f چند متغیره با مقادیر حقیقی در

$$h(r) = \frac{1}{f(r)}$$

f در r_0 مشتق پذیر، $f(r_0) \neq 0$

$$(Dh)(r_0) = -\frac{(Df)(r_0)}{[f(r_0)]^2}$$

f و g در r_0 مشتق پذیر

$f(r_0) \neq 0 \Rightarrow$ $\frac{g}{f}$ در r_0 مشتق پذیر است.

اثبات:

$h = \frac{1}{f}$ $\qquad$ $\frac{g}{f} = gh$

h در r_0 مشتق پذیر است
g در r_0 " " "
$\Rightarrow (gh)$ در r_0 مشتق پذیر است.

$$[D(gh)](r_0) = [(Dg)(r_0)]\,h(r_0) + [g(r_0)]\,(Dh)(r_0)$$

$$= \frac{(Dg)(r_0)}{f(r_0)} - \frac{[g(r_0)](Df)(r_0)}{[f(r_0)]^2}$$

$$[D(\tfrac{g}{f})](r_0) = \frac{[(Dg)(r_0)]\,f(r_0) - [g(r_0)]\,(Df)(r_0)}{[f(r_0)]^2}$$

$$D\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{(Dg)f - g(Df)}{f^2}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$: [illegible]

تابع ۲ متغیره : $r=(x,y)$

مشتق f در : $f(r)$ در

$$(Df)(r)=\left[(D_1f)(r)\ ,\ (D_2f)(r)\right]=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

مثال : $f(r)=x^2y+3x+4xy-1$

$$(Dx)=\left(\frac{\partial x}{\partial x},\frac{\partial x}{\partial y}\right)\qquad \frac{\partial x}{\partial x}=1\qquad \frac{\partial x}{\partial y}=0$$

$$(D_1f)=2xy+3+4y\qquad Df=(2xy+3+4y,\ x^2+4x)$$

$$(D_2f)=x^2+0+4x$$

مثال:

$$f(r) = (x+y)\sin(x^2 y + x)$$

$$f = gh \qquad g(r) = x+y \qquad h(r) = \sin(x^2 y + x)$$

$$h = \sin \circ p \qquad p(r) = x^2 y + x$$

p چندجمله‌ای $\leftarrow$ مشتق‌پذیر

$\sin$ (یک متغیره، با تعاریف ترم ۱) $\leftarrow$ مشتق‌پذیر $\Leftarrow$ $\sin \circ p$ مشتق‌پذیر

$\leftarrow$ h مشتق‌پذیر

g چندجمله‌ای $\leftarrow$ مشتق‌پذیر

$\leftarrow$ (gh) مشتق‌پذیر

$\leftarrow$ f مشتق‌پذیر

$$Df = (D_1 f \ , \ D_2 f) \qquad f(r) = (x+y)\sin(x^2y+x)$$

$$D_1 f = 1 \sin(x^2y+x) + (x+y)[\cos(x^2y+x)](2xy+1)$$

$$= \sin(x^2y+x) + (2x^2y+2xy^2+x+y)\cos(x^2y+x)$$

$$D_2 f = 1 \sin(x^2y+x) + (x+y)[\cos(x^2y+x)](x^2+0)$$

$$= \sin(x^2y+x) + (x^3+x^2y)\cos(x^2y+x)$$

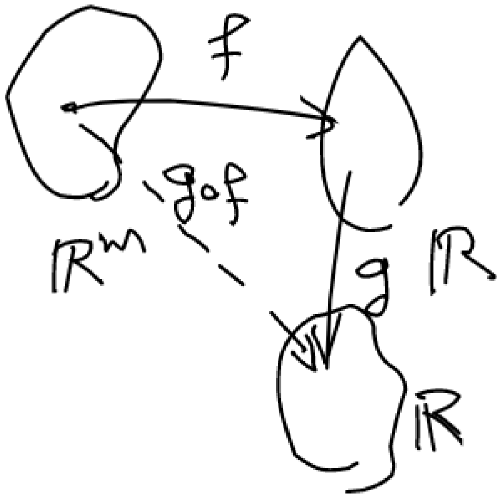
$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

با مقدار حقیقی

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

با مقدار حقیقی

$g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$



$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$g \circ f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$m = 1 \quad n = 1 \quad p = 1$ $\qquad$ $g \circ f$ یک مشتقه:

$$(g \circ f)'(x) = \{g'[f(x)]\}[f'(x)]$$

$$\underbrace{[D(g \circ f)](x)}_{\text{عدد}} = \{\underbrace{(Dg)[f(x)]}_{\text{عدد}}\}\underbrace{[(Df)(x)]}_{\text{عدد}}$$

