مشتق توابع چند متغیری با مقادیر عددی.

تابع یک متغیره.

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

x و Δ عدد: تقسیم کردن بر Δ معنی دارد.

f عدد یا بردار باشد، صورت کسر معنی دارد.

اما اگر متغیر (x) بردار باشد (عدد نباشد)

پس Δ هم عدد نیست. تقسیم کردن بر Δ بی معنی میشود.

پس برای تابعهای چند متغیره این تعریف مشتق
(مانند یک متغیره) معنی ندارد.

$$\cancel{f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}}$$

به خاطر بی معنی بودن تقسیم بر Δ (که عدد نیست)

یک تعریف جدید (هم ارز با قبلی) برای مشتق تابعهای
یک متغیره :

یک تعریف :

$$\lim_{\Delta\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}-f'(x)\right]=0$$

$$\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\delta}-f'(x)=:\varepsilon(x,\Delta) \quad , \quad \Delta\neq 0$$

$$\varepsilon(x,0):=0$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\varepsilon(x,\Delta)=0$$

$$f(x+\Delta)-f(x)=[f'(x)]\Delta+[\varepsilon(x,\Delta)]\Delta$$

$$f(x+\Delta)=f(x)+[f'(x)]\Delta+[\varepsilon(x,\Delta)]\Delta$$

$$\lim_{\Delta \to 0} [f'(x)]\Delta = 0 \qquad \lim_{\Delta \to 0} [\varepsilon(x,\Delta)]\Delta = 0$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{[f'(x)]\Delta}{\Delta} = f'(x) \qquad \lim_{\Delta \to 0} \frac{[\varepsilon(x,\Delta)]\Delta}{\Delta} = 0$$

$\{[\varepsilon(x,\Delta)]\Delta\}$ سریعتر از Δ به صفر میگراید.

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta = 0 \qquad [\varepsilon(x,\Delta)]\Delta = o(\Delta)$$

اُی کوچک

$$A = o(\Delta) : \lim \frac{A}{\Delta} = 0$$

$$f(x+\Delta)-f(x)=[f'(x)]\Delta+o(\Delta)$$

سریعتر از Δ صفر میشود.

در نقطه‌ی x_0:

$$f(x_0+\Delta)-f(x_0)=[f'(x_0)]\Delta+o(\Delta)$$

تابع جدید $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x_0+\Delta)-\tilde{f}(x_0):=[f'(x_0)]\Delta$$

$$\tilde{f}(x_0):=f(x_0)$$

$$x_0+\Delta=:x$$

$$\tilde{f}(x_0+\Delta)=f(x_0)+[f'(x_0)]\Delta$$

$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + [f'(x_0)](x - x_0) \qquad \Delta = x - x_0$$

$$= a + bx \qquad a = f(x_0) - [f'(x_0)]x_0$$

معادله‌ی یک خط.

$$b = f'(x_0)$$

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$$

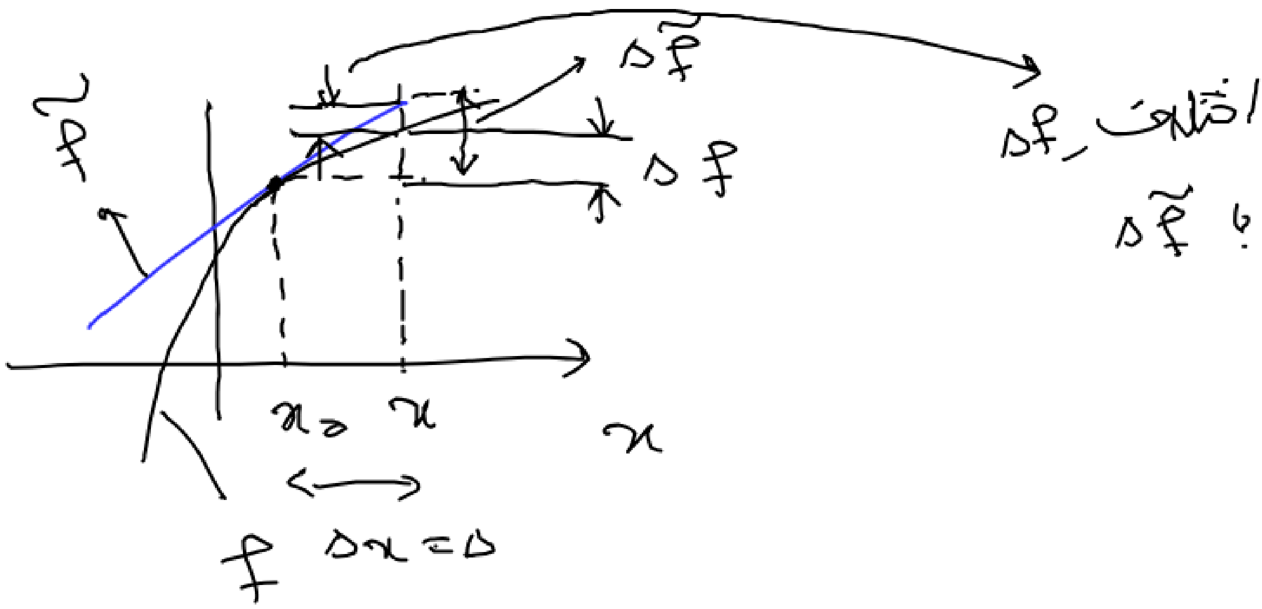
$\tilde{f}$ و $\tilde{f}'$ در x_0 .

