$$e_1 = \hat{x} - \hat{y} \qquad e_2 = \frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1$$
$$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0 = \hat{y}\cdot\hat{x}$$
$$\hat{y}\cdot\hat{y} = 1$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{E}_2 = \sqrt{2}\, e_2 - \frac{1-i}{2} e_1$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \qquad \tilde{E}_2 = \hat{x} + i\hat{y} + \frac{i-1}{2}(\hat{x} - \hat{y})$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{i+1}{2}\hat{x} + \frac{i+1}{2}\hat{y} = \frac{i+1}{2}(\hat{x} + \hat{y})$$

$$\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y})\right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y})\right] \qquad \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\hat{x}-\hat{y}) \cdot (\hat{x}-\hat{y})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{x}}_{1} - \cancelto{0}{\hat{y}\cdot\hat{x}} - \cancelto{0}{\hat{x}\cdot\hat{y}} + \underbrace{\hat{y}\cdot\hat{y}}_{1}\right] = 1$$

$$\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y})\right] \cdot \left[\frac{1+i}{2}(\hat{x}+\hat{y})\right]$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\left(\frac{1+i}{2}\right)(\hat{x}-\hat{y}) \cdot (\hat{x}+\hat{y})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1+i}{2}\left(\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{x}}_{1} - \cancelto{0}{\hat{y}\cdot\hat{x}} + \cancelto{0}{\hat{x}\cdot\hat{y}} - \underbrace{\hat{y}\cdot\hat{y}}_{1}\right) = 0$$

$$\tilde{E}_2 \cdot \tilde{E}_1 = \overline{\langle \tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_2 \rangle} = 0$$

$$= \overline{\left[\frac{1+i}{2}(\hat{x}+\hat{y})\right] \cdot \left[\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}}\right]} = \overline{\left(\frac{1+i}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}+\hat{y}) \cdot (\hat{x}-\hat{y})$$

$$= \frac{1-i}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{x}}_{1} + \underbrace{\hat{y}\cdot\hat{x}}_{0} - \underbrace{\hat{x}\cdot\hat{y}}_{0} - \underbrace{\hat{y}\cdot\hat{y}}_{1}\right) = 0$$

$$\underline{\tilde{E}_2 \cdot \tilde{E}_2} = \overline{\left[\frac{1+i}{2}(\hat{x}+\hat{y})\right]} \cdot \left[\frac{1+i}{2}(\hat{x}+\hat{y})\right] \qquad i^2 = -1$$

$$= \overline{\left(\frac{1+i}{2}\right)}\,\frac{1+i}{2}\,(\hat{x}+\hat{y}) \cdot (\hat{x}+\hat{y})$$

$$= \frac{1-i}{2}\,\frac{1+i}{2}\left(\hat{x}\cdot\hat{x} + \hat{y}\cdot\hat{x} + \hat{x}\cdot\hat{y} + \hat{y}\cdot\hat{y}\right) = \frac{1-i^2}{4}(2) = 1$$

اگر ضرب یک گروه‌ی اول بدون مزدوج مختلط کردن

بیرون می‌آمد (که اشتباه می‌بود):

$$\frac{1+i}{2}\,\frac{1+i}{2} = \frac{1+2i+i^2}{4} = \frac{i}{2} \longrightarrow \tilde{E}_2 \cdot \tilde{E}_2 \longrightarrow i$$

یک جا اشتباه شده.

$$\frac{1-i}{2}\,\frac{1+i}{2} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

چون حاصل ضرب داخلی هر بردار در خودش حقیقی است

(و اگر آن بردار صفر نباشد مثبت است)

با حاصل ضرب درونی طول تعریف میشود:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$

فاصله‌ی دو بردار (نقطه) از هم: طول تفاضل آن دو بردار:

$$\|u - v\| = \sqrt{(u-v) \cdot (u-v)}$$

یک نقطه در فضای سه بعدی حقیقی ⟵ یک بردار سه مولفه‌ای

یک صفحه که از مبدأ میگذرد:

سؤال: کدام نقطه در آن صفحه، کمترین فاصله از نقطه‌ی اول را دارد؟

بردار u $\longrightarrow$ نقطه‌ی اول

صفحه‌ی $\mathbb{P}$ بردار v در $\mathbb{P}$

v چه باشد تا $\|u-v\|$ کمینه شود؟ از مبدأ مسئله را.

$$\|u-v\|^2 = (u-v)\cdot(u-v) = f(v)$$

$v\in\mathbb{P}$ چه باشد تا $f(v)$ کمینه شود؟

v قرار است $f(v)$ را کمینه کند

$f(v+w)$ باید بیشتر از $f(v)$ باشد.

$(v+w) \in \mathbb{P}$

$\mathbb{P}$ یک مخروط است که زیرمیدانی میسازد. پس یک فضای برداری است. ($\mathbb{P}$ 3 بعدی است)

$v \in \mathbb{P} \quad (v+w) \in \mathbb{P}$

$w \in \mathbb{P}$

$\Rightarrow [(v+w) - v] \in \mathbb{P}$

α یک عدد

$(\alpha w) \in \mathbb{P}$

$$f(v+w) \longrightarrow f(v+\alpha w) = h(\alpha)$$

$$h(0) = f(v)$$

$h(\alpha)$ باید در $\alpha = 0$ کمینه گردد.

شرط لازم برای این:

$$h'(0) = 0$$

$$f(v+\alpha w) = [u-(v+\alpha w)] \cdot [u-(v+\alpha w)]$$

$$= (u-v-\alpha w) \cdot (u-v-\alpha w)$$

فضای حقیقی

α : عدد حقیقی

$$(u-v-\alpha w)\cdot(u-v-\alpha w) = (u-v)\cdot(u-v)$$

$$-\alpha\, w\cdot(u-v) - \alpha\,(u-v)\cdot w + \alpha^2\, w\cdot w$$

چون فضا حقیقی است : $\quad (u-v)\cdot w = w\cdot(u-v)$

$$h(\alpha) = (u-v)\cdot(u-v) - 2\left[w\cdot(u-v)\right]\alpha + (w\cdot w)\,\alpha^2$$

$$h'(\alpha) = -2\, w\cdot(u-v) + 2(w\cdot w)\,\alpha$$

گفض : $\quad 0 = h'(0) = -2\, w\cdot(u-v)$

$$w\cdot(u-v) = 0$$

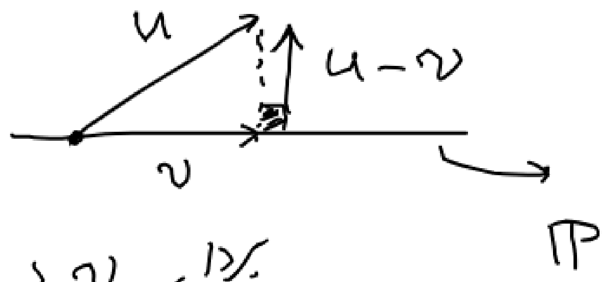
$w \in \mathbb{P}$ دی دلخواه

$\forall w \in \mathbb{P}$

$w \cdot (u-v) = 0$ یعنی $(u-v)$ باید بر $\mathbb{P}$ عمود باشد.

$u = u - v + v$ $\qquad v \in \mathbb{P}$

$v \cdot (u-v) = 0$



بردار v در $\mathbb{P}$، که کمترین فاصله از u را دارد،

ازلت، تصویر قائم u بر $\mathbb{P}$ است.

$v =: u_{\parallel}$ $\qquad$ $u - v =: u_{\perp}$

$u = u_{\parallel} + u_{\perp}$ $\qquad$ $u_{\parallel} \in \mathbb{P}$ $\qquad$ $u_{\perp} \perp \mathbb{P}$

یعنی $u_{\perp}$ بر هر $w \in \mathbb{P}$ عمود است.

