توابع یک متغیره ی با مقدار برداری:

خم (تابع یک متغیری)

$r(t)$ $\qquad v(t) = \dot{r}(t)$ $\qquad$ r و v برداری

t عدد

$$\frac{v(t)}{\|v(t)\|} = \hat{v}(t) \qquad \hat{v}\cdot\hat{v} = 0$$

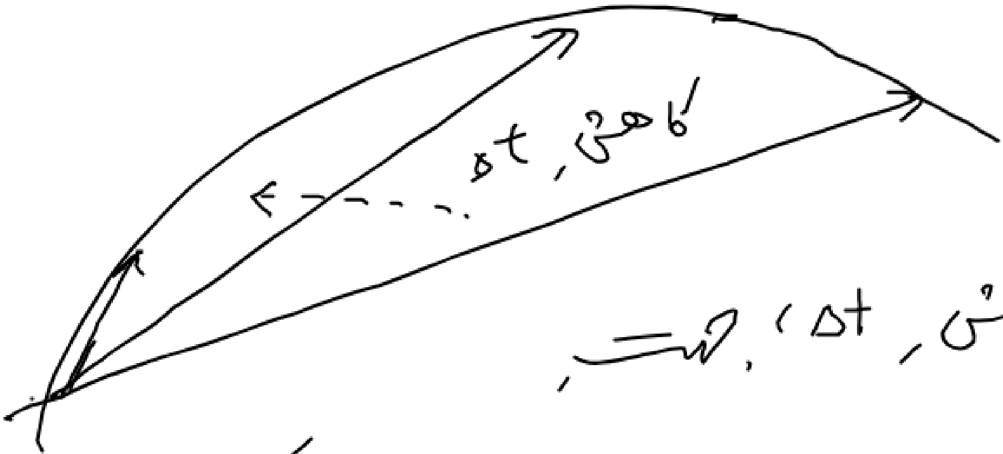
$\|v\|$ ← هندسی ؟
$\hat{v}$

$r(t+\Delta t) - r(t) =: \Delta r$

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \bar{v}$$

سرعت متوسط
(از t تا $(t+\Delta t)$)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}.$$

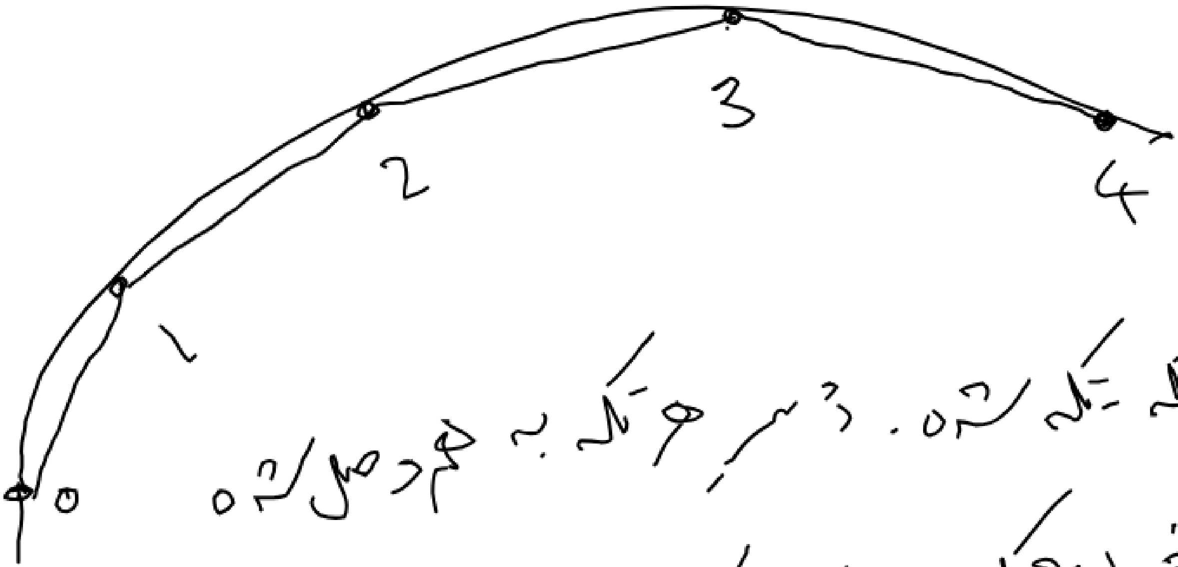


با کاهش Δt، جهت
بردار $\Delta \vec{r}$ به جهت مماس بر خم میگراید.

$\hat{u}$ مماس بر خم است.

$\vec{v}$ هم مماس بر خم است. $\hat{u}$ یکه هست.

سوال؟



خم تکه تکه شده. دو سر هر تکه به هم وصل شده
که خط شکسته به دست آمده.

تعریف طول خم:

طول خم $= \lim\limits_{\text{طول هر تکه به صفر}} \sum_i \|\Delta r_i\|$

کوچکترین کران بالای طول خط شکسته‌های متناظر

(با تقسیم بندی‌ی خم)

$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ، $1 \le i \le N$

خم به N تکه تقسیم شده.

$r_i - r_{i-1} = r(t_i) - r(t_{i-1})$

t_i : پارامتر خم در نقطه‌ی i.