$$\tilde{f}'(x) = f'(x_0)$$

f و f' در x_0 برابرند.

$$\tilde{f}'(x_0) = f'(x_0)$$

$\tilde{f}$ تنها تابعی است که درجه‌اش حداکثر یک است و در x_0 خودش و مشتقش با f برابرند.



مشابه همین برای یک تابع 3 متغیری

$r=(x,y)$

$\Delta r=(\Delta x,\Delta y)$

f مشتق‌پذیره با مقدار عدد

$$f(r+\Delta r)-f(r)=\underbrace{A\Delta x+B\Delta y}+o(\Delta r)$$

عدد

(یک مشتق‌پذیره) $A\Delta x$, $A=f'(x)$

$A\Delta x+B\Delta y \longrightarrow$ یک تابع خطی از Δr است.

$\Delta r=\Delta r_1+\Delta r_2$ $\quad$ $\Delta r_1=(\Delta x_1,\Delta y_1)$

$\Delta r_2=(\Delta x_2,\Delta y_2)$

$$A\Delta x+B\Delta y=(A\Delta x_1+B\Delta y_1)+(A\Delta x_2+B\Delta y_2)$$

$\Delta r\to\alpha\Delta r$: $\Delta x\to\alpha\Delta x$, $\Delta y\to\alpha\Delta y$ $\quad$ $A\Delta x+B\Delta y\to\alpha(A\Delta x+B\Delta y)$

$$f(r+\Delta r) - f(r) = \underbrace{M\,\Delta r}_{\text{خطی نسبت به } \Delta r} + o(\Delta r)$$

$$M\Delta r = A\Delta x + B\Delta y$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

$$o(\Delta r) = S \qquad \lim_{\Delta r \to 0} \frac{S}{\Delta r} = 0 \quad \times$$

Δr بردار است پس تقسیم بر Δr معنی ندارد.

تعریف درست:

$$o(\Delta r) := o(\|\Delta r\|) \qquad \lim_{\Delta r \to 0} \frac{S}{\|\Delta r\|} = 0$$

$$f(r+\Delta r) - f(r) = M\,\Delta r + \underbrace{\{\varepsilon(r,\Delta r)\}}_{\text{عدد}}\,\underbrace{\|\Delta r\|}_{\text{عدد}}$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \varepsilon(r,\Delta r) = 0$$

f عدد، r و Δr عدد حقیقی.

$$f(r+\Delta r) - f(r) = \underbrace{[M(r)]}_{\text{ماتریس سطری}}\underbrace{(\Delta r)}_{\text{ماتریس ستونی}} + \underbrace{[\varepsilon(r,\Delta r)]\,\|\Delta r\|}_{\text{عدد}}$$

$[M(r)](\Delta r) =$ عدد

f عدد، r و Δr ماتریس ستونی.