$u_{\parallel}$: تصویر قائم u بر $\mathbb{P}$

تا اینجا شرط لازم برای کمینه شدن فاصله بررسی شد. برای نشان دادن اینکه این شرط کافی هم هست،

$$\left[f(s) > f(u_{\parallel})\right] \forall u_{\parallel} \neq s \in P$$ باید نشان بدهیم

$$f(s) = (u-s)\cdot(u-s)$$

$$= (u-u_{\parallel}+u_{\parallel}-s)\cdot(u-u_{\parallel}+u_{\parallel}-s)$$

$$= (u-u_{\parallel})\cdot(u-u_{\parallel}) + \overbrace{(u_{\parallel}-s)\cdot(u-u_{\parallel})}$$

$$+ \overbrace{(u-u_{\parallel})\cdot(u_{\parallel}-s)} + (u_{\parallel}-s)\cdot(u_{\parallel}-s)$$

برابرند چون فقط حقیقی است

$$= f(u_{\parallel}) + 2(u_{\parallel}-s)\cdot(u-u_{\parallel}) + (u_{\parallel}-s)\cdot(u_{\parallel}-s)$$

$$u_{\parallel} \in P \quad s \in P \Rightarrow (u_{\parallel}-s) \in P \qquad u-u_{\parallel} = u_{\perp}$$

$$u_{\perp} \perp \mathbb{P} \qquad (u_{\parallel} - s) \in \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow u_{\perp} \perp (u_{\parallel} - s) \Rightarrow (u_{\parallel} - s) \cdot u_{\perp} = 0$$

$$u_{\perp} = u - u_{\parallel} \qquad (u_{\parallel} - s) \cdot (u - u_{\parallel}) = 0$$

$$f(s) = f(u_{\parallel}) + (u_{\parallel} - s) \cdot (u_{\parallel} - s)$$

$$u_{\parallel} \neq s \qquad (u_{\parallel} - s) \neq 0 \Rightarrow (u_{\parallel} - s) \cdot (u_{\parallel} - s) > 0$$

$$\Rightarrow f(s) > f(u_{\parallel})$$

$u_{\parallel}$ ، f را کمینه می‌کند.

یک مثلث قائم الزاویه: یک ضلع (وتر) $(u-s)$

یک ضلع $\langle u-u_{\parallel}\rangle$ ، یک ضلع $\langle s-u_{\parallel}\rangle$

$$\|u-s\|^2 = \|u-u_{\parallel}\|^2 + \|s-u_{\parallel}\|^2$$ قضیه فیثاغورث

$$(u-s)\cdot(u-s) = (u-u_{\parallel})\cdot(u-u_{\parallel}) + (u_{\parallel}-s)\cdot(u_{\parallel}-s)$$

$$f(s) = f(u_{\parallel}) + (u_{\parallel}-s)\cdot(u_{\parallel}-s)$$

صورت مسئله: $\vec{\mathbb{U}}$ فضای خطی ی دلخواه، $u \in \mathbb{U}$

$\mathbb{V}$ یک زیرفضای $\mathbb{U}$ ($\mathbb{V}$ زیرمجموعه ی $\mathbb{U}$ است، و فضای خطی است).

کدام $v \in \mathbb{V}$، فاصله ی u از v را کمینه میکند؟

$$\|u-v\|^2 = (u-v)\cdot(u-v)$$

فاصله ی u از v $\quad \|u-v\|$

(فاصله ی v از u)

v وارا است $(u-v).(u-v)$ را کمینه کند.

