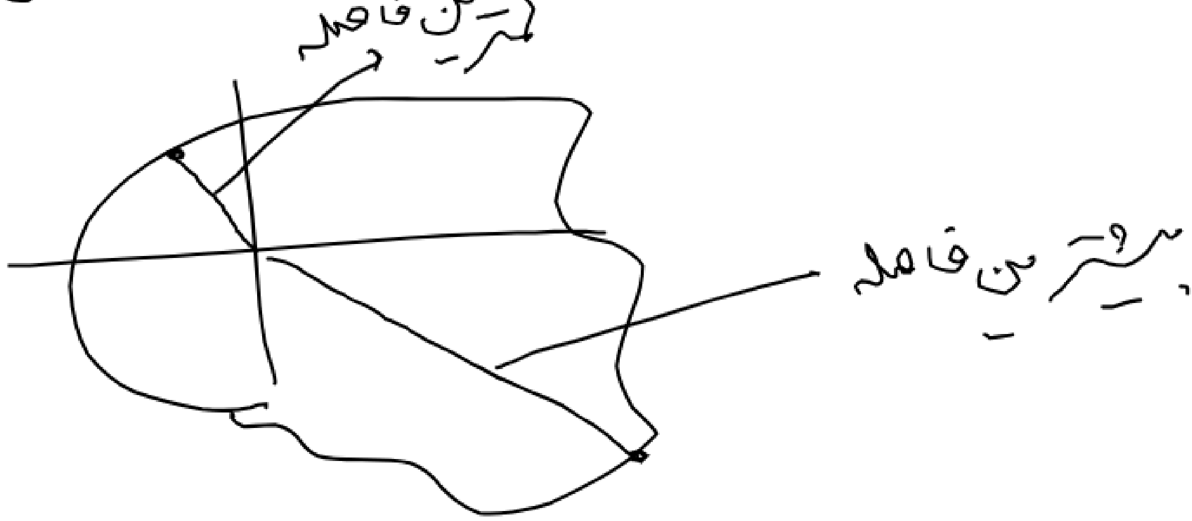
یک مثال دیگر از فرینه کردن با قید:

کمینه و بیشینه ی فاصله ی نقاط یک خم از مبدأ



تابعی که باید فرینه شود، فاصله یا مجذور آن از مبدأ است.

$f(r) = x^2 + y^2$ مجذور فاصله از مبدأ

معادله‌ی خم: $g(x,y)=0$

f فرینه شود با قید g.

یک راه: $g(x,y)=0 \longrightarrow y=h(x)$

$f(x, h(x)) \longrightarrow$ فرینه نسبت به x

یک راه دیگر: ضریب لاگرانژ:

$$\tilde{f}(x,y,\lambda) = \underbrace{f(x,y)}_{x^2+y^2} + \lambda g(x,y)$$

معادلات فرینگر:

$$0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 2x + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 2y + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = g$$

حذف λ

$$2x \frac{\partial g}{\partial y} - 2y \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

y, x

$$g(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + d$$

قید : $g=0$ a, b, c ثابت.

$f(x,y) = x^2 + y^2$ سوال، فرینت:

$$\left.\begin{aligned} 2x + \lambda(2ax + 2by) &= 0 \\ 2y + \lambda(2bx + 2cy) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x(bx+cy) = y(ax+by)$$

$$\underbrace{0 = bx^2 + (c-a)xy - by^2}$$

$$\underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0}$$

$$by^2 - (c-a)xy - bx^2 = 0 \nearrow y = \frac{(c-a)x \pm \sqrt{\Delta'}\,x}{2b}$$

$$\Delta = (c-a)^2 + 4b^2$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0$$

$$ax^2 + x^2\left[(c-a) \pm \sqrt{\Delta}\right]$$

$$+ \frac{cx^2}{4b^2}\left[(c-a) \pm \sqrt{\Delta}\right]^2 + d = 0$$

$$0 = x^2\left[c \pm \sqrt{\Delta} + \frac{c(c-a)^2 + c\Delta \pm 2c(c-a)\sqrt{\Delta}}{4b^2}\right] + d$$

0، 2، 4 جواب حقیقی برای x

حالتهای قاطعی 1 یا 3 جواب هم ممکن است.

لطفن بحث را ادامه دهید.

