ضرب برونی (خارجی) فقط برای فضای سه بعدی:

$$(u \times v)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, u_j \cdot v_k$$

و اگر پایه یکه - متعامد باشه، ε کاملا پادمتقارن است:

هر دو شاخص که جابجا بشوند نتیجه در (-1) ضرب میشود.

در این صورت ε_{ijk} ها با فقط یک عدد مشخص میشوند:

$$\varepsilon_{123}$$

استدلال همان است که برای دترمینان به کار رفت:

$$\varepsilon_{iik}=0=\varepsilon_{iki}=\varepsilon_{ijj}$$

دو شاخص برابر: $\varepsilon \to 0$

برای بقیه:

منظور جابجایی شاخص‌ها که ijk را به 123 تبدیل کنه

$\varepsilon_{132}=-\varepsilon_{123}$ یک جابجایی

$\varepsilon_{213}=-\varepsilon_{123}$ یک جابجایی

$\varepsilon_{231}=\varepsilon_{123}$ دو جابجایی

$\varepsilon_{312}=\varepsilon_{123}$ دو جابجایی

$\varepsilon_{321}=-\varepsilon_{123}$ یک جابجایی

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{دست‌کم دو شاخص یکسان} \\ +\varepsilon_{123} & (ijk) \text{ جایگشت زوج از } (123) \\ -\varepsilon_{123} & (ijk) \text{ جایگشت فرد از } (123) \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{123} \begin{cases} 0 & \text{دست‌کم دو شاخص یکسان} \\ +1 & (ijk) \text{ جایگشت زوج از } (123) \\ -1 & (ijk) \text{ جایگشت فرد از } (123) \end{cases}$$

همه‌ی ε_{ijk} ها با فقط یک عدد (ε_{123}) تعیین می‌شوند.

در اصل بر ε_{123} قید مثبت:

میتوان یک قید وارد کرد:

اگر $u \cdot v = 0 \Leftarrow$

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$$

ی

$$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\|$$

با این قیدها و پایه‌ی یکه متعامد:

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1 \qquad e_1 \cdot e_2 = 0$$

$$\|e_1 \times e_2\| = 1 \times 1 = 1$$

$$e_1 \times e_2 = \sum_i (e_1 \times e_2)_i \, e_i$$

$$= \sum_i \left[\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (e_1)_j (e_2)_k \right] e_i$$

$$e_1 = 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3$$

$(e_1)_1 = 1$

$$(e_1)_j = \delta_{1j}$$

$(e_1)_2 = 0$

$(e_1)_3 = 0$

$$e_2 = 0 \times e_1 + 1 \times e_2 + 0 \times e_3$$

$(e_2)_1 = 0$

$(e_2)_2 = 1$

$$(e_2)_k = \delta_{2k}$$

$(e_2)_3 = 0$

$$\sum_j \delta_{j1} A_j = \delta_{11} A_1 + \delta_{21} A_2 + \cdots$$

$$= 1 \times A_1 + 0 \times A_2 + 0 \times A_3 \qquad \cdots = \delta_{31} A_3 =$$ اینا رو صفر بگیر

$$= A_1$$

$$\sum_k \delta_{k2} A_k = \cancel{\delta_{12}}^{0} A_1 + \delta_{22}^{\,1} A_2 + \cancel{\delta_{32}}^{0} A_3$$

$$= A_2$$

$$\sum_k \delta_{km} A_k = A_m$$ همه ی جملات صفر میشن بجز $k=m$

$$= \delta_{mm} A_m \qquad \delta_{mm} = 1$$

$$(e_1 \times e_2)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (e_1)_j (e_2)_k$$

$$= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \delta_{1j} \delta_{2k}$$

$$= \sum_{k} \varepsilon_{i1k} \delta_{2k}$$

$$= \varepsilon_{i12}$$

$\varepsilon_{112} = 0$

$\varepsilon_{212} = 0$ [illegible]

$(e_1 \times e_2)_1 = 0 \quad (e_1 \times e_2)_2 = 0 \quad (e_1 \times e_2)_3 = \alpha$

α [illegible] ناصفر

$$e_1 \times e_2 = \sum_i (e_1 \times e_2)_i \, e_i$$

$$= (e_1 \times e_2)_3 \, e_3 = \alpha e_3$$

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1 \qquad e_1 \cdot e_2 = 0$$