گیریم یک تابع از متغیر برداری، خطی $[M(r)]$

با مقدار برداری هست که

$$f(r+\Delta r)-f(r)=[M(r)](\Delta r)+[\varepsilon(r,\Delta r)]\|\Delta r\|$$

$\lim_{\Delta r\to 0}\varepsilon(r,\Delta r)=0$ یعنی $[\varepsilon(r,\Delta r)]\|\Delta r\|=o(\Delta r)$

یا $[\varepsilon(r,\Delta r)]\|\Delta r\|=o(\|\Delta r\|)$

در این صورت میگوییم f در r مشتق پذیر است،

و مشتق در r همان $M(r)$ است.

مشتق f در r را با $(Df)(r)$ نشان می‌دهند.

$f'(r)$ نه

برای تابع‌های بیش از یک متغیری، نماد $f'(r)$ برای مشتق f در r رایج نیست.

با این کار:

$$f(r+\Delta r)-f(r)=[(Df)(r)]\,\Delta r+o(\Delta r)$$

مقایسه با یک متغیره:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=[f'(x)]\,\Delta x+o(\Delta x)$$

$(Df)(x)$

گیریم f در x مشتق‌پذیر هست. $(Df)(x)$ چگونه
محاسبه می‌شود؟

تک متغیره:

$$(Df)(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

این روش محاسبه برای f چند متغیره کار نمی‌کند، چون
مخرج (Δx) عدد نیست و تقسیم کردن بر آن معنی ندارد.

$r = (x, y)$

$$(Df)(r) = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

$$\left[(Df)(r)\right](\Delta r) = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = A\Delta x + B\Delta y$$

ماتریس $(Df)(r)$ یعنی ماتریس A و B.

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\Delta x + \left[\varepsilon(r,\Delta r)\right]\|\Delta r\|$$

$\Delta y = 0 \qquad \|\Delta r\| = |\Delta x|$

$$\|\Delta r\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = A + \frac{\left[\varepsilon(r,\Delta r)\right]|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \pm 1 \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \varepsilon(r, \Delta r) = \lim_{\Delta r \to 0} \varepsilon(r, \Delta r) = 0$$

$$\Delta y = 0 : \lim_{\Delta x \to 0} \Delta r = 0$$

$$\left| \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \right| = 1 \qquad \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} [\varepsilon(r, \Delta r)] \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 0$$

$$[\varepsilon(r, \Delta r)](\Delta r) = o(\Delta r)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\theta(\Delta r)}{\|\Delta r\|} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\theta(\Delta r)}{\|\Delta r\|} = 0$$

$$\Delta y = 0 \quad |\Delta x| = \|\Delta r\|$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\{ A + \frac{[\varepsilon(r, \Delta r)] \, |\Delta x|}{\Delta x} \right\} = A + 0$$

A تابع r فقط
است

نتیجه:

$$A=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}}$$

شبیه مشتق تابع‌های یک متغیره است:

$$g(x):=f(x,y)$$

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = (D_1 f)(x,y)$$

مشتق جزئی f نسبت به x

یا مشتق جزئی f نسبت به x

یعنی در y ثابت

Df مشتق f

مشتق f نسبت به متغیر اول $\Leftarrow D_1 f$

همه این‌ها نمادهای مشتق

$$f_{,x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = D_1 f$$

برای [illegible]

مشابه:

$$(D_2 f)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = f_{,y} = f_y$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

یعنی از تعریف عام مشتق استفاده مثلاً سه متغیره:

مشتق‌پذیری f در r

$$r = (x, y, z)$$

$$f(r+\Delta r) - f(r) = \underbrace{[(Df)(r)]}_{\text{خطی}}(\Delta r) + o(\Delta r)$$

$$(Df)(r) = [(D_1 f)(r), (D_2 f)(r), (D_3 f)(r)]$$

$$(D_2 f)(r) = \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = f_{,y} = f_y$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

نتیجه: اگر f در r مشتق‌پذیر باشد، مشتق‌های جزئی f در r وجود دارند.

برعکس؟

اگر مشتق‌های جزئی f در p وجود داشته باشند،

آیا مشتق f در p وجود دارد؟

جواب: نه لزوماً

برای دیدن این کافی است مثال نقض آورده شود.

مثال:

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\ ,\quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$f(0,0):=0$$

آیا f در $(0,0)$ مشتق پذیر است؟

مشتق های جزئی:

$$(D_1 f)(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3}=1$$

بطور مشابه: $(D_2 f)(0,0)=1$

f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است:

$\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y}$ هر دو وجود دارند.