انتگرال‌گیری بر خم:

خم یک تابع یک متغیری: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

یک تابع از $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

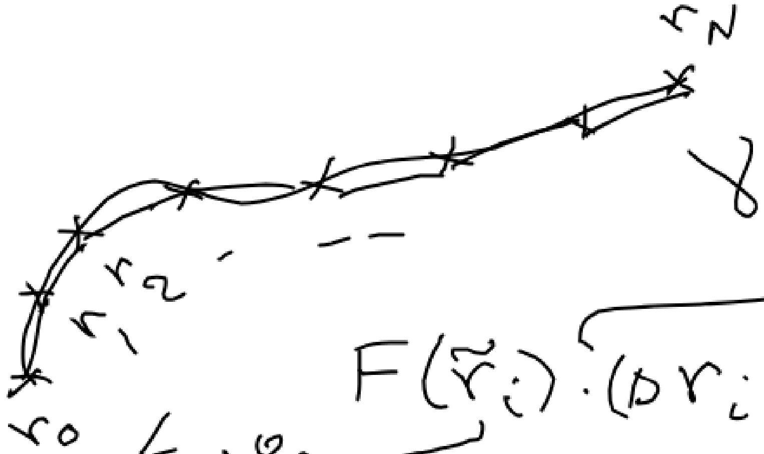
خاص: $n=2$

خم: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = \begin{bmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\int_\gamma dr\cdot F \stackrel{?}{=} \int_\gamma F\cdot dr$$

یعنی چه؟



$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$

$1 \le i \le N$

ضرب داخلی

$F(\tilde{r}_i)\cdot(\Delta r_i)$

F بردار ستونی

نقطه‌ای از تکه‌ی i ام

$$\underset{1\times 1}{} = [F(\tilde{r}_i)]_{1\times n}\,(\Delta r_i)_{n\times 1}$$

یا F بردار سطری

$$\lim_{\Delta r \to 0} \sum_{i=1}^{N} \left[F(\vec{r}_i)\right] \Delta r_i = \int_{\gamma} \left[F(r)\right] dr$$

[illegible] Δr_i ها $\to 0$

در صورتی [illegible] :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni \forall$$

$$\forall i \quad \|\Delta r_i\| < \delta \Longrightarrow \left| -I + \sum_{i=1}^{N} \left[F(\vec{r}_i)\right] \Delta r_i \right| < \varepsilon$$

$$I =: \lim_{\Delta r \to 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[F(\vec{r}_i)\right] \Delta r_i \right\}$$

در این صورت

$$F(\tilde{r}_i) = F[r(\tilde{t}_i)] \qquad t_{i-1} \leq \tilde{t}_i \leq t_i$$

$$r_i = r(t_i) \qquad t_0, t_1, \dots, t_N$$

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1} = r(t_i) - r(t_{i-1})$$

$$\frac{r(t_i) - r(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \xrightarrow[t_{i-1} \to t_i]{} \dot{r}(t_i)$$

$$\lim_{t_{i-1} \to t_i} \varepsilon_i = 0$$

$$\frac{r(t_i) - r(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - \dot{r}(t_i) = \varepsilon_i$$

$$\frac{r_i - r_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} - \dot{r}(\tilde{t}_i) = \varepsilon_i \qquad \lim_{t_{i-1}\to t_i} \varepsilon_i = 0$$

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1} = [\dot{r}(\tilde{t}_i)]\,\Delta t_i + \varepsilon_i\,\Delta t_i$$

$$t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$$

تعداد جزء $= \infty = N$

$$\sum_i F[r(\tilde{t}_i)]\,\Delta r_i = \sum_i F[r(\tilde{t}_i)]\,\dot{r}(\tilde{t}_i)\,\Delta t_i + \sum_i F[r(\tilde{t}_i)]\,\varepsilon_i\,\Delta t_i$$

$\Delta t_i \to 0$

$t_f = t_N$

متناهی

نامتناهی

متناهی ؟ اندازه‌گیری

$(t_f - t_0) \leftarrow \underbrace{\overline{N\Delta t}\;\varepsilon\;\overline{F}}$

متناهی اجزا کار صفر

در Δt های کوچک

$$\sum_i \left[F(\vec{r}_i)\right](\Delta t_i)\,\varepsilon_i \sim \underbrace{(N\,\Delta t)}_{(t_f-t_0)}\,\varepsilon\,|F|$$

$\varepsilon \to 0$

$|F|$ کراندار

پس کل جمع به صفر میرود.