به جای $\bar{\alpha}\alpha$ ، $\alpha\alpha$ آمده، چون فضا حقیقی است.

$$\|e_1 \times e_2\| = \|e_1\| \, \|e_2\| = 1 \times 1 = 1$$

$$\|e_1 \times e_2\|^2 = (e_1 \times e_2) \cdot (e_1 \times e_2)$$

$$= (\alpha e_3) \cdot (\alpha e_3) = \alpha^2 \, e_3 \cdot e_3$$

پایه‌ی e یکه (متعامد) است. پس

$$e_3 \cdot e_3 = 1$$

$$(e_1 \times e_2) \cdot (e_1 \times e_2) = 1 = \alpha^2 \, e_3 \cdot e_3$$
$$= \alpha^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 = 1 \qquad \alpha = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{123}$$

برای یک پایه‌ی یکه متعامد:

$$(\varepsilon_{123})^2 = 1$$

برای یک پایه‌ی یکه-متعامد،

$$\varepsilon_{123} = \pm 1$$

پایه‌ی e : راستگرد $\qquad \varepsilon_{123} = 1$

چپگرد $\qquad \varepsilon_{123} = -1$

وقتی ضرب برونی به ضرب درونی مربوط است،

(ضرب برونی با ضرب درونی سازگار است)

ε_{123} برای یک پایه‌ی یکه-متعامد $(+1)$ یا (-1) است.

+1 برای پایه‌ی (کلی) راستگرد

-1 برای پایه‌ی (کلی) چپگرد.

از این پس فرض میشود ضرب برونی با ضرب درونی سازگار هست.

و این پایه $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ را راستگرد فرض میشود.

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$

یک نامگذاری دیگر:

$\hat{x} \to \hat{i}$

$\hat{y} \to \hat{j}$

$\hat{z} \to \hat{k}$

$$\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$$

باز برای پایه‌ی یک‌متعامد e ها

(e_1, e_2, e_3)

[illegible]

$$(e_1 \times e_3)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (e_1)_j (e_3)_k$$

$$(e_1 \times e_3)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \delta_{1j} \delta_{3k} = \varepsilon_{i13}$$

$$(e_1 \times e_3)_i = 0, \quad i \neq 2$$

$$(e_1 \times e_3) = (e_1 \times e_3)_2 \, e_2 = \varepsilon_{213} \, e_2$$

$$= -\varepsilon_{123} \, e_2$$

برای [illegible]

$$\varepsilon_{123} = 1$$

(e_1, e_2, e_3) [illegible]

$$e_1 \times e_3 = -e_2$$

مشابه: لطفاً نشان دهید:

$$e_2 \times e_3 = e_1$$

$$e_2 \times e_1 = -e_3 \qquad e_3 \times e_1 = +e_2 \qquad e_3 \times e_2 = -e_1$$

$$u \cdot (v \times w) = \sum_i u_i \, (v \times w)_i$$

$$= \sum_i u_i \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \, v_j \, w_k$$

$$= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \, u_i v_j w_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{jik} \, u_j v_i w_k$$

چون که طبق تعریف: ε کاملاً پادمتقارن

$$u \cdot (v \times w) = -\sum \varepsilon_{ijk} \, v_i \, u_j \, w_k$$

$$= -v \cdot (u \times w)$$

$$v\cdot(u\times w) = -u\cdot(v\times w)$$

این نتیجه مستقل از ترتیب است.

$$u\cdot(w\times v) = -u\cdot(v\times w)$$

چون ضرب برداری پادتقارن است.

مشابه: $w\cdot(v\times u) = -u\cdot(v\times w)$

پس $u\cdot(v\times w)$ نسبت به جابجایی هر دو بردار پادتقارن است.

البته $u\cdot(v\times w)$ نسبت به هر یک از سه بردار هم خطی است.

پس $u\cdot(v\times w)$ و قرینه‌اش حجم جعبه‌ی متوازی‌الاضلاعی

که یال‌هایش u و v و w اند را دارد.