اگر f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = [(\nabla f)(0,0)] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + o(\Delta r)$$

$$= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + o(\Delta r)$$

$$f(\Delta x, \Delta y) = \frac{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \qquad f(0,0) = 0$$

$$\frac{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \stackrel{?}{=} \Delta x + \Delta y + o(\Delta r)$$

$$\frac{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - (\Delta x + \Delta y) \stackrel{?}{=} o(\Delta r)$$

$$- \frac{(\Delta y)^2 \Delta x + (\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \stackrel{?}{=} o(\Delta r)$$

نکلسم ن :

حل :

$\alpha = \Delta x = \Delta y \qquad \|\Delta r\| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{2}\,\alpha$

طرف چپ $= - \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2} = -\alpha \qquad \lim_{\alpha \to 0} \frac{-\alpha}{\sqrt{2}\,\alpha} \stackrel{?}{=} 0$ ✗ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$

پس مشتق جزئی پذیر بودن کافی نیست (لازم هست)

$\Uparrow \quad \not\Downarrow$

برای مشتق پذیر بودن

بسیاری از قضایای مربوط به مشتق تابع‌های یک متغیره

برای تابع‌های چند متغیره هم تکرار میشونه.

f و g در r مشتق‌پذیر $\Leftarrow$ $(f+g)$ در r مشتق‌پذیر

$$[D(f+g)](r) = (Df)(r) + (Dg)(r)$$

اثبات:

$$(f+g)(r+\Delta r) - (f+g)(r) = f(r+\Delta r) + g(r+\Delta r)$$

$$-f(r) - g(r) = [(Df)(r)](\Delta r) + [\varepsilon_1(r,\Delta r)]\|\Delta r\|$$

$$+[(Dg)(r)](\Delta r) + [\varepsilon_2(r,\Delta r)]\|\Delta r\|$$

$$= [(Df)(r) + (Dg)(r)](\Delta r) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\|\Delta r\|$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\|\Delta r\|}{\|\Delta r\|} = \lim_{\Delta r \to 0} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta r \to 0} \varepsilon_2 = 0$$ چون

تمرین: f و g در r مشتق‌پذیر $\leftarrow$ $(f-g)$ در

r مشتق‌پذیر است

$$D(f-g) = (Df) - (Dg)$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0$$

حل:

اگر f در r_0 مشتق‌پذیر باشد، $f(r_0)=0$ ، g در r_0 پیوسته

ضرب g و f ... دارد

$\Longrightarrow$ gf در r_0 مشتق‌پذیر است

و $[D(gf)](r_0) = [g(r_0)][(Df)(r_0)]$

اثبات:

$$(gf)(r_0+\Delta r) - (gf)(r_0) = [g(r_0+\Delta r)][f(r_0+\Delta r)] - \underbrace{[g(r_0)][\underbrace{f(r_0)}_{0}]}_{=0}$$

$$= [g(r_0+\Delta r)][f(r_0+\Delta r) - \underbrace{f(r_0)}_{=0}]$$

$$= \left[g(r_0+\Delta r)\right]\left\{\left[(Df)(r_0)\right]\Delta r + \varepsilon_1 \|\Delta r\|\right\}$$

$$= \left[\underbrace{g(r_0+\Delta r) - g(r_0)}_{\varepsilon_2} + g(r_0)\right]\left\{\left[(Df)(r_0)\right]\Delta r + \varepsilon_1 \|\Delta r\|\right\}$$

$$= \left[g(r_0) + \varepsilon_2\right] \cdot \left\{\left[(Df)(r_0)\right]\Delta r + \varepsilon_1 \|\Delta r\|\right\}$$

$\lim\limits_{\Delta r \to 0} \varepsilon_2 = 0$ چون g در r_0 پیوسته است

$\lim\limits_{\Delta r \to 0} \varepsilon_1 = 0$ چون f در r_0 مشتق پذیر است

$$(gf)(r_0+\Delta r)-(gf)(r_0)=\underbrace{\underbrace{[g(r_0)]}_{\text{عدد}}\underbrace{[(Df)(r_0)]}_{\text{ط}}\underbrace{\Delta r}_{\text{ستون}}}_{\text{عدد}}$$