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

اگر t_i به t_{i-1} نزدیک باشه،

$\lim_{\Delta t_i \to 0} \varepsilon = 0$

$$r(t_i) = r(t_{i-1}) + [\dot{r}(t_{i-1})]\Delta t_i + \varepsilon(\Delta t_i)$$

$\varepsilon \Delta t_i$ ، سریع‌تر از Δt_i صفر می‌گردد:

$$\varepsilon \Delta t_i = o(\Delta t_i)$$

اُی کوچک

یعنی: $\dfrac{\varepsilon \Delta t_i}{\Delta t_i} \xrightarrow[\Delta t_i \to 0]{} 0$

$a = o(b)$ یعنی $\lim \dfrac{a}{b} = 0$

هدف محاسبه‌ی طول قطعه قطعه، وقتی (Δt_i) ها $\to 0$

$$\Delta r_i = \{[\dot{r}(t_{i-1})] + \varepsilon\}\Delta t_i$$

$$(\Delta r_i)\cdot(\Delta r_i) = \|\Delta r_i\|^2$$

$$\|\Delta r_i\|^2 = (\Delta t_i)^2 \left(\underbrace{\dot{r}\cdot\dot{r}}_{\text{معمولی}} + 2\underbrace{\varepsilon\cdot\dot{r}}_{\text{کوچک}} + \underbrace{\varepsilon\cdot\varepsilon}_{\text{کوچکتر}}\right)$$

$$\sqrt{\underbrace{A}_{\text{معمو}}+\underbrace{B}_{\text{کوچک}}} \overset{?}{=}$$

بسط تیلر برای f :

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\{f'(x)\}\Delta x+\eta\,\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\eta=0 \qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+\Delta x}=\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}+\eta\,\Delta x$$

$$\eta\,\Delta x=o(\Delta x)$$

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{A}} + \eta B$$

$$\lim_{B \to 0} \eta = 0$$

B کوچک :

شخص به حذف برای ساده کردن نیاز

$$\|\Delta r\| = \sqrt{\dot{r}\cdot\dot{r} + \underbrace{2\,\varepsilon\cdot\dot{r} + \varepsilon\cdot\varepsilon}_{\text{کوچک } B}}\ (\Delta t)$$

$$\Delta t \to 0 \Downarrow \quad \varepsilon \to 0 \quad \eta \to 0$$

$$= \left[\sqrt{\dot{r}\cdot\dot{r}} + \frac{2\varepsilon\cdot\dot{r} + \varepsilon\cdot\varepsilon}{2\sqrt{\dot{r}\cdot\dot{r}}} + \eta B\right]\Delta t \qquad \eta B \to 0$$

$$\|\Delta r\| = \sqrt{\dot{r}\cdot\dot{r}}\,\Delta t + \alpha\,\Delta t \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \alpha = 0$$

$$\sqrt{\dot{r}\cdot\dot{r}} = \|\dot{r}\| = \|v\|$$

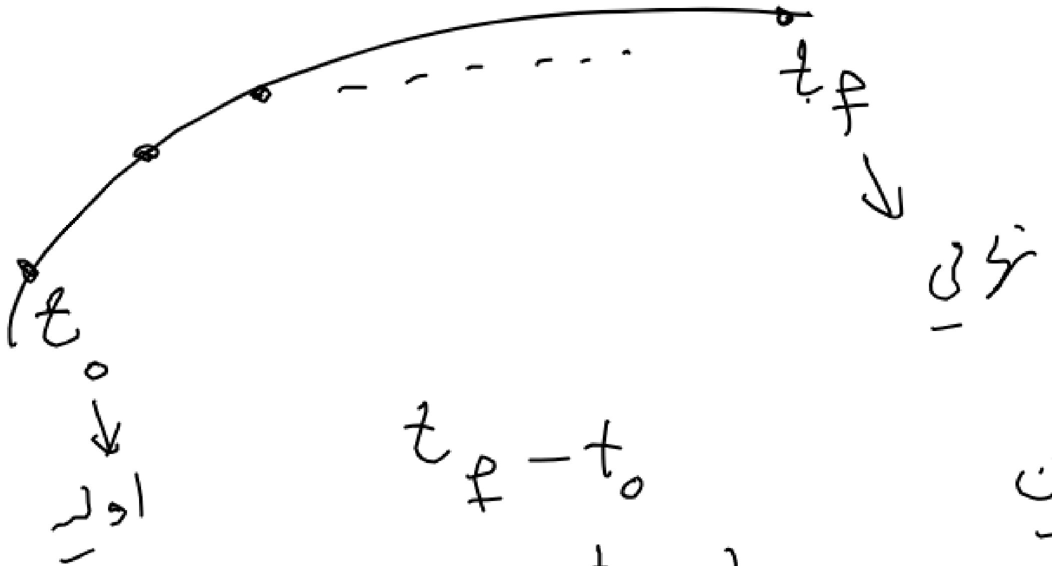
$$\|\Delta r\| = \|v\|\,\Delta t + \alpha\,\Delta t$$

$$\|\Delta r_i\| = \|v_{i-1}\|\,\Delta t_i + \alpha_i\,\Delta t_i$$

$$\sum_i \left[\|v_{i-1}\|\,\Delta t_i + \alpha_i\,\Delta t_i\right] = \text{طول خط شکسته}$$