دیده شد چنین حجمی با فقط یک عدد مشخص می‌شود:

هر دو حجم جعبه‌ای با هم متناسب اند.

$$u\cdot(v\times w) = c \left[\text{حجم جعبه‌ی متوازی‌الاضلاعی که یال‌های آن } u \text{ و } v \text{ و } w \text{ اند.}\right]$$

عدد ثابت

برای تعیین c، یک حالت خاص میگیریم:

(e_1, e_2, e_3) یک سه‌تایی متعامد، که کنج راستگرد است.

$$e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = e_1 \cdot e_1 = 1$$

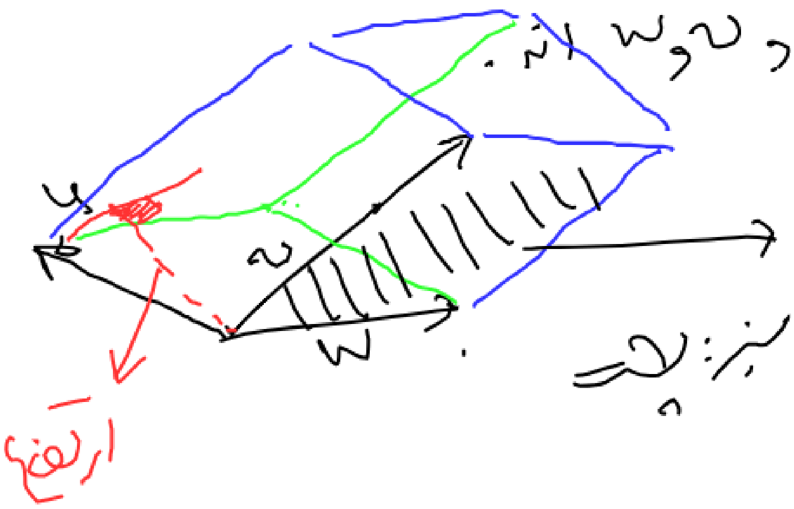
$= c\,[$ حجم جبری مکعب واحد با یالهایی که کنج راستگرد میسازند $]$

تعریف میکنیم: حجم جبری مکعب واحد با یالهایی که کنج راستگرد میسازند $= 1$

نتیجه:

$C = 1$

حجم جبری ی متوازی السطوحی که بردارهای آن u و v و w اند. $= u \cdot (v \times w)$



قاعده ی متوازی السطوح

سبز: سطح

ارتفاع: تصویر u در جهت عمود بر قاعده

کنج (u, v, w) راستگرد: قاعده‌ی دست راست.

حجم جبری ← حجم (مثبت)

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم

(تصویر u در راستای عمود بر قاعده) × مساحت قاعده =

جهت عمود بر قاعده: با قاعده‌ی دست راست: $(v, w, \ )$

یعنی: حجم = (بردار) $\cdot\, u$

اندازه‌ی این بردار مساحت متوازی‌الاضلاعی است که ضلع‌های آن v و w اند

جهت این بردار با قاعده‌ی دست راست به دست می‌آید: $(v, w, \quad)$

عمود بر متوازی‌الاضلاع است و

یعنی: حجم $= u \cdot (v \times w)$

پس $v \times w$ برداری است که طول $v \times w$

مساحت متوازی الاضلاعی است که ضلع‌های ش

v و w اند، و جهت $v \times w$ بر این ~~متوازی الاضلاع~~ صفحه‌ی

عمود است (یعنی بر v و w عمود است)،

چنان که $(v, w, v \times w)$

راستگرد است.

این را می‌شود تعریف ضرب برداری گرفت.

$$[u \times (v \times w)]_i$$

باید یک پله عقب‌تر
بگیرم متناظر را اینطور: $\varepsilon_{123} = 1$

$$= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, u_j\, (v \times w)_k$$

$$= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, u_j \sum_{l,m} \varepsilon_{klm}\, v_l\, w_m$$

$$= \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm}\, u_j\, v_l\, w_m$$

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = -\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lkm} = \sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}$$

$$= \sum_k \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} =: A_{ijlm}$$

$$A_{ijlm} = 0, \quad i=j \text{ یا } l=m$$

پس حالتی را می‌گیریم که $i \neq j$ و $l \neq m$

از چهار شاخص i, j, l, m اگر $i \neq l$ و $j \neq l$

پس $i \neq j$، $i \neq l$، $j \neq l$: از سه شاخص i, j, l یکی 1، یکی 2، یکی 3 است

$i \neq j$ ، $i \neq l$ $j \neq l$

پس i، j، l یکی از 1، 2، 3 اند.