$$+\ \varepsilon_2\overbrace{[(Df)(r_0)]}^{\text{ط}}\overbrace{\Delta r}^{\text{ستون}}+[g(r_0)]\varepsilon_1\|\Delta r\|$$

$$+\ \varepsilon_2\varepsilon_1\|\Delta r\| \qquad \hat{n}=\frac{\Delta r}{\|\Delta r\|}$$

$$\frac{\varepsilon_2[(Df)(r_0)](\Delta r)}{\|\Delta r\|}=\underset{\to 0}{\varepsilon_2}\underbrace{[(Df)(r_0)]\hat{n}}_{\text{کراندار}}\xrightarrow{\Delta r\to 0}0$$

$$\varepsilon_1\frac{\varepsilon_2+g(r_0)}{\|\Delta r\|}\|\Delta r\|\xrightarrow{\Delta r\to 0}0$$

پس

$$\varepsilon_2 [(Df)(r_0)] \Delta r + \varepsilon_1 [g(r_0)] \|\Delta r\|$$

$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \|\Delta r\| = \varepsilon_3 \|\Delta r\|$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \varepsilon_3 = 0$$

$$(gf)(r_0 + \Delta r) - (gf)(r_0)$$

$$\to [D(gf)](r_0)$$

$$= \{g(r_0) [(Df)(r_0)]\} \Delta r + \varepsilon_3 \|\Delta r\|$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \varepsilon_3 = 0$$

این تعریف مشتق‌پذیری gf در r_0 است، و این که

$$[D(gf)](r_0) = [g(r_0)][(Df)(r_0)]$$

اگر g در r_0 مشتق‌پذیر باشد، و c یک عدد ثابت باشد،

آنگاه (cg) در r_0 مشتق‌پذیر است و

$$[D(cg)](r_0) = c\,[(Dg)(r_0)]$$

اثبات:

$$(cg)(r_0+\Delta r) - (cg)(r_0) = c\left[g(r_0+\Delta r) - g(r_0)\right]$$

$$= c\left\{\overbrace{[(Dg)(r_0)]}^{\text{خط}}\,\overbrace{\Delta r}^{\text{ستون}} + \varepsilon\|\Delta r\|\right\}$$ بقیه دارد

$$= \{c[(Dg)(r_0)]\}\Delta r + c\,\varepsilon\|\Delta r\|$$

$$c\varepsilon =: \tilde{\varepsilon} \qquad \lim_{\Delta r\to 0} \varepsilon = 0 \;\underset{c \text{ ثابت}}{\Longrightarrow}\; \lim_{\Delta r \to 0} \tilde{\varepsilon} = 0$$

$$(cg)(r_0 + \Delta r) - (cg)(r_0) =$$

$$\underbrace{\left[c(Dg)(r_0)\right]}_{[D(cg)](r_0)}(\Delta r) + \tilde{\varepsilon}\,\|\Delta r\| \qquad \lim_{\Delta r\to 0}\tilde{\varepsilon} = 0$$

از تعریف، مشتق‌پذیر بودن (cg) در r_0 ثابت

$$[D(cg)](r_0) = c\,(Dg)(r_0) \qquad ✓$$

f در r_0 مشتق‌پذیر باشد $\Leftarrow$ f در r_0 پیوسته است.

$$r - r_0 = \Delta r$$

اثبات:

$$f(r) = f(r_0) + [(Df)(r_0)](r - r_0) + \varepsilon \|r - r_0\|$$

$$\lim_{r \to r_0} f(r) = \lim_{(\Delta r) \to 0} f(r) = f(r_0) + \lim_{(\Delta r) \to 0} \Big\{ \underbrace{[(Df)(r_0)]}_{\text{ثابت}}\underbrace{(\Delta r)}_{\to 0} + \underbrace{\varepsilon}_{\to 0} \underbrace{\|\Delta r\|}_{\to 0} \Big\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{r \to r_0} f(r) = f(r_0)$$ تعریف پیوستگی، f در r_0

f، g در r_0 مشتق‌پذیر $\Longrightarrow$ (gf) در r_0 مشتق‌پذیر،

$$[D(gf)](r_0) = [(Dg)(r_0)][f(r_0)] + [g(r_0)][(Df)(r_0)]$$

ها!