Δt_i ها به صفر ↓ ؟

هر جمله ← صفر   تعداد جملات به بی‌نهایت



$t_f - t_0$ معین

$$\Delta t_i \sim \frac{t_f - t_0}{N}$$

خطای جمع: $\|v_{i-1}\|\Delta t_i \propto \frac{1}{N}$

تعداد جملات $= N$ | $\varepsilon_{\text{کل}} \propto N \times \frac{1}{N}$ (ثابت)

یک دسته‌ی دیگر از جملات $\underbrace{\alpha_i \Delta t_i}_{\alpha \frac{1}{N}} < \frac{\alpha}{N}$

جمع این جملات: $< N \frac{\alpha}{N} < \alpha \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$

پس مجموع این جملات به صفر میگراید (وقتی همه‌ی Δt_i ها به صفر گرایند.)

(اثبات دقیق‌تری لازم است: α_i ها یکسان نیستند)

$$\text{طول م} = \sum_{\omega \Delta t_i} \left\{ \|v_{i-1}\| \Delta t_i + \alpha_i \Delta t_i \right\}$$

تصغر

$$= \sum_{\omega \Delta t_i} \|v_{i-1}\| \Delta t_i$$

تصغر

$$r_i - r_{i-1} = v_{i-1} \Delta t_i + \varepsilon \Delta t_i$$

بطريقة الأطراف t_{i-1}

$$r_i - r_{i-1} = v_i \Delta t_i + \tilde{\varepsilon} \Delta t_i$$ بطريقة الأطراف: t_i

$$\text{طول خم} = \lim_{\max \Delta t_i \text{ به صفر}} \|v_i\| \, \Delta t_i = \lim_{\max \Delta t_i \text{ به صفر}} \|v(t_i)\| \, (t_i - t_{i-1})$$

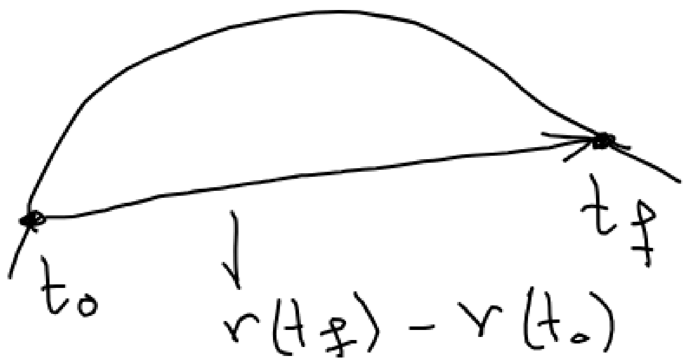
$$\|v(t)\| =: h(t)$$

$$\text{طول خم} = \sum_{\max \Delta t_i \text{ به صفر}} h(t_i) \, \Delta t_i = \int_{t_0}^{t_f} h(t) \, dt$$

به شرط وجود حد (انتگرال).

(طول خم) $L = \int_{t_0}^{t_f} dt \ \|v(t)\| = \int_{t_0}^{t_f} dt \ |v(t)|$

$$= \int_{t_0}^{t_f} dt \ \|\dot{r}(t)\| = \int_{t_0}^{t_f} dt \ |v(t)|$$



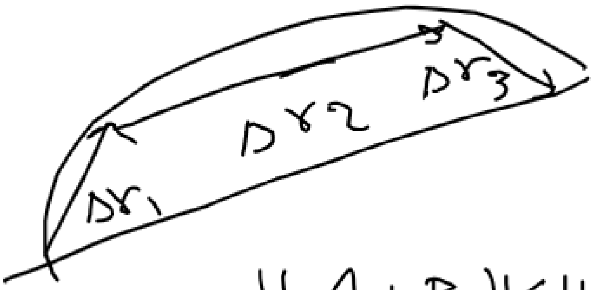
طول خط $\leq$ طول خم

$r(t_f) - r(t_0)$ خط

$L \geq |r(t_f) - r(t_0)|$

$L \geq \|\Delta \underline{r}\|$ [illegible]

$\Delta r = \sum_i \Delta r_i$



$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ [illegible]

$\|\Delta r\| = \|\sum_i \Delta r_i\|$

$\leq \sum_i \|\Delta r_i\|$

$\|\Delta r_i\| = L_i$

$\lim \sum_i L_i = L$

$\|\Delta r\| \leq \sum_i L_i \leq L$ [illegible] L_i

$$L \geq \|\Delta r\|$$

$$\Delta t = t_f - t_0$$

کوچکترین

$$t_f > t_0$$

$$\Delta t > 0$$

$$\frac{L}{\Delta t} \geq \left\|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right\|$$

سرعت متوسط:

$$\frac{L}{\Delta t} \geq \|\bar{v}\|$$

$$L = \int dt \, \|v\|$$

L_i طول قطعه خط iام

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{L_i}{\Delta t_i} = \|v_i\|$$

$$L_i = \|v_i\| \Delta t_i + \alpha \, \Delta t_i$$

$\Delta t_i \to 0 \qquad \bar{v}_i \to v_i$

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{l_i}{\Delta t_i} = \|\bar{v}_i\| = \|v_i\|$$

برای خمی که کوچک نیست،

$$\frac{L}{\Delta t} \geq \|\bar{v}\|$$

طول تقسیم بر زمان بزرگتر از

یا برابر با طول بردار سرعت متوسط است.