$\Longleftarrow$ $A_{ijlm}=0$ چرا؟

$$A_{ijlm}=\sum_k \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}$$

در ($\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}$)، k هر مقداری داشته باشد یا با i برابر $\Longrightarrow$

($\varepsilon_{kij}=0$)، یا با j برابر $\Longrightarrow$ ($\varepsilon_{kij}=0$)، یا با

l برابر $\Longrightarrow$ ($\varepsilon_{klm}=0$) پس در هر حال $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}=0$

به طور مشابه، اگر $m \neq i$, $m \neq j$,

$$\varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm} = 0 \,, \quad \forall k$$

تنها حالتی که ممکن است A_{ijlm} صفر نباشد این است:

$i \neq j$, $l \neq m$ $\quad (l = i \,,\, m = j)$ یا $(l = j \,,\, m = i)$

حالت ۱: $\quad i \neq j \quad l = i \quad m = j$

$$A_{ijlm} = \sum_k \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm} = \sum_k \left(\varepsilon_{kij}\right)^2$$

تنها یک جمله از این جمع ناصفر است — آن جمله‌ای که $i \neq k \neq j$

به ازای یکتا مقدار k، که $\varepsilon_{kij} \neq 0$،

$$\varepsilon_{kij} = \pm 1 \Rightarrow (\varepsilon_{kij})^2 = 1$$

یکم: $A_{ijlm} = 1 \,, \quad i \neq j \quad \begin{matrix} l = i \\ m = j \end{matrix}$

حالت دوم: $i \neq j \quad l = j \quad m = i$

$$A_{ijlm} = \sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kji}$$

$$= -\sum_k (\varepsilon_{kij})^2$$

با استدلالی مشابه حالت یکم، $\sum_k (\varepsilon_{kij})^2 = 1$

$$A_{ijlm} = -1, \quad i \neq j \quad l = j \quad m = i$$

$$A_{ijlm} = +1, \quad i \neq j \quad l = i \quad m = j$$

در بقیه‌ی موارد $A_{ijlm} = 0$

اگر $i \neq j$ و $l = j$ و $m = i$

این را می‌شود در این رابطه خلاصه کرد: در طرف راست، جمله‌ی اول صفر و جمله‌ی دوم یک است.

$$A_{ijlm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

اگر $i \neq j$ و $l = i$ و $m = j$، در طرف راست جمله‌ی اول یک و جمله‌ی دوم صفر

نتیجه‌ای از:

$$\sum_{k} \varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$[u \times (v \times w)]_i = \sum_{j,k,l,m} \overbrace{\varepsilon_{ijk}}^{=\varepsilon_{kij}} \varepsilon_{klm}\, u_j v_l w_m$$

$$= \sum_{j,l,m} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, u_j v_l w_m$$

$$= \sum_{j,l,m} \delta_{il}\delta_{jm} u_j v_l w_m - \sum_{j,l,m} \delta_{im}\delta_{jl} u_j v_l w_m$$

$$\sum_{j,l,m} \delta_{il}\,\delta_{jm}\,u_j v_l w_m \qquad \sum_{l} \delta_{il} v_l = \delta_{ii} v_i = v_i$$

$$= \underbrace{\sum_{j,m} \delta_{jm} u_j w_m}_{u \cdot w}\, v_i \qquad = (u \cdot w)\, v_i$$

$$\sum_{j,l,m} \delta_{im}\,\delta_{jl}\,u_j v_l w_m \qquad \sum_{m} \delta_{im} w_m = w_i = \delta_{ii} w_i$$

$$= \underbrace{\sum_{j,l} \delta_{jl} u_j v_l}_{u \cdot v}\, w_i \qquad = (u \cdot v)\, w_i$$

$$[u \times (v \times w)]_i = (u \cdot w) v_i - (u \cdot v) w_i$$

$$u \times (v \times w) = \sum_i [u \times (v \times w)]_i e_i$$

$$= \sum_i (u \cdot w) v_i e_i - \sum_i (u \cdot v) w_i e_i$$

$$= (u \cdot w) v - (u \cdot v) w$$

$$\boxed{u \times (v \times w) = (u \cdot w) v - (u \cdot v) w}$$

مستقل از پایه

$$\sum_k \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$ پایه‌ی یک تنسور

اگر حدهای طرف راست وجود داشته باشند. F و G برداری

$$\lim_{t\to a}(F\cdot G)(t)=\left[\lim_{t\to a}F(t)\right]\cdot\left[\lim_{t\to a}G(t)\right]$$

$$\lim_{t\to a}(fG)(t)=\left[\lim_{t\to a}f(t)\right]\left[\lim_{t\to a}G(t)\right]$$

f عددی و G برداری

یک نتیجه‌ی یک ... مستقیماً
(جمع را استقرا)