پس اگر v به $(v+\alpha w)$ تبدیل شود، فاصله باید زیاد شود

که $w \in V$ و α عدد است، برای $w \neq 0$،

و α های مختلط ناصفر، از جمله α های حقیقی ناصفر

α حقیقی

$$h(\alpha) = (u-v-\alpha w).(u-v-\alpha w)$$

پس $h(\alpha) > h(0)$

$$h(\alpha) = (u-v)\cdot(u-v) - \bar{\alpha}\, w\cdot(u-v)$$
$$- \alpha\,(u-v)\cdot w + \bar{\alpha}\,\alpha\, w\cdot w$$

حقیقی α : $\bar{\alpha} = \alpha$,

$$(u-v)\cdot w = \overline{[w\cdot(u-v)]} \qquad w\cdot(u-v) =: b$$

با تعریف و نتایج بالا

$$h(\alpha) = (u-v)\cdot(u-v) - (b+\bar{b})\,\alpha + (w\cdot w)\,\alpha^2$$

$h'(0)=0$ ⟵ برای اینکه h در $\alpha=0$ مینیمم شود، لازم است

$$h'(\alpha) = -(b+\bar{b}) + 2(w\cdot w)\,\alpha \qquad h'(0) = -(b+\bar{b})$$

شرط لازم:

$$b+\bar{b}=0$$

$$b = w\cdot(u-v)$$

$$\forall w \in W : \quad w\cdot(u-v) + \overline{[w\cdot(u-v)]} = 0$$

$$z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \qquad \mathrm{Re}[w\cdot(u-v)]=0$$

فضا مختلط است، $\quad w\in W \Longrightarrow (i\,w)\in W$

پس i جزء هیئت است، پس (iw) عضو W است.

$$(iw)\cdot(u-v) + \overline{[(iw)\cdot(u-v)]} = 0$$

$$(iw)\cdot(u-v) = \overline{i}\,[w\cdot(u-v)] = -i\,[w\cdot(u-v)]$$

$$\overline{[(iw)\cdot(u-v)]} = \overline{\{(-i)\,[w\cdot(u-v)]\}}$$

$$= \overline{(-i)}\;\overline{[w\cdot(u-v)]}$$

$$= i\,\overline{[w\cdot(u-v)]}$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z}_1\,\overline{z}_2$$

$$z_1 = |z_1|\,e^{i\angle z_1} \qquad z_2 = |z_2|\,e^{i\angle z_2}$$

$$\overline{z_1} = |z_1|\,e^{-i\angle z_1} \qquad \overline{z_2} = |z_2|\,e^{-i\angle z_2}$$

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,e^{i(\angle z_1 + \angle z_2)}$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = |z_1|\,|z_2|\,e^{-i(\angle z_1 + \angle z_2)} = \overline{z}_1\,\overline{z}_2$$

$$0 = [w\cdot(u-v)] + \overline{[w\cdot(u-v)]} \qquad (I) \qquad w \in V$$

$$0 = (iw)\cdot(u-v) + \overline{[(iw)\cdot(u-v)]}$$

$$= (-i)[w\cdot(u-v)] + i\,\overline{[w\cdot(u-v)]}$$

دو بار مزدوج مختلط شده: یک بار وقتی از کنار w بیرون آمد،

یک بار وقتی از کروشه بیرون آمد.

$$0 = i\left\{-[w\cdot(u-v)] + \overline{[w\cdot(u-v)]}\right\} \qquad (\times i)$$

$$0 = [w\cdot(u-v)] - \overline{[w\cdot(u-v)]} \qquad (II)$$

$(I) + (II)$

$0 = 2\left[w \cdot (u-v)\right]$

پس $\quad w \cdot (u-v) = 0$

مثل حالت فضای حقیقی:

شرط لازم برای کمینه شدن:

$\forall w \in \mathbb{V}$

$w \cdot (u-v) = 0$

یعنی: $\quad (u-v) \perp \mathbb{V}$

شرط کافی: باید نشان داد ، $\forall s \in W ,\ s \neq v$

$$(u-s)\cdot(u-s) > (u-v)\cdot(u-v)$$

$$(u-s)\cdot(u-s) = (u-v+v-s)\cdot(u-v+v-s)$$

$$= (u-v)\cdot(u-v) + \underbrace{\boxed{(v-s)\cdot(u-v) + (u-v)\cdot(v-s)}}_{=0} + (v-s)\cdot(v-s)$$