در این تقریب، Δt و $\varepsilon \to 0$

تعداد جملات $(N) \to \infty$

نتیجه $\infty \times 0$ نامعین $=$

با این طرز استدلال

ترم ۴ ام $\to 0$

$$\overbrace{\sum_i \overbrace{\underbrace{F[r(t_i)]}_{\cancel{b}}\ \underbrace{\dot{r}(t_i)}_{\text{مشتق}}}^{\text{عدد}}\ \Delta t_i}$$

جمله اول:

ت F مشتق، بین F و

$\dot{r}$ ضرب

درونی

$$\sum_i f(t_i)\,\Delta t_i$$

$$f(t_i) = F[r(t_i)]\ \dot{r}(t_i)$$

تابعی از یک متغیر:

$$\sum_i f(\tilde{t}_i)\,\Delta t_i \xrightarrow[\Delta t_i\text{ها به صفر}]{} \int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt$$

$$\sum_i F[r(\tilde{t}_i)]\,\Delta r_i = \underbrace{\sum_i \overbrace{F[r(\tilde{t}_i)]\,\dot{r}(\tilde{t}_i)}^{f(\tilde{t}_i)}\,\Delta t_i}_{\xrightarrow{0 \leftarrow \Delta t_i\text{ها}}\ \int_{t_0}^{t_f} f(t)\,dt}$$

$$+ \underbrace{\sum_i F[r(\tilde{t}_i)]\,\varepsilon_i\,\Delta t_i}_{\downarrow\ 0}$$

$0 \leftarrow \Delta t_i$ها

$$\sum_i F[r(t_i)]\,\Delta r_i \xrightarrow[\max \Delta t_i \to 0]{} \int_{t_0}^{t_f} F[r(t)]\,\dot r(t)\,dt$$

$$\int_\gamma F(r)\cdot dr = \int_{t_0}^{t_f} F[r(t)]\,\dot r(t)\,dt$$ رابطه‌ی نهایی

t_0 و t_f پارامترهای ابتدا و انتهای خم.

پس انتگرال بر خم به یک انتگرال یک متغیری تبدیل می‌شود.

$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ با $F\, d\mathbf{r}$

برداری برداری — عددی برداری

ضرب درونی:

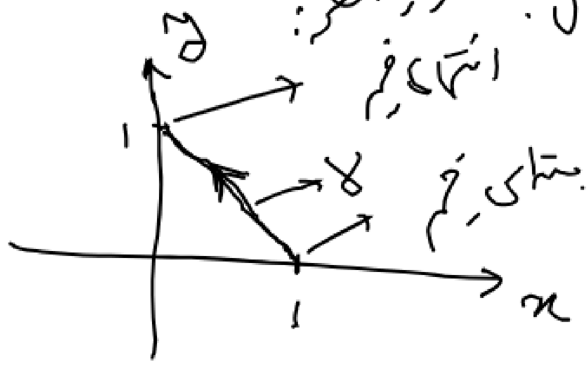
$$u\cdot v=\sum_i u_i v_i$$

$$F\cdot dr = F_1\, dr_1 + F_2\, dr_2 + \dots$$

$$= F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

در فضای سه بعدی

مثال: در صفحه:



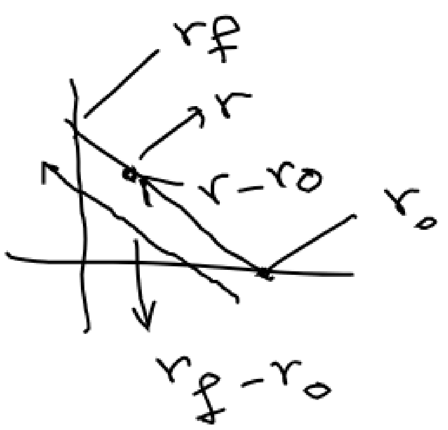
$$F = \hat{x}(x+y) + \hat{y}\, y$$

γ : پاره‌خط از $(0,1) \leftarrow (1,0)$

$$I = \int_{\gamma} F \cdot dr$$

خم پارامتری شده: r تابع t (پارامتر)

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{F[r(t)] \cdot \dot{r}(t)}_{\text{تابع } t}\, dt$$



$$(r - r_0) \parallel (r_f - r_0)$$

$$(r - r_0) = (\text{عدد})\,(r_f - r_0)$$

$\downarrow$

تابع r $\Rightarrow$ در $r = r_0$ صفر میشود

$\swarrow$ در $r = r_f$ یک میشود.