مشابه برای ضرب برونی:

$$(u\times v)_i=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}u_j v_k$$

با جابجایی یک مقدار، یکی [illegible] $\varepsilon_{123}=1$

$$(u\times v)_1=\sum_{j,k}\varepsilon_{1jk}u_jv_k=\varepsilon_{123}u_2v_3+\varepsilon_{132}u_3v_2$$

$$=u_2v_3-u_3v_2$$

مشابه:

$$(u\times v)_2=u_3v_1-u_1v_3$$

$$(u\times v)_3=u_1v_2-u_2v_1$$

فرض کنیم F و G (که برداری‌اند) در $t\to a$ حد دارند:

$$\lim_{t\to a}F(t)=L \qquad \lim_{t\to a}G(t)=M$$

پس مؤلفه‌ها حد دارند.

$$\lim_{t\to a} F_i(t) = L_i$$

$$\lim_{t\to a} G_i(t) = M_i \implies \lim_{t\to a} (F\times G)_1(t) = L_2M_3 - L_3M_2$$

به همین ترتیب.

$$\lim_{t\to a} (F\times G)_2(t) = L_3M_1 - L_1M_3$$

$$\lim_{t\to a} (F\times G)_3(t) = L_1M_2 - L_2M_1$$

پس

$$\lim_{t\to a} (F\times G)t = (L_2M_3 - L_3M_2)e_1 + (L_3M_1 - L_1M)e_2 + (L_1M_2 - L_2M_1)e_3$$

$$\lim_{t \to a} F(t) = L \ , \ \lim_{t \to a} G(t) = M$$ F و G و L و M : بردار

$$\Rightarrow \lim_{t \to a} (F \times G)(t) = L \times M$$ ← در فضای سه بعدی

کا ممکن است نه!

$$\lim_{t \to a} F(t) = L \quad \lim_{t \to a} G(t) = M \quad \lim_{t \to a} H(t) = N$$

$$\lim_{t \to a} [F \cdot (G \times H)](t) = L \cdot (M \times N)$$

$$\lim_{t \to a} [F \times (G \times H)](t) = L \times (M \times N)$$

$$\lim_{t\to a} \overrightarrow{f(t)}^{\text{عدد}} = 0 \;,\; \exists \underset{\text{عدد}}{M} \;,\; \delta > 0 \ni 0 < |t-a| < \delta$$

$$\Rightarrow \underset{\text{بردار}}{|F(t)|} < M$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to a} (fF)(t) = 0$$

$$\lim_{t\to} F(t) = 0 \;,\; \exists M, \delta > 0 \ni 0 < |t-a| < \delta$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|F(t)\| < M}$$

$|F(t)| < M$ به معنی

$$\Rightarrow \lim_{t\to a} (fF)(t) = 0$$

$\lim_{t \to a} F(t) = 0$, $\exists M, \exists \delta > 0 \ni 0 < |t - a| < \delta$
$\Rightarrow |G(t)| < M$

برای G, F

$\Rightarrow \lim_{t \to a} (F \cdot G)(t) = 0$

$\lim_{t \to a} (F \times G)(t) = 0$ در فضای ۳ بعدی

قضایای پیوستگی هم کاملاً مشابه اند.

برای توابع عددی:

$$\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$$

f در a پیوسته است:

یعنی:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ni |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

برای توابع برداری هم ثابت به:　　　F: بردار

هر مؤلفه

F در a پیوسته:

$$\lim_{t \to a} F(t) = F(a)$$

یعنی:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \Rightarrow |t-a| < \delta \Rightarrow \| F(t) - F(a) \| < \varepsilon$$

ولی در بردار در

$$|F(t) - F(a)| < \varepsilon$$

F و G برداری

با استدلالهای مشابه

F و G در a پیوسته

$$\Longrightarrow (F+G) \text{ و } (F-G) \text{ و } (F\cdot G) \text{ و } (F\times G)$$

پیوسته

در a پیوسته

F برداری و f (عددی) در a پیوسته

$$\Longrightarrow \underbrace{fF \text{ و } \frac{F}{f}}_{\text{در a پیوسته}}$$

(خارج قسمت)

این دو پیوسته‌اند به شرط آنکه

$f(a)\neq 0$

مشتق‌گیری از تابع‌های برداری (ی یک متغیره)

F : بردار

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} =: F'(a)$$

در صورت وجود حد، حد واقع چپ.