$v \in W \quad s \in W$

$\Rightarrow (v-s) \in W$

پس $\overbrace{(v-s)}^{\in W}\cdot(u-v) = 0$

$$(u-v)\cdot(v-s) = \overline{[(v-s)\cdot(u-v)]} = 0$$

$$(u-s)\cdot(u-s) = (u-v)\cdot(u-v) + (v-s)\cdot(v-s)$$

$$v \neq s \Rightarrow v-s \neq 0 \Rightarrow (v-s)\cdot(v-s) > 0$$

$$\Rightarrow (u-s)\cdot(u-s) > (u-v)\cdot(u-v)$$

پس شرط کافی برآورده است.

$v =: u_{\parallel}$ $\quad$ $u - v = u_{\perp}$

$u = u_{\parallel} + u_{\perp}$ $\quad$ $u_{\parallel}$ در W

$u_{\parallel}$ تصویر قائم u بر W: $u_{\perp}$ بر W عمود است.

نقطه ← بردار ← فاصله

هیئت :

دلخواه

فضای تابع‌های از D به F

یک فضای برداری با هیئت F است :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\operatorname{dom}(f+g) = D = \operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g) \quad \operatorname{dom}(f)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha[f(x)] \quad \alpha \in F \quad \operatorname{dom}(\alpha f) = D$$

ضرب درونی برای فضای برداری:

K دلخواه است، اما اینجا آن را $\mathbb{R}$ (مجموعه‌ی عددهای حقیقی)

یا $I = [a, b]$ بگیریم

یک فاصله از عددهای حقیقی

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$$

$\mathbb{F}$ ممکن است هر هیئتی باشد اینجا آن را $\mathbb{C}$ (عددهای مختلط) می‌گیریم.

$\mathbb{V} =$ مجموعه‌ی تابع‌های از $[a, b]$ به $\mathbb{C}$

$$f \cdot g = \int_a^b dx \, \overline{f(x)} \, g(x)$$

نسبت پادخطی

نه پادخطی

نسبت به g خطی

$$f \cdot (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \int_a^b dx \, \overline{f(x)} \left[\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)\right]$$

$$= \alpha_1 \int_a^b dx \, \overline{f(x)} \, g_1(x) + \alpha_2 \int_a^b dx \, \overline{f(x)} \, g_2(x)$$

$$f\cdot(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2)=\alpha_1(f\cdot g_1)+\alpha_2(f\cdot g_2) \quad \checkmark$$

$$g\cdot f=\int_a^b dx\;\overline{g(x)}\,f(x)=\int_a^b dx\;\overline{\left[g(x)\,\overline{f(x)}\right]}$$

$$\overline{\overline{z}}=z \qquad z=x+iy \quad \overline{z}=x-iy \quad \overline{\overline{z}}=x+iy$$

$$g\cdot f=\overline{\left[\int_a^b dx\;g(x)\,\overline{f(x)}\right]}$$

$$=\overline{\left[\int_a^b dx\;\overline{f(x)}\,g(x)\right)}=\overline{(f\cdot g)}$$

$$g \cdot f = \overline{(f \cdot g)}$$ ✓

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \cdot g = \overline{g \cdot (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)}$$

$$= \overline{[\alpha_1 (g \cdot f_1) + \alpha_2 (g \cdot f_2)]} = \overline{\alpha}_1 \overline{(g \cdot f_1)} + \overline{\alpha}_2 \overline{(g \cdot f_2)}$$

$$= \overline{\alpha}_1 (f_1 \cdot g) + \overline{\alpha}_2 (f_2 \cdot g)$$

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \cdot g = \overline{\alpha}_1 (f_1 \cdot g) + \overline{\alpha}_2 (f_2 \cdot g)$$ ✓