انتخاب: پارامتر t همان عدد:

$$r = r_0 + t\,(r_f - r_0) \qquad t=0 : r_0 \longrightarrow t=1 : r_f$$

$$r(0) = r_0$$

$$r(t) = r_0 + t\,(r_f - r_0) \qquad \uparrow \quad t : 0 \longrightarrow 1 \qquad r(1) = r_f$$

$$t_0 = 0 \qquad t_f = 1$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = r_f - r_0 \longrightarrow \begin{pmatrix} x_f - x_0 \\ y_f - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$= -\hat{x} + \hat{y}$$

$$I = \int_{t_0=0}^{1=t_f} dt \underbrace{\{[(x+y)(t)]\hat{x} + [y(t)]\hat{y}\}}_{F[r(t)]} \cdot \underbrace{(-\hat{x}+\hat{y})}_{\dot{r}(t)}$$

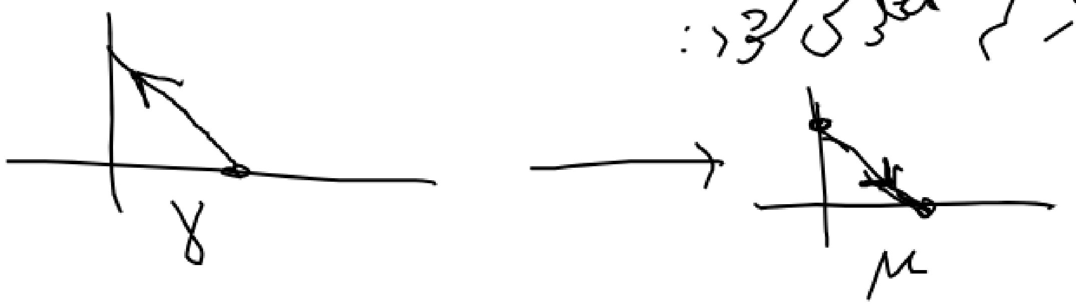
$$= \int_0^1 dt\,[-(x+y)(t) + y(t)] = \int_0^1 dt\,[-x(t)]$$

$r(t) = r_0 + t(r_f - r_0)$ $\quad x(t) = x_0 + t(x_f - x_0) = 1 - t$

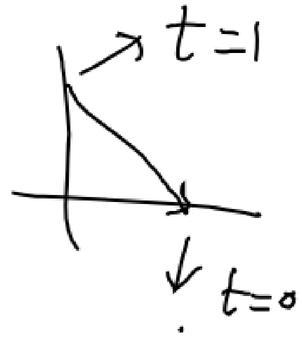
$$I = \int_0^1 dt\,(t-1) = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Big|_0^1 = -\,{}^1\!/_2$$

$$\int_\gamma \underbrace{\left[(x+y)\,dx + y\,dy\right]}_{\displaystyle F \cdot dr = F_x\,dx + F_y\,dy} = -\frac{1}{2}$$

اگر مسیر خم معکوس شود:



$$r(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$



$r_0 \longrightarrow r_f$ $\qquad 0 \le t \le 1$

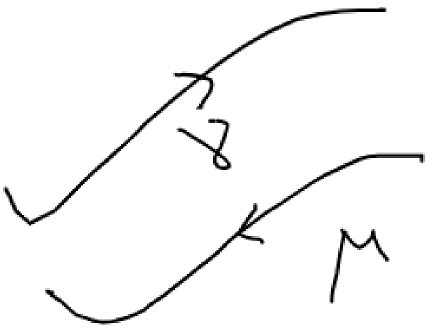
$r_f \longrightarrow r_0$

$t=0$ انتهای منحنی

$t=1$ ابتدای منحنی

$$\int_\mu F \cdot dr = \int_1^0 dt \left\{F[r(t)]\right\} \cdot [\dot{r}(t)]$$

$$= \int_1^0 dt\,(t-1) = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Big|_1^0 = +\frac{1}{2}$$



μ : همان γ که در سمت وارون پیموده میشود

$$\int_{\mu} [F(r)] \cdot dr = -\int_{\gamma} [F(r)] \cdot dr$$

اگر خم عوض شود، روی مسیر بسته، خم عوض نخورد ؟

مثال:

c : یک ربع دایره

مسیر بسته c، همراه مسیر بسته γ

$$F(x,y) = (x+y)\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\int_c [F(r)].dr = ?$$

پارامتری کردن ربع دایره :

$x^2+y^2=1$ ← معادله ربع دایره به شعاع ۱ و مرکز مبدأ

(البته آن رابطه معادله کل دایره است.)