$L > \Delta t$ کوچک نیست

اگر خم خط راست باشد، طول تقسیم بر زمان برابر با طول بردار سرعت متوسط.

(اگر خم خطِ راستی باشد که بر آن جهتِ حرکت عوض نشود).

اگر خم کوچک شود، خم به خطِ راست نزدیک میشود:

دقیق‌تر: انحرافِ خم از خطِ راست، سریع‌تر از Δt به صفر میگراید:

$$\Delta r = \underbrace{v\,\Delta t}_{\text{خط راست}} + \underbrace{\varepsilon\,\Delta t}_{\text{انحراف از خط راست}} \qquad \varepsilon \to 0$$

پس برای زمان‌های کوچک ، طول تقسیم بر زمان تقریبن

اندازه‌ی سرعت متوسط است .

$$\frac{L_i}{\Delta t_i} \approx \|\bar{v}_i\|$$

دقیق‌تر :

$$L_i = \|\bar{v}_i\| \Delta t_i + \alpha_i \Delta t_i \qquad \alpha_i \xrightarrow[\Delta t_i \to 0]{} 0$$

و اگر Δt کوچک باشد ، $\bar{v}$ تقریبی v است (احتمالن

به هم نزدیک‌اند) پس

$$\frac{L_i}{\Delta t_i} \approx \|v_i\| \qquad \tilde{\alpha}_i \xrightarrow[\Delta t_i \to 0]{} 0$$

دقیق‌تر :

$$L_i = \|v_i\| \Delta t + \tilde{\alpha}_i \Delta t_i$$

پس طول خم برابر است با انتگرال اندازه‌ی بردار سرعت بر زمان (پارامتر خم).

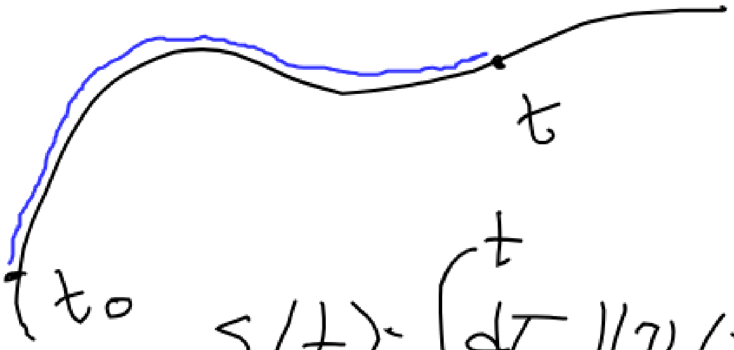
که در تابع زمان (پارامتر خم)

$$L(t) \simeq s(t)$$

τ: متغیر انتگرال‌گیری

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \, \|v(\tau)\|$$

$s(t)$: طول بخش آبی؟



(طول جبری)

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \, \underbrace{\|v(\tau)\|}_{\geq 0}$$

ممکن است منفی هم باشه.

طول جبری:

قدر مطلق آن طول است.

اگر $t > t_0$، $s(t)$ نامنفی است

اگر $t < t_0$، $s(t)$ نامثبت است.

قضیه‌ی اساسی حسابان $\Leftarrow$

$$\dot{s}(t) = \|v(t)\|$$

$$\int_{t_0}^{t} d\tau\, \|v(\tau)\| = s(t)$$

s عدد

v بردار

t عدد

$\|v\|$: مشتق طول چیزی نسبت به زمانه

$\hat{v}$: بردار یکه‌ی مماس بر خم

سمت جلو

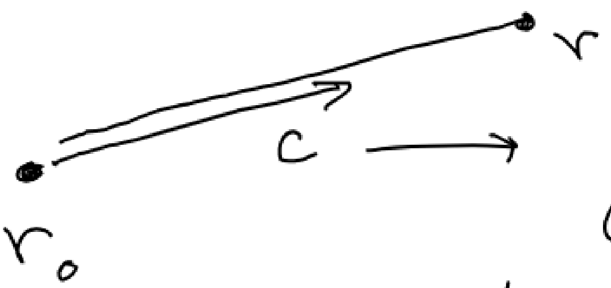
یعنی (سمتی

که زمانش زیاد میشود

اگر سمتِ پیمایش معکوس شود، ته قرینه می‌شود

مثال: حرکت بر یک خطِ راست:

یک راهِ مشخص کردنِ خطِ راست: یک نقطه و یک راستا



بردارِ ثابتِ C

$(r-r_0) \parallel C$

r بر خط است، اگر و تنها اگر شاملِ r_0 و با بردارِ C

$$r - r_0 = \overset{\text{عدد}}{f}\, c$$

r_0 و r و c

بردار، r_0 و c ثابت

$$r = r_0 + fc$$

متحرک، بر این خط راست حرکت میکند:

معادلهٔ تابع برداری برای خط راست است.