F در a مشتق‌پذیر است. مشتق F در a را با $F'(a)$

نشان می‌دهیم. با این علامت : $(DF)(a)$

$$DF = F'$$

F برداری : a عدد

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \Big\}$$ برداری

این حد وجود دارد اگر و تنها اگر حد هر یک از مؤلفه‌ها وجود داشته باشد.

در این صورت، مؤلفه‌ی i ام حد برابر است با حد مؤلفه‌ی i ام.

$[F'(a)]_i$ مؤلفه‌ی i ام حد : $(F_i)'(a)$ حد مؤلفه‌ی i ام

$$[F'(a)]_i = \underbrace{(F_i)'(a)}_{F_i'(a)}$$

پس برای مشتق‌گیری از یک تابع برداری کافی است

از تک‌تک مؤلفه‌ها مشتق گرفته شود.

$$[(DF)(a)]_i = [(DF_i)](a)$$

$$(DF_i)(a)$$

محاسبه با تابع‌های عددی یک متغیره.

F و G برای در a مشتق‌پذیر

$$(F+G)'(a) = F'(a) + G'(a)$$

$$(F-G)'(a) = F'(a) - F'(a)$$

$$(F \cdot G)'(a) = [F'(a)] \cdot [G(a)] + [F(a)] \cdot [G'(a)]$$

$$(F \times G)'(a) = [F'(a)] \times [G(a)] + [F(a)] \times [G'(a)]$$

فضای سه بعدی

F بردار و f عدد

در a مشتق‌پذیر

$$(fF)'(a) = [f'(a)]F(a) + [f(a)]F'(a)$$

$$\left(\frac{F}{f}\right)'(a) = \frac{[f(a)]F'(a) - [f'(a)]F(a)}{[f(a)]^2}, \quad f(a) \neq 0$$

قاعده‌ی زنجیری مشتق‌گیری:

f (اگر) در a مشتق‌پذیر

F (نیز) در $f(a)$ مشتق‌پذیر است $\Longleftarrow$

$(F \circ f)$ (نیز) در a مشتق‌پذیر است و

$$(F \circ f)'(a) = \{F'[f(a)]\} f'(a)$$

با نماد دیگر:

$$[D(F \circ f)](a) = \{(DF)[f(a)]\}(Df)(a)$$

به شکل دیفرانسیلی :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{df}\,\frac{df}{dt}$$

هر جا که تابعی برداری یک متغیره وارد میشود سینماتیک است.

بردار مکان (r) برحسب زمان t : $r(t)$

$$v(t) = r'(t) = \dot{r}(t) = (Dr)(t)$$

v : سرعت لحظه‌ای (آنی)

بردار

$$a(t) = v'(t) = \dot{v}(t) = (Dv)t$$

a : شتاب

$$a = r'' = \ddot{r} = D^2 r = DDr$$

$$F(t) = F_1(t)\, e_1 + F_2(t)\, e_2 + \cdots$$

e_1 و e_2 و ... پایه

$$[F'(t)]_i = (F_i)'(t)$$

$$\{F'(t)\}_1 = (F_1)'(t)$$ از ۸ل:

$$F'(t) = \sum_i \{F'(t)\}_i\, e_i = \sum_i [(F_i)'(t)]\, e_i$$

مقایسه با خط اول

اتفاقاً در مشتق‌گیری بردار، پایه‌ها ثابت گرفته شده‌اند

$$\frac{d}{dt}(F_1 e_1) = \frac{dF_1}{dt} e_1 + F_1 \frac{de_1}{dt}$$

صفر است: e_1 ثابت فرض شده

اگر چنین نباشد؟ e_i ها ثابت نباشند؟

$$F'(t) = \sum_i [F_i'(t)] e_i(t) + \sum_i [F_i(t)] [e_i'(t)]$$