یک شکل پارامتری کردن :

$x=\cos\theta$

$y=\sin\theta$ → معادله پارامتری دایره :

آن ربع دایره : $0\le \cos\theta,\sin\theta \Leftarrow x,y\ge 0$

انتها $x=0$, $y=1$, $\theta=\pi/2$

$0 \le \theta \le \pi/2 \longrightarrow$ آن رو جهت داره.

$\downarrow$

پارامتر

ابتدا $x=1$, $y=0$ $\longrightarrow$ $\theta=0$

$$r(\theta)=\hat{x}\cos\theta+\hat{y}\sin\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta}=-\hat{x}\sin\theta+\hat{y}\cos\theta$$

$$F(r(\theta)) = \hat{x}[x(\theta) + y(\theta)] + \hat{y}[y(\theta)]$$

$$= \hat{x}(\cos\theta + \sin\theta) + \hat{y}(\sin\theta)$$

$$\dot{r}(\theta) = \frac{dr}{d\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$$

$$\{F[r(\theta)]\} \cdot \dot{r}(\theta) = -\sin^2\theta$$

$$\int_C (dr) \cdot [F(r)] = \int_0^{\pi/2} d\theta\, (-\sin^2\theta)$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta\, \frac{\cos(2\theta) - 1}{2} = \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} - \frac{1}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_\gamma F\cdot dr = -\frac{1}{2}$$

$$\int_\nu F\cdot dr = -\frac{\pi}{4}$$

سر دو، γ و ν، یکی نیست.

$F \to G \qquad G(x,y) = (x+y)\hat{x} + x\hat{y}$

$\gamma: \quad r = \hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}) \qquad \dot{r} = \hat{y} - \hat{x}$

$x(t) = 1 - t \quad y(t) = t \quad x + y = 1$

$$\int_\gamma dr\cdot G = \int_0^1 dt\, \underbrace{(\hat{y} - \hat{x})}_{\dot{r}} \cdot \overbrace{[1\hat{x} + (1-t)\hat{y}]}^{G}$$

$$= \int_0^1 dt\,(-t) = -\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$\int_\gamma dr \cdot G = -\frac{1}{2}$$

$\lambda :$ $\quad x = \cos\theta$

$\qquad y = \sin\theta$

$\theta : 0 \to \frac{\pi}{2}$ $\qquad \frac{dr}{d\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$

$$G[r(\theta)] = \hat{x}(\cos\theta + \sin\theta) + \hat{y}(\cos\theta)$$

$$\{G[r(\theta)]\}\cdot\frac{dr}{d\theta} = -\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2\theta + \cos(2\theta)$$

$$\int_{\alpha} dr \cdot G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\cos(2\theta) - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]$$

$$= \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\alpha} dr \cdot G = \int_{\gamma} dr \cdot G = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \int_{\alpha} dr \cdot F \neq \int_{\gamma} dr \cdot F = -\frac{\pi}{4}$$

$$G \cdot dr = (x+y)\,dx + x\,dy$$

$$= x\,dx + (y\,dx + x\,dy)$$

$$= d\frac{x^2}{2} + d(yx) = d\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)$$

$$\int G \cdot dr = \int d\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)}{dt}\,dt = \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)(t_f)$$

$$- \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)(t_0)$$

$$\int G\cdot dr = \frac{x_f^2}{2} + x_f y_f - \left(\frac{x_0^2}{2} + x_0 y_0\right)$$

تابع فقط سر و ته، خ (r_f , r_0)

$$F\cdot dr = (x+y)\,dx + y\,dy$$

$$= d\left(\frac{x^2}{2}\right) + y\,dx + y\,dy \stackrel{?}{=} d\,A$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy$$

A تابع x, y

$$\frac{\partial A}{\partial x} = x + y \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = y$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = x + y \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = 1$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = y \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$$

پس معادلات بالا جواب مشترک دارند.

اگر یکی از معادلات را حل کنیم:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = y \qquad A = \frac{y^2}{2} + B \qquad \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

B تابع فقط x

تابع فقط x

$$A=\frac{y^2}{2}+B$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}=x+y$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{dB}{dx}=x+y$$

$$\frac{dB}{dx}-x=y \qquad \frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dB}{dx}-x\right)=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial y}=1$$

انتگرال F بر خم، برای بعضی F ها تابع

فقط سر و ته خم است.

برای بعضی F ها چنین نیست و به خم (علاوه بر

سر و ته آن) بستگی دارد.