$$f(r) = f(r_0) + \underbrace{f(r) - f(r_0)}_{\tilde{f}(r)}$$

$$=: C + \tilde{f}(r)$$

$$\tilde{f}(r) := f(r) - f(r_0)$$

$$C := f(r_0)$$

$$gf = cg + g\tilde{f}$$

$$f = c + \tilde{f}$$

ידוע g גזירה ב-r_0, וגם c קבוע, לפי טענה

לכן (cg) גזירה ב-r_0, לפי טענה

$$[D(cg)](r_0) = c(Dg)(r_0)$$

$\tilde{f}$ גזירה ב-r_0, לפי טענה $1/ט$

$$\tilde{f}(r) = f(r) - f(r_0)$$

$$\tilde{f}(r_0+\Delta r) - \tilde{f}(r_0) = f(r_0+\Delta r) - f(r_0)$$

$$= [(Df)(r_0)](\Delta r) + \varepsilon \|\Delta r\|$$

این تعریف مشتق‌پذیری $\tilde{f}$ در r_0 است و این که

$$(D\tilde{f})(r_0) = (Df)(r_0)$$

یک راه دیگر:

$$\tilde{f}(r) = f(r) - c$$

مشتق c اگر تابع ثابت حساب شود:

$$h(r) := c$$

$$h(r_0+\Delta r) - h(r_0) = 0 = o(\Delta r)$$

f و c مشتق‌پذیرند

$$(Dh)(r_0) = 0$$

پس تفاضلشان مشتق‌پذیر است و مشتق $\tilde{f}$ مساوی مشتق f منهای مشتق c که مشتق c صفر است

$$gf = cg + g\tilde{f}$$

$\tilde{f}$ در r_0 مشتق‌پذیر است، و $\tilde{f}(r_0) = 0$، و

g در r_0 پیوسته است (چون g در r_0 مشتق‌پذیر است).

پس $(g\tilde{f})$ در r_0 مشتق‌پذیر است و

$$[D(g\tilde{f})](r_0) = [g(r_0)][(D\tilde{f})(r_0)]$$

همچنین معلوم است (cg) هم در r_0 مشتق‌پذیر است و $[D(cg)](r_0) = c(Dg)(r_0)$

پس (gf) هم در r_0 مشتق پذیر است و

$$[D(gf)](r_0) = [D(cg)](r_0) + [D(g\tilde{f})](r_0)$$

$$= c(Dg)(r_0) + [g(r_0)][(D\tilde{f})(r_0)]$$

$$= [f(r_0)][(Dg)(r_0)] + [g(r_0)][(Df)(r_0)]$$

نتیجه:

$$[D(gf)](r_0) = [g(r_0)][(Df)(r_0)] + [(Dg)(r_0)][f(r_0)]$$

حکم قضیه ✓

$$D(gf) = g(Df) + (Dg)f$$

قاعده‌ی لیبنیتس

خارج قسمت ؟

اول یک قضیه‌ی دیگر: قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق‌ها.

یادآوری برای یک متغیره:

f در x_0 مشتق‌پذیر و g در $f(x_0)$ مشتق‌پذیر

$\Longrightarrow$ $(g \circ f)$ در x_0 مشتق‌پذیر است

$$(g \circ f)'(x_0) = \{g'[f(x_0)]\}[f'(x_0)]$$

$$\frac{d[g(y)]}{dx} = \frac{d[g(y)]}{dy} \frac{dy}{dx} \qquad y := f(x)$$

$$\frac{d[f(x)]}{dx}$$

مالسته برای چند متغیره:

f چند متغیره با مقادیر عدد،

g یک متغیره با مقادیر عدد،

f در x_0 مشتق‌پذیر، g در $f(x_0)$ مشتق‌پذیر

f: عدد

x_0: عدد نیست

g: عدد

$f(x_0)$: عدد

$(g\circ f)$ در r_0 مشتق‌پذیر؟ آره، مشتق $(g\circ f)$ در r_0

$$(g\circ f)(r_0+\Delta r) = g\left[f(r_0+\Delta r)\right]$$

$$= g\Big\{ f(r_0) + \underbrace{[(Df)(r_0)]\Delta r + \varepsilon \|\Delta r\|}_{\Delta f} \Big\}$$