برای هر t (پارامتر ← زمان)

$$r(t) = r_0 + c\, f(t)$$

$$r(t) = r_0 + c\, f(t)$$

$$\dot{r}(t) = c\, \dot{f}(t) = v(t)$$

$$\dot{s} = \|v\| = \|\dot{f} c\|$$ مشتق طول پیمایی

$$= |\dot{f}|\, \|c\|$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} d\tau\, \|v(\tau)\| = \int_{t_0}^{t} d\tau\, |\dot{f}(t)|\, \|c\|$$

اگر سرعت ثابت باشد، $\dot{f}$ هم ثابت است

$$s(t) = \underbrace{\|c\|\, |\dot{f}|}_{\text{اندازه‌ی سرعت}} \times (t - t_0)$$

همچنان حرکت بر خط راست.

خط با دو نقطه‌ی متمایز (r_0 و r_1) بر خط مشخص میشود.

$$c := r_1 - r_0$$

مسئله به مسئله‌ی پیش

r_1

r_0

تبدیل میشود:

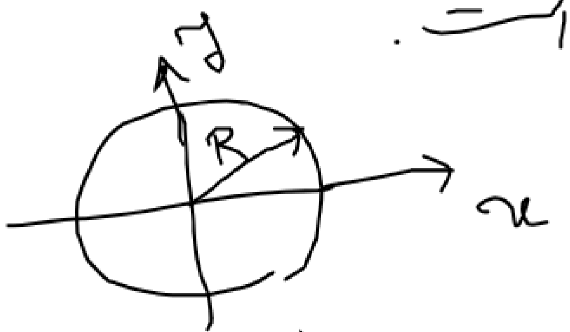
$$r(t) = r_0 + (r_1 - r_0) f(t)$$

r، r_1، r_0 بردار، t و f عدد، r_0 و r_1 ثابت

یک مثال دیگر: حرکت بر یک دایره:

انتخاب مختصات، چنان که صفحه‌ی دایره صفحه‌ی x-y،

و مرکز دایره مبدأ مختصات است.



شعاع دایره: R.

$$|r| = R \qquad |r| = \|r\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = R \qquad x^2+y^2 = R^2$$

پارامتر t: x و y تابع t:

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = R^2$$

$$[x(t)]^2 \le R^2 \qquad \frac{|x(t)|}{R} \le 1$$

$$-1 < \frac{x(t)}{R} < 1$$

پس $\frac{x(t)}{R}$ را می‌توان کسینوس یک زاویه گرفت، آن زاویه هم تابع t.

$$x(t) = R\cos[\varphi(t)]$$

$$\Longrightarrow \quad [y(t)]^2 = R^2 - R^2 \cos^2[\varphi(t)]$$

$$= R^2 \sin^2[\varphi(t)]$$

$$y(t) = \pm R \sin[\varphi(t)]$$

اگر علامت منفی کرد

$$\varphi \to \tilde{\varphi} = -\varphi \qquad \cos\tilde{\varphi} = \cos\varphi$$

$$x(t) = R\cos[\tilde{\varphi}(t)]$$

$$y(t) = R\sin[\tilde{\varphi}(t)]$$

در نهایت آنها را با حذف φ نشان می‌دهیم.

φ و x و y تابع t

$$x = R\cos\varphi$$

$$y = R\sin\varphi$$

این معادله‌ها پارامتری‌ی دایره در مختصات قطبی است:

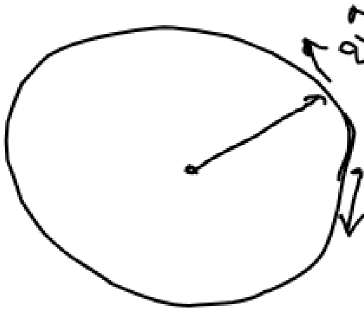
$\rho = R$ ثابت

$$r = R\left(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi\right) = R\hat{\rho}$$

$$v = R\dot{\varphi}\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right) = R\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}$$

$$\|v\| = \sqrt{v\cdot v} = \sqrt{R^2\dot{\varphi}^2} = R|\dot{\varphi}| = \frac{ds}{dt}$$

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}\hat{\varphi} = \begin{cases} \hat{\varphi}, & \dot{\varphi} > 0 \\ -\hat{\varphi}, & \dot{\varphi} < 0 \end{cases}$$



$\hat{v}$, $\dot{\varphi} > 0$ حرکت = پادساعتگرد

$\hat{v}$, $\dot{\varphi} < 0$ حرکت = ساعتگرد

محیط دایره: متحرک ممکن از یک نقطه روی محور ها (بخش مثبت)

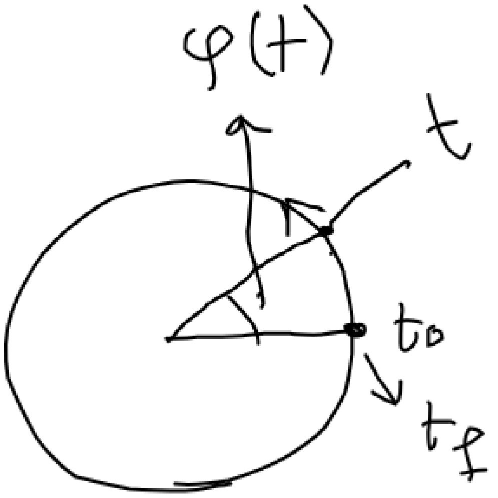
شروع کند به هر آن جا برگردد، ولی هرگز روی مسیر

قبلی برنگردد:

چنین حالتی

پیش نیاید.