$m = 1 \quad n = 1 \quad p > 1$ $\longrightarrow$ ستونی p بعدی

$$(g \circ f)'(x) = \{g'[f(x)]\}\underbrace{[f'(x)]}_{\text{عدد}}$$

$$[D(g \circ f)](x) = \{(Dg)[f(x)]\}[(Df)(x)]$$

$[\;]_p = [\;]_p$ عدد $\rightarrow$ [illegible]

$m=1 \quad n>1 \quad p=1$

f: یک متغیره برداری

g: چند متغیره عددی

gof: یک متغیره عددی

$$\underbrace{[D(g\circ f)](x)}_{\text{عدد}} = \{(Dg)[f(x)]\}\ \underbrace{[(Df)(x)]}_{[\ ]_n}$$

$[\quad]_n$ ستون

$(1\times n)\,(n\times 1) \rightarrow 1\times 1$ عدد

$m=1 \quad n>1 \quad p>1$

g چند متغیره برداری ← نتوان

$m>1 \quad n=1 \quad p=1$

f: چند متغیره عددی

g: یک متغیره عددی

gof: چند متغیره عددی

$$[D(g\circ f)](r) = \{(Dg)[f(r)]\}\,[(Df)(r)]$$

$[\quad]_m$ $\quad 1\times m$

1×1 عدد

$[\quad]_m$ $\quad 1\times m$

$(1\times m) = (1\times 1)(1\times m)$

تابع‌های چند متغیری با مقادیر برداری

ظاهر میشوند (بعداً)

اونجا نتیجه فرق نمیکنه

$m>1 \quad n=1 \quad p>1$

$m>1 \quad n>1 \quad p=1$

$m>1 \quad n>1 \quad p>1$

مثال:

$m=1 \quad n>1 \quad p=1$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

زمان ، مکان

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}$

f : مکان یک متحرک برحسب زمان

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

مکان ، دما

$\mathbb{R}^p = \mathbb{R}$

g : دما برحسب مکان

$$g\circ f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$\mathbb{R}^m$ ↓ زمان $\mathbb{R}^p$ ↓ دما

$m=p=1$

$n>1$

یک متحرک با یک دماسنج

دما تابع مکان - مکان (متحرک) تابع زمان

$g\circ f$ دما برحسب زمان: دمایی که دماسنج متحرک

نشان میدهد برحسب زمان:

$$\frac{d[(g\circ f)(t)]}{dt} = [D(g\circ f)](t) = \{(Dg)[f(t)]\}[(Df)(t)]$$

$$Dg = (D_1 g, \dots, D_n g) \qquad Df = \begin{pmatrix} Df_1 \\ \vdots \\ Df_n \end{pmatrix}$$

$$D(g\circ f) = (D_1 g)(Df_1) + \cdots + (D_n g)(Df_n)$$

بر

$f(t) = r = \langle x, y \rangle$ $\quad n=2 \quad$ حالت دوم :

$r_1 = x \quad r_2 = y$

$$\frac{d(g\circ f)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$r \to x = f(t)$: $n=1$ اگر

$$\frac{d(g\circ f)}{dt} = \frac{dg}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

کاربردها (مشتق یک متغیره)

اول یک کاربرد متفاوت: مشتق تابع ضمنی

تابع ضمنی:

$y=f(x)$ x و y عدد

اما به جای ضابطه‌ی f، این رابطه معلوم است.

$g(x,y)=0$ ضابطه‌ی g مشخص است.

منظور:

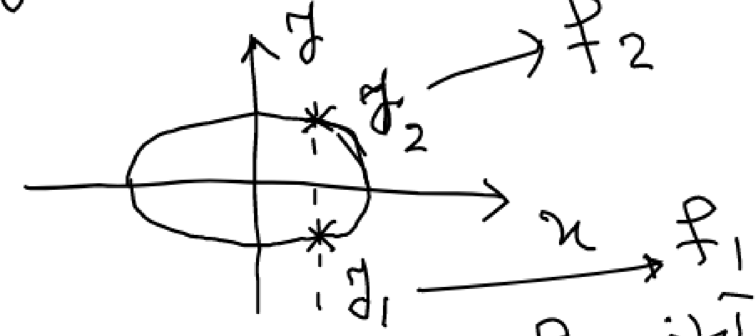
$g[x, f(x)]=0$ $\longrightarrow$ به ازای هر x، این یک معادله برای $y=f(x)$ است.