f مشتق‌پذیر در

$$= g[f(r_0)] + \{(Dg)[f(r_0)]\}\,\Delta f + \tilde{\varepsilon}(\Delta f)$$

g مشتق‌پذیر در

فقط r_0 و Δr به ... : $(Df)(r_0)$

$$g[f(r_0)]$$

$$\Delta f = f(r_0 + \Delta r) - f(r_0)$$

$$= [(Df)(r_0)]\Delta r + \varepsilon \|\Delta r\|$$

$$(g \circ f)(r_0 + \Delta r) = (g \circ f)(r_0)$$

$$+ \{(Dg)[f(r_0)]\}\{[(Df)(r_0)]\Delta r + \varepsilon \|\Delta r\|\}$$

$$+ \tilde{\varepsilon} \{[(Df)(r_0)]\Delta r + \varepsilon \|\Delta r\|\}$$

$$(g \circ f)(r_0 + \Delta r) = (g \circ f)(r_0) + \{(Dg)[f(r_0)]\}[(Df)(r_0)]\Delta r$$

$$+ A$$

$$A = \{(Dg)[f(r_0)]\}\,\varepsilon \|\Delta r\| + \tilde{\varepsilon}\,[(Df)(r_0)]\Delta r$$

$$+ \tilde{\varepsilon}\,\varepsilon \|\Delta r\|$$

$\Delta r \to 0 \Rightarrow \Delta f \to 0$ (چون f در r_0 مشتق‌پذیر است و بنابراین پیوسته است.)

$\Delta f \to 0 \Rightarrow \tilde{\varepsilon} \to 0$

(مشتق‌پذیری کلی، g)

$$\frac{A}{\|\Delta r\|} = \left\{(Dg)_{f(r_0)}\right\} \underset{}{\overset{\Delta r \to 0,\ 0}{\varepsilon}} + \underbrace{\overset{\Delta r \to 0}{\tilde{\varepsilon}\,(Df)(r_0)}\left(\frac{\Delta r}{\|\Delta r\|}\right)}_{\Delta r \to 0 \ \downarrow\ 0}$$

$\| \ \| = 1$

کراندار

$$+ \ \tilde{\varepsilon} \ \varepsilon$$

$\Delta r \to 0 \downarrow 0$, $\downarrow \Delta r \to 0$, 0

پس $\tilde{\varepsilon}\,\varepsilon \xrightarrow[\Delta r \to 0]{} 0$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{A}{\|\Delta r\|} = 0 \qquad \frac{A}{\|\Delta r\|} =: \tilde{\tilde{\varepsilon}}$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \tilde{\tilde{\varepsilon}} = 0$$

$$(g\circ f)(r_0+\Delta r)=(g\circ f)(r_0)+\{(Dg)[f(r_0)]\}[(Df)(r_0)]\,\Delta r+\vec{\varepsilon}\,\|\Delta r\|$$

$$\lim_{\Delta r\to 0}\vec{\varepsilon}=0$$

من تعريف مشتقة نجد أن $(g\circ f)$ لها مشتقة عند r_0 ومشتقها هو:

$$[D(g\circ f)](r_0)=\{(Dg)[f(r_0)]\}[(Df)(r_0)]$$

إذا كانت f لها مشتقة عند r_0 و g لها مشتقة عند $f(r_0)$ فإن $(g\circ f)$ لها مشتقة عند r_0 و

مثال:

$g(y)=\frac{1}{y} \rightarrow (Dg)(y)=-\frac{1}{y^2}$

تک متغیره

g مشتق‌پذیر است، اگر متغیر صفر نباشد.

f در r_0 مشتق‌پذیر است، و $f(r_0)\neq 0$

$\Downarrow$

$(g\circ f)$ در r_0 مشتق‌پذیر است، و

$$[D(g\circ f)](r_0)=\{(Dg)[f(r_0)]\}[(Df)(r_0)]$$

$$[D(g\circ f)](r_0) = -\frac{(Df)(r_0)}{[f(r_0)]^2}$$

$$h(r_0) = \frac{1}{f(r_0)} \Rightarrow (Dh)(r_0) = -\frac{(Df)(r_0)}{[f(r_0)]^2}$$

$f(r_0) \neq 0$ لطفن نشان دهید اگر f و g در r_0

مشتق پذیر باشند و $g(r_0) \neq 0$ ، $\frac{f}{g}$ در r_0 مشتق پذیر

است ، و مشتق $\frac{f}{g}$ در r_0 را بیابید.