این یعنی ضرایب همه مثبت یا همه منفی (تغییر علامت نمی‌دهد)



نسلّم $\dot{\varphi} > 0$:

لما t_0 ، $\varphi = 0$

لما t_f ، $\varphi = 2\pi$

$$\|v(\tau)\| = R|\dot{\varphi}| = R\dot{\varphi}$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \, \|v(\tau)\|$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \, R \, \dot{\varphi}(\tau) = R[\varphi(t) - \varphi(t_0)]$$

محيط الدائرة $= 2\pi R$

محيط الدائرة ; $t \to t_f$: $2\pi = \varphi(t_f) \to \varphi(t)$: لـ

یک حالت دیگر: $\dot{\varphi} < 0$ (همچنان، $\dot{\varphi}$ تغییر علامت نمی‌دهد.)

$$\|v\| = R|\dot{\varphi}| = -R\dot{\varphi}$$

با افزایش t، φ کم می‌شود ($\dot{\varphi}$ منفی است)

برای این که دایره یک بار پیموده شود، مثلاً اگر

$\varphi(t_0) = 0$، $\varphi(t_f) = -2\pi$

$$\text{محیط دایره} = \int_{t_0}^{t_f} d\tau \, \|v(\tau)\| = -R\int_{t_0}^{t_f} d\tau \, \dot{\varphi}(\tau)$$

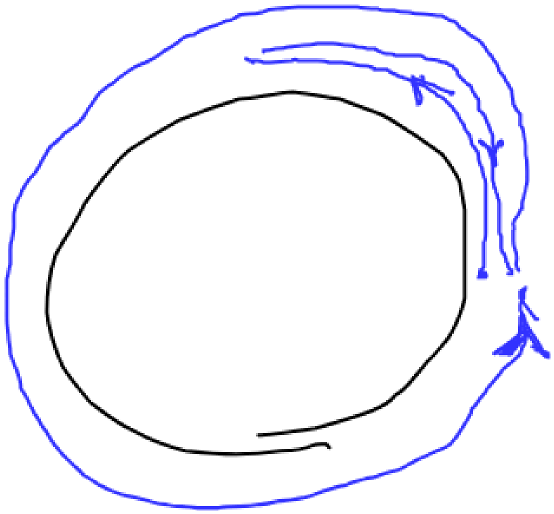
المسافة $= -R\left[\phi(\tau)\right]_{\tau=t_0}^{\tau=t_f}$

$= -R\left\{\phi(t_f) - \phi(t_0)\right\} = -R(-2\pi - 0)$

$= 2\pi R$ ✓

همین مسئله با یک تغییر کوچک:

متحرک در بخشی از مسیر برمیگردد:



ربع دایره: پیش میگردد

همراه ربع: بر میگردد

کل دایره را میگردد.

طول کل مسیر:

بخش اول :

$t: t_0 \to t_1 \qquad \dot{\varphi} > 0$

$\varphi: 0 \to \frac{\pi}{2}$

بخش دوم :

$t: t_1 \to t_2 \qquad \dot{\varphi} < 0$

$\varphi: \pi/2 \to 0$

بخش سوم :

$t: t_2 \to t_f \qquad \dot{\varphi} > 0$

$\varphi: 0 \to 2\pi$

$$\|v\| = R|\dot{\varphi}|$$

$$L = \int_{t_0}^{t_f} d\tau \, \|v(\tau)\| = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} d\tau \, \|v(\tau)\|}_{L_1}$$

$$+ \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} d\tau \, \|v(\tau)\|}_{L_2} + \underbrace{\int_{t_2}^{t_f} d\tau \, \|v(\tau)\|}_{L_3}$$

$$= R \left[\int_{t_0}^{t_1} d\tau \, \dot{\varphi}(\tau) - \int_{t_1}^{t_2} d\tau \, \dot{\varphi}(\tau) + \int_{t_2}^{t_f} d\tau \, \dot{\varphi}(\tau) \right]$$

$$= R \left\{ \left[\varphi(t_1) - \varphi(t_0) \right] - \left[\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \right] + \left[\varphi(t_f) - \varphi(t_2) \right] \right\}$$

$\varphi(t_0)=0 \quad \varphi(t_1)=\frac{\pi}{2} \quad \varphi(t_2)=0 \quad \varphi(t_3)=2\pi$

$L_1=R\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2}R \longrightarrow$ طول ربع دایره

$L_2=-R\left(0-\pi/2\right)=\frac{\pi}{2}R \longrightarrow$ طول ربع دایره

$L_3=R\left(2\pi-0\right)=2\pi R \longrightarrow$ محیط دایره

$L=3\pi R \longrightarrow$

محیط دایره $\times 1.5$

یک دایره + ربع دایره $\times 2$.

یک تغییر کوچک: مبدأ جابه‌جا شود، مرکز بر مبدأ نیست.

مرکز نقطه‌ی C :

دایره:

$$\|r - c\| = R \qquad C = c_1\hat{x} + c_2\hat{y}$$

انتقال جبری : انتقال هندسی

$$x \to x - c_1$$
$$y \to y - c_2$$

$$x = c_1 + R\cos\varphi$$

$$y = c_2 + R\sin\varphi$$

بردار سرعت ←

$$v = R\dot{\varphi}\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right)$$

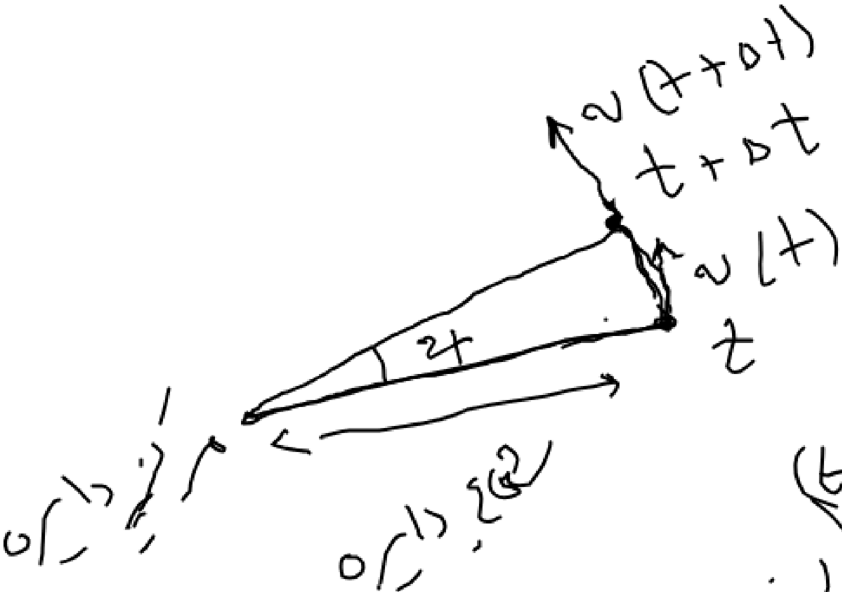
$$\|v\| = R|\dot{\varphi}|$$

$$\hat{v} = \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right)$$

اگر خم تکه‌ای از دایره بود (که اینجا هست) مرکز دایره و شعاع آن از کجا به دست میاد؟

سرعت بر خم مماس است.

Δt کوچک ، φ کوچک



φ زاویه‌ی شعاع دوم $(t+\Delta t)$ نسبت به شعاع اول (t) است.

این زاویه برابر است با زاویه‌ی $v(t+\Delta t)$ نسبت به $v(t)$

سرعت مماس بر دایره و در نتیجه عمود بر شعاع است

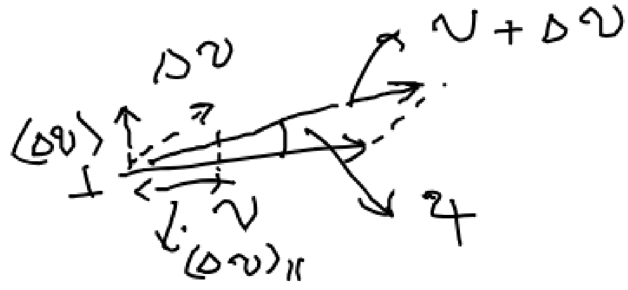
سرعت‌ها بر شعاع‌ها عمود اند، پس زاویه‌ی بین سرعت‌ها همان زاویه‌ی بین شعاع‌هاست.

زاویه‌ی $v(t+\Delta t)$ نسبت به $v(t)$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v$$

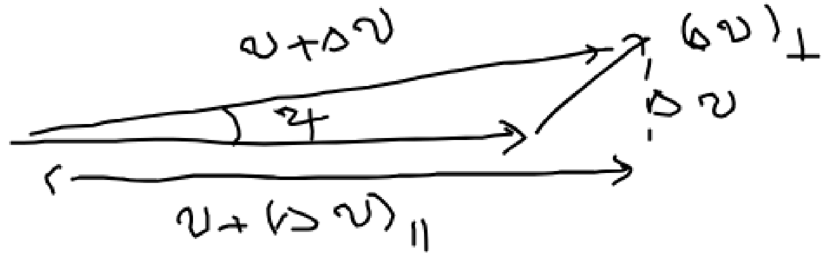
Δv یک بخش موازی با v دارد و یک بخش عمود بر v

$$\Delta v = (\Delta v)_{\parallel} + (\Delta v)_{\perp}$$



$$\frac{1}{x+\alpha} = \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\alpha + \varepsilon\alpha$$

$\neq 0$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$

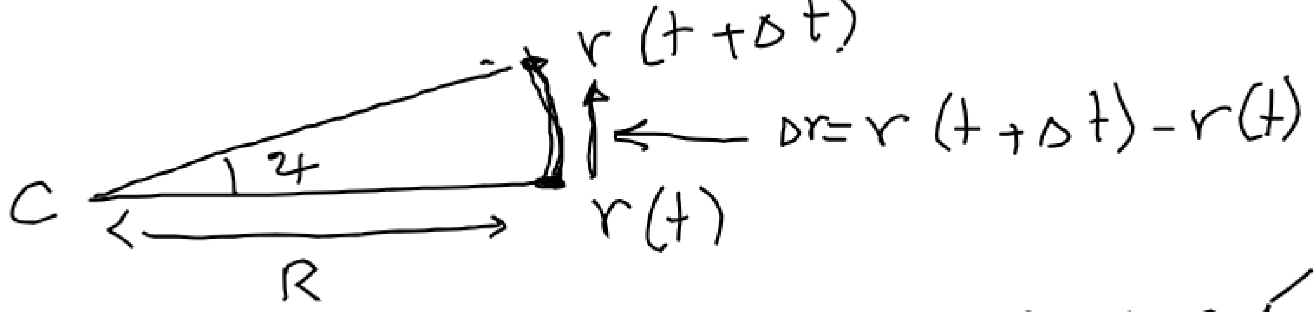


$$\tan\psi = \frac{\|\Delta v_\perp\|}{\|(\Delta v)_\parallel + v\|} = (\Delta v_\perp)\left(\frac{1}{\|v\|} - \frac{v\cdot\Delta v_\parallel}{\|v\|^3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\|\Delta v_\perp\|}{\|v\|} + o(\Delta v)$$

$$\tan\psi = \tan 0 + (\tan' 0)\psi + o(\psi)$$
$$= 0 + 1\times\psi + o(\psi)$$

$$\psi = \frac{\|\Delta v_\perp\|}{\|v\|} + o(\Delta v)$$



یک بردار عمود بر Δr به اندازه‌ی r جابجا

تا به مرکز.

مرکز: نقطه‌ی c

طول کمان $\approx$ طول وتر $= \|\Delta r\| = R\psi$

یک رابطه‌ی دیگر: رابطه‌ی بین طول کمان، شعاع و ψ

$$R = \frac{\|\Delta r\|}{\varphi}$$

پس

تقریبی ، $\Delta t \to 0$

$$\|\Delta r\| = \|v\| \Delta t$$

$$R = \|v\| \frac{\Delta t}{\varphi} \qquad \varphi = \frac{\|\Delta v_\perp\|}{\|v\|}$$

$$= \frac{\|v\|^2}{\|\Delta v_\perp\|} \Delta t = \frac{v \cdot v}{\left\|\frac{\Delta v_\perp}{\Delta t}\right\|}$$

$$R = \frac{v \cdot v}{\left\| \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_\perp \right\|}$$

رابطه‌ی دقیق : $\Delta t \to 0$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \stackrel{?}{=} \qquad \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_\parallel + \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp$$

$\parallel$ و $\perp$: موازی با و عمود بر v

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = v \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_\parallel \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_\parallel \parallel v$$

عدد

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_\parallel = A\, v \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_\parallel \cdot v = A\, v \cdot v$$

$$A = \frac{v \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_\parallel}{v \cdot v} \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_\parallel = v\, \frac{v \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_\parallel}{v \cdot v}$$

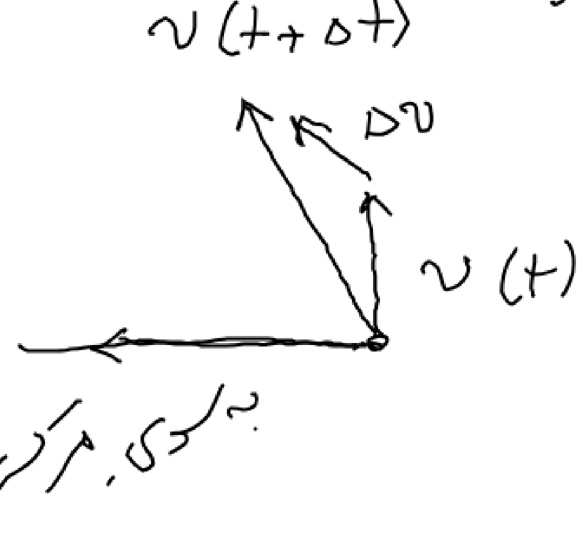
$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\parallel} = v \, \frac{v \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)}{v \cdot v}$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\perp} = \frac{dv}{dt} - v \, \frac{v \cdot \frac{dv}{dt}}{v \cdot v}$$

$$R = \frac{v \cdot v}{\left\| \frac{dv}{dt} - v \, \frac{v \cdot \frac{dv}{dt}}{v \cdot v} \right\|}$$

از r در جهت مرکز به اندازه‌ی R ← مرکز دایره

جهت مرکز ؟



$$\Delta v = (\Delta v)_{\parallel} + (\Delta v)_{\perp}$$

جهت $(\Delta v)_{\perp}$

همان جهت مرکز است : $\hat{n}$ (بردار یکه از r به سوی مرکز)

جهت $(\Delta v)_\perp$ ، همان جهت $\dfrac{(\Delta v)_\perp}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$ ⟵ جهت $\left(\dfrac{dv}{dt}\right)_\perp$

$$\hat{n} = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp}{\left\| \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \right\|}$$

C: مرکز:

$$C = r + R\hat{n}$$

$$C = r + \frac{v \cdot v \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp}{\left\| \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \right\|^2} \qquad R = \frac{v \cdot v}{\left\| \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \right\|}$$

$$\hat{n} = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp}{\left\| \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \right\|} \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp = \frac{dv}{dt} - v\,\frac{v \cdot \frac{dv}{dt}}{v \cdot v}$$

$$R = \frac{v \cdot v}{\left\| \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \right\|} \qquad C = r + \hat{n} R$$

$$= r + \frac{v \cdot v \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp}{\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp}$$

این می‌شه برای لطفن همان دایره‌ای که از سه‌تا نقطه میگذرد

و نتیجه بعد: تحقیق کنید که شعاع چی درست به دست میاید.