مثال: بیضی:

$$g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$$g(x,y) = 0$$

معادله‌ی بیضی: محورها x و y، مرکز مبدأ، نیم قطرها (نیم محورها) b, a



$$g[x, f(x)] = 0$$

تعریف f

خب، f تابع نیست، به ازای هر x دو مقدار دارد.

f_1 و f_2 (متناظر با بخش‌های $y \leq 0$ و $y \geq 0$ بیضی) تابع‌اند.

مشتق f (f_1 و f_2) ؟ تابعهای یک متغیره با مقدار حقیقی

و ۲ متغیره با مقدار حقیقی.

یک راه، حالت صریح، مستقیم f

$b>0$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad y=f(x)$$

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad (+\to f_2,\ -\to f_1)$$

$$f_2(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$f_1(x)=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$f_2'(x) = \frac{b\left(-\frac{2x}{a^2}\right)}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

$$f_2(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$f_2'(x) = -\frac{b^2 x}{a^2 f_2(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

برای f_1: $f_1'(x) = -\dfrac{b^2 x}{a^2 f_1(x)}$

$$f_1'(x) = \frac{bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

$$f_1(x) = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

در این مثال، محاسبه‌ی مستقیم f و بعد مشتق‌گیری از آن‌ها ساده بود.
اما همیشه چنین نیست: حل معادله برای y ممکن است ساده نباشد.

مشتق‌گیری بدون محاسبه‌ی صریح f :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{[f(x)]^2}{b^2}-1=0 \qquad \forall x$$

در دامنه‌ی f

$$h(x)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{[f(x)]^2}{b^2}-1$$

[نه این که $h(x)$ به ازای x خاصی صفر است]

$h(x)=0$. f چنان است که h ثابت (با مقدار صفر) است.

پس

$$h'(x)=0$$

$$0=h'(x)=\frac{2x}{a^2}+\frac{2[f(x)][f'(x)]}{b^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{b^2 x}{a^2 f(x)}$$

همان نتیجه که با حالت صریح به دست آمده بود، بدون اینکه لازم باشد f را بیابیم.

مثال: دایره: به شعاع 5 و مرکز مبدأ

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

معادله ضمنی برای تابع f:

$$x^2 + [f(x)]^2 - 25 = 0$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$2x + 2[f(x)][f'(x)] = 0 \qquad f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

یک نقطه‌ی خاص $(x=3\ ,\ y=4)$

$$3^2+4^2=25 \qquad f_2(3)=4$$

این رابطه (دانستن مقدار f_2 در نقطه‌ی 3) برای محاسبه‌ی f_2' (حتا در فقط نقطه‌ی 3) کافی نیست.

اما معلوم شد

$$f'(x)=-\frac{x}{f(x)}$$

بدون محاسبه‌ی f در یک همسایگی 3،

$$f_2'(3)=-\frac{3}{4}$$

f' در 3 حساب شد.

مثال:

$$g(x,y) = x^5 + 2x^7 y + x y^6 - 2x^3 y^3 - 2$$

$$g[x, f(x)] = 0$$ معادله‌ی ضمنی برای f

تا بیابیم مشتق $f(x)$ بر حسب x را بدست.

$$h(x) = g[x, f(x)] = g[F(x)]$$

$$F(x) := [x, f(x)] \qquad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad h = g \circ F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$y = f(x)$

f مجهول است، چنان که h تابع ثابت با مقدار صفر است.

$$0 = (Dh)(x) = (Dg)[F(x)]\,[(DF)(x)] \qquad F(x) = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$= \left[(D_1 g)(x,y),\ (D_2 g)(x,y)\right] \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 1 = \frac{dx}{dx} \\ f'(x) = \frac{dy}{dx} \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = - \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)}$$

قضیه‌ی تابع ضمنی

(اگر y به شکل ضمنی به عنوان
یک تابع از x تعریف شده)

$$g(x,y)=0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

$$g(x,y)=0 \longrightarrow \frac{d}{dx}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^5 + 2x^7 y + x y^6 - 2x^3 y^3 - 2 = g(x,y)$$

$g(x,y) = 0 \longrightarrow$ y برحسب x، داده (صریح) نیست (ربطا)

$g(1,1) = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1,\,y=1)} = -\frac{14}{2} = -7$$

$g(x,y) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}$ $\qquad \frac{dy}{dx}$ $\quad$ d x?

$$0 = 5x^4 + 14x^6 y + 2x^7 \frac{dy}{dx} + y^6 + 6xy^5 \frac{dy}{dx} - 6x^2 y^3 - 6x^3 y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4 + 14x^6 y + y^6 - 6x^2 y^3}{2x^7 + 6xy^5 - 6x^3 y^2} = -\frac{(\partial g)/(\partial x)}{(\partial g)/(\partial y)}$$