$\forall g: \quad f \cdot g = 0$

ولی : $\quad f \cdot f = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f = 0$

$$f \cdot f = \int_a^b dx \, \bar{f}(x) \, f(x) = \int_a^b dx \, |f(x)|^2$$

$|f(x)|^2 \geq 0$ انتگرال‌ده نامنفی است

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = 0 \, , \, (\forall_j : A_j \geq 0) \Longrightarrow \forall_j : A_j = 0$$

نتیجه‌ی مشابه برای انتگرال؟

$$\forall x: A(x) \geq 0 \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \qquad \int_a^b dx\, A(x) = 0$$

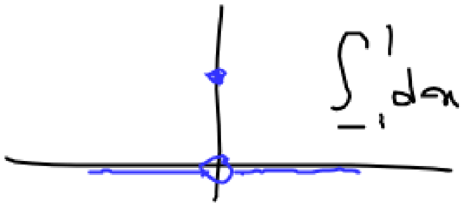
$$\forall x: \ A(x) = 0$$

این قضیه درست نیست:

مثال نقض:

$$a = -1 \ , \ b = 1$$

$$A(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \neq 0 \\ 1 \ , & x = 0 \end{cases}$$



$$\int_{-1}^{1} dx\, A(x) = 0$$

مساحت زیر نمودار تابع A (و بالای محور x) از $x=-1$ تا $x=1$ صفر است.

مستطیل متناظر با $x=0$، ارتفاعش (طول) صفر است و طول قاعده‌اش صفر است، پس مساحتش صفر است.

اگر مقدار تابع در چند نقطه عوض کنیم، مقدار انتگرال عوض نمی‌شود.

باید مقدار تابع در یک ناحیه با پهنای ناصفر عوض شود تا انتگرال عوض شود.

اگر هیچ شرطی بر A نباشد، از اینکه

$$\int_a^b dx\, A(x) = 0$$

و $A \geq 0$

نتیجه نمی‌شود $A = 0$.

A ممکن است همه جا صفر نباشد،

یا اگر A مثبت باشد، آنوقت

$$\int_a^b dx\, A(x) = 0 \quad , \quad [\forall x ,\, A(x) \geq 0]$$

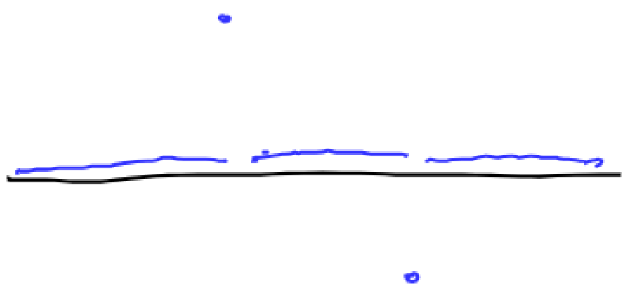
$$\Longrightarrow \quad \forall x : \quad A(x) = 0$$

$$f \cdot g = \int_a^b dx\, \overline{f(x)}\, g(x)$$

برای تابع‌ها، مثبت ضرب درونی است.

کمیت دیگری که $\int_a^b dx\, \overline{f(x)}\, g(x)$ ضرب درونی گویند:

تمایز بین دو تابعی که در ناحیه‌ای با پهنای صفر با هم فرق دارند از بین میرود:



تابع پله و تابع ثابت همه جا مقدار برابر دارند مگر در دو نقطه: این دو تابع برابر (هم‌ارز) تعریف شوند.

در این صورت،

$$\int_a^b dx\, |f(x)|^2 = 0 \Longrightarrow$$

f با تابع صفر هم‌ارز است.

با این تعریف،

$$f \cdot g = \int_a^b dx\, \overline{f(x)}\, g(x)$$

ضرب درونی می